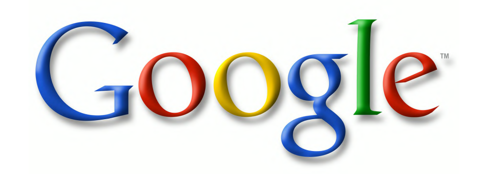
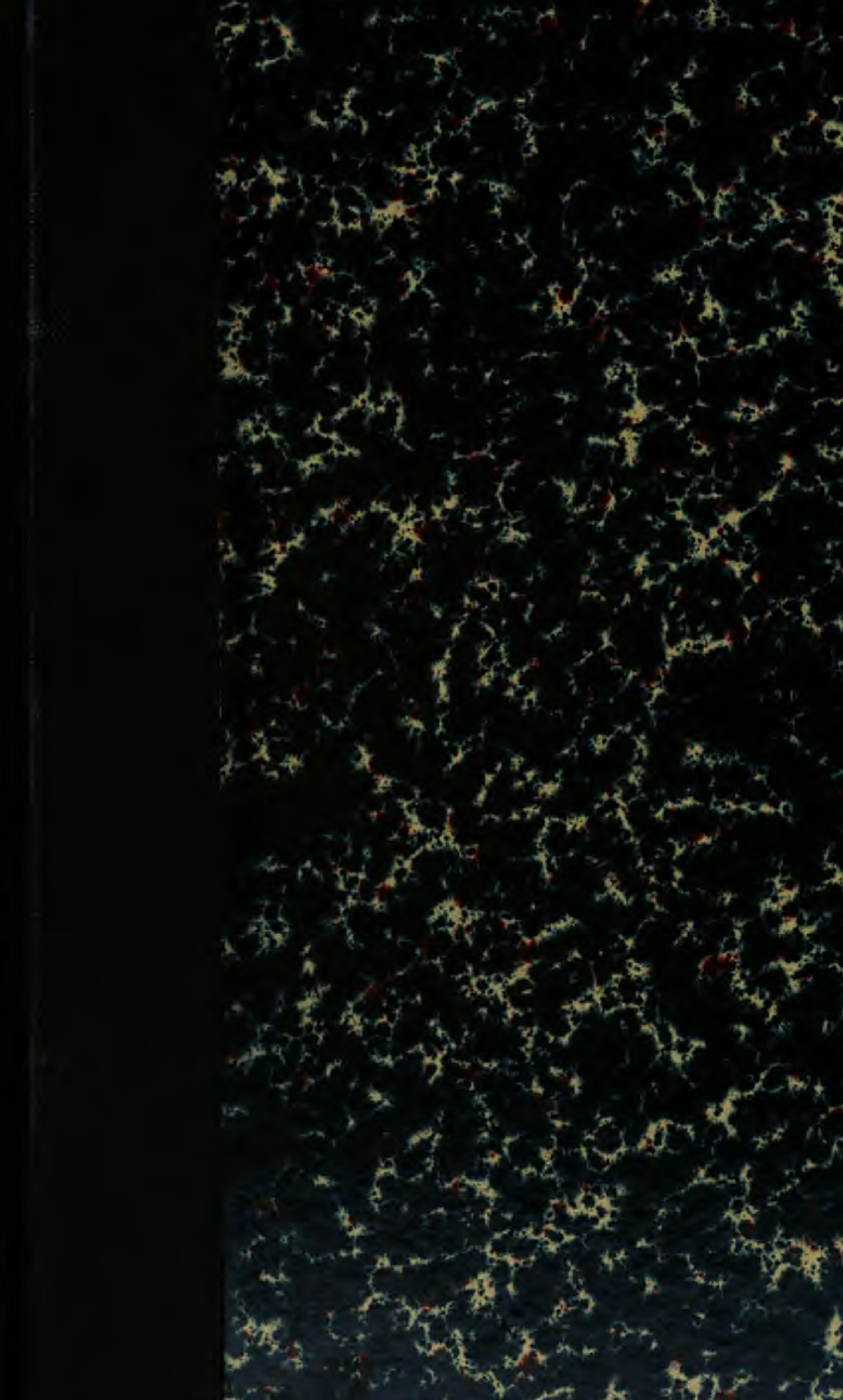
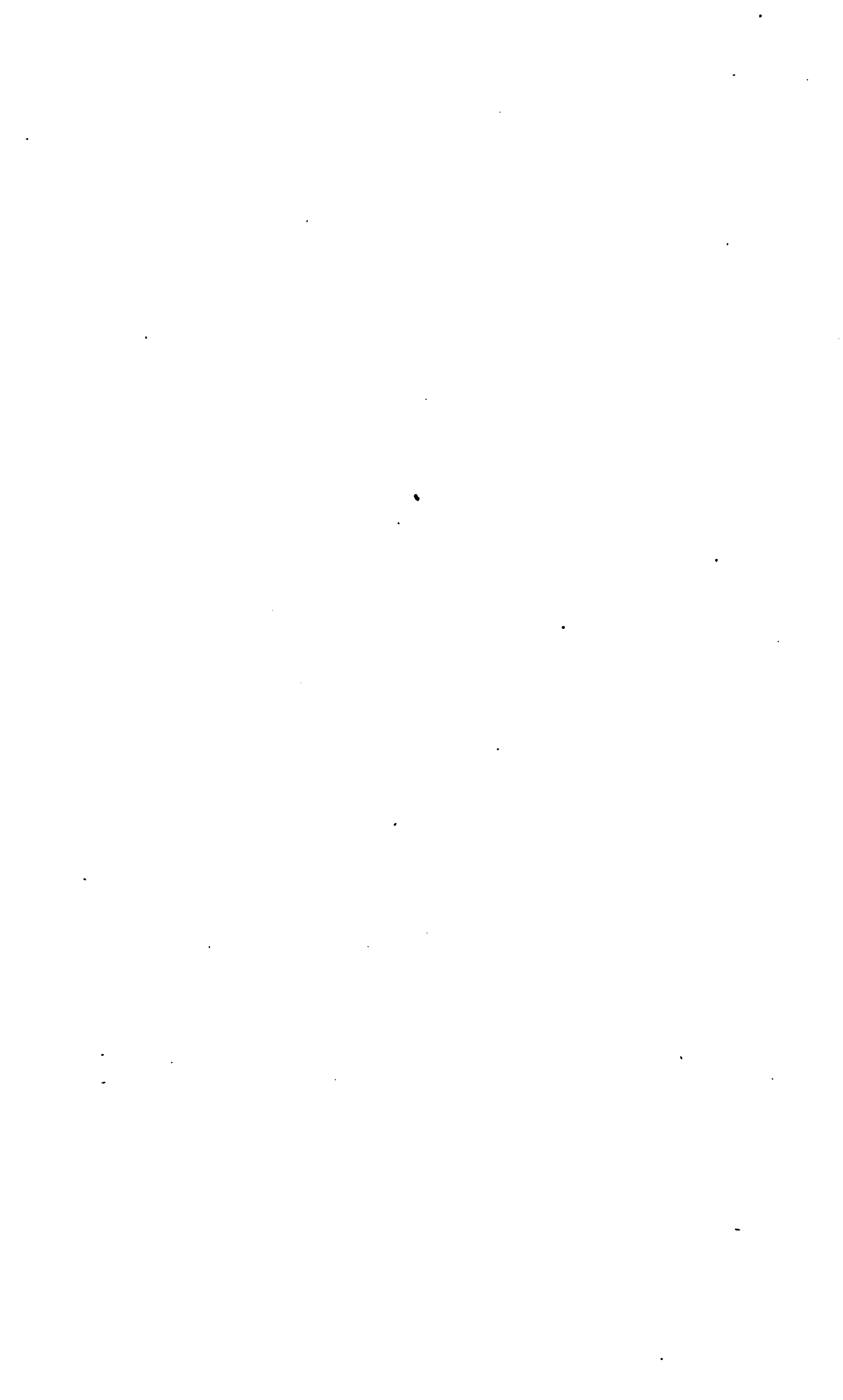
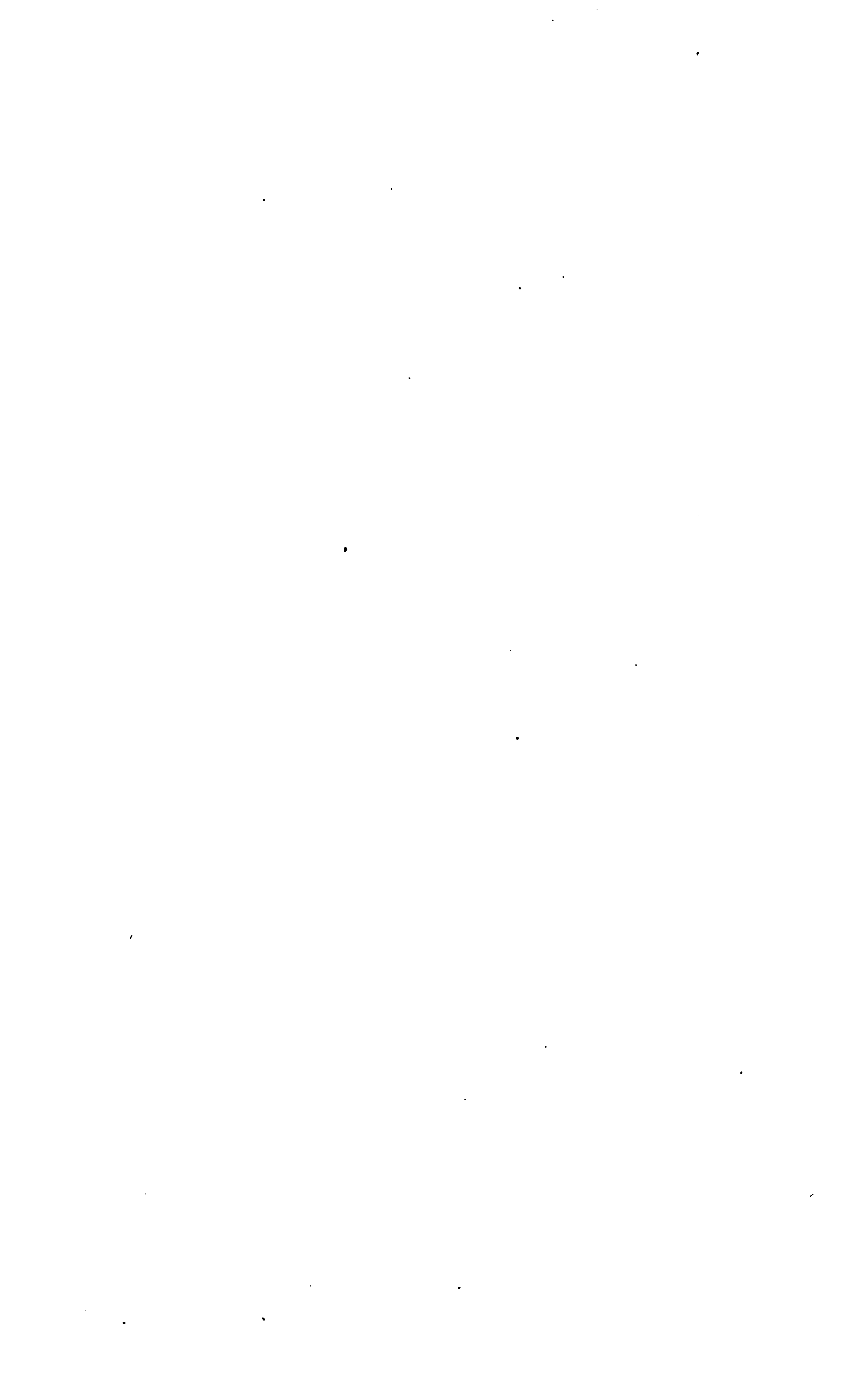


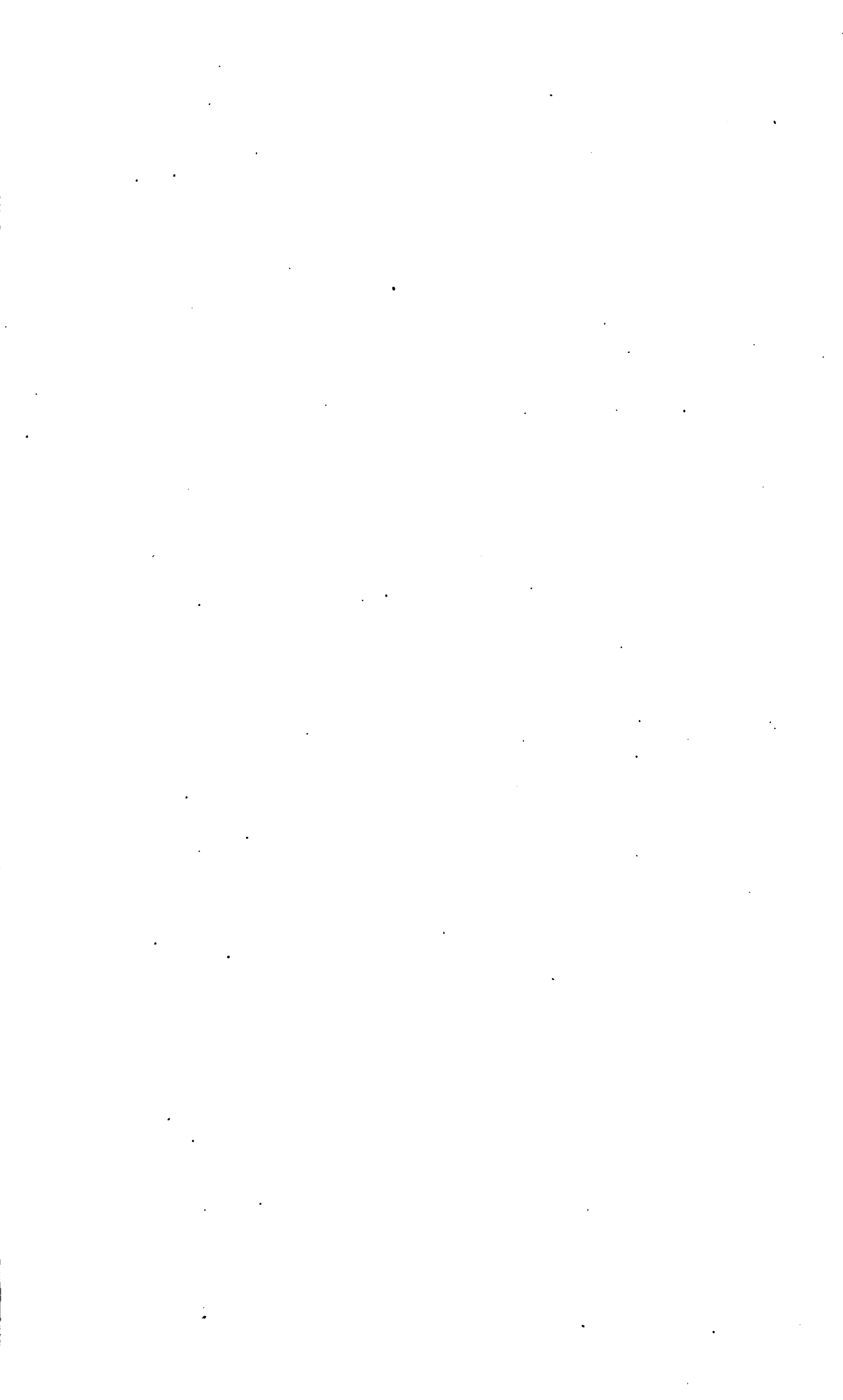


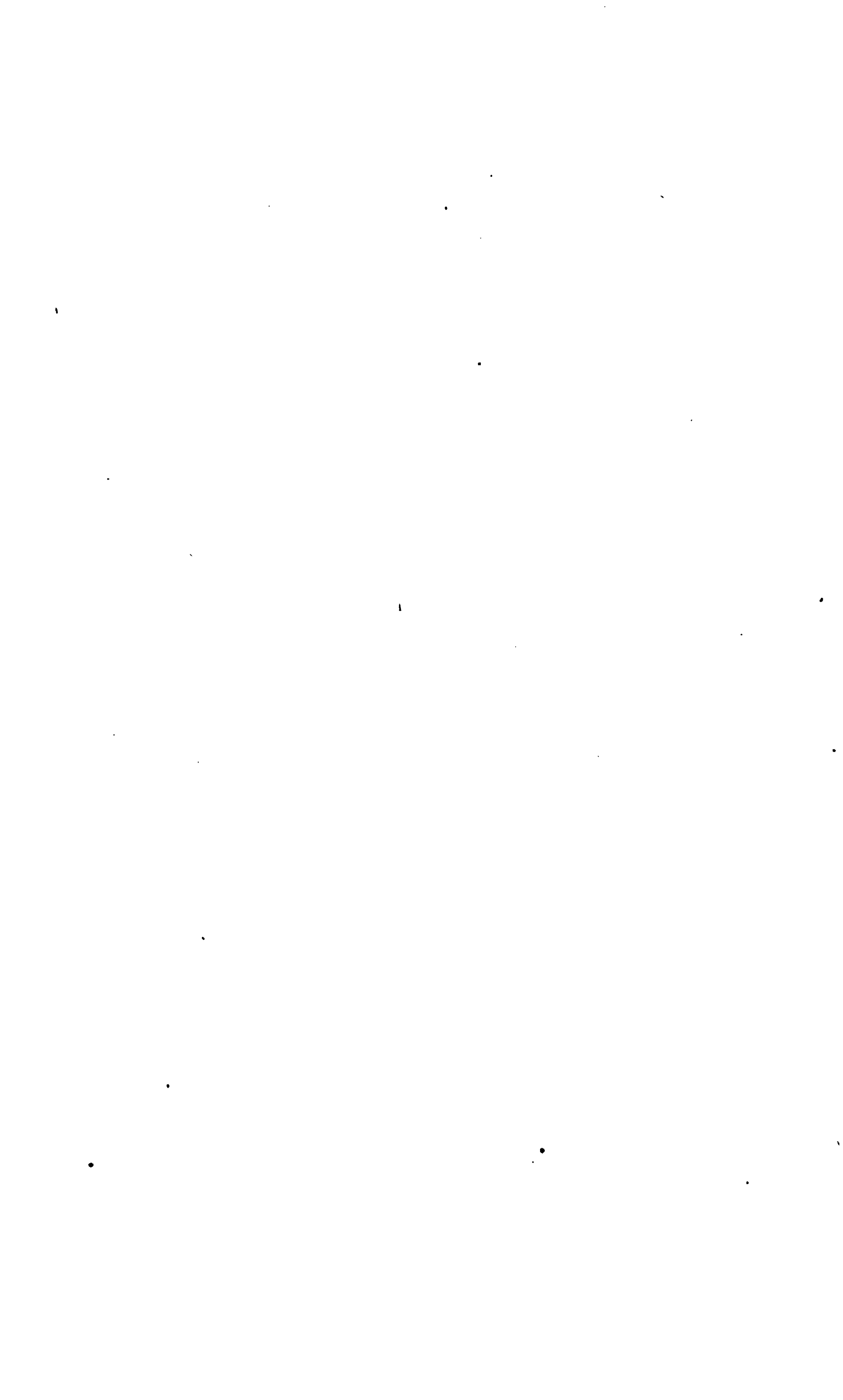



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE











SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTSECHSTER BAND.

WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CVI. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1897. — HEFT I BIS X.

(MIT 33 TAFELN UND 119 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. I. UND II. HEFT.

JAHRGANG 1897. — JÄNNER UND FEBRUAR.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 6 TAFELN UND 6 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 85 kr. = 3 Mk. 70 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



I. SITZUNG VOM 7. JÄNNER 1897.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident der kaiserlichen Akademie, Prof. E. Suess, gibt Nachricht von dem am 26. December v. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Prof. Dr. Emile Henri du Bois-Reymond in Berlin.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler in Graz übersendet eine Untersuchung von Wilhelm Hillmayr: »Über die Gefrierpunkte verdünnter Schwefelsäure«.

Ferner übersendet Herr Prof. Pfaundler eine Abhandlung des k. und k. Obersten Herrn Wilhelm Schlemüller in Lemberg, unter dem Titel: »Eine empirische Formel für den Zusammenhang zwischen dem Drucke und der Temperatur gesättigter Dämpfe«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Oscar Nagel: »Über Orthooxychinolinessigsäure (Chinolinglycolsäure)«.

Herr Julius A. Reich in Krasna (Mähren) übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift: »Beschreibung einer neuen chemischen Reaction und deren Anwendung für die Technik«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von den Doctoren R. Heller, W. Mager und H. v. Schrötter vor, die den Titel führt: »Beobachtungen über die physiologischen Veränderungen der Stimme und des Gehöres bei Änderungen des Luftdruckes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über einen mechanischen Satz Poincaré's«.
2. »Über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Boltzmann eine Abhandlung von Herrn C. H. Wind, Lector an der Universität Groningen· »Über den dem Liouville'schen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun bespricht die im Frühling 1896 von Prinzen Heinrich Liechtenstein ausgerüstete und durchgeführte Expedition nach Britisch- und Deutsch-Ostafrika und übergibt ein Verzeichniss der grösstentheils von Dr. Alfred Pospischil, zum Theile auch von Prinzen Heinrich Liechtenstein gesammelten und dem botanischen Museum der Wiener Universität einverleibten Pflanzen.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. C. Pomeranz: »Synthese des Isochinolins und seiner Derivate« (II. Mittheilung).

Über die Gefrierpunkte verdünnter Schwefelsäure

von

Wilhelm Hillmayr in Graz.

Über die Gefrier-, beziehungsweise Erstarrungstemperaturen der Schwefelsäure-Wasser-Mischungen liegt eine frühere ausführliche Arbeit von L. Pfaundler und E. Schnegg[1] und eine neuere von Raoul Pictet[2] vor. Die letztere zeigt zwar in dem allgemeinen Verlaufe Übereinstimmung mit der früheren, weicht aber in einzelnen Werthen wesentlich von derselben ab. Was aber am meisten Befremden erregt, ist, dass Pictet für Schwefelsäure zwischen 0 und 6·77 % Gehalt an Monohydrat Gefrierpunkte findet, welche über Null, und zwar bis zum Maximalwerthe von 4·5° für 1·78 % reichen. Ein solches Verhalten widerspricht allen bisherigen Erfahrungen über diesen Gegenstand und würde demnach von vornherein als ein Irrthum anzusehen sein, wenn nicht Pictet ausdrücklich angeben würde, dass seine Werthe das Ergebniss einer wiederholten Bestimmung seien. Es war daher eine neuerliche sorgfältige Wiederholung dieses Theiles der Arbeit geboten. Dieselbe hat, wie gleich hier angeführt sein möge, die Irrthümlichkeit der Pictet'schen Messresultate ergeben, dagegen die Zahlen von Pfaundler und Schnegg aufs Genaueste bestätigt.

Es wurden sechs Mischungen angefertigt, und zwar in der Weise, dass zunächst eine concentrirte Mischung von destillirtem Wasser und chemisch reiner Schwefelsäure hergestellt

[1] Diese Sitzungsberichte, LXXI, 1875.

[2] Comptes-rendus, t. 119, p. 642 ff.

diese genau analysirt und dann mit berechneten Mengen von destillirtem Wasser vermischt wurde, so dass Säure von 2, 3, 4, 5, 6 und 8% resultirte. Die Gefrierpunkte dieser Mischungen wurden dann nach bekannter Methode je mehrmals bestimmt und nach Anbringung der nöthigen Correctionen des Thermometers die folgenden, in der zweiten Columne angeführten Werthe erhalten.

Procentgehalt an Monohydrat	Gefrierpunkt beobachtet	Gefrierpunkt aus der Interpolationscurve von Pfaundler und Schnegg berechnet	Differenz
1·95	−0·78	−0·74	+0·04
3·00	−1·16	−1·16	0·00
4·01	−1·65	−1·60	+0·05
5·13	−2·05	−2·12	−0·07
6·02	−2·55	−2·58	−0·03
8·02	−3·61	−3·69	−0·08

Um diese Zahlen mit den von Pfaundler und Schnegg seinerzeit mitgetheilten zu vergleichen, wurden nach der von diesen Autoren mitgetheilten Interpolationscurve,[1] welche aus den für die Procente 0 bis 12 erhaltenen Zahlen abgeleitet worden war, die den obigen Mischungen entsprechenden Gefrierpunkte berechnet und in der dritten Columne beigefügt. Die Interpolationscurve lautet:

$$t = -\frac{12\cdot 2538\, p}{34\cdot 6237 - p}.$$

Die in der vierten Columne angeführten Differenzen zeigen, dass die Abweichungen nur Hundertelgrade betragen und bald positiv, bald negativ sind. Von einem Ansteigen des Gefrierpunktes über 0° war dagegen nichts zu beobachten.

Versucht man nach der bekannten Regel von Raoult aus der Gefrierpunktserniedrigung das Moleculargewicht zu berechnen, so erhält man aus der Gleichung $M = E\frac{m}{t}$, worin $E = 19$ (die für Wasser giltige moleculare Gefrierpunkts-

[1] L. c. S. 25, I*a*).

erniedrigung), m die auf 100 Theile Wasser zugesetzte Menge SO_4H_2 bedeuten, aus den obigen sechs Versuchen für M die Werthe 48·4, 50·6, 48·1, 50·1, 47·1, 45·9. Diese Zahlen kommen nahe dem halben Moleculargewichte $\frac{98}{2}$. Setzt man nun $M = 49$ und berechnet rückwärts die Gefrierpunkte, so erhält man folgende Daten:

Versuchsnummer	Procentgehalt p an H_2SO_4 in 100 Wasser	Menge m an SO_4H_2 auf 100 Wasser	Beobachtete Erniedrigung t	Berechnete Erniedrigung t'	Differenz
1	1·95	1·99	0·78	0·770	+0·01
2	3·00	3·09	1·16	1·198	−0·038
3	4·01	4·18	1·65	1·611	+0·039
4	5·13	5·41	2·05	2·097	−0·047
5	6·02	6·41	2·55	2·483	+0·067
6	8·02	8·72	3·61	3·383	+0·227

Wie man sieht, stimmen dieselben, mit Ausnahme des letzten Versuches, so ziemlich mit den beobachteten überein. Trotzdem ist wohl kaum anzunehmen, dass in der verdünnten Säure das Molekül SO_4H_2 anwesend sei, ganz abgesehen von der Schwierigkeit, das halbe Moleculargewicht zu erklären.

Schon Pfaundler und Schnegg haben in der citirten Abhandlung versucht, jenes Hydrat $SO_4H_2 + xH_2O$ zu berechnen, dessen Annahme die Gefrierpunktscurve geradlinig gestalten würde. Sie fanden, dass bis zur Concentration von $12\frac{1}{4}\%$ an Monohydrat $x = 10·309$ von dort bis 34% $x = 5·94$ zu setzen wäre. Versucht man nun die Werthe m für die Annahme umzurechnen, dass das Hydrat $SO_4H_2 + 10H_2O$ gelöst sei, so erhält man wieder nur mit dem halben Moleculargewicht $\frac{278}{2} = 139$ eine angenäherte Übereinstimmung des berechneten Gefrierpunktes mit dem beobachteten. Die nachfolgende Tabelle zeigt aber, dass diese Übereinstimmung nur bei der verdünntesten Lösung befriedigend ist, bei den anderen mehr und mehr mangelt.

Versuchsnummer	Menge *m* des Hydrats $SO_4H_2 10 H_2O$ auf 100 Wasser	Gefrierpunktserniedrigung		Differenz
		beobachtet	berechnet	
1	5·860	0·78	0·801	—0·021
2	9·293	1·16	1·270	—0·090
3	12·844	1·65	1·756	—0·106
4	17·040	2·05	2·329	—0·279
5	20·610	2·55	2·817	—0·267
6	29·455	3·61	4·026	—0·416

Unter diesen Umständen muss der Versuch, aus der Gefriercurve der verdünnten Schwefelsäure Schlüsse auf vorhandene Hydrate zu ziehen, aufgegeben werden.

Wir fassen die Ergebnisse unserer Untersuchung wie folgt zusammen:

1. Die Versuchsergebnisse von R. Pictet, wonach Zusatz von Schwefelsäure zu Wasser den Gefrierpunkt des letzteren bis 4° über Null erhöht, sind irrig; es findet keine solche Erhöhung statt.

2. Die früher von Pfaundler und Schnegg publicirte Gefrierpunktscurve wird dagegen als richtig bestätigt.

3. Das aus diesen Gefrierpunkten unter der Annahme, dass der gelöste Körper Monohydrat sei, nach Raoult's Regel abgeleitete Moleculargewicht beträgt nahe die Hälfte des theoretischen.

4. Die Annahme, dass jenes Hydrat gelöst sei, welches die Gefrierpunktscurve zu einer Geraden gestaltet, stimmt mit der Raoult'schen Regel nicht überein.

Eine empirische Formel für den Zusammenhang zwischen dem Drucke und der Temperatur gesättigter Dämpfe

von

Oberst **Wilhelm Schlemüller.**

Auf Grund theoretischer Erwägungen glaubte ich für den Zusammenhang zwischen dem Drucke und der Temperatur gesättigter Dämpfe folgende Gleichung aufstellen zu sollen:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{6}} = 1 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + \ldots + \frac{a_s\tau^s}{1 - n\tau}. \qquad (1)$$

Es bedeuten:

p den in Frage stehenden Druck;

p_0 den Druck des gesättigten Dampfes beim Nullpunkte,

τ ist der Quotient $\frac{t}{T_0}$, d. h. der Temperatur, bezogen auf den Nullpunkt, dividirt durch die absolute Temperatur des letzteren. Es ist daher auch:

$\tau = \alpha t$, d. h. das Product des Ausdehnungscoëfficienten α mit der auf den Nullpunkt bezogenen Temperatur.

$a_1, a_2 \ldots a_s$ sind die aus den Erfahrungsresultaten für jede Dampfart besonders zu bestimmenden Coëfficienten.

$\frac{1}{1 - n\tau}$ musste angewendet werden, da Vorversuche ergaben, dass man es im vorliegenden Falle mit einer jener Reihen zu thun habe, welche immer langsamer convergiren,

bei welchen daher der Reihenrest nicht vernachlässigt werden darf. Da bei solchen Reihen bei genügender Anzahl der Glieder praktisch

$$\frac{a_{s+1}\tau^{s+1}}{a_s\tau^s} = n\tau \tag{2}$$

worin n als constant angesehen werden kann, so gibt der Reihenrest eine geometrische Reihe, deren Summe durch

$$R = \frac{a_s\tau^s}{1 - n\tau} \tag{3}$$

ausgedrückt wird.

Es wird auch n aus den Erfahrungsresultaten zu bestimmen sein.

Um die Anwendbarkeit der Gleichung (1) zu prüfen, benützte ich folgende Werthe für Wasserdampf von Regnault:

t	p
$t = 0°$	$p = 4·60$
$= 33°$	$= 37·14$
$= 66°$	$= 195·50$
$= 100°$	$= 760·00$
$= 133°$	$= 2219·69$
$= 166°$	$= 5406·69$
$= 200°$	$= 11688·96$
$= 230°$	$= 20926·46$

$\alpha = 0·003668$

Hieraus ergaben sich folgende Werthe für die Constanten der Gleichung (1) für Wasserdampf:

$$a_1 = +3·2279986$$
$$a_2 = +2·4234567$$
$$a_3 = -5·6223313$$
$$a_4 = +10·680882$$
$$a_5 = -22·653650$$
$$a_6 = +49·647545$$
$$n = -2·1991101$$

Die geradezu frappante Übereinstimmung der ohne weitere Ausgleichung berechneten Werthe mit den beobachteten zeigt nachstehende Tabelle:

$t°$ C.	p nach Regnault in Millim.	p nach Gleichung (1) in Millim.	Δ in Millim.	$t°$ C.	p nach Regnault in Millim.	p nach Gleichung (1) in Millim.	Δ in Millim.
0	4·60	4·60	±0·00	120	1491·28	1491·29	—0·01
10	9·16	9·15	+0·01	130	2030·28	2030·28	±0·00
20	17·38	17·37	+0·01	140	2717·63	2717·63	+0·01
30	31·55	31·54	+0·01	150	3581·23	3581·23	±0·00
40	54·90	54·92	—0·02	160	4651·62	4651·62	±0·00
50	91·98	92·01	+0·03	170	5961·66	5961·66	±0·00
60	148·79	148·81	—0·02	180	7546·39	7546·40	—0·01
70	233·09	233·09	±0·00	190	9442·70	9442·69	+0·01
80	354·64	354·62	+0·02	200	11688·96	11688·96	±0·00
90	525·45	525·44	+0·01	210	14324·80	14324·75	+0·05
100	760·00	760·00	±0·00	220	17390·36	17390·37	—0·01
110	1075·37	1075·36	+0·01	230	20926·46	20926·46	±0·00

Wie man aus der Tabelle entnimmt, beträgt die Summe aller positiven Abweichungen 0·17, jene aller negativen 0·07; die mittlere Abweichung ist 0·004 *mm*, also geringer, als die Genauigkeit der Angaben Regnault's verlangen würde (0·005).

Da sich eine gleiche Übereinstimmung auch für Alkohol- und Quecksilberdämpfe zeigt, so zweifle ich nicht, dass die Gleichung (1) den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur gesättigter Dämpfe näher angeben wird, als eine der mir bisher bekannt gewordenen Formeln.

Über einen mechanischen Satz Poincaré's

von

Ludwig Boltzmann,
w. M. k. Akad.

In der Entgegnung[1] gegen Herrn Zermelo's Abhandlung: »Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie«[2] habe ich den daselbst angeführten Satz Poincaré's ohne Weiteres zugegeben, da derselbe meinen wärmetheoretischen Sätzen nicht nur nicht widerspricht, sondern diese sogar bestätigt. Natürlich habe ich damit keineswegs dem vom Herrn Zermelo am citirten Orte gegebenen Beweise des Poincaré'schen Satzes zugestimmt. Dieser Beweis scheint mir vielmehr so wenig bis zur vollständigen Klarlegung aller Umstände, worauf es ankommt, ausgearbeitet zu sein, dass ich es nicht für überflüssig erachte, nochmals auf die Sache zurückzukommen und eine möglichst gedrängte Darstellung des Satzes selbst und seines Beweises zu geben.

Die Grundlage des in Rede stehenden Satzes ist die Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit der Integrale der mechanischen Differenzialgleichungen[3] und das Liouville'sche Theorem. Sei die Lage eines beliebigen mechanischen Systems durch n generalisirte Coordinaten $p_1, p_2, \ldots p_n$ gegeben. $q_1, q_2, \ldots q_n$ seien die dazugehörigen Momente. Das System gehe zweimal von demselben

[1] Wied. Ann., Bd. 57, S. 773, 1896.

[2] Wied. Ann., Bd. 57, S. 485, 1896.

[3] Damit diese garantirt sei, genügt es nicht, dass die Kräfte stetige eindeutige Functionen der Coordinaten sind. Auch in diesem Falle können, wenn die Ableitungen dieser Functionen unendlich werden, die Integrale mehrdeutig sein. (Vergl. Cauchy-Moigno-Schnuse, Integralrechnung 1846, S. 288 und 387; Lipschitz, Lehrbuch der Algebra, S. 504; Picard j. de math. 1890, Bull. d. sciens.; Boussinesq, Par. c. r. 84, p. 944).

Anfangszustande, d. h. denselben Anfangswerthen der Coordinaten und Momente aus. Der Zustand (worunter wie immer der Inbegriff der $2n$ Werthe sämmtlicher Coordinaten und Momente verstanden werden soll), den es das einemal nach Verlauf einer gewissen Zeit t erreicht, soll also niemals irgendwie verschieden sein können von dem Zustande, den es das anderemal nach Verlauf derselben Zeit erreicht. Die Bewegung soll vollkommen umkehrbar sein; dann können auch niemals zwei verschiedene Anfangszustände während derselben Zeit zu dem gleichen Endzustande führen. Dieser Satz heisse der Satz A.

Wir denken uns nun dasselbe System, dessen Bewegung durch dieselben Differentialgleichungen bestimmt ist, unendlich oftmal vorhanden und jedesmal wieder von anderen Anfangszuständen ausgehend. Alle diese Anfangszustände sollen jedoch so beschaffen sein, dass in der Folgezeit niemals der Werth irgend einer der Coordinaten oder eines der Momente unendlich wird. Es muss sich daher jedenfalls ein endliches Gebiet H von endlicher Ausdehnung V angeben lassen, innerhalb dessen die Zustände liegen, welche alle betrachteten Systeme nach beliebig langer Zeit annehmen.

Sehr viele (N) aller dieser Systeme sollen so beschaffen sein, dass ihr Anfangszustand, d. h. der Zustand zur Zeit $t = t_0$ durch alle möglichen Punkte eines gewissen kleineren, jedoch ebenfalls endlichen Gebietes g_0 von der Ausdehnung γ dargestellt sind.

Unter einem endlichen Gebiete verstehen wir den Inbegriff aller Combinationen aller Werthe der Variabeln $p_1, p_2, \ldots q_n$, welche folgenden Bedingungen genügen: Keiner der Werthe der Variabeln darf unendlich werden. Der Werth der ersten dieser Variabeln muss zwischen gewissen um Endliches verschiedenen Grenzen liegen. Für jeden dieser Werthe der ersten Variabeln bis auf eine Zahl von Werthen, die gegen die Gesammtzahl dieser Werthe verschwindet, muss auch der Werth der zweiten Variabeln zwischen gewissen um Endliches verschiedenen Grenzen liegen, welche bis auf eine endliche Zahl von Sprüngen continuirliche Functionen des gewählten Werthes der ersten Variable sind. Für alle Werthepaare der beiden ersten Variabeln (wieder bis auf eine gegen die Gesammtzahl der Werthepaare ver-

schwindende Zahl von Werthepaaren) muss auch der Werth der dritten Variabeln zwischen gewissen endlichen Grenzen (Functionen der beiden Werthe der beiden ersten Variabeln) liegen u. s. f. bis zur letzten Variabeln. Eine bestimmte Combination von Werthen der Variabeln $p_1, p_2, \ldots q_n$, welche diesen Bedingungen genügen, also innerhalb des Gebietes liegen, nennen wir einen Punkt dieses Gebietes. Der durch die betreffenden Werthe der Coordinaten und Momente definirte Zustand heisst der durch diesen Punkt dargestellte oder ihm entsprechende Zustand oder ein in diesem Gebiete liegender Zustand. Ein Gebiet kann daher im Allgemeinen durch eine Ungleichung von der Form

$$f(p_1, p_2, \ldots q_n) \lesseqgtr 0$$

dargestellt werden. Unter der Ausdehnung eines Gebietes verstehen wir das bestimmte Integrale $\int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots dq_n$ erstreckt über alle Werthecombinationen der Variabeln, die in diesem Gebiete liegen, d. h. also über alle Punkte des Gebietes.

Da g_0 ein wenn auch sehr kleines, doch endliches Gebiet ist, so muss der Quotient V/γ endlich sein. Es sei n die erste ganze Zahl, die grösser als dieser Quotient ist, so dass man also hat:

$$n > V/\gamma. \tag{1}$$

Ferner sei ϑ eine beliebige endliche Zeit. Die Zustände unserer N Systeme sollen zur Zeit $t_1 = t_0 + \vartheta$ im Gebiete $g^{(1)}$, zur Zeit $t_2 = t_0 + 2\vartheta$ im Gebiete $g^{(2)}$ u. s. f. liegen. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1. Die Gebiete $g^{(1)}, g^{(2)} \ldots g^{(k)}$ haben, wie immer wir die Länge der endlichen Zeit ϑ und wie gross wir die Zahl k wählen mögen, immer endliche Theile mit dem Gebiete g_0 gemein. Dann gibt es in aller Zukunft unter den N Systemen eine unendliche Anzahl von solchen, deren Zustände einem Punkte des Anfangsgebietes g_0 entsprechen.

Fall 2. Das sub Fall 1 Gesagte tritt nicht ein; dann sei τ die kürzeste Zeit, nach welcher das von den Zuständen der N Systeme erfüllte Gebiet keinen endlichen Theil mehr mit dem Gebiete g_0 gemein hat. Der Satz Poincaré's geht nun dahin, dass sich dann immer eine endliche Zeit angeben lässt, nach welcher wieder die Zustände unendlich vieler der N Systeme Punkten

des Gebietes g_0 entsprechen. Da dies nun im Falle 1 für jede beliebige endliche verstrichene Zeit gilt, so kann man sagen: Entweder es entsprechen überhaupt immer die Zustände einer unendlichen Zahl der N Systeme gewissen Punkten des Anfangsgebietes g_0 oder, wenn dieser Fall nicht zu allen Zeiten zutrifft, so tritt er immer eine endliche Zeit, nachdem er aufgehört hat, zuzutreffen, wieder ein. Wenn dem Gebiete g_0 kein Punkt, der der Ruhe in einem Gleichgewichtszustande entspricht, für den also alle Momente Null und alle Coordinaten constant sind, angehört oder unendlich nahe liegt, so kann übrigens das Gebiet g_0 immer so klein gewählt werden, dass nicht der Fall 1, sondern der Fall 2 eintritt.

Wir haben nur noch den Poincaré'schen Satz im Falle 2 zu beweisen. Es seien $g_1, g_2, \ldots$ die Gebiete, innerhalb deren zu den Zeiten $t_1 = t_0 + \tau$, respective $t_2 = t_0 + 2\tau \ldots$ die Zustände unserer N Systeme liegen, deren Anfangszustände durch sämmtliche Punkte des Gebietes g_0 dargestellt wurden. Wir verfolgen zunächst die Bewegung der N Systeme bis zur Zeit $t_n = t_0 + n\tau$. Die gesammte Ausdehnung aller Gebiete $g_0, g_1, \ldots g_n$ wäre, wenn kein einziges dieser Gebiete mit irgend einem anderen einen endlichen Theil gemein hätte, gleich $n\gamma$. Nun müssen aber alle diese Gebiete im Gebiete H liegen, daher kann ihre Gesammtausdehnung nicht grösser als V sein, und da nach der Ungleichung 1) $n\gamma > V$ ist, so müssen wenigstens zwei der Gebiete $g_0, g_1, \ldots g_n$ einen endlichen Theil gemein haben. Es mögen dies die Gebiete g_a und g_b sein, wobei a und b zwei verschiedene ganze Zahlen sind, die kleiner oder höchstens gleich n sind; b sei die grössere derselben. Der gemeinsame Theil der beiden Gebiete sei s. Das Gebiet s muss ein continuirlich zusammenhängendes sein. Es kann nicht durch unendlich viele Punkte, die Mannigfaltigkeiten von weniger als $2n$ Dimensionen bilden und nicht den Gebieten g_a und g_b gemeinsam sind, in unendlich viele unendlich wenig ausgedehnte Theile getheilt werden; denn dann müsste mindestens eines der Gebiete g_a oder g_b selbst Theile haben, die in solcher Weise aus lauter unendlich kleinen, nicht zusammenhängenden Theilen bestehen, was unmöglich ist; denn wenn die Kräfte im ganzen Gebiete eindeutige nach dem Taylor'schen

Lehrsatze entwickelbare Functionen der Coordinaten sind, so können nicht die Zustände solcher Systeme nach einer endlichen Zeit ein unzusammenhängendes Gebiet erfüllen, welche vor dieser Zeit ein continuirlich zusammenhängendes Gebiet g_0 erfüllten, was wir den Satz C nennen wollen. Jeder Punkt des Gebietes s gehört sowohl dem Gebiete g_a, als auch dem Gebiete g_b an, d. h. den ihm entsprechenden Zustand hat eines unserer N Systeme (das System S_a) zur Zeit $t_a = t_0 + a\tau$ und auch eines unserer N Systeme (das System S_b) zur Zeit $t_b = t_0 + b\tau$. Es muss daher nach dem Satze A das System S_a auch zur Zeit $t_{a-1} = t_0 + (a-1)\tau$ genau denselben Zustand haben wie das System S_b zur Zeit $t_b = t_0 + (b-1)\tau$. Da ersterer Zustand dem Gebiete g_{a-1}, letzterer dem Gebiete g_{b-1} angehört, so müssen also auch die letzteren zwei Gebiete einen gemeinsamen Punkt haben, und da dasselbe von allen Punkten des Gebietes s gilt, so müssen, sobald die Gebiete g_a und g_b einen gemeinsamen Theil s haben, auch die beiden Gebiete g_{a-1} und g_{b-1} einen gemeinsamen Theil s' haben, dessen Ausdehnung nach dem Liouville'schen Satze gleich der Ausdehnung des Gebietes s sein muss, was wir den Satz B nennen wollen. Denn das Gebiet s umfasst die Zustände aller Systeme, deren Zustände vor der Zeit τ innerhalb s' lagen, genau so wie das Gebiet g_1 die Zustände aller Systeme umfasst, deren Zustand vor der Zeit τ innerhalb g_0 lagen. Schliesst man ebenso von $a-1$ und $b-1$ auf $a-2$ und $b-2$ u. s. f., so überzeugt man sich, dass auch die Gebiete g_0 und g_{b-a} ein Gebiet s_0 von derselben Ausdehnung wie das Gebiet s gemein haben müssen. Es muss also unter den Gebieten $g_1, g_2, \ldots g_n$ mindestens eines existiren, welches einen endlichen Theil s_0 mit dem Gebiete g_0 gemein hat. Da jeder Punkt des Gebietes s_0 innerhalb des Gebietes g_{b-a} liegt, so stellt er den zur Zeit $t_0 + (b-a)\tau$ gehörigen Zustand eines unserer N Systeme (des Systems Σ) dar. Das System Σ ist also ein Beispiel eines unserer N Systeme, welches während der Zeit $(b-a)\tau$ zu einem Zustande zurückkehrt, der wieder durch einen innerhalb g_0 liegenden Punkt dargestellt wird, und da dasselbe von jedem anderen Punkte des Gebietes s_0 gilt, so haben wir den zu beweisenden Satz bewiesen, dass unendlich viele von den N Systemen, deren

Anfangszustände durch Punkte des Gebietes g_0 dargestellt sind, nach Verlauf einer Zeit, die kleiner als $n\tau$ ist, wieder zu einem Zustande zurückkehren müssen, der irgend einem Punkte des Ausgangsgebietes g_0 entspricht. Sind die Ausdehnungen γ und V, sowie die Zeit τ gegeben, so ist $n\tau$ eine endlich angebbare Zeit. Wir können also den bewiesenen Poincaré'schen Satz, indem wir das Ausgeführte nochmals zusammenfassen, wie folgt aussprechen:

Wir betrachten N Systeme, deren Anfangszustände durch sämmtliche Punkte eines beliebigen endlichen Gebietes g_0 von der Ausdehnung γ dargestellt sind und nehmen an, dass für keines dieser Systeme der Werth irgend einer Coordinate oder eines Momentes, wenn es sich auch noch so lange bewegt, unendlich wird, so dass sich ein Gebiet von endlicher Ausdehnung V angeben lässt, ausserhalb dessen keiner der nach beliebiger Zeit folgenden Zustände unserer N Systeme liegt. Es sind dann zwei Fälle möglich: Im Falle 1 entsprechen in jedem Momente einer beliebig langen endlichen, auf den Zeitanfang folgenden Zeit die Zustände einer unendlichen Zahl unserer N Systeme Punkten desselben Gebietes g_0. Im Falle 2 ist dies nach einer endlichen Zeit τ nicht mehr der Fall, muss aber jedenfalls nach einer Zeit, die kürzer ist als die endliche Zeit $V\tau/\gamma$, wieder eintreten. Da dasselbe natürlich auch von jeder kleineren endlichen Unterabtheilung des Gebietes g_0 gilt, so können wir sagen: Es kann unter den N Systemen zwar solche (sogar deren unendlich viele) geben, deren Zustände in einer endlichen Zeit das Gebiet g_0 verlassen und niemals während einer beliebig langen Zeit wieder in dasselbe zurückkehren; allein die Punkte P, welche die Anfangszustände aller so beschaffenen Systeme darstellen, können im Anfangsgebiete g_0 niemals ein Gebiet von endlicher Ausdehnung bedecken. Sie bilden, wie sich Poincaré ausdrückt, singuläre Fälle. In der That, wenn wir die Punkte des Anfangsgebietes g_0, welche solchen Systemen entsprechen, deren Zustände dasselbe entweder während beliebig langer Zeit nicht verlassen oder nach endlicher Zeit wieder zu Punkten des Anfangsgebietes zurückkehren, mit Q bezeichnen, so haben wir bewiesen, dass in jeder Unterabtheilung des Gebietes g_0 von endlicher Ausdehnung unendlich

viele Punkte Q existiren, welche auch ein endlich ausgedehntes Gebiet bedecken, von dem allerdings noch nicht bewiesen ist, dass es nicht kleiner als die betreffende Unterabtheilung sein kann. Das Gebiet g_0 ist ein $2n$-fach ausgedehntes. Es kann nach dem Bewiesenen kein endlicher Theil von g_0 in unendlich viele unendlich dicht gedrängte Mannigfaltigkeiten von weniger als $2n$ Dimensionen zerfallen, die abwechselnd bald aus Punkten P, bald aus Punkten Q bestehen. Die Zahl der Punkte P innerhalb des Gebietes g_0 muss also unendlich klein im Vergleich mit der Zahl der Punkte Q sein. Die Punkte P können nirgends ein endliches zusammenhängendes Gebiet und auch nicht unendlich viele unzusammenhängende Gebiete, deren Gesammtausdehnung einem endlichen gleichkäme, erfüllen.

Wir haben bisher nur von der einmaligen Wiederkehr des den Zustand darstellenden Punktes in das Anfangsgebiet g_0 gesprochen, da der Beweis einer solchen für die wärmetheoretische Anwendung vollkommen genügt. Nur der Vollständigkeit halber will ich kurz ausführen, wie eine beliebig oftmalige Wiederkehr zu beweisen ist. Nehmen wir eine Zahl von singulären Punkten aus, d. h. solchen, deren Inbegriff nur eine unendlich kleine Ausdehnung hat, so stellt jeder Punkt D des Anfangsgebietes g_0 den Anfangszustand eines Systems dar, dessen Zustand nach irgend einer endlichen Zeit $t < V\tau/\gamma$ wieder durch einen Punkt E des Gebietes g_0 dargestellt wird. Wegen des Satzes C muss es ein endliches, den Punkt D umgebendes, innerhalb g_0 liegendes Gebiet k_0 von solcher Beschaffenheit geben, dass jeder Punkt desselben den Anfangszustand eines Systems darstellt, dessen Zustand zur Zeit t wieder durch einen Punkt eines anderen endlichen innerhalb g_0 liegenden, den Punkt E umgebenden Gebietes k dargestellt wird. Von diesem Gebiete k gilt aber dasselbe, was von jedem endlichen Theile des Gebietes g_0 bewiesen wurde. Mit Ausnahme singulärer Punkte stellen alle Punkte desselben Zustände von Systemen dar, deren Zustand nach abermals einer endlichen Zeit wieder durch einen Punkt des Gebietes k und daher auch des Gebietes g_0 dargestellt wird. Die Zustände aller dieser Systeme wurden also zu Anfang und dann noch zweimal durch Punkte des Gebietes g_0 dargestellt. Da dasselbe wie vom Gebiete k_0 auch von jedem

anderen endlichen Theile des Gebietes g_0 gilt, so ist bewiesen, dass, von singulären Punkten abgesehen, alle Punkte des Gebietes g_0 die Anfangszustände solcher Systeme darstellen, die noch zweimal nach endlicher Zeit wieder durch Punkte des Anfangsgebietes g_0 dargestellt werden. Ebenso kann der Beweis der dreimaligen und einer eine beliebige endliche Zahl mal wiederholten Wiederkehr geliefert werden.

An dem Massstabe des Gesagten können wir nun die Ausführungen Herrn Zermelo's messen. Derselbe macht von dem Satze, den wir den Satz B nannten, gar keinen Gebrauch. Er bezeichnet mit G den Inbegriff aller Zustände, die künftig einmal in endlicher Zeit (sagen wir bis zur Zeit T) aus solchen hervorgehen, die zur Zeit t im Gebiete g lagen, und mit Γ und γ die Ausdehnungen der Gebiete G und g. Die nun folgenden Ausführungen Herrn Zermelo's waren mir nicht verständlich. Aber es sind nur zwei Fälle möglich.

Fall 1. Er denkt sich die Ausdehnung jedes Theiles des Gebietes G in der Ausdehnung Γ so oftmal gezählt, als dieser Theil während der Zeit $T-t$ von Zuständen der Systeme durchstrichen wird. Dann kann Γ mit wachsendem T beliebig weit wachsen. Denkt man sich dann T constant, aber t wachsend, so kann allerdings Γ nur abnehmen; allein der Schluss Herrn Zermelo's l. c. S. 488, dass aus der Gleichung $\gamma =$ const. und $\Gamma \geqq \gamma$ folgt, dass Γ constant sein müsse, wird falsch. Denkt man sich aber beide Zeiten t und T wachsend, so dass $T-t$ constant bleibt, so ist allerdings Γ constant, aber dann wird wieder der Schluss hinfällig, dass Γ nur abnehmen könne.

Fall 2 wäre nun der, dass man die Ausdehnung jedes Theiles des Gebietes G, selbst wenn dasselbe beliebig oftmal von den Zuständen der Systeme durchstrichen wird, nur einmal in die Ausdehnung Γ zählt. Dann kann das Gebiet G nicht grösser als das von mir oben mit H bezeichnete werden, seine Ausdehnung muss also mit wachsendem T sich einer endlichen Grenze nähern, und wenn T so gross ist, dass wir dieser schon genügend nahe sind, so kann Γ auch, wenn T und t gleichzeitig so wachsen, dass $T-t$ constant bleibt, nur abnehmen; anderseits ist dann auch der Schluss, dass bei solchem gleichzeitigen Wachsthume von T und t Γ constant bleiben muss,

gerechtfertigt. Allein dann kann jeder Theil dieses Gebietes von jedem Zustande beliebig oftmal durchlaufen werden, und da Herr Zermelo von dem Satze *B* keinen Gebrauch macht, so hat er keinen Beweis geliefert, dass dies nicht für Gebiete, die den Anfangszustand keines der betrachteten Systeme enthalten, öfter als eine bestimmte endliche Zahl von Malen geschehen kann, bevor irgend eines dieser Systeme zu einem Zustande des Anfangsgebietes zurückgekehrt ist. Er kann daher auch keine obere Grenze für die Zeit angeben, nach welcher irgend eines der betrachteten Systeme zu einem solchen Zustande zurückkehren muss, und hat keinen Beweis geliefert, dass nicht jedes der Systeme erst nach einer unendlichen Zeit zu einem solchen Zustande zurückkehrt, der durch einen Punkt des Anfangsgebietes dargestellt ist. Zu dem letzteren Beweis ist durchaus der Satz, den wir den Satz *B* nannten, unentbehrlich, und dessen Consequenz, dass wenn zwei beliebige von den Gebieten, welche wir mit $g_0, g_1, g_2, \ldots$ bezeichnet haben, einen Theil gemein haben, dann auch eines dieser Gebiete mit dem Anfangsgebiete g_0 einen Theil von gleicher Ausdehnung gemein haben muss.

Da der Poincaré'sche Satz selbst richtig ist, so kann natürlich kein Zweifel sein, dass sich der Beweis Herrn Zermelo's ergänzen lässt; aber ich glaube, dass jeder Mathematiker meiner Meinung sein wird, dass man sich gerade bei Schlussfolgerungen, wie die in Rede stehenden, vollkommen präcise ausdrücken und kein wesentliches Glied als selbstverständlich mit Stillschweigen übergehen soll.

Praktisch zeigt sich dies darin, dass sich an der Hand der Ausführungen des Herrn Zermelo allein eine numerische obere Grenze für die Zeit der Rückkehr in einem bestimmten Falle, wie ich sie z. B. in der citirten Abhandlung berechnet habe, nicht angeben lässt, da in denselben der Begriff der Zeit τ, nach welcher sämmtliche Zustände der N Systeme aus dem Anfangsgebiete g_0 ausgetreten sind, vollkommen fehlt. Unter alleiniger Benutzung der Schlüsse des Herrn Zermelo kann diese obere Grenze noch beliebig gross, also auch unendlich sein.

Über den dem Liouville'schen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie

von

C. H. Wind,

Lector an der Universität Groningen.

(Mit 2 Textfiguren.)

Der Beweis, welchen Boltzmann (Vorles. über Gastheorie, S. 27) von diesem Satze gibt, scheint mir fehlerhaft zu sein.

Erstens scheint mir der geometrische Beweis der Gleichung (S. 27) $d\omega' d\omega_1' = d\omega d\omega_1$ nicht ganz richtig, weil die Ebene, in Bezug auf welche die Punkte C' und C_1' die Spiegelbilder von C und C_1 sind, selbst eine Parallelverschiebung erleidet, sobald die letzteren Punkte ihre Raumelemente $d\omega$ und $d\omega_1$ beschreiben. Zweitens scheint mir überhaupt die genannte Gleichung nicht im Allgemeinen, sondern nur in dem Fall, wo $m = m_1$ ist, giltig. (Dann aber wieder nicht, weil $d\omega' = d\omega$ wäre und $d\omega_1' = d\omega_1$, sondern weil — wenn man den betreffenden Raumelementen die Gestalt von Cylindern gibt [vergl. die nachfolgenden Auseinandersetzungen] mit Axenhöhen Δ, Δ_1, Δ' und Δ_1' beziehungsweise und Querschnitten p, p_1, p' und p_1' — weil dann $p' = p$, $p_1' = p_1$, $\Delta' = \Delta_1$, $\Delta_1' = \Delta$ und in dieser Weise $p'\Delta' . p_1'\Delta_1'$ oder $d\omega' d\omega_1'$ gleich $p\Delta . p_1\Delta_1$ oder $d\omega d\omega_1$ wird).

Da mir eine möglichst allseitige Klarlegung dieses wichtigen Satzes nicht unnütz erscheint, so will ich hier zwei Beweise desselben liefern, von denen der erste bloss die Ausführungen Boltzmann's so ergänzt, dass sie einwurfsfrei werden, der zweite aber einen etwas einfacheren Weg einschlägt.

Erster Beweis.

Als »Stösse der entgegengesetzten Art« bezeichne ich, etwas abweichend von der l. c. S. 28 gegebenen Definition, diejenigen während des Zeitelementes dt in der Volumeinheit zwischen den Molekülen m einerseits und den Molekülen m_1 anderseits stattfindenden Stösse, bei denen 1. der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls m sich nach dem Stosse innerhalb des Raumelementes $d\omega$ befindet, 2. der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls m_1 sich nach dem Stosse innerhalb des Raumelementes $d\omega_1$ befindet und 3. die Centrilinie der beiden Moleküle im Momente des Zusammentreffens — jetzt von dem Molekül m_1 gegen das Molekül m gezogen — irgend einer vom Coordinatenursprung innerhalb des Kegels $d\lambda$ gezogenen Geraden parallel ist.

Es fragt sich jetzt, die Anzahl der Stösse der entgegengesetzten Art zu ermitteln. Wir wenden zu diesem Zwecke die l. c. S. 26 angedeutete graphische Construction der Geschwindigkeitspunkte nach dem Stosse an und geben den Raumelementen $d\omega$ und $d\omega_1$ die Gestalt von Cylindern, deren Axen der Geraden OK parallel sind, deren Höhen respective Δ und Δ_1 sind und deren Schnitte senkrecht zu der Richtung OK respective die Grösse p und p_1 haben.

Wir lassen jetzt die Punkte C und C_1 respective die Raumelemente $d\omega$ und $d\omega_1$ beschreiben und wollen die durch diese Bewegungen bedingten Bewegungen der Punkte C' und C'_1 untersuchen. Einiges ergibt sich in dieser Hinsicht sofort.

1. Eine Bewegung von C, respective C_1, in einer Ebene senkrecht zu OK bedingt eine genau gleiche und gleichgerichtete Bewegung des Punktes C', respective C'_1, lässt dagegen den Punkt C'_1, respective C', völlig unverrückt. Diese Beziehung zwischen den Bewegungen der Punkte C und C_1 einerseits und C' und C'_1 anderseits ist reciprok.

2. Die Bewegungen der Punkte C und C_1 in der Richtung der Cylinderaxen bedingen je gleichzeitige und auch nach den Axen gerichtete Bewegungen der beiden Punkte C' und C'_1.

Wir wollen die Bewegungen in der Axenrichtung etwas näher betrachten und nennen die totalen Verschiebungen von

C, C_1, C' und C'_1 aus ihren Anfangslagen [(ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) u. s. w.] nach dieser Richtung hin beziehungsweise δ, δ_1, δ' und δ'_1, wobei wir alle diese Verschiebungen in einem und demselben Sinne positiv rechnen. Es ergibt sich dann durch eine einfache Überlegung und die Betrachtung der beigelegten Fig. 1, welche wohl kaum irgend einer weiteren Aufklärung bedarf, Folgendes.

3. Von jedem Satze von zusammengehörigen Verschiebungen der Punkte C, C_1, C' und C'_1 sind je zwei beliebige

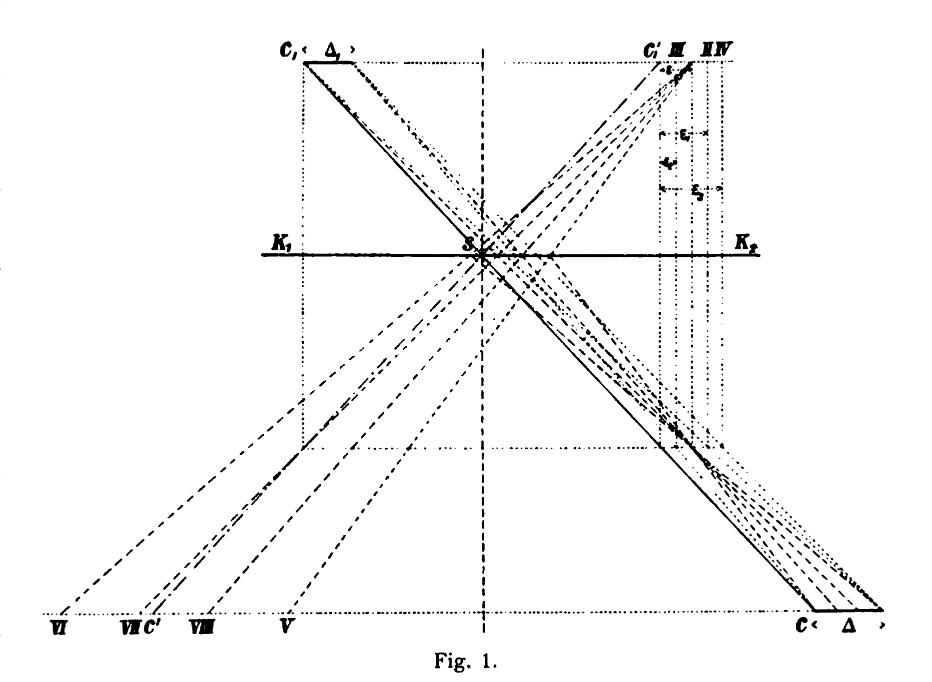


Fig. 1.

durch die zwei übrigen vollständig bestimmt. Es folgen hier einige solche Sätze von Werthen zusammengehöriger Verschiebungen, bei denen jedesmal wenigstens einer der Verschiebungswerthe aus den zwei zuerst angeschriebenen hergeleitet, der vierte aber bisweilen nicht ausgefüllt ist, und bei denen in einigen Fällen der berechnete Verschiebungswerth durch das Zeichen $\equiv$ mit einem Symbol verbunden ist, durch welches wir der Kürze halber den betreffenden Werth nachher vorstellen werden können.

$$\left.\begin{aligned}\delta&=0\\ \delta_1&=0\\ \delta'&=0\\ \delta'_1&=0\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\qquad \left.\begin{aligned}\delta&=\Delta\\ \delta_1&=0\\ \delta'&=-\frac{m_1-m}{m_1+m}\Delta=\eta_1\\ \delta'_1&=\frac{2m}{m_1+m}\Delta\equiv\varepsilon_1\end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta&=0\\ \delta_1&=\Delta_1\\ \delta'&=\frac{2m_1}{m_1+m}\Delta_1=\eta_2\\ \delta'_1&=\frac{m_1-m}{m_1+m}\Delta_1=\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\ \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta&=\Delta\\ \delta_1&=\Delta_1\\ \delta'&=\dots\\ \delta'_1&=\frac{2m}{m_1+m}\Delta+\frac{m_1-m}{m_1+m}\Delta_1\equiv\varepsilon_3\end{aligned}\right\}\ \mathrm{IV}\qquad \left.\begin{aligned}\delta&=0\\ \delta'_1&=\varepsilon\\ \delta_1&=\dots\\ \delta'&=\frac{2m_1}{m_1-n}\varepsilon\end{aligned}\right\}\ \mathrm{V}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta&=\Delta\\ \delta'_1&=\varepsilon\\ \delta_1&=\dots\\ \delta'&=\frac{2m_1}{m_1-m}\varepsilon-\frac{m_1+m}{m_1-m}\Delta\end{aligned}\right\}\ \mathrm{VI}\qquad \left.\begin{aligned}\delta_1&=0\\ \delta'_1&=\varepsilon\\ \delta&=\dots\\ \delta'&=-\frac{m_1-m}{2m}\varepsilon\end{aligned}\right\}\ \mathrm{VII}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=\Delta_1\\ \delta'_1&=\varepsilon\\ \delta&=\dots\\ \delta'&=-\frac{m_1-m}{2m}\varepsilon+\frac{m_1+m}{2m}\Delta_1\end{aligned}\right\}\ \mathrm{VIII.}$$

Wir nehmen jetzt δ'_1 gleich einem bestimmten Werth ε, gelegen zwischen den äussersten Werthen, welche die Verschiebung δ'_1 von C'_1 überhaupt erreichen kann bei der Bewegung von C und C_1 innerhalb der früher angenommenen Grenzen, und fragen uns, zwischen welchen Grenzen δ'_{max} und δ'_{min} die Verschiebung δ' liegen muss, damit die Werthe von $\delta'_1(\varepsilon)$ und δ'

Werthen von δ_1 und δ entsprechen, deren ersterer zwischen 0 und Δ_1, deren letzterer aber zwischen 0 und Δ liegt.

Wir setzen einfachkeitshalber

$$\delta'_{\max} - \delta'_{\min} = \chi$$

und bemerken, dass χ im Allgemeinen eine Function von ε ist, welche aber eine verschiedene Gestalt hat, je nach dem Werthgebiete, innerhalb dessen der Werth ε von δ'_1 angenommen wird. Nehmen wir — was ohne Schaden der Allgemeinheit unserer Betrachtungen geschehen kann — $m_1 > m$ und unterscheiden wir als Fall I den, wobei $m_1 - m > 2m$ und mithin $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, und als Fall II den, wobei $m_1 - m < 2m$ und mithin $\varepsilon_3 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ (die Fig. 1 ist für den Fall II gezeichnet), so haben wir in den beiden Fällen und für die verschiedenen Werthgebiete, innerhalb derer ε angenommen werden kann, die in der Tabelle S. 6 angegebenen Formen für die Function χ.

Berechnet man jetzt das Integral $\int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon$, nachdem man zuerst für den Fall I gesetzt hat,

$$\int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} \chi_a d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \chi_b d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} \chi_c d\varepsilon$$

und für den Fall II

$$\int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_2} \chi_a d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \chi_b d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_3} \chi_c d\varepsilon,$$

worin ε_1, ε_2 und ε_3 die in II, III und IV angegebenen Werthe haben, so findet man für beide Fälle

$$\int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon = \Delta\Delta_1. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist von grosser Wichtigkeit für die Lösung unseres Problems, zu der wir jetzt unmittelbar schreiten können.

Wir betrachten all' diejenigen Zusammenstösse zwischen irgend einem Molekül m einerseits und irgend einem Molekül m_1 anderseits in einer gegebenen Volumeinheit und während eines Zeitelementes dt, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Fall	Werthgebiet für ε	Aus der Fig. 1 folgt, dass determinirt ist, ausser durch $\delta'_1 = \varepsilon$,		Es ist also nach V bis VIII		Es hat die Function χ die Form
		δ'_{max} durch	δ'_{min} durch	δ'_{max}	δ'_{min}	
I	a. $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$	$\delta = 0$	$\delta_1 = 0$	$\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$	$\chi a = \frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon$
	b. $\varepsilon_2 > \varepsilon > \varepsilon_1$	$\delta = 0$	$\delta = \Delta$	$\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$	$\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$	$\chi b = \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$
	c. $\varepsilon_3 > \varepsilon > \varepsilon_2$	$\delta_1 = \Delta_1$	$\delta = \Delta$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$	$\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$	$\chi c = -\frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1 + \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$
II	a. $\varepsilon_2 > \varepsilon > 0$	$\delta = 0$	$\delta_1 = 0$	$\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$	$\chi a = \frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon$
	b. $\varepsilon_1 > \varepsilon > \varepsilon_2$	$\delta_1 = \Delta_1$	$\delta_1 = 0$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$	$\chi b = \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$
	c. $\varepsilon_3 > \varepsilon > \varepsilon_1$	$\delta_1 = \Delta_1$	$\delta = \Delta$	$-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 - m}{2m}\Delta_1$	$\frac{2m}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$	$\chi c = -\frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1 + \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$

a) Der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls m soll vor dem Stosse sich befinden innerhalb eines cylindrischen Raumelementes, welches einen Theil bildet der Verlängerung des cylindrischen Raumelementes $d\omega$ nach der Axenrichtung und also auch den gleichen Querschnitt p wie dieses hat. Als Höhe soll dieses Raumelement aber die oben definirte Strecke χ haben. Die Anzahl der Moleküle m, welche in der Volumeinheit dieser Bedingung genügen, ist offenbar $f'p\chi$, wenn f' steht statt $f(\xi', \eta', \zeta', t)$.

b) Der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls m_1 soll vor dem Stosse sich befinden innerhalb eines cylindrischen Raumelementes, welches einen Theil bildet der Verlängerung (nach der Axenrichtung) des cylindrischen Raumelementes $d\omega_1$ und also auch einen gleichen Querschnitt p_1 wie dieses hat. Als Höhe soll dieses Raumelement aber nur die gegen ε_3 unendlich kleine Strecke $d\varepsilon$ haben, deren Lage aus dem früher Gesagten erhellt. Die Anzahl der Moleküle m_1, welche in der Volumeinheit dieser Bedingung genügen, ist offenbar $F_1'p_1 d\varepsilon$, wo F_1' wieder steht für $F(\xi_1', \eta_1', \zeta_1', t)$.

c) Die Centrilinie der beiden Moleküle im Momente des Zusammenstosses soll der Bedingung sub 3, S. 23 genügen.

Die Anzahl aller Stösse der hier hervorgehobenen Art ergibt sich leicht zu

$$\frac{d}{d\varepsilon} dr' . d\varepsilon = f'F_1'pp_1\chi d\varepsilon \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt. \qquad 2)$$

Aus der Weise, in der die Strecken χ und $d\varepsilon$ definirt sind, folgt unmittelbar, dass die eben hervorgehobenen Stösse solche sind, wobei der Geschwindigkeitspunkt eines Moleküls m in das Raumelement $d\omega$ und der eines Moleküls m_1 in das Raumelement $d\omega_1$ hineingeschafft wird, Stösse »der entgegengesetzten Art« also, welche je eine Vermehrung der Anzahl $fd\omega$, sowie der Anzahl $F_1 d\omega_1$ um eine Einheit zur Folge haben.

Es bilden aber die hier betrachteten nur einen unendlich kleinen Bruchtheil aller Stösse der entgegengesetzten Art. Die ganze Anzahl, dr', derselben bestimmt man, wie sich aus dem Vorhergesagten sofort ergibt, indem man den Ausdruck 2) zwischen den Grenzen 0 und ε_3 nach ε integrirt, wobei alle

Factoren jenes Ausdruckes mit Ausnahme von χ als von ε unabhängig zu betrachten sind. Man bekommt in dieser Weise

$$dr' = f'F_1'pp_1\sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt \int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon,$$

wofür man, nach 1), setzen darf

$$dr' = f'F_1'pp_1\sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt \Delta\Delta_1,$$

und deshalb, weil $pp_1\Delta\Delta_1 = d\omega d\omega_1$, auch

$$\underline{dr' = f'F_1'\sigma^2 g \cos\vartheta d\omega d\omega_1 d\lambda dt.}$$

Vereinfachte Herleitung der zum obigen Beweise benutzten Gleichung $\int_0^{\varepsilon_3} \chi d\varepsilon = \Delta\Delta_1$.

Denken wir uns als rechtwinklige Coordinaten in einer Fig. 2*a* die Werthenpaare von δ und δ_1 und in einer zweiten Fig. 2*b* die entsprechenden Werthenpaare von δ' und δ_1' aus-

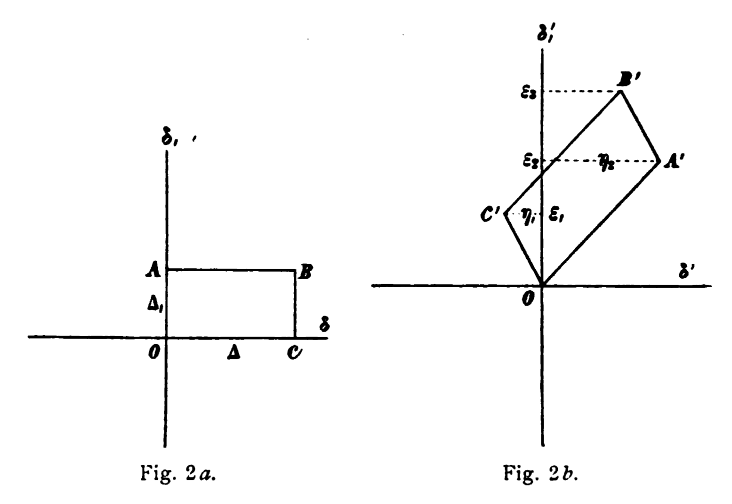


Fig. 2*a*. Fig. 2*b*.

gesetzt, so entsprechen den sämmtlichen Werthenpaaren von δ und δ_1, wobei der Werth von δ zwischen den Grenzen 0 und Δ und der Werth von δ_1 zwischen den Grenzen 0 und Δ_1 fällt, in der Fig. 2*a* die Punkte eingeschlossen von einem Rechteck $OABC$ mit $OC = \Delta$ und $OA = \Delta_1$, in der Fig. 2*b* aber die Punkte eines schiefen Parallelogrammes $O'A'B'C'$, wo die Coordinaten

δ' und δ_1' für A' die Werthe η_2 und ε_2 beziehungsweise und für C' die Werthe η_1 und ε_1 beziehungsweise haben (siehe II u. III, S. 24).

Denkt man sich nun das Parallelogramm $O'A'B'C'$ in unendlich schmalen Streifen parallel zur δ'-Axe zerlegt, so entspricht von jedem dieser Streifen die Breite einem Elemente $d\varepsilon$ und die Länge dem dazugehörigen Werthe der Function χ, der Inhalt also einem Elemente des Integrals $\int_0^{\varepsilon_1} \chi d\varepsilon$. Der Gesammtinhalt des Parallelogramms $O'A'B'C'$ entspricht dem Werthe dieses Integrals.

Da jener Inhalt aber gleich $\eta_2\varepsilon_1 - \eta_1\varepsilon_2$, d. h., wegen der eigenthümlichen Werthe von η_1, η_2, ε_1 und ε_2, gleich $\Delta\Delta_1$ ist, ist also auch

$$\int_0^{\varepsilon_1} \chi d\varepsilon = \Delta\Delta_1.$$

Zweiter Beweis.

Um die Anzahl der S. 22 definirten Stösse der entgegengesetzten Art zu berechnen, kann man auch in folgender Weise vorgehen.

Es sind leicht zwei Raumelemente $d\omega'$ und $d\omega_1'$ anzugeben, innerhalb deren die Geschwindigkeitspunkte der betreffenden Moleküle m und m_1 vor dem Stosse nothwendig liegen müssen, damit bei irgend welchen der Bedingung sub 3. schon genügenden Stössen auch die Bedingungen sub 1. und 2. erfüllt sein können. Es sind dies nämlich die Elemente, welche in dem Falle, für den die Fig. 2 auf S. 19 der Boltzmann'schen »Gastheorie« gilt, die Punkte C' und C_1' beziehungsweise beschreiben, wenn bei unveränderter Richtung der Geraden OK die Punkte C und C_1 die Elemente $d\omega$ und $d\omega'$ beziehungsweise beschreiben. Man darf aber nicht behaupten, dass es zur Erfüllung jener Bedingungen sub 1. und 2. (neben der sub 3.) schon genügen würde, dass die Geschwindigkeitspunkte der Moleküle m und m_1 vor dem Stosse je an irgend einer Stelle der zwei Raumelemente $d\omega'$ und $d\omega_1'$ beziehungsweise sich befänden. Dies lehrt schon eine einfache geometrische Betrachtung im Zusammenhange mit der eben genannten Fig. 2. Auch ergibt sich aber bei solcher sofort, dass — wenn man das Raum-

element $d\omega_1'$ in »unendlich viel unendlich kleine« Raumelemente $d\tau$ höherer Ordnung zerlegt denkt — sich zu jedem Element $d\tau$ ein bestimmter Theil φ des Raumelementes $d\omega'$ angeben lässt der Weise, dass man nur die Geschwindigkeitspunkte der Moleküle m und m_1 vor dem Stosse respective in φ und in $d\tau$ hinein zu verlegen hat, damit den Bedingungen sub 1. und 2. genügt werde. Jedem Elemente $d\tau$ von $d\omega_1'$ entspricht dann aber nach Überlegungen, die wir hier nicht weiter auszuführen brauchen, weil sie den in der mehr genannten »Gastheorie« in Bezug auf die »Stösse der hervorgehobenen Art« gehaltenen ganz ähnlich sind, ein (»unendlich kleiner«) Theil der gesammten Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art, welcher angegeben wird durch den Ausdruck

$$ddr' = f'\varphi F_1' d\tau \sigma^2 g \cos \vartheta d\lambda dt.$$

Die gesammte Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art bekommt man hieraus, wenn man den Ausdruck insofern integrirt, dass man $d\tau$ das ganze Element $d\omega_1'$ beschreiben lässt. Man erhält in dieser Weise

$$dr' = \sigma^2 d\lambda dt f' F_1' g \cos \vartheta \int_{d\omega_1'} \varphi d\tau. \tag{3}$$

Da anderseits, nach obiger Definition der Stösse entgegengesetzter Art, die Anzahl dr' jedenfalls dem Product $d\omega d\omega_1$ proportional sein muss, darf man ohne Weiteres setzen:

$$\int_{d\omega_1'} \varphi d\tau = \Psi d\omega d\omega_1 = \Psi d\xi d\eta d\zeta . d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1. \tag{4}$$

Eine weitere einfache geometrische Überlegung ergibt nun, dass die Form der Function φ und somit die eben eingeführte Grösse Ψ in keiner Weise von der Richtung und der Länge, noch von der Lage im Raume der Strecke $C_1 C$ abhängig ist und daher von $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1$ und ζ_1 vollständig unabhängig sein muss. Wir wollen aber jetzt auch noch nachweisen, dass Ψ einfach der Einheit gleich ist.

Substituiren wir zu dem Zwecke den Werth für $\int_{d\omega_1'} \varphi d\tau$ aus 4) in 3) und integriren den kommenden Ausdruck für dr' nach ξ, η, ζ und auch nach ξ_1, η_1, ζ_1 über den ganzen Raum,

wobei selbstverständlich die Argumente ξ', η', ζ', ξ_1', η_1' und ζ_1' von f' und F_1', sowie das Product $g \cos \vartheta$ als Functionen von ξ, η, ζ, ξ_1, η_1 und ζ_1 ausgedrückt zu denken sind, so haben wir

$$\iint dr' = \sigma^2 d\lambda\, dt\, \Psi \iint f' F_1' g \cos\vartheta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.\, d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Das in diesem Ausdrucke vorkommende doppelte (eigentlich sechsfache) Integral formen wir dadurch um, dass wir statt ξ, η, ζ, ξ_1, η_1 und ζ_1 die mit diesen Grössen in bekannter Weise zusammenhängenden Geschwindigkeitscomponenten ξ', η', ζ', ξ_1', η_1' und ζ_1' als independente Variabeln einführen. Diese Transformation nehmen wir in drei Stufen [1] vor: Erstens führen wir anstatt von ξ_1, η_1 und ζ_1 die Geschwindigkeitscomponenten x, y und z des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der sich an dem Stosse betheiligenden Moleküle m und m_1 ein; dabei haben wir das Product $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$ zu ersetzen durch $\left(\frac{m+m_1}{m_1}\right)^3 dx\,dy\,dz$, weil wir uns die Integration so vorgenommen denken können, dass zuerst bei unveränderlichen ξ, η und ζ nach ξ_1, η_1 und ζ_1 integrirt wird. Nachher führen wir anstatt von ξ, η und ζ die Variabeln ξ', η' und ζ' ein, wobei wir das Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ einfach durch das Raumelement $d\xi' d\eta' d\zeta'$ zu ersetzen haben, weil wir uns jetzt wieder zuerst die Integration nach ξ, η und ζ bei constanten x, y, z vorzunehmen denken können. Schliesslich führen wir anstatt von x, y, z die Variabeln ξ_1', η_1' und ζ_1' ein, wobei wir das Raumelement $dx\,dy\,dz$ zu ersetzen haben durch $\left(\frac{m_1}{m+m_1}\right)^3 d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$, weil wir uns jetzt wieder zuerst die Integration nach x, y und z bei unveränderten ξ', η' und ζ' vorzunehmen denken können.

Als Resultat der Umformung ergibt sich also

$$\iint dr' = \sigma^2 d\lambda\, dt\, \Psi \iint f' F_1' g \cos\vartheta\, d\xi' d\eta' d\zeta'\,.\, d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1', \quad 5)$$

worin $f' F_1' g \cos\vartheta$ als Function der neuen Variabeln ausgedrückt gedacht werden muss. Es ist nun nach dem, was

[1] Zu dieser stufenweisen Transformation gab mir eine briefliche Bemerkung des Herrn Boltzmann Anlass.

früher bezüglich der Bedeutung von dr' und der Weise, in der das doppelte Integral genommen werden muss, gesagt ist, klar, dass $\iint dr'$ die Anzahl bezeichnet der während des Zeitelementes dt in der Volumeinheit zwischen den Molekülen m einerseits und den Molekülen m_1 anderseits stattfindenden Stösse, bei denen nur die Bedingung sub 3. erfüllt ist.

Wie die Anzahl der Stösse der ursprünglich hervorgehobenen Art angegeben wird durch

$$dr = f d\omega F_1 d\omega_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt,$$

so wird die Anzahl derjenigen Stösse, welche sich von diesen nur insofern unterscheiden, dass die Raumelemente $d\xi' d\eta' d\zeta'$ und $d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$ an die Stelle von $d\omega$, beziehungsweise $d\omega_1$, treten und dass die Centrilinie entgegengesetzt gerichtet ist, angegeben durch

$$dr'' = f' d\xi' d\eta' d\zeta' F_1' d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1' \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt. \tag{6}$$

Durch Integration des letzteren Ausdruckes nach ξ', η' und ζ', sowie nach ξ_1', η_1' und ζ_1', über den ganzen Raum bekommt man aber factisch dieselbe Anzahl, welche nach dem oben gesagten durch $\iint dr'$ angedeutet wird; d. h.

$$\iint dr' = \iint dr''.$$

Setzt man aber in das zweite Glied dieser Gleichung den Werth für dr'' aus Gleichung 6) ein und vergleicht nachher mit 5), so folgt unmittelbar

$$\Psi = 1.$$

Damit wird aber die Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art [vergl. 3) und 4)]

$$\underline{dr' = f' F_1' d\omega d\omega_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt,}$$

was zu beweisen war.

II. SITZUNG VOM 14. JÄNNER 1897.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang theilt eine Methode mit, die Capacität von Condensatoren mit Hilfe der Wage zu bestimmen.

III. SITZUNG VOM 21. JÄNNER 1897.

Das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Farben des Regenbogens und der weisse Regenbogen«.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Heinrich v. Omorovicza, Ingenieur in Wien, vor, welches die Aufschrift führt: »Über Kräfte im Raume«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht zwei von ihm in Gemeinschaft mit Herrn E. Haschek ausgeführte Arbeiten: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« (VI. und VII. Mittheilung).

Ferner überreicht Herr Prof. Exner eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn F. Hasenöhrl: »Über den Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante in festen Isolatoren«.

Das w. M. Herr Prof. Sigmund Exner überreicht eine im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit von Herrn Alfred Exner, betitelt: »Anwendung der Engelmann'schen Bakterienmethode auf die Untersuchung thierischer Gewebe«.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak legt Namens der Commission für die petrographische Erforschung der Centralkette der Ostalpen den von dem c. M. Prof. F. Becke in Prag eingesandten Bericht über den Fortgang der Arbeiten im letzten Jahre vor, der sich an die Mittheilungen anschliesst, welche in

den Sitzungen vom 14. Februar 1895 und 23. Jänner 1896 über denselben Gegenstand erstattet wurden.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übergibt eine vorläufige Mittheilung des M. Dr. W. Pascheles, Assistenten am Rudolfs-Hospital, welcher theils auf der Abtheilung des Primarius R. v. Limbeck, theils im chemischen, von Dr. E. Freund geleiteten Institute dieser Anstalt, Versuche über Quellung ausgeführt hat.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(VI. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und **E. Haschek.**

Die in den Mittheilungen I—IV gegebenen Wellenlängen sind sämmtlich so gewonnen, dass zu beiden Seiten des zu untersuchenden Spectrums das als Standardspectrum dienende Eisen auf die Platte photographirt wurde; es hat sich nun herausgestellt, dass die unvermeidlichen Erschütterungen des Hauses während der doppelten Exposition derselben Platte zuweilen kleine und unter Umständen uncontrolirbare Verschiebungen der beiden Spectren gegeneinander zur Folge hatten.

Die dadurch hervorgerufenen Fehler sind allerdings nicht beträchtlich; sie betragen, wie die nachfolgenden Messungen lehren, nur ausnahmsweise 0·2 AE. Nichtsdestoweniger haben wir eine Neumessung der sämmtlichen starken Linien der in I—IV publicirten Elemente vorgenommen, um diese Fehler zu beseitigen, und geben deren Resultate in der vorliegenden Mittheilung wieder. Es können nach denselben dann auch die Wellenlängen der schwächeren zwischenliegenden Linien, wo es nöthig ist, richtiggestellt werden. Um bei diesen Neumessungen von dem vorerwähnten Übelstande frei zu sein, haben wir der aufzunehmenden Substanz etwas Eisen beigefügt, so dass die Standardlinien in das zu untersuchende Spectrum gleichzeitig einphotographirt wurden (die Messungen der V. Mittheilung, betreffend Nickel und Cobalt, wurden bereits

so ausgeführt, dass die zu untersuchenden Spectren auf die in Folge der starken Verunreinigung der Substanzen mit Eisen in ihnen von selbst auftretenden Standardlinien bezogen wurden). Auch ist zu erwähnen, dass bei den früheren Messungen die Rowland'schen Eisennormalien noch nicht über den ganzen von uns untersuchten Bezirk publicirt waren, so dass wir uns vielfach auf die von Kayser und Runge in ihrem Eisenspectrum gegebenen Zahlen beziehen mussten. Nun zeigen aber diese letzteren gegen die Rowland'schen Normalien stellenweise nicht unbeträchtliche Abweichungen, die 0·1 AE. und mehr erreichen, so dass auch aus diesem Grunde unsere früheren Messungen stellenweise fehlerhaft sein konnten. In allen folgenden Messungen haben wir uns aber ausschliesslich auf die Rowland'schen Normalien bezogen und die Messungen der stärkeren Linien, wie es auch bei Nickel und Cobalt schon der Fall war, auf Hundertel Angström-Einheiten ausgedehnt, wobei nach unseren bisherigen Erfahrungen die letzte Decimale bei der einzelnen Messung bis auf 5 Einheiten richtig sein dürfte.

Eine gute Controle unserer Messungen liefern die unterdessen erschienenen Arbeiten von Rowland und Tatnall[1] über die Bogenspectren von Pt, Os, Rh, Ru und Pd. Es stimmen für diese Elemente Bogen- und Funkenspectrum im Allgemeinen überein, nur im äussersten Ultraviolett (die Rowland'schen Messungen reichen leider nur bis etwa $\lambda = 3000$ AE.) kommen mitunter Abweichungen vor. Spectren mit weniger zahlreichen und dafür unschärferen Linien zeigen im Allgemeinen grössere Unterschiede; so haben wir z. B. im Silber mit den von Kayser und Runge gegebenen Bogenspectrum nur vier starke Linien gemeinsam. Auch die beiden Spectren des Kupfers zeigen namentlich zwischen $\lambda = 2900$ AE. und 2400 AE. ganz verschiedenen Charakter.

---

[1] Rowland und Tatnall, Astroph. Journal 2 (October 1895) und 3 (April 1896).

Starke Linien des Silbers

(als Nachtrag zu Nr. I).

λ	i	λ	i	λ	i
3973·40	3	2767·65	2	2480·50	4
3683·48	3	56·55	2	77·35	4
3542·72	4	44·00	4	73·82	3
3383·02	1 u.	21·90	4	53·40	4
3280·80	1 u.	12·13	4	47·98	3
23·58	4	2681·40	4	37·90	2
3180·70	4	60·58	3	29·75	4
2938·62	4	57·00	4	20·18	4
34·30	4	28·75	4	13·27	3
29·49	4	14·70	4	11·45	4
20·15	4	06·22	4	2358·01	4
02·21	4	2595·80	4	31·45	4
2896·59	4	80·82	2	20·28	4
73·72	4	63·08	4	17·10	4
15·60	3	35·41	3	2280·08	4
2799·77	3	06·69	3		

Starke Linien des Kupfers

(als Nachtrag zu Nr. II).

λ	i	λ	i	λ	i
4651·35	1	3533·82	4	3282·70	3
4587·20	3	30·48	4	74·04	1
31·10	4	24·25	4	47·64	1
09·62	4	12·18	4	3108·75	4+
4275·32	1	3483·85	3	2961·21	4
4062·90	2	76·10	3	2878·00	4
3973·45	4	50·42	4	37·78	4
3686·72	4	3365·42	4	24·55	2
02·10	3	07·98	2	2770·01	2
3599·15	3	3290·58	2	19·03	4

λ	i	λ	i	λ	i
2713·73	3	90·80	4	00·16	4
03·42	3	45·06	1	2369·95	2
01·20	3	29·60	3	2294·45	2
2689·54	2	06·55	1	76·30	3
66·40	4	2489·80	3	47·15	3
00·50	3	86·10	4	42·70	4
2599·00	4	03·55	4		

Starke Linien des Mangans

(als Nachtrag zu Nr. III).

λ	i	λ	i	λ	i
4823·70	2	4055·73	3	19·41	4
4783·60	3	48·92	3	10·45	3
66·62	4	41·55	3	08·60	3
66·05	4	35·90	3	07·62	3
62·60	4	34·65	3	3595·17	3
54·23	3	33·20	3+	86·72	3
4605·55	4	30·98	2+	81·32	4
4502·40	4	18·28	2	77·98	3
4499·05	4	3844·12	4	70·02	2+ u.
90·25	4	41·20	4	69·68	3
64·85	4	39·98	4	48·07	1 u.
62·18	3	34·52	4	32·08	1
51·80	3	34·00	4	3497·72	3
36·52	4	24·08	4	96·98	4
4281·22	4	23·65	3	95·97	3
35·38	3	09·70	4	88·83	2
4083·83	3	06·86	1	83·05	2
83·10	3	3790·33	4	74·20	1
79·57	4	19·08	4	60·50	1
79·40	4	06·23	4	42·15	1
63·73	4 (Fe)	3693·81	4	3256·25	4
59·13	4	23·98	4	53·05	4

λ	i	λ	i	λ	i
3248·62	4	2870·15	4	2652·52	4
47·65	4	46·12	4	51·03	4
43·88	4	30·80	4	39·90	3
36·90	4	15·12	4	38·15	4
30·80	4	05·48	4	32·35	3
28·25	3	2728·77	4	25·68	3
12·95	4	27·70	4	18·20	3
3123·18	4	26·00	4	10·32	4
3059·10	4	24·52	4	05·80	3+
50·68	4	22·17	4	2576·20	1+
31·18	3	11·65	4	63·95	4
20·00	3	08·48	4	48·98	4
2949·32	1	05·75	3	38·20	4
39·42	2	01·78	3	34·40	4
33·13	2	01·08	4	07·92	4
22·73	4	2688·32	3	2499·07	4
00·30	4	86·00	4	52·60	3
2898·80	4	84·60	4	37·50	4
92·45	4	73·42	4	27·45	4+
89·73	3	72·60	3	2382·10	4
86·82	4	67·10	4	73·48	4
79·60	3	66·90	4		
73·02	4	55·95	4		

Starke Linien des Wolframs

(als Nachtrag zu Nr. IV).

λ	i	λ	i	λ	i
4613·50	4	4408·42	4	4335·70	4
4592·60	4	4385·01	4	07·00	4
88·92	4	78·72	4	02·27	3
70·80	4	66·20	4	4294·77	2
54·22	2 Ba	64·90	4	76·92	4
4484·33	3	48·23	3	75·65	4

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
4274·70	4	3708·68	4	3262·37	4
69·52	3	08·09	4	43 50	4
63·50	4	3694·70	4	15·68	4
60·42	4	92·00	4	03·43	4
59·52	4	82·22	4	3179·60	4+ (Ca?)
44·45	4	58·05	4	76·10	4
41·50	4	57·75	3	60·20	4
19·50	4	46·72	3	3077·63	3
15·60	3	45·78	3	51·42	4
07·12	4	41·55	2	24·58	4
04·52	4	17·72	3	2799·22	4
4175·70	4	13·97	2	64·40	4
71·23	4	12·00	4	02·22	4
70·60	4	3592·55	2	2697·80	4
68·80	4	72·67	2	79·78	4
37·63	4	55·35	4	64·41	4
18·22	4	49·23	3	58·10	4
09·90	4	45 40	4	47·81	4
02·90	3	36·47	4	20·25	4
4081·45	4	29·72	4	15·48	4
74·52	3	08·89	3	03·07	4
70·03	3	03 88	4	02·58	4
45·80	4	3495·40	4	2589·20	4
15·32	4	86·32	4	81·22	4
08·90	2	75·55	4	79·60	4
3983·40	4	75·45	4	79·32	4
3897·07	4	63·70	3	72·30	4
81·50	4	50·00	4	71·45	4
68·05	4	40·80	3 (Fe)	63·22	4
51·70	4	16·78	4	55·13	4
46·32	4	02·03	3	22·08	4
35·13	4	3399·07	3	10·52	4
17·60	4	76·23	2	2489·35	4
3780·91	4	61·20	4	88·92	4
73·85	4	58·72	3	77·93	4
68·62	4	43·60	4	46·50	4
45·70	4	43·28	4	2397·12	4
36·38	3	42·63	3		
16·20	4 d.	3286·70	4		

Starke Linien des Molybdäns

(als Nachtrag zu Nr. V).

λ	i	λ	i	λ	i
4610·00	4	4120·25	4	3596·51	4
4536·98	4	19·75	4	85·78	4
24·50	4	07·61	4	37·40	5 } [1]
17·50	4	4084·51	4	37·30	5 }
17·30	4	81·60	4	24·70	3
4491·43	4	70·05	4	3446·26	4
74·72	3	62·20	4	35·52	4
57·50	3	3986·32	4	22·85	4
49·91	4	61·67	2	02·91	3
35·10	3	41·60	3	3392·00	4
33·62	3	03·07	1	80·40	4
11·82	3	3864·25	1 u.	79·93	4
4381·77	3	3798·35	1 u.	68·05	4
77·88	3	86·43	4	46·52	4
63·75	3	83·28	4	29·40	4
58·37	4+	82·17	4	21·35	5 } [2]
26·30	4	55·63	4	21·05	4 }
11·77	4	48·30	4	13·80	4
11·12	4	44·55	4	13·07	4
4293·33	4	42·45	3	3292·50	3+
92·25	4	17·10	4+	90·92	4
88·78	4	02·70	2	87·38	4
79·15	3	3692·82	3	84·82	4
77·43	3	88·42	1	83·05	4
77·00	3	84·32	4	79·07	4
69·43	4	80·82	4	76·43	4
50·82	4	70·90	4	71·81	4
44·90	4	59·11	4	67·80	4
32·80	4	58·48	4	67·00	4
09·82	3	52·58	3	54·85	4
4188·50	3	51·30	3	53·90	4
86·00	4	35·29	1	50·90	4
43·70	3	14·43	4	40·82	4
22·45	4	12·27	4	29·80	3

[1] In der früheren Messung zusammen als eine Linie bei 3537·1.

[2] In der früheren Messung zusammen als eine Linie bei 3320·9

λ	i	λ	i	λ	i
3216·18	4	3008·28	4	2817·62	4
01·65	4	04·55	4	16·28	2
00·42	4	00·42	4	07·82	3
3196·02	4	2975·50	4	2785·08	4
92·27	4	72·75	4	80·10	3
87·78	4	72·02	4	75·53	3
83·08	4	63·93	4	74·51	4
76·43	4	57·03	4	69·92	4
75·18	4	46·02	4	56·20	4
72·97	4	44·95	4	50·01	4
55·80	4	41·32	4	38·00	4
53·00	4	38·40	4	32·95	4 } [2]
51·80	4	36·93	4	32·80	5 }
41·95	4	34·42	4	27·10	4
41·58	4	30·62	4	17·42	4
38·97	4	27·63	4	01·41	4
36·63	4	25·52	4	2688 08	4
32·90	5 } [1]	24·45	4	84·23	4
32·75	5 }	23·50	4	83·35	4
30·22	4	18·97	4	81·48	4
22·10	3	13·91	4	76·60	4
16·23	4	12·00	4	73·38	4
11·00	4	09·22	4	72·90	4
3092·20	4+	07·22	4	71·93	4
87·70	3+	03·12	3	60·65	3
82·33	4	2894·52	4	53·40	4
77·75	3	92·98	4	46·62	4
67·72	4	91·07	4	44·42	4 d.
60·90	4	88·27	4	38·92	4
58·00	4	79·12	3	36·81	4
53·58	4	74·95	4	33·67	4
52·41	4	72·97	4	2595·48	4
33·42	4	71·58	3	93·82	4
23·40	4	63·90	4	93·50	4
21·75	4	53·30	3	55·58	4
18·60	4	48·38	2	47·47	4
14·25	4	27·92	4	42·88	4

[1] In der früheren Messung zusammen als eine Linie bei 3232·6.
[2] In der früheren Messung zusammen als eine Linie bei 2732·8.

λ	i	λ	i	λ	i
2538·61	3	2455·52	4	2377·25	4
27·30	4+	37·78	4	66·40	4 d.
24·80	4	36·02	4	59·90	4
06·25	3 (Fe)	24·10	4	41·72	4
2487·80	4	22·25	4	40·52	4
81·28	3	12·78	4	31·00	4
77·70	4	10·20	4	25·60	4
74·35	4	03·70	3	2294·95	4
66·80	4	2399·31	4		
57·90	4	87·03	4		

Starke Linien des Platins

(als Nachtrag zu Nr. VI).

λ	i	λ	i	λ	i
4552·62	4	3687·55	4	3256·08	4
4498·93	4	83·13	4	47·68	3
42·73	4	74·20	3	33·58	4
4226·85	4 Ca	72·15	3	30·42	4
4192·55	4	43·29	2+	04·17	3
64·72	4	38·92	3	00·79	4
18·86	3	29·00	3	3159·26	4
4046·55	4	28·27	2	56·70	4
3966·48	3	3577·35	4	39·51	4
25·50	4	51·50	4	00·10	4
23·12	2	36·08	4	3064·76	2
00·90	4	3485·40	3	42·73	3
3898·92	4	83·60	4	36·52	4
75·83	4	35·03	4	31·20	4+
68·60	4	28·08	4	17·95	4
18·82	3	08·26	2	17·37	4
01·20	4	3315·20	4	02·28	4
3706·70	4	02·00	2	01·23	3
00·06	4	3290·36	4	2998·07	2
3692·50	4	74·12	3	29·89	3

λ	i	λ	i	λ	i
2919·43	4	2763·30	4	2513·98	3
13·65	4	55·03	4	2495·95	4
12·35	4	34·08	4+	89·00	4
2899·80	4	26·55	4	87·15	3
98·03	4	19·20	4	82·10	4
94·02	4	17·75	4	67·70	3
90·54	4	06·05	4	50·58	4
77·61	3+	02·50	3	42·75	4
76·00	4+	2698·55	4	34·62	4
75·22	4+	59·60	3	25·03	3
67·06	4	51·00	4	21·00	4
60·80	4+	47·00	4	05·75	4
30·43	4	28·13	3	2396·72	4
2794·32	3	25·41	3	77·28	3
74·88	3	16·85	4		
71·78	4	2572·70	4		

Starke Linien des Palladiums

(als Nachtrag zu Nr. VII).

λ	i	λ	i	λ	i
4473·77	3	3609·67	1	3404·71	1
4213·12	1	3571·31	1	3373·16	1
4170·02	4	53·23	1	27·40	4
4087·48	2	21·40	4 (Fe)	02·25	1
57·88	4	17·10	1	3287·35	4
3958·80	1	08·09	4	67·50	3
3894·37	2	3489·91	2	58·92	2
32·41	2	81·30	1	51·80	2
3799·34	2	68·72	4	42·85	1
38·98	3	60·92	1	10·60	4
19·06	1	51·42	2	3170·40	4
3690 44	1+	41·56	1	62·08	4
83·60	4	33·57	1	55·75	4
34·83	1	21·35	1	42·93	4

λ	i	λ	i	λ	i
3114·15	2	2749·40	4	2472·58	4
3065·40	4	14·98	4	71·22	4
59·55	4	14·38	4	70·08	4
52·25	4	2658·82	3	69·32	4
32·30	3	36·03	2	57·80	4
28·08	3	28·38	3	57·32	4
02·81	4	2596·02	4	48·12	4
2999·70	3	93·30	4	46·80	4
80·78	2	83·95	4	46·25	4
22·68	4	77·13	4	18·80	4
2878·20	4+	69·58	4	14·80	4
71·45	4+	65·55	2	06·80	4
54·73	2	51·92	2	2388·33	4
41·18	4	34·70	4	72·13	4
40·08	4	14·52	4	68·00	4
2788·10	4+	05·82	3	62·37	4
77·00	4+	2498·82	3	36·50	4
63·13	4	88·97	2	2296·52	4
55·90	4 (Fe)	86·58	3		

Starke Linien des Iridiums

(als Nachtrag zu Nr. VIII).

λ	i	λ	i	λ	i
4478·58	4	4092·6	4	3895·70	3
26·48	4	70·02	3	73·72	5
03·98	4	33·98	4	73·30	5
4399·62	2	20·25	2+	65·78	3
11·68	3	3992·33	3	62·10	4
10·80	4	76·54	3	56·70	5
01·85	4	52·12	4	17·42	4
4268·25	3	46·42	4	00·30	2
4172·70	4	35·00	4	3799·52	4
66·22	4	15·45	3	99·10	4
15·88	4	02·64	2	94·25	4

λ	*i*		λ	*i*		λ	*i*	
3793·98	4		3334·28	4		2939·38	4	
47·42	3		22·95	4		36·73	4	
38·75	4		22·75	4		34·75	4	
35·00	3	(Fe)	3266·51	4		29·80	4	
31·52	3+		54·50	4		25·20	4	
25·58	4		53·45	4		24·82	4	
12·63	4		41·53	4		21·12	4	
01·08	4		32·02	4		19·23	4	
3692·45	3		29·32	4		18·60	4	
89·48	3		22·58	4		16·41	4	
84·48	4		20·82	3		2897·22	4	
75·12	2		19·60	4		49·70	3	
64·90	4		12·18	2		40·33	4	
61·90	4		3199·00	4		39·30	4	
58·20	4		69·00	4		33·28	2	
53·40	1		68·30	4		24·50	4	
36·47	4		37·80	3		00·62	3	d.
28·78	4		33·35	2		2775·05	3	
26·40	4		33·20	4		32·52	4	
17·30	4		21·87	4		14·10	4	
05·96	1		20·87	4		2595·92	4	
3594·52	4		18·92	4		86·17	2	
73·85	2		17·40	4		79·62	3	
59·12	4		00·42	3	d.	58·63	4	
57·32	4		3088·07	3		54·45	4	
36·02	4		83·30	4		26·01	4	
28·22	4		82·98	4		12·67	3	
22·17	4		69·07	3		12·20	4	
16·08	4		68·93	3		2398·82	3	
13·78	3		64·80	2	d.	84·90	3	
3499·07	4		42·73	2		81·83	3	
49·12	4		39·35	4		68·02	2	
37·65	4		26·38	4		23·70	4	
37·20	3		2954·90	4		14·95	4	
35·03	4		51·22	4		2290·93	4	
3368·63	4		43·20	4		42·78	4	

Starke Linien des Rhodiums

(als Nachtrag zu Nr. IX).

λ	i	λ	i	λ	i
4528·91	4	3792·35	4	44·05	2
4374·94	1	88·60	3	42·07	4
4296·91	4	78·25	4	38·29	2
88·87	2	70·12	4	28·18	1
11·30	1	65·23	2	13·75	4
4196·67	3	54·37	3 d.	13·25	4
54·54	3	48·38	4	07·46	2
35·48	2	44·35	2	02·66	2
29·05	2	37·45	3	3498·87	2
21·87	3	35·48	2	84·20	4
19·81	4	13·57	4	79·02	4
4097·70	3	13·15	2	77·98	2
82·97	2	01·05	2	74·90	2
23·27	3	3698·75	4	72·35	4
3996·31	2	98·38	4	70·79	2
95·80	3	95·70	3	62·16	2
84·56	3	92·53	1	58·08	4
75·51	3	90·86	2	57·20	4
59·02	1	81·17	2	55·35	4
58·42	4	74·92	4	40·70	3
42·82	3	67·02	4	35·03	1
36·01	4	66·35	2	24·50	4
34·43	2	62·02	4	21·35	2
22·32	4	58·10	1	12·44	2
3877·50	4	55·03	4	06·72	4
70·15	3	39·68	4	3399·87	4
56·70	1	26·76	1	96·97	1
34·01	2	20·61	4	85·93	4
28·70	2	14·95	2	77·23	4 d.
22·39	2	12·62	2	72·37	2
18·36	2	06·00	3	68·55	3
16·62	3	3597·25	2	60·97	3
15·18	4	96·28	1	60·02	4
06·90	4	83·65	4	38·67	4
06·02	3	83·25	3	36·83	4
3799·50	1	70·29	2	23·20	2
93·36	2	49·66	1	07·49	4

λ	i	λ	i	λ	i
3300·58	4	2946·80	4	2676·32	4
3294·40	4	44·98	4	74·59	2
89·22	4	26·95	3 d.	69·38	4
83·75	3	24·20	2	63·82	3
81·85	4	13·50	4	59·22	2
80·62	2	10·31	1	57·43	4
71·80	4	2897·82	4	51·99	1
67·75	4	96·17	4	42·95	4
63·22	3	80·78	4+	41·80	4 d.
33·55	4	74·52	4	39·45	4
31·17	4	45·83	2	38·90	4
07·50	3	26·81	4	35·45	3
3191·30	4	19·30	2	34·82	4
88·77	3	04·02	4	30·41	4
87·98	3	02·35	4	28·34	2
74·61	4	2792·83	4	26·72	4
59·40	2+	90·75	4	25·55	2
41·38	4	81·85	3	09·31	2
23·81	4	78·15	3	2597·15	2
18·18	4	75·82	3	93·65	4
3096·95	4	74·20	4	92·18	3
93·60	3	73·08	4	87·37	4
90·80	4	66·60	4	86·52	4
84·10	4	64·90	4	81·77	4
62·40	4	54·12	4	69·10	4
55·83	3	47·70	4	68·85	4
49·02	3	40·03	2	60·00	4
47·30	3	37·50	2	57·30	3 d.?
35·20	4	30·83	4	45·40	2
20·00	3	29·05	3	44·03	4
09·82	4	18·08	4	37·82	4
09·12	3	15·42	2	34·71	4
2988·97	3	05·75	1	31·40	4
88·42	4	05·03	4	20·56	2
86·31	4	2695·90	4	17·62	4
68·78	4	91·18	4	10·68	2
63·63	1	89·73	4	05·15	3
62·28	4	84·33	2	03·90	4
48·21	4	83·70	2	2491·91	3
47·73	4	81·78	4	90·82	2

λ	i	λ	i	λ	i
2485·82	4	2427·10	4	2367·05	4 } [2]
82·80	4	21·00	3	66·82	4 }
80·40	4	17·43	4	59·13	4
75·68	2	15·92	3	46·40	4
71·90	4	10·75	4	34·81	3
63·48	4	08·77	4	33·32	4
61·15	2	05·25	4	27·72	4
59·00	2	2396·52	2	2298·28	4
56·30	4	92·35	3 } [1]	94·18	4
55·70	2	92·20	4 }	90·10	2
48·35	4	90·62	4	84·15	4
38 85	4	85·45	4	63·50	4
36·98	4	83·53	4		
31·98	4	77·80	4		

Starke Linien des Rutheniums

(als Nachtrag zu Nr. X).

λ	i	λ	i	λ	i
4709·55	3	4385·60	4	4259·20	4
4647·68	4	72·38	2	46·95	4
4599·30	4	61·40	3	46·55	4
84·60	2	54·32	4	43·20	3
54·71	1	49·90	4	41·25	3
4498·30	4	42·25	4	30·48	4
60·19	2	20·08	4	20·85	4
49·50	4	07·74	3	17·40	3
39·98	4	4297·92	2	14·60	3
28·65	4	96·05	4	12·20	1
10·17	2	94·95	4	06·20	1
4390·60	2	93·48	4	00·05	1
85·85	4	84·50	4	4199·02	4

[1] Früher eine Linie bei 2392·4.

[2] Früher eine Linie bei 2367·0.

λ	i	λ	i	λ	i
4197·78	4	3812·83	4	3593·17	2
97·05	4	00·38	4	89·37	2
67·65	3	3799·42	2	87·34	4
61·80	4	99·05	2	70·74	3
46·92	4	98·18	4	39·40	4
45·95	3	90·62	2	38·03	4
44·35	2	86·27	2	32·95	4
12·95	3	81·25	4	20·22	4
4098·00	3	77·78	4	19·80	4
85·62	4	67·50	4	14·60	4
80·76	2	61·70	4	09·30	4
76·90	4	60·15	4	3499·05	1
68·58	4	60·00	4	81·42	4
54·18	4	56·07	3	73·90	4
51·56	3	53·70	4	37·00	1
24·00	4	45·72	3	33·45	4
22·30	3	44·55	4	33·00	4
3996·10	4	44·35	4	31·05	4
87·95	4	42·95	3	28·60	1
85·00	3	42·45	3	17·45	2
79·58	4	39·60	4	09·42	4
78·61	4	30·65	1	02·00	4
65·05	4	28·15	1	3392·68	4
45·73	4	27·15	1	70·10	4
33·80	4 Ca	26·10	4	69·40	4
31·93	4	19·52	4	68·58	4
26·05	4	17·13	4	59·30	3
23 62	4	3690·19	4	50·30	3
09·22	4	69·79	4	39·72	4
3892·35	4	63·53	4	16·55	4
67·95	3	61·57	1	15·30	3
62·80	3	57·82	4	3294·38	1
57·65	3	54·55	4	68·93	4
50·50	4	50·48	4	64·90	4
39·82	4	37·62	4	60·45	4
31·82	4	35·10	2	28·63	2
25·05	4	26·88	4	01·38	4
22·19	4	25·30	4	3188·45	4
19·15	4	3599·95	2	77·18	1
17·43	4	96·28	2	75·30	4

λ	i	λ	i	λ	i
3175·10	4	2942·40	4	2717·45	3
67·58	4	33·38	4	12·43	2
63·25	4	27·72	3	2692·08	1
60·78	4	16·48	3	78·79	1
60·05	4	09·95	4	67·35	4
47·62	4	02·10	4	61·64	4
43·80	4	2882·24	3	61·20	4
43·40	4	41·81	3	56·35	4
35·98	4	22·62	4	48·95	4
34·98	4	21·48	4	2552·10	4
28·05	4	13·78	4	43·38	2
26·75	4	13·38	4	40·43	4
07·72	4	10·79	3	39·90	4
00·95	4	06·85	4	28·00	4
3099·40	4	2787·95	3	19·32	4
96·65	4	85·92	4	18·55	4
94·00	3	78·48	3	17·38	4
64·95	4	75·70	4	13·40	4
56·92	3	72·58	4	08·80	4
49·32	4	69·02	3	07·16	3
36·53	2	65·55	4	2493·80	4
17·32	4	65·25	4	81·30	4
06·75	4	52·94	4	79·02	3
2998·99	3	52·59	4	56·70	4
91·66	2	48·08	4	56·60	4
89·02	4	45·93	4	55·68	4
80·05	3	45·22	4	35·62	4
79·80	3	44·62	4	02·90	2
78·72	4	44·10	3	2396·90	4
77·25	4	43·62	4	82·18	4
76·62	1	36·98	4	75·80	4
65·72	2	34·44	2	58·95	4
63·50	4	25·55	2	58·10	3
45·82	1	24·95	3	43·03	4

Starke Linien des Osmiums

(als Nachtrag zu Nr. XI).

λ	i	λ	i	λ	i
4550·58	2	3560·02	3	3014·00	4
4420·66	1	28·80	3	2971·10	4
4395·08	2	23·87	4	49·62	3
65·83	4	04·85	4	48·30	4
28·83	3	3402·00	4	43·03	4
11·55	2	3397·12	4	19·85	2
4294·05	1	70·70	3	12·40	2
60·98	1	3269·38	4	09·05	1
12·02	1	68·10	2	2873·30	2 (Pb)
4175·78	2	67·40	2	61·00	4
73·35	2 [1]	63·00	4	50·82	4
35·93	1	62·48	2	44·42	3
12·12	2	47·80	4	38·70	2
4091·98	4	32·20	1	2731·38	4
66·82	1	13·50	1	08·25	4
3977·33	4	3186·50	4	2689·85	4
63·80	3	74·03	2	58·68	3
3876·95	4	66·65	4	44·13	4
3794·02	4	65·82	2	37·12	3
90·26	4	56·35	1	2580·08	4
82·34	2	3077·82	4	38·10	4
52·68	1	62·23	4	2488·65	4
3692·75	4	58·76	1	86·28	4
40·48	4	42·83	2	68·92	4
39·73	2	41·00	2	23·13	4
04·62	4	30·82	2	2367·40	3
3561·08	2	18·13	2	2282·41	4

[1] In Folge eines Druckfehlers war die Intensität dieser Linie früher = 6 angegeben.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(VII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Pb, Zn, Sn, Cd, Al, Mg)

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad. und **E. Haschek.**

(Mit 6 Tafeln.)

XIV. Blei.

(Taf. I.)

Das Funkenspectrum des Bleies wurde schon von Hartley und Adeney[1] gemessen, das Bogenspectrum von Liveing und Dewar,[2] sowie von Kayser und Runge.[3] Leider sind nur die letzteren Messungen verlässlich. Zwischen Funken- und Bogenspectrum zeigen sich grosse Unterschiede; selbst von den stärksten Linien ($i = 1$) bei uns fehlt im Bogenspectrum ungefähr die Hälfte; aber auch das umgekehrte Verhalten kommt bei einigen starken Linien vor. Wir haben 184 Bleilinien gemessen. An Verunreinigungen hatten wir in sehr geringer Menge Fe, Ca und Cu und vielleicht Ag und Mg. Das verwendete Blei war von Trommsdorff bezogen.

---

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1883)

[2] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1882).

[3] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1893).

λ	i	λ	i	λ	i
4590·8	6+ br.	3694·2	6+	3335·8	6+
72·0	6+ br.	89·2	5+	25·2	6+ br.
4387·0	1+ 5 AE.	83·60	1+ u.	18·5	6+ br.
43·5	6+	76·7	5	08·5	5+ 3 AE.
41·0	6+ br.	71·71	2+	3297·9	5+ br.
4272·4	5	55·6	5+ br.	88·5	6+ br.
45·2	1 u.	50·0	6	85·9	6+
4182·3	5+	39·72	1 u. 2 AE.	84·7	6+
68·18	3	27·3	6+	83·8	6
42·0	6+ br.	24·7	6+	79·3	5
13·8	6+	21·5	6+ br.	76·5	4+ br.
4095·0	6+	10·0	6+ br.	74·1	5 Cu
62·30	3	3593·1	5+	69·6	6
58·05	1 u. 3 AE.	88·1	6+	67·3	6+
42·0	5+ 4 AE.	86·5	6+ br.	62·5	6
19·74	2	72·95	1+	60·8	6+
04·4	6+	63·2	6+ br.	55·1	6+
3962·5	6+	47·0	6+	54·7	6+
57·6	6	43·0	6+ 3 AE.	47·7	5 Cu
52·1	5	34·4	6+	42·98	3
44·2	6	30·8	6+ br.	40·4	5
33·8	6 Ca	15·0	6+ br.	29·8	6+
28·0	6+ br.	11·0	6+	27·2	6+
09·8	6+	3492·0	6+	21·4	5
04·5	6+	83·7	5+ br.	20·7	5
3863·8	6+	55·0	4+ 5 AE.	3190·9	6
54·05	1	3395·0	6+	76·58	1
42·0	4+ 2 AE	85·7	6+	46·5	6+ br.
38·3	6	83·0	6 Ag?	37·85	1
33·0	2+	74·0	6+	29·7	6+
27·8	5+ br.	70·5	6+	19·1	6
3786·37	1+ 2 AE.	63·9	6+	09·0	6+
71·2	6+	61·2	6+ br.	03 1	5+ br.
48·0	6+	58·5	6+ br.	3089·2	3
40·10	1+	56·2	6+ br.	87·1	4
36·5	6+ br.	50·5	6+ br.	80·7	6+
19·5	6+ 3 AE.	46·8	6+	71·7	6+ br.
15·0	6+ 3 AE.	44·7	6+	62·4	6+
06·7	6+	42·3	6+	61·3	6+
3696·6	6+	40·7	6+	59·3	6+

λ		λ	i	λ	i
3052·7	5	2795·6	6 Mg?	2476·48	2
47·2	6	53·8	6+	61·8	6+ br.
43·96	2	48·0	6+	46·33	3
31·7	5	45·8	6+ br.	45·5	6+
18·0	5+ 4 AE.	34·0	6+	44·01	3
10·3	6+	17·4	5+ 2 AE.	33·6	6
02·9	6+	2697·5	5+ 2 AE.	32·0	6
2983·7	6+	63·27	1	28·7	5
78·7	6+ 2 AE.	57·3	6	24·1	6+
73·0	6+	50·3	4+ 3 AE.	18·6	6+
60·0	6+	38·3	6	11·7	5
50·0	5+ 5 AE.	37·8	6	07·3	6+
27·0	6+ br.	28·3	5 Fe?	02·0	5
24·5	6	14·22	1 u.	2393·9	4 u.
2884·0	6+ br.	2577·32	2	88·9	6
73·41	1	72·1	6	85·9	6
64·49	3	68·4	5	69·9	6 Cu
52·3	6 Mg?	62·27	2	32·5	6
33·18	1 u.	35·0	6+ 5 AE.	2247·0	6+
23·28	1	27·0	6+ 3 AE.	37·5	6+
17·5	6+	2497·3	6+	04·0	6+ } u.?
11·5	6+ br.	93·5	6+ br.	03·3	6+ }
02·12	1 u.	78·5	6		

XV. Zink.

(Taf. II.)

Das Funkenspectrum des Zinks ist gemessen von Hartley und Adeney,[1] das Bogenspectrum von Liveing und Dewar,[2] von Ames[3] und von Kayser und Runge.[4] Auch das Zink zeigt zwischen Bogen- und Funkenspectrum starke Abweichungen, auch bezüglich der stärksten Linien. Wir haben 254 Linien gemessen und an Verunreinigungen Pb, Cu, Fe und Ca gefunden. Das Zink war als chemisch rein von Merck bezogen.

---

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1883).
[2] Liveing und Dewar, Proc. Roy. Soc. (1879).
[3] Ames, Phil. Mag., Bd. 30 (1890).
[4] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

λ	i	λ	i	λ	i
4722·37	1	3777·0	6+ br.	3531·3	5+ br.
09·5	6+	71·1	6+ br.	17·1	6+
4680·40	1	57·0	6+ br.	15·7	6+ br.
67·5	6+	52·2	6+	10·5	6+
30·2	5+	40·6	6+ br.	03·5	6+
08·2	6+	40·1	6+ Pb	00·0	6+
4565·3	6+	32·5	6+	3492·7	6+ br.
10·7	6+	20·7	6+ br.	81·3	6
4453·2	6+	20·0	6+ (Fe)	80·5	6+ br.
43·5	6+	12·8	5	67·8	6
05·0	6+ br.	03·8	5+ br.	66·3	6
4355·5	6+	3695·5	6+	21·5	6
4298·5	6+ br.	93·6	6+	04·7	6
94·0	6	83·8	5+ br.	03·7	6
93·0	6	83·6	5 Pb	3394·5	6+ br.
00·0	6+ br.	68·6	5+ br.	74·2	6+ br.
4195·7	6+ br.	62·0	6+ br.	73·2	6+ br.
48·2	6+	58·0	6+ br.	45·40	1+ u. [1]
4057·9	5 Pb	48·0	6+ br.	02·90	1+ u. [2]
00·7	5+	39·8	6 Pb	3282·40	1
3989·7	5+	34·9	6	74·0	5 Cu
88·6	5+	32·3	5+ br.	68·9	6
68·6	6 Ca	24·5	5+ br.	63·7	6+
68·0	6+	20·8	6+	61·2	6
50·5	6+	15·5	6+ 2 AE.	56·5	5+ 3 AE.
33·8	6 Ca	13·0	6+	50·5	6
3883·3	6+	10·6	5	47·6	6 Cu
71·5	6	09·8	6	40·5	5+ 3 AE.
70·0	6	3581·2	6+ 2 AE.	33·2	5+ br.
63·6	6+	77·0	6+ 2 AE.	16·6	6
20·8	6	62·8	6+ br.	10·5	6+ br.
20·4	6	53·2	6	07·7	6 u.
13·3	6+ 2 AE.	46·7	6+ br.	3183·1	6
06·0	6+ 5 AE.	39·4	6+ br.	78·2	5+ 2 AE.
01·5	6+ br.	37·3	6+ br.	71·5	6+

[1] Kayser und Runge haben dafür zwei Linien bei 3345·13 und 3345·62; die Componenten unserer Linie stehen bei 3345·10 und 3345·68.

[2] Kayser und Runge haben zwei Linien bei 3302·67 und 3303·03; die Componenten unserer Linie stehen bei 3302·57 und 3303·05.

λ	i	λ	i	λ	i
3158·8	6+	01·7	6	2670·6	6+
56·5	6+	2891·8	6+ 2 AE.	58·0	5+
53·5	6+	87·3	5+ 2 AE.	27·0	6
50·2	6+ 2 AE.	84·0	6+ br.	08·7	5+ br.
48·3	6+	78·8	6+	01·2	6+ br.
46·7	6+	73·4	6 Pb	2593·2	6+
45·7	6+	72·2	6+ br.	86·4	6+ br.
30·0	6+ 2 AE.	57·7	5+ br.	82·6	5+ br.
21·5	6+ br.	33·1	6 Pb	2576·0	5+ br.
18·7	6+	32·6	6	70·6	5
11·5	6+ 2 AE.	23·9	6+	70·0	6+
05·5	6+ 2 AE.	01·00	2	67·0	6
02·0	6+ 2 AE.	2783·0	6+	58·06	1
3096·7	6+	79·2	6+	50·8	6+
93·0	6 u.	71·04	2	49·2	6+
75·99	2	64·0	6+ br.	47·5	6+
72·22	1 [1]	56·6	3	45·7	6+
59·4	6+ br.	53·2	6	44·0	6+
55·0	6+ br.	52·8	6	42·5	6+ br.
47·2	6+	51·5	6+ br.	39·5	6+
35·94	2 [1]	49·4	6	36·8	6
24·5	6+	48·9	6+	36·0	6
18·5	4 [1]	45·3	6+	34·9	6
02·5	6+ br.	37·0	6+ 2 AE.	33·5	6
2998·0	5+ br.	34·0	6+ 2 AE.	32·3	6
94·4	6	25·0	6+ br.	30·4	6
93·5	6+	20·9	6+ br.	27·2	5+ br.
92·5	6+ br.	18·9	6	20·3	6+
90·3	6	16·5	6+ br.	19·2	6+
84·8	6	14·1	6+	18·6	6+
83·7	6+ br. (Fe)	12·5	5	15·8	5+
77·3	6+ br.	06·6	6+	15·1	6+
73·2	6	03·8	6+	12·5	6+
67·0	6	01·2	6+ br.	09·1	5+
65·0	6+	2699·2	6	08·0	6
60·3	6+ br.	95·9	6	02·12	1
42·2	6	84·3	5+	2496·9	6+
35·0	6 u. 1·5 AE.	80·7	6+ br.	96·2	6+

[1] Nach Roth verwaschen.

λ	i	λ	i	λ	i
2492·1	5+ br.	2442·1	5	2393·2	6+ br.
91·2	5+ br. d.	39·5	6	90·0	5
87·0	5	38·3	6+	89·7	6+
86·2	5	37·6	6+	87·2	6+ br.
84·6	6+ d.	34·5	6+	84·1	6+ br.
80·0	6+ br.	33·2	6+	82·0	6+
76·7	6+ (Pb)	30·4	6+	71·5	6+ br.
73·3	6+	27·1	5	2287·9	5
72·6	6+	23·5	5+	64·9	5
69·0	6+	22·1	6	52·8	6
67·2	5+	20·9	6	2144·3	6
60·3	6	15·5	6+ br.	2099·7	6+
50·4	6	08·5	5+ br.		
45·0	6	2396·6	6+ br.		

XVI. Zinn.

(Taf. III.)

Das Funkenspectrum ist gemessen von Hartley und Adeney,[1] das Bogenspectrum von Liveing und Dewar,[2] sowie von Kayser und Runge.[3] Auch hier stimmen Funken- und Bogenspectrum keineswegs überein, wenngleich der Unterschied nicht so auffallend ist, wie bei den vorhergehenden Metallen. Das Zinn war von Merck bezogen und erwies sich mit Fe und Ca schwach verunreinigt, das Vorkommen von Ni und Pb in demselben ist fraglich. Die Zahl der von uns gemessenen Zinnlinien betrug 140.

λ	i	λ	i	λ	i
4618·3	6+	4226·9	6 Ca	3968·6	6 Ca
4585·8	4+	16·0	6+ br.	62·9	5+ br.
24·93	1	4101·7	6+	56·3	5+ br.
4330·0	6+	3973·5	5+	33·8	5 Ca

[1] Hartley und Adenay, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).
[2] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).
[3] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1893).

λ	i	λ	i	λ	i
3907·43	2+ 2 AE.	3246·3	5+ br.	2813·67	3
3897·9	6+	43·1	6	12·7	5
83·4	6+	27·5	6+	02·7	6
61·1	5+ 2 AE.	26·3	6+	02·0	6 Pb?
01·15	1 2 AE.	23·6	6	2795·6	6 Ni?
3783·8	5+ 2 AE.	18·8	5	89·0	6+
79·6	5+ br.	3192·2	6+	88·2	6+
64·7	5+ br.	75·17	1 u. 5 AE.	85·1	5
46·0	4+ 3 AE.	41·92	2	79·87	2
35·0	5+ 2 AE.	23·3	5+ br.	06·68	1 u.
30·0	5+ br.	14·6	6+ br.	2669·5	6
08·3	4+ 3 AE.	3096·2	6+ 2 AE.	65·8	5+
3687·0	6+ 4 AE.	71·90	4	65·3	6
66·0	6+ 8 AE.	67·9	6	61·4	5
55 91	2	47·3	5+ br.	58·87	1
39·8	6	42·9	6	46·4	5
09·5	5+ br.	36·6	6	43·77	1
3599·0	4+ 2 AE.	34·22	1 u.	32·10	2
73·8	3+	33·0	1 [2]	18·9	6+ br.
50·6	5+	23·8	6+ br.	2594·48	4
24·7	6 Ni?	09·27	1 u. 3 AE.	93·0	5+ br.
15·2	6 Ni?	2990·7	6+	71·6	2+
3495·5	6	39·0	6+ 2 AE.	46·75	3
88·0	6+ 2 AE.	13·60	2 2 AE.	24·1	6
73·0	6+ 4 AE.	2896·17	2 2 AE.	2499·3	6+
12·9	5+ br.	87·8	3	95·80	3
3395·9	6	79·0	6+ br.	88·0	6+ 3 AE.
92·4	6+ br.	76·0	6+ 2 AE.	83·52	3
69·0	6 u.	63·47	1 u. 2 AE.	55·3	6
52·5	1+ 8 AE.	50·68	2	50·0	6+ 2 AE.
30·75	1	48·7	5+ br.	37·0	6
22·5	6	40·07	1 u. 3 AE.	33·5	6+
14·2	5+ br.	34·5	6+	29·6	2 u.
3283·6	1+ 5 AE.	33·2	6 Pb?	21·8	2 u.
62·48	1 u. 4 AE. [1]	25·5	6+ br.	08·2	6
52·1	6	23·4	6+ br. (Pb)?	01·5	6+
47·6	5	15·6	6+	2368·24	4

[1] Nicht Blei.
[2] Nicht Arsen.

λ	i	λ	i	λ	i
2364·9	6 (Fe)?	2286·8	6+	2251·6	6+ br.
58·0	6+	82·5	6+	46·1	6+ br.
54·95	4 u.	69·0	6+ br.	29·3	6+
34·9	5	67·3	6+	21·0	6+ br.
30·9	6+	66·1	6	2199·5	6+ br.
19·5	6	56·4	6+	94·6	6+ br.
17·3	5+ u.	54·0	6+ br.		

XVII. Cadmium.

(Taf. IV.)

Das Funkenspectrum des Cadmiums wurde gemessen von Hartley und Adeney,[1] von Bell[2] und von Eder und Valenta,[3] das Bogenspectrum von Kayser und Runge.[4] Funken- und Bogenspectrum stimmen auch hier nicht überein, wie schon von Eder und Valenta hervorgehoben wurde. Wir haben 179 Linien gemessen und konnten Fe, Ca und Pb als schwache Verunreinigungen nachweisen. Das Metall war von Merck bezogen.

λ	i	λ	i	λ	i
4800·05	1	4287·5	6+ 4 AE.	4052·4	6
4678·32	1	45·7	6+ br.	30·0	5+ 5 AE.
37·1	6+	30·0	6+ 4 AE.	18·6	6+
27·8	6+	17·2	6+ 2 AE.	09·4	6+
24·4	6+	4164 0	6+ br.	3977·5	6+ 3 AE.
4443·8	6+ br.	58·3	6+ br.	68·6	6 Ca
28·2	6	33·2	5+ 2 AE.	59·5	6+ br.
15·87	2	27·5	5+ 2 AE.	50·8	6+
13·3	6	15·0	6+ br.	40·7	6+ 2 AE.
4307·4	6+	4095·0	5+	33·8	6 Ca
07·0	6+	58·0	5 Pb	3899·8	6+

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1883).
[2] Bell, Am. Journ. Sc. (1886).
[3] Eder und Valenta, Denkschr. Wien. Akad. (1894).
[4] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

λ	i	λ	i	λ	i
3889·4	6+	3264·5	6+	3113·0	6+
65·6	6+	63·5	6+	3095·55	4+
27·0	6+	61·19	2	92·3	6+
09·5	6+ 3 AE.	52·7	3 2 AE.	89·2	6+
3775·9	6	50·41	2	88·5	6
54·9	6+	36·8	6+	85·05	4+
44·5	6+	24·3	6+	80·97	4
40·2	6 Pb	21·6	6+	77·2	6+
29·8	6+	16·7	6+ br.	74·0	6+
22·5	6+	15·9	6+ br.	69·0	6+ br.
3683·6	6 Pb	12·1	6+	65·1	5+ br.
49·7	6+	10·1	6+ br.	59·3	6+
14·6	4	01·9	6+	53·3	6+ br.
13·05	2	3197·9	6+	49·0	6+ br.
10·72	1 u.	96·2	6+	35·9	6+
3572·9	6 Pb	85·6	5+	25·0	6
35·82	3	83·0	6+	17·5	6+ br.
19·3	6	78·8	6+ br.	14·4	6+ br.
00·1	6	76·8	6+ (Pb)	11·4	6+ br.
3497·5	5+ 5 AE.	74·4	6+	09·0	6+
85·9	6+	73·6	6+	04·1	6+
67·75	2	61·9	5+	2996·2	6+ br.
66·33	1 u.	60·9	6+	87·3	6
23·4	6+	57·2	6+	81·5	3 } [1]
03·58	1 br.	41·6	6+	80·8	2 }
3394·6	6+ u.	37·7	6+ (Pb)	71·3	6+
85·5	6+ br.	33·3	4	61·4	6+ br.
63·0	6	29·3	5+ br.	52·0	6+
3299·1	6	27·8	6+	10·9	6+
86·0	6+	24·5	6+	2881·3	3 } [2]
83·8	6+	21·9	6+	80·9	2 }
77·0	6+ br.	19·0	6+	68·5	6+ br.

[1] Es ist fraglich, ob die beiden Linien nicht die Componenten einer umgekehrten Linie $i = 1$ sind; in diesem Falle stünde die Linie bei $\lambda = 2981 \cdot 05$. Kayser und Runge geben zwei Linien an bei 2981·46 und 2980·75. Eder und Valenta haben nur die letztere.

[2] Wie bei Anmerkung 1; ist die Linie umgekehrt, so steht sie bei $\lambda = 2881 \cdot 02$. Kayser und Runge führen zwei Linien an bei 2881·34 und 2880·88. Eder und Valenta haben auch hier nur die letztere.

λ	i	λ	i	λ	i
2837·05	4	2633·3	6+	2418·4	6
34·2	6+	29·4	6	2376·9	6
05·6	6+	19·0	5	75·1	6
02·0	6 Pb	14·2	6+ (Pb)	68·1	6
2795·6	6 Mg?	01·5	6	43·6	6
80·4	6+	01·4	6	29·4	5
75·4	6+ br.	2592·1	6	26·2	6
71·7	6+ br.	80·4	6+ br.	21·2	4
67·1	5	73·17	1	12·9	3
64·0	6+	52·3	6+ br.	06·7	5
48·71	1 5 AE.	46·0	6	2288·1	5 u.
34·0	6+ br.	00·0	6	67·5	6
27·2	6+	2495·6	6+ br.	65·1	5 u.
12·6	6+ 2 AE.	88·1	6	49·0	6
07·1	5	83·4	6	40·0	6
2689·3	6+ br.	79·9	6	24·4	6+
77·8	6+ br.	69·9	5	04·2	6+
68·4	6	33·6	6+	2194·7	6+ br.
63·2	6+ (Pb)	26·5	6	44·5	6+ u.
39·8	6+ 2 AE.	18·8	5		

XVIII. Aluminium.

(Taf. V.)

Das Funkenspectrum des Aluminiums ist gemessen von Hartley und Adeney,[1] das Bogenspectrum von Liveing und Dewar[2] und von Kayser und Runge.[3] Wir haben 300 Aluminiumlinien gemessen.

Das Metall war von Merck bezogen und zeigte sich mit Fe stark, mit Ca und Si wenig verunreinigt.

---

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).
[2] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).
[3] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1892).

λ	i	λ	i	λ	i
4673·6	6+	3910·0	6	3854·8	6
69·8	6+	08·5	6	52·6	6
67·3	6+	06·8	6	47·6	6+
63·5	5+ br.	06·2	6	33·3	6
23·4	6+	05·6	6	32·5	6
4584·7	6+	05·2	6	26·9	6
79·5	6+	04·2	6	15·3	6
66·0	6+	02·2	6	14·7	6
45·0	6+	00·7	5 [3]	14·0	6
13·2	4+ br.	00·1	6	13·1	6+ br.
11·0	6+	3899·0	6	10·2	6+ br.
4488·5	6+	98·6	6	07·3	6+ br.
80·0	6+ 4 AE.	97·9	6	04·2	6
66·7	6+	97·3	6	01·1	6+
00·3	6+	96·6	6	3791·9	6
4371·0	6+	96·0	6	88·8	6
4278·0	6+	95·4	6	85·4	6
00·0	6+ 2 AE.	94·8	6	82·3	6
4195·8	6+ br.	92·1	6	81·3	6+
93·0	6+	90·6	6	79·2	6
4089·4	5+ br.	89·2	6+	78·0	6+
61·0	5+ 2 AE.	87·6	6+	76·0	6
09·2	6+	86·1	6+	75·2	6
3986·9	6+	84·4	6+	74·2	6+
68·6	6 Ca	83·3	6+	72·2	6+
64·7	6+	80·9	6	71·2	6+
61·65	1 [1]	79·4	6	69·1	6
44·15	1 [1]	77·3	6+ br.	68·9	6
36·0	6	75·5	6+ br.	57·3	6+ L?
33·8	6 Ca	73·6	6	54·7	6+ L?
28·7	6+	71·8	6+	51·5	6
14·3	6 [2]	69·7	6+	40·3	6+ 2 AE.
13·8	6	68·8	6+	29·8	6
11·1	6	67·7	6	22·6	6
10·5	6	62·7	6+	13·8	5+ br.

[1] Nach Roth verwaschen.

[2] Kante einer Bande, der die folgenden Linien bis 3884·4 angehören und die auch im Pd, Ir und Rh beobachtet wurde.

[3] Gehört nicht zur Bande.

λ	i	λ	i	λ	i
3707·6	6+ br.	3413·0	6+ br.	3285·8	5
02·7	5+ br.	10·1	6+ br.	84·5	6
3691·1	6	3383·8	6	83·8	6
85·3	6	74·2	6+	82·0	6+ br.
38·0	6	72·9	6	81·3	6
12·68	2	61·2	6	78·4	6+ br.
10·0	6+	60·3	6+	76·0	6+ br.
01·95	1	58·5	6+ br.	74·1	5
3594·4	5+	55·7	6+	71·5	6+ br.
87·02	1+ 2 AE.	51·0	6+ br.	67·6	6
65·6	6+ br.	49·5	6	67·3	6+
64·0	6	49·1	6	61·6	6
61·7	6+ br.	46·8	6+	60·8	5+ br.
51·8	6+	44·8	6+	59·1	6+ br.
49·0	6+	42·5	6	54·3	6+ br.
46·4	6+ br.	40·9	6+	53·0	6+ br.
44·0	6+ br.	36·3	5+ br.	52 0	6+ br.
42·3	6+ br.	25·1	5+	48·6	6
39·4	6+	23·1	6	47·6	5
35·8	6+	20·3	5+ br.	42·1	6
34·5	6+	18·7	5+ br.	41·2	6+
32·8	6+	14·5	6+ 2 AE.	39·1	6
27·3	6+	12·5	6+	38·7	6
22·6	6+	11·3	6+	36·6	6
21·6	6+	08·0	6+ br.	34·6	6
14·9	6+	07 0	6+ br.	18·5	6+ br.
14·3	6+	05·7	6+ br.	17·2	6+ br.
11·5	6+ br.	03·5	6+	02·6	6
05·0	6+	01·9	5	3191·0	6
03·6	6+	3298·8	6+	68·7	6
3499·7	6+	97·5	6+	58·6	6
98·6	6+	96·5	6+	40·0	6+ br.
92·0	6+ br.	95·8	6+	38·9	6+ br.
88·3	6+	95·5	6+	32·7	6+
87·1	6+	94·1	6+	30·0	6+ 2 AE.
80·6	6+ br.	93·5	6+	23·0	6+ br.
75·7	6+	92·5	6+	21·8	6+
55·0	6+ br.	91·5	6+	08·0	6+
41·1	6	90·5	6+	02·3	6+
40·7	6	88·0	5+ br.	3092·85	1 [1]

[1] Nach Roth verwaschen.

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
3082·27	1	16·40	1	16·2	5 Si
66·27	2	2733·7	6+	11·0	6
64·52	2	2669·3	6	07·1	6 Si
60·0	6	64·2	6	2483·5	6
57·35	2 [1]	60·5	5 [1]	75·1	6+ br. d.?
54·85	2	52·6	5	59·9	6+ •
50·25	2 [1]	37·5	6+ 2 AE.	33·6	6
47·2	6+	32·0	3 + br.	2378·5	6+
43·0	6+	10·7	6	75·3	6+
35·6	6+	10·2	6	73·3	5+ br.
24·8	6+	02·1	6	72·0	5+
24·2	6+	01·4	6	70·2	6+
23·6	6+	2595 9	6	69·3	6+
17·7	6	94·8	6	68·0	6+
2983·7	5+	89·6	6	67·6	6+
67·1	6 Fe?	89·4	6	67·2	5+
59·8	6	82·7	6	48·2	6
43 8	6+	79·0	6+ br.	44·2	6+
43·2	6+	75·5	5	43·5	6
35·6	6+ br.	75·25	4 [1]	33·6	6+
27·8	3+ br.	68·1	5 [1]	32·7	6+
2881·63	4 Si	28·6	6	13·5	6+
37·9	6+	24·2	6	2283·8	6+
24·0	6+ br.	18·2	6+	69·2	6+

XIX. Magnesium.

(Taf. VI.)

Das Funkenspectrum ist gemessen von Hartley und Adeney,[2] Funken- und Bogenspectrum von Liveing und Dewar,[3] das Bogenspectrum allein von Kayser und Runge.[4] Hier ist der Unterschied zwischen den beiden Spectren wieder ein sehr auffallender. Ganz starke Linien, wie die bei λ = 4481·3 AE. fehlen im Bogenspectrum vollständig, schwächere, aber

[1] Nach Roth verwaschen.

[2] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).

[3] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).

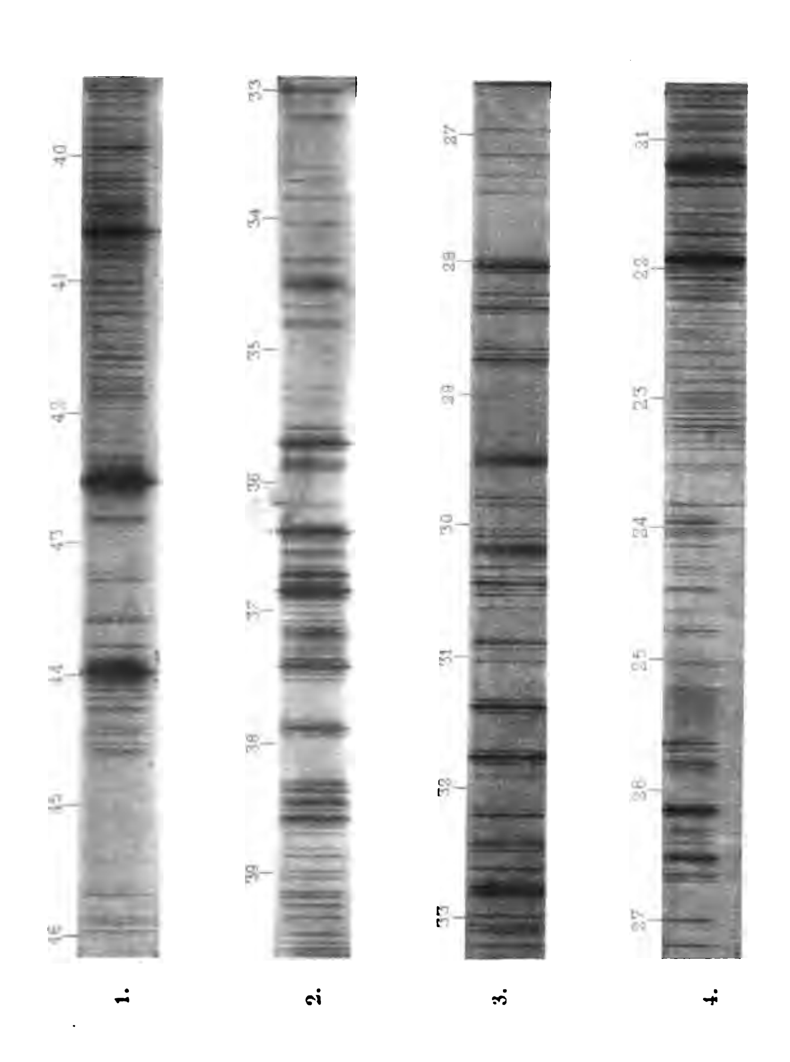
[4] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

scharfe Linien finden sich dagegen in beiden. Wir haben im Magnesiumspectrum 128 Linien gemessen. Verwendet wurde gewöhnliches Magnesiumband; es zeigte sich mit Fe, Mn und Ca verunreinigt.

λ	i	λ	i	λ	i
4703·5	6+ 2 AE.	3895·8	3+	3332·30	2+
4654·7	6+	92·2	4+	30·1	3+
37·0	6+	83·3	6+	20·0	6+ br.
24·4	6+	65·7	6+	18·6	6+ br.
4584·0	6+ 4 AE.	54·5	4+	01·8	6+ br.
71·3	6	49·6	4+ 2 AE.	3290·5	6+ br.
52·0	6+ 2 AE.	38·5	1 u. 3 AE.	78·5	6+ br.
11·0	6+	32·5	1 u. 3 AE.	74·2	6
4481·3	1+ 20 AE.	29·5	1+	71·7	6+ br.
21·2	6+	3771·1	6+	67·5	6+ br.
08·8	6+	57·2	6+	61·0	6+ br.
4368·0	5+	54·9	6+	47·7	5
52·2	5+	45·7	6+	3179·5	6+ br.
23·0	6+	44·5	6+	32·7	6+ br.
13·8	6+	32·5	6+ br.	3097·3	5+ 2 AE.
4227·0	6 Ca	25·0	6+	93·3	5+ 2 AE.
07·0	6+ 3 AE.	24·0	6+	91·3	5+ br.
00·0	6+ 2 AE.	22·0	6+	74·1	5+ br.
4196·0	6+ 2 AE.	20·8	6+	59·3	6+
67·7	6+	15·3	6+ br.	47·2	6+
4066·7	6+	07·5	6+ br.	2983·8	6+ br.
64·2	6+	3680·0	6+ br.	59·9	6+
34·6	6 Mn	37·7	6+	49·4	6
33·2	6 Mn	27·3	6+ br.	42·2	6+ br.
30 8	6 Mn	09·6	6+	36·88	1+ 2 AE.
20·7	6+ 3 AE.	3589·0	6+ br.	28·93	1+ 2 AE.
00·7	6+	46·3	6+ 2 AE.	22·7	6+ br.
3978·8	6+	42·0	6+ 2 AE.	15·58	2
68 6	6 Ca	11·3	6+ br.	2881·9	6
50·5	6+	3492·0	6+ br.	52·23	2 u.
44·3	6	80·5	6+ br.	02·80	1 u.
33·8	5 Ca	71·2	6+ br.	2798·18	2 u.
28·5	6+	3374·2	6+ br.	95·63	1 u.
24·6	6+ br.	58·8	6+ br.	90·85	1+ 2 AE.
22·1	6+ br.	36·88	2+ 2 AE.	83·03	4

λ	i	λ	i	λ	i
2781·47	4	2610·3	6	2524·3	6+
79·95	3	05·7	6	16·1	6
78·35	4	2593·7	5	11·9	6+
76·80	4	79·7	6+	06·9	6
44·0	6+	76·0	5	2483·2	6
37·0	6+ 2 AE.	63·7	6+	82·0	6
33·8	6+ br.	38·9	6	33·6	6+ br.
2660·0	5+ 10 AE.	30·5	6+ 2 AE.	24·0	6+ br.
31·6	6	28·6	6+	03·0	6+
18·2	6	25·6	6+		

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

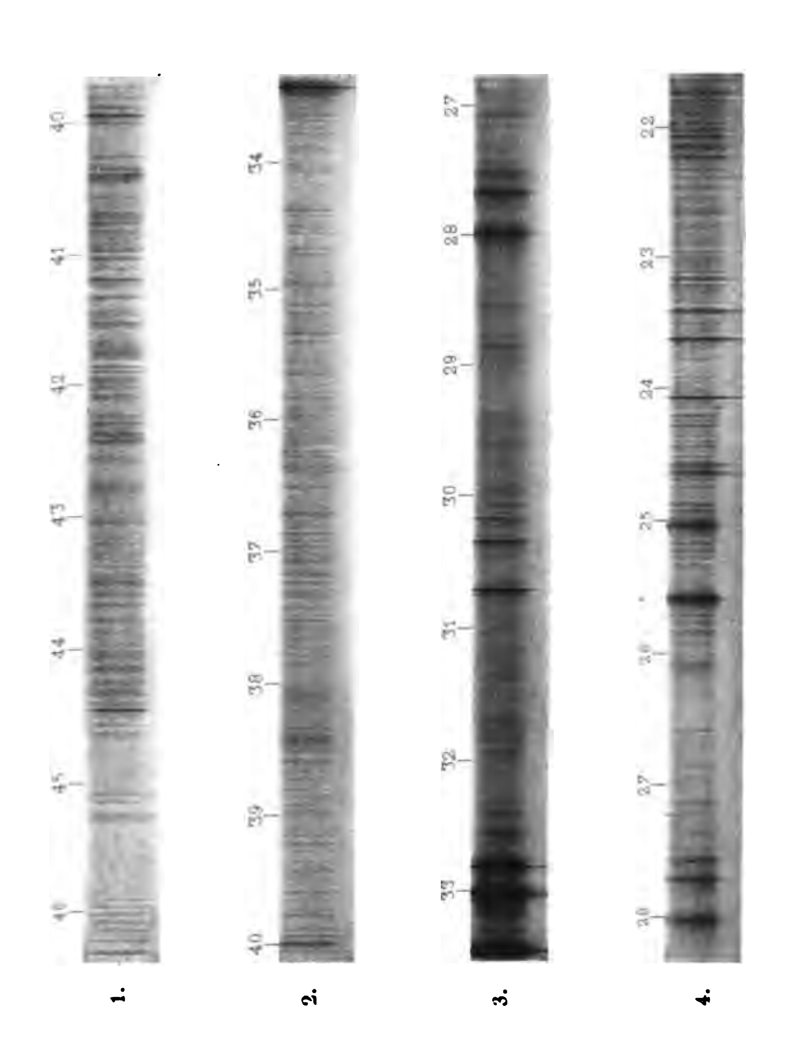


Blei.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

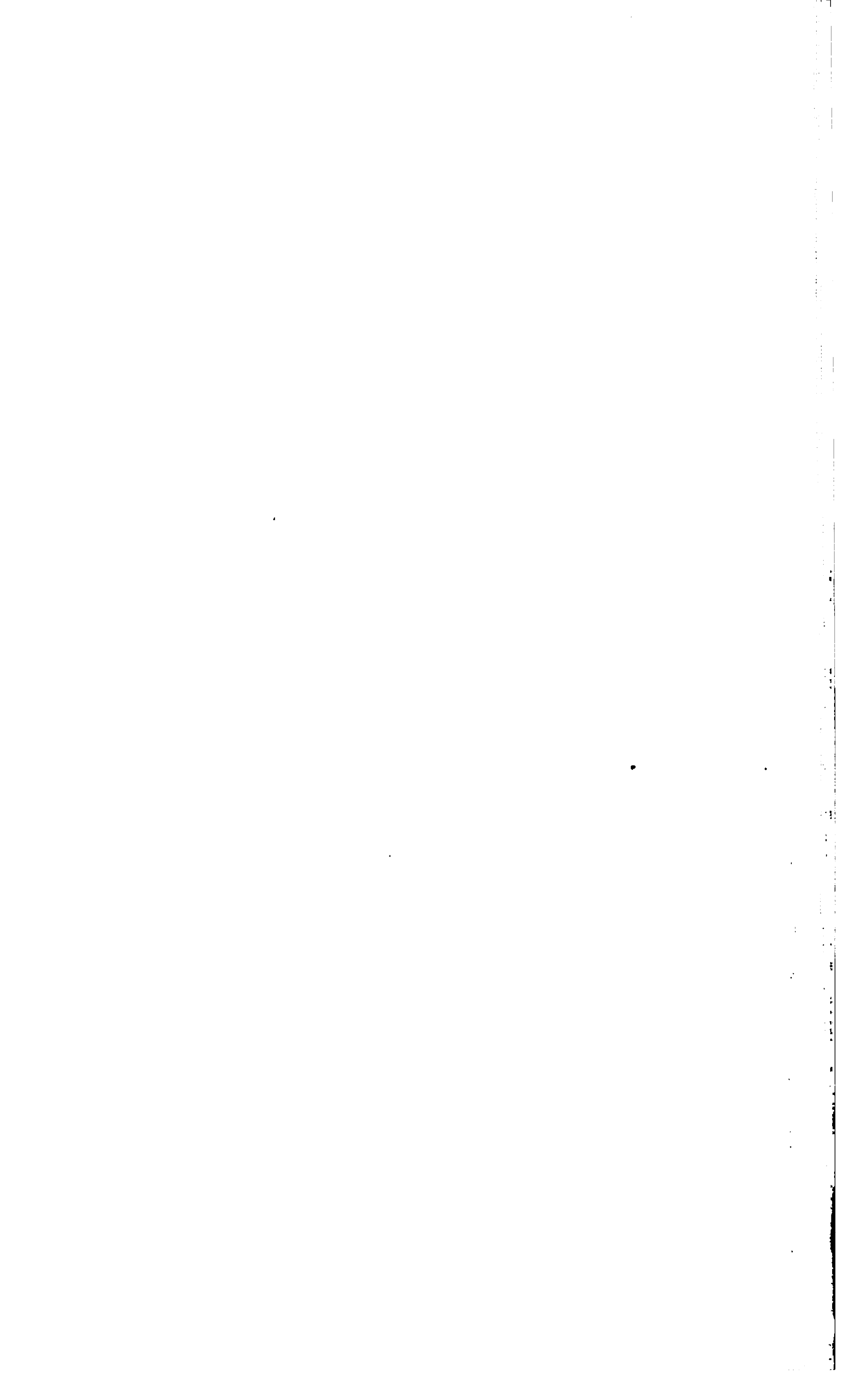


F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

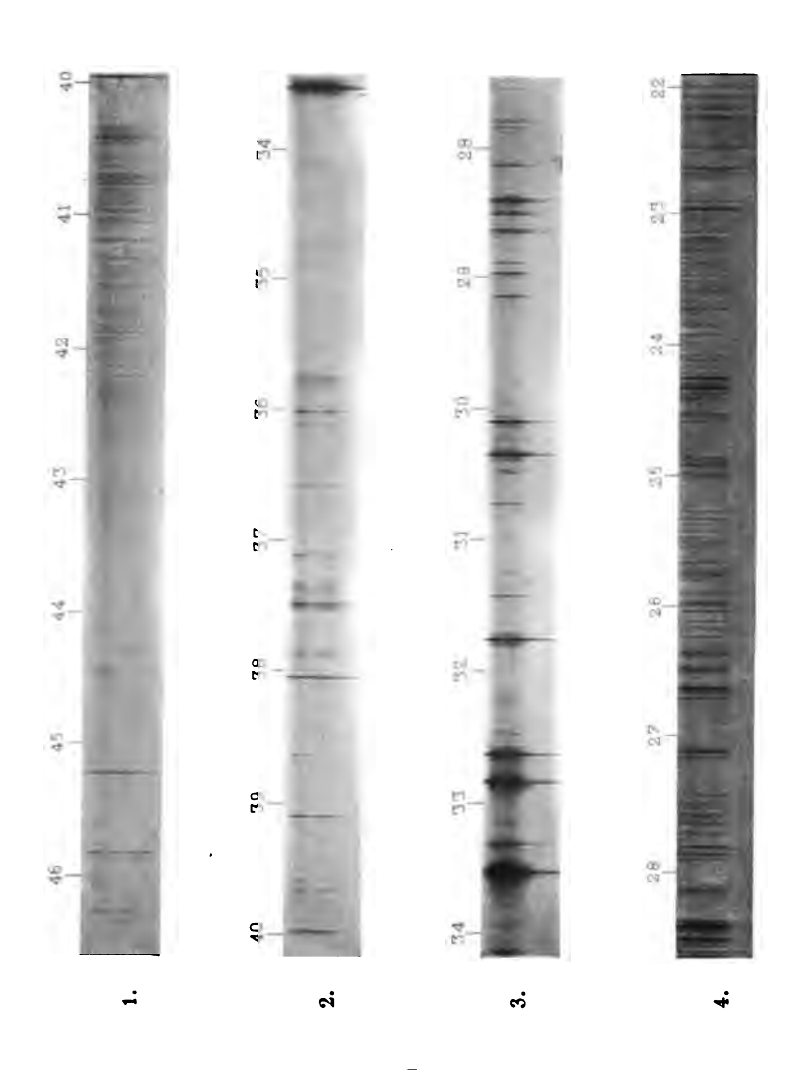


Zink.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



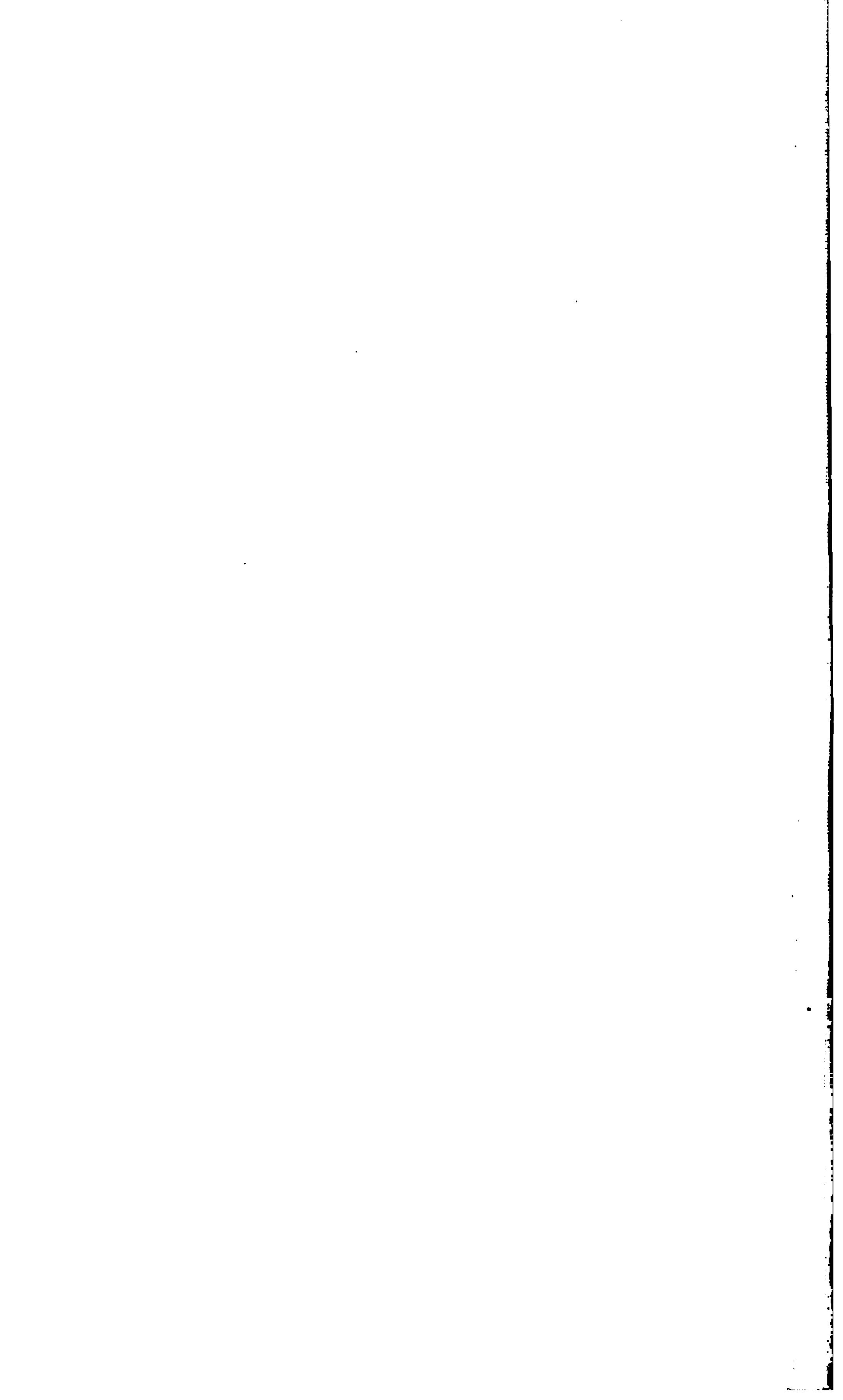
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



1. 2. 3. 4.

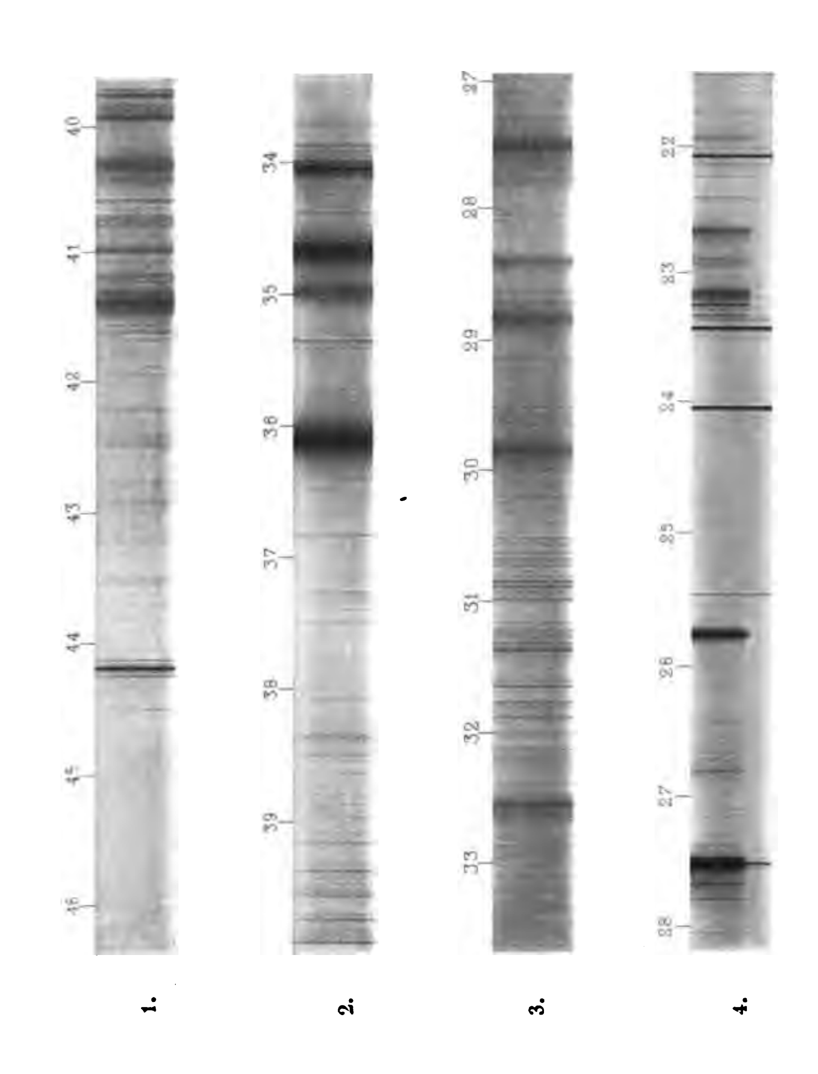
Zinn.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



Taf. IV.

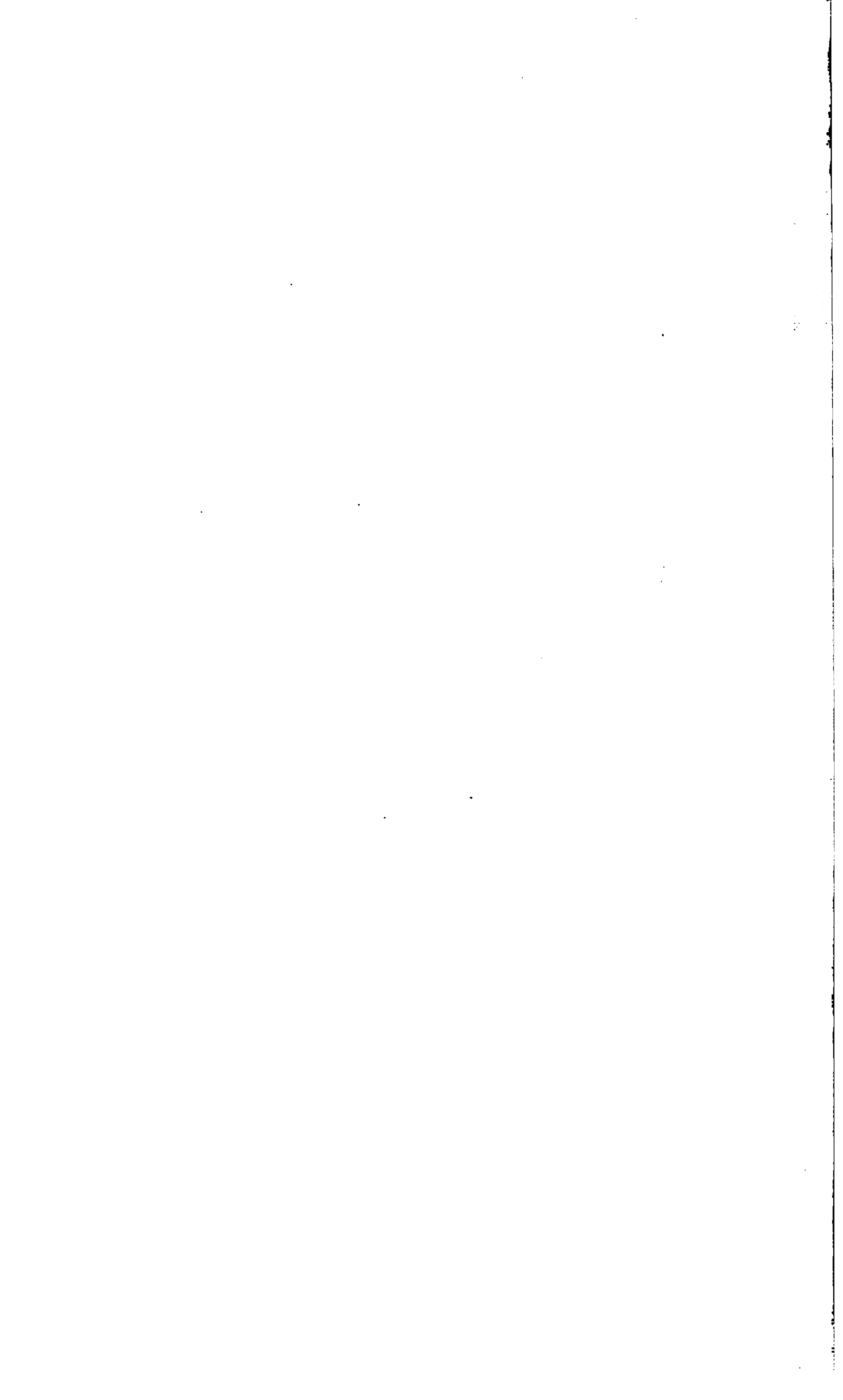
F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Cadmium.

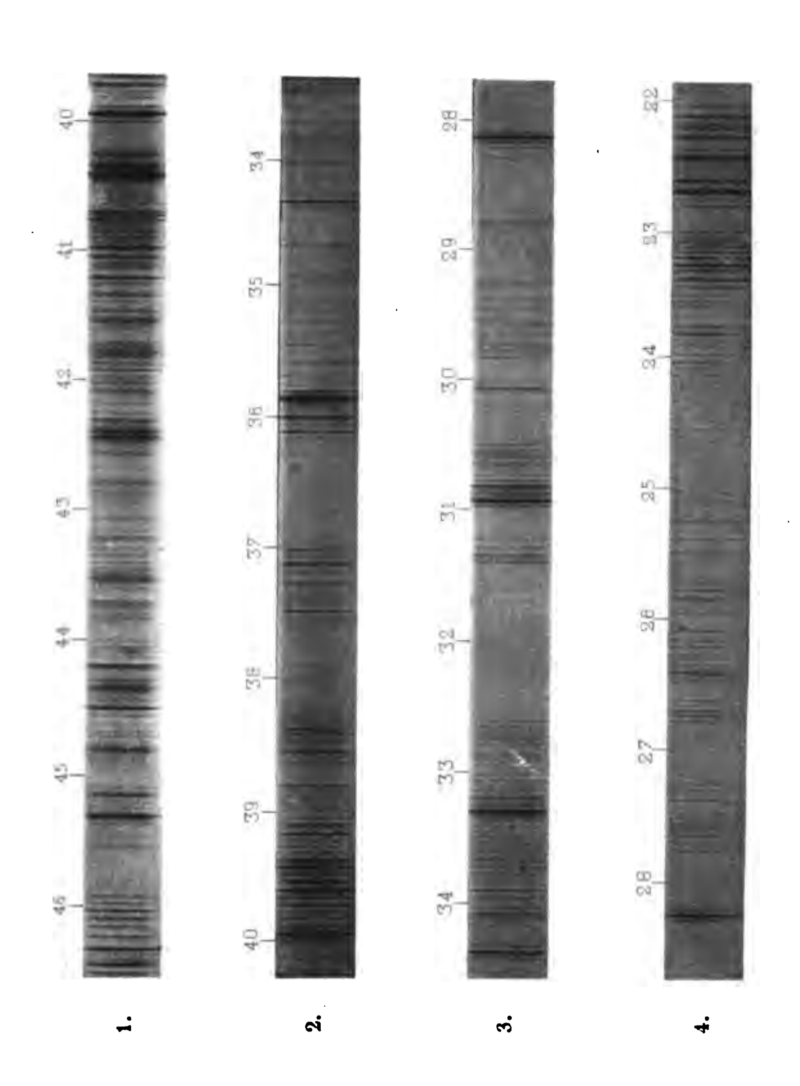
Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CVI. Abth. IIa. 1897.



Taf. V.

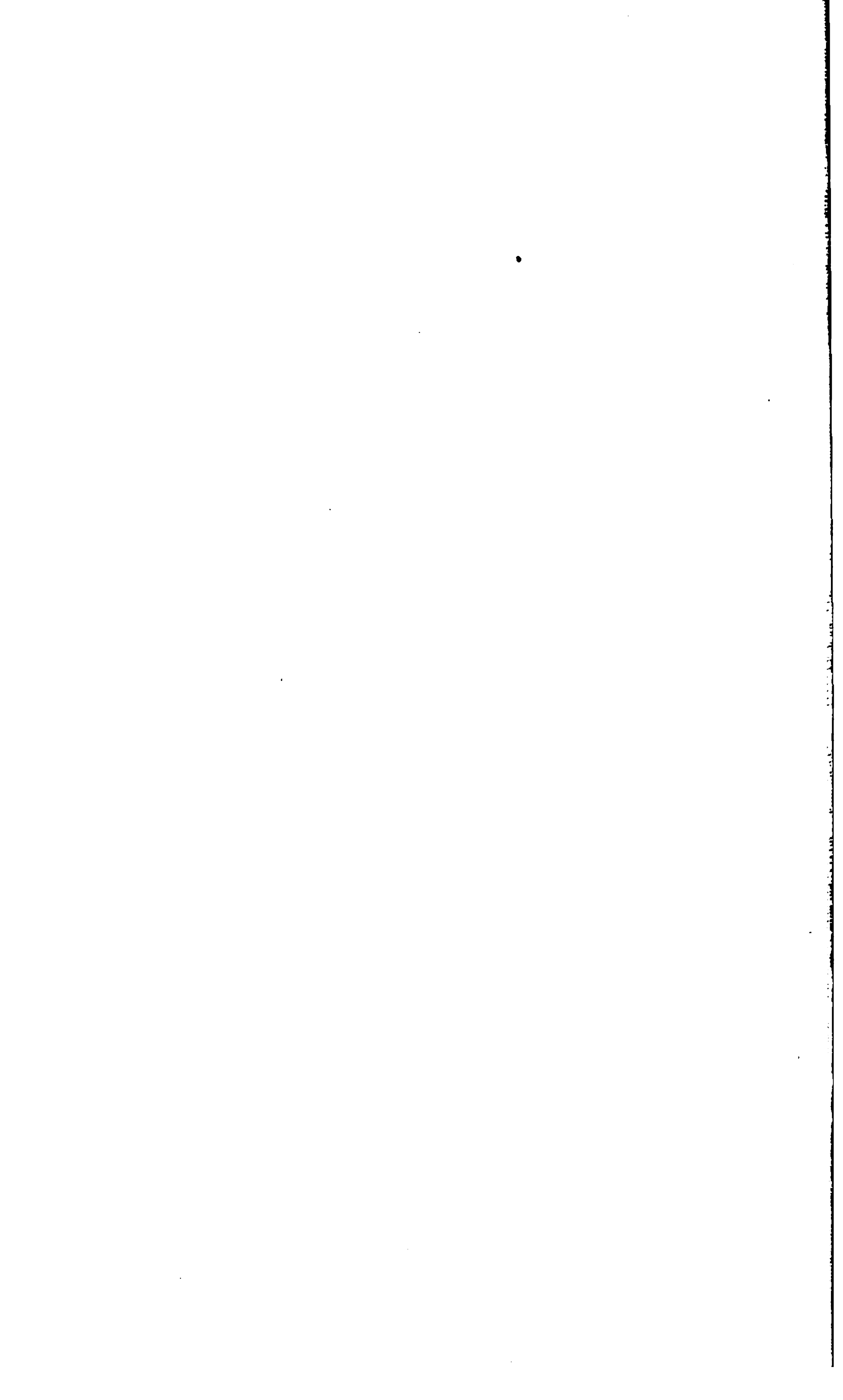
F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



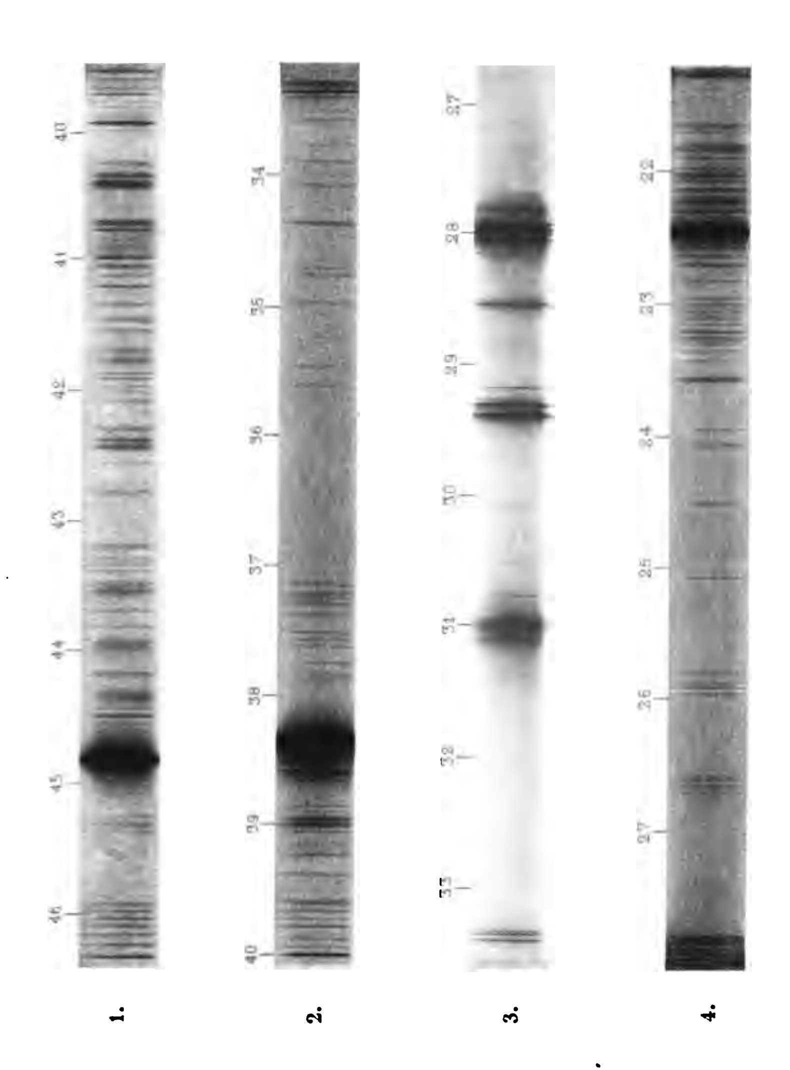
Aluminium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CVI. Abth. IIa. 1897.



F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Magnesium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über den Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante in festen Isolatoren

von

Fritz Hasenoehrl.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

1.

Der Einfluss der Temperatur auf die Dielektricitätsconstante fester Körper ist bisher — mit Ausnahme einiger weniger eingehenden Arbeiten — bloss von Cassie[1] und Bouty[2] untersucht worden. Und zwar constatirt ersterer eine Zunahme der Dielektricitätsconstante mit der Temperatur in sämmtlichen von ihm geprüften Substanzen (Glas, Ebonit und Glimmer). Bouty gibt bloss für den Glimmer eine obere Grenze für die Änderungen der Dielektricitätsconstante zwischen 15° und 300° an, deren Grösse jedoch mit den Angaben von Cassie nicht in Einklang steht.

Da nun diese Resultate ein gerade entgegengesetztes Verhalten der festen Körper gegenüber den bisher viel eingehender studirten Flüssigkeiten und Gasen zeigen, schien es wünschenswerth, dieselben einer nochmaligen Prüfung zu unterziehen und die Versuche womöglich auch auf andere feste Dielektrica auszudehnen.

Ich habe vier Substanzen untersucht, und zwar Glas, Ebonit, Paraffin, Quarz (senkrecht und parallel zur optischen

---

[1] Cassie, Proc. Roy. Soc., London, 46, p. 357, 1889; Phys. Rev. von Graetz, I, S. 98, 1892.

[2] Bouty, Ann. chim. phys. (6), 24, p. 394, 1891; Phys. Rev. von Graetz, I, p. 76, 1892.

Axe). Bei Glas und Ebonit habe ich, ebenso wie Cassie, eine Zunahme der Dielektricitätsconstante mit der Temperatur gefunden; bei Paraffin und Quarz zeigte sich jedoch eine ganz deutlich ausgesprochene Abnahme derselben. Dieses ganz verschiedene Verhalten der einzelnen festen Dielektrica scheint allerdings nicht leicht erklärlich; da ich aber alle Messungen nach derselben Methode und mit demselben Apparat ausgeführt habe, glaube ich für die Richtigkeit der früheren Behauptung einstehen zu können.

2.

Die Versuchsanordnung, deren ich mich bedient habe, war dieselbe, die ich in meinem Aufsatze »Über den Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante in Flüssigkeiten und die Mosotti-Clausius'sche Formel«[1] beschrieben habe. Nur der eine Condensator, dessen Zwischenmedium das zu untersuchende Dielektricum bilden sollte, musste geändert werden. Nach verschiedenen Versuchen erwies es sich als das Beste, die dielektrische Platte mit zwei kreisförmig ausgeschnittenen Stanniolplatten zu bekleben. (Die verschwindend dünne Gummischichte hat wohl keinen merkbaren Einfluss.) Man hat so einen Condensator, dessen Capacität schwer durch Erschütterung oder dergleichen geändert wird, und ferner kann die Oberflächenleitung, die ja bei Glas und Quarz äusserst störend ist, beinahe gänzlich dadurch unterdrückt werden, dass man den äussersten Rand der Stanniolbelege und die umgebenden Theile der dielektrischen Platte mit geschmolzenem Schellack überstreicht. Allerdings hat diese Anordnung auch einen bedeutenden Nachtheil. Man kann nämlich die Capacität des congruenten Luftcondensators nicht experimentell bestimmen, sondern man ist auf die theoretische Formel vom Kirchhoff angewiesen. Hat man grosse dünne Platten zur Verfügung, so wird der Fehler nicht grösser sein als bei der unvermeidlichen Berechnung der Capacität des Vergleichcondensators. Ist dies aber nicht der Fall, so muss man dem Condensator Dimensionen geben, welche nicht mehr in den Geltungsbereich obiger Formel

[1] Diese Sitzungsber., 105, S. 460, 1896.

fallen. Die Änderungen der Dielektricitätsconstante desselben Mediums kann man auf diese Weise gewiss am besten bestimmen. Der Absolutwerth derselben kann jedoch in diesem Falle nur innerhalb weiter Grenzen angegeben werden.[1]

Als Temperaturbad verwendete ich einen doppelwandigen Kasten aus Zinnblech von 50 *cm* Seitenlänge. Infolge dieser gegen die verwendeten Condensatoren grossen Dimensionen kann sein Einfluss auf die Capacität der letzteren vernachlässigt werden. Er wurde mit Wasser gefüllt und durch einen Bunsenbrenner erwärmt. Etwa eine Stunde nach dem Auslöschen des letzteren hat sich die Temperatur der inneren Luft ausgeglichen. Dagegen dauert es oft länger, bis das innen befindliche Dielektricum die gleiche Temperatur annimmt. Von dem Eintreten dieses letzten Stadiums kann man sich dadurch überzeugen, dass sich die Capacität des Condensators bei gleichbleibender Temperatur des Luftbades nicht mehr ändert.

Endlich muss ich noch erwähnen, dass die aus verschiedenen Beobachtungsreihen stammenden Absolutwerthe der Dielektricitätsconstante eines Stoffes nicht stets in vollkommener Übereinstimmung sind. Es rührt dies davon her, dass die einzelnen Beobachtungsreihen manchmal durch mehrere Tage getrennt waren und ich meinen Vergleichscondensator nicht so lange Zeit auf constanter Temperatur halten konnte. Da es mir aber auf die Absolutwerthe weniger ankam, habe ich auf diese Fehler, die ja nie mehr als 8% betrugen, kein Gewicht gelegt.

3.

Über die Ergebnisse der Messungen an den einzelnen Dielektricis ist Folgendes zu sagen:

I. Glas.

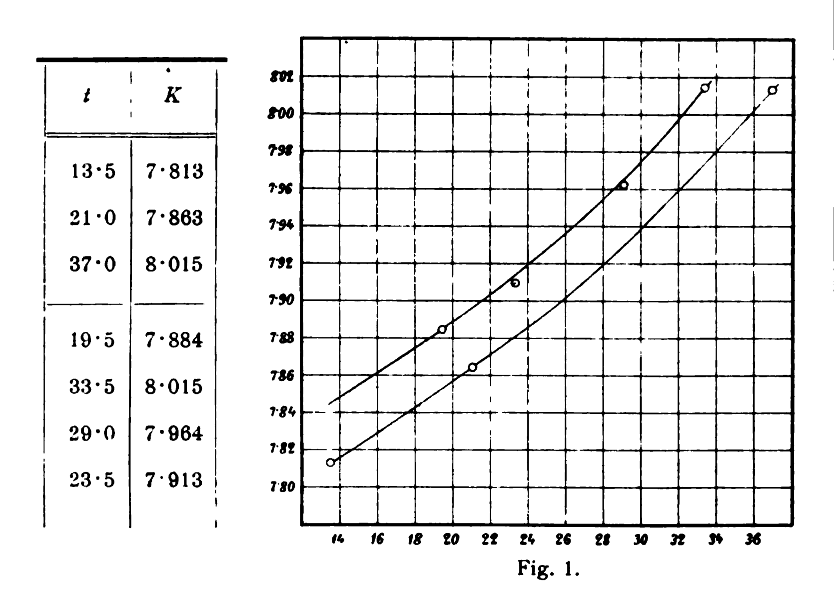
Der Radius der Condensatorplatten war 19·2 *mm*, die Plattendistanz 6·67 *mm*. Als Capacität des congruenten Luft-

---

[1] Cassie gibt den Absolutwerth der Dielektricitätsconstante gar nicht an, sondern nur die Grösse $\frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$; bei den von ihm verwendeten Condensatoren würde die Rechnung noch ungenauer ausfallen als bei mir. Darunter leidet jedoch die Übersichtlichkeit.

condensators ergibt sich demnach nach der Kirchhoff'schen Formel (die Plattendicke gleich Null gesetzt) $C = 19 \cdot 85$ *mm.* (Dieser Werth ist wahrscheinlich zu klein, daher die hier angegebenen Absolutwerthe der Dielektricitätsconstante zu gross.) Der lineare Ausdehnungscoëfficient des Glases ist etwa $0 \cdot 000007$; bei einer Temperaturänderung von 25° variirt die Plattendistanz demnach um weniger als $0 \cdot 02\,^0/_0$; die dritte Decimalstelle der Dielektricitätsconstante wird dadurch höchstens um eine Einheit alterirt. Da dies unterhalb der Grösse der Beobachtungsfehler liegt, habe ich die Capacität des Luftcondensators in dem untersuchten Temperaturbereiche als constant angesehen.

Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle und in Fig. 1 enthalten.



t	K
13·5	7·813
21·0	7·863
37·0	8·015
19·5	7·884
33·5	8·015
29·0	7·964
23·5	7·913

Fig. 1.

Die Resultate der ersten Beobachtungsreihe werden durch die Formel

$$K_t = 7 \cdot 813 + 0 \cdot 00576(t - 13 \cdot 5) + 0 \cdot 000120(t - 13 \cdot 5)^2$$

wiedergegeben. Für die zweite Beobachtungsreihe gilt:

$$K_t = 7 \cdot 845 + 0 \cdot 00551\,(t - 13 \cdot 5) + 0 \cdot 000151\,(t - 13 \cdot 5)^2,$$

wobei der grösste Fehler 0·002 beträgt. Ziehen wir aus beiden das Mittel, so erhalten wir als endgiltige Formel:

$$K_t = 7\cdot829[1+0\cdot000720(t-13\cdot5)+0\cdot0000172(t-13\cdot5)^2].$$

Als mittlerer Temperaturcoëfficient zwischen 13° und 37° ergibt sich:

$$\frac{1}{K_{13}}\,\frac{K_{37}-K_{13}}{37-13} = 0\cdot00112.$$

Cassie hat bei zwei Glassorten diese Grösse zwischen 17° und 38°, beziehungsweise zwischen 10° und 50° zu 0·0012 und 0·0020 angegeben. Die Übereinstimmung zwischen Cassie und mir ist wohl besser als man in Anbetracht der Verschiedenheit der einzelnen Glassorten erwarten würde.

II. Ebonit.

Der Radius der Condensatorplatten betrug 29 *mm*, die Plattendistanz 5·54 *mm*. Daraus ergibt sich als Capacität des Luftcondensators 48·56 *mm*. Der Ausdehnungscoëfficient des Ebonit ist (Landolt-Börnstein) 0·000077. Daher nimmt die Capacität des Luftcondensators per 1° um 0·0077 % ab; daher sind die unter Annahme einer constanten Plattendistanz berechneten Werthe der Dielektricitätsconstante um t.0·0077 % zu klein. Ich habe dies in der folgenden Tabelle berücksichtigt.

Die Messungen sind hier sehr durch den Umstand erschwert, dass sich Ebonitplatten auch bei den kleinen Temperaturdifferenzen, die ich angewendet habe, gänzlich verbiegen (werfen). Wollte man dies etwa durch Gewichte gewaltsam verhindern, so würden sicher Dehnungen oder Pressungen eintreten, die bekanntlich auch von Einfluss auf die Dielektricitätsconstante sind. Es ist dies wohl auch die Ursache, dass ich aus den einzelnen Beobachtungsreihen Resultate erhalten habe, die untereinander in sehr schlechter Übereinstimmung stehen. (Die erhaltenen Temperaturcoëfficienten weichen im Maximum um 50 % von einander ab.) Ich halte es daher nicht der Mühe werth, die Ergebnisse der circa 70 Ablesungen, die ich gemacht habe, einzeln mitzutheilen. Ich habe vielmehr aus allen Beobachtungsreihen die Werthe der Dielektricitäts-

constante bei 10, 15, 20, 25, 30, 35° extrapolirt und aus allen das Mittel gezogen. Die so erhaltenen Resultate gibt die folgende Tabelle und Fig. 2.

t	$K_{\text{beob.}}$	$K_{\text{ber.}}$	Δ
10	2·479	—	—
15	2·498	2·496	0·10
20	2·520	2·519	0·07
25	2·546	2·547	0·08
30	2·586	2·581	0·20
35	2·624	2·622	0·10

Fig. 2.

Die beobachteten Werthe $K_{\text{beob.}}$ lassen sich durch die Formel

$$K_t = 2{\cdot}479[1+0{\cdot}00115(t-10)+0{\cdot}000046(t-10)^2]$$

darstellen. Die hieraus berechneten Werthe $K_{\text{ber.}}$ stehen in der zweiten Columne der Tabelle, während die dritte Columne den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler in Percenten

$$\Delta = \frac{1}{K}(K_{\text{beob.}}-K_{\text{ber.}}).10^2$$

gibt. Derselbe ist im Maximum 0·2% der Dielektricitätsconstante oder 4% der Gesammtänderung der Dielektricitätsconstante von 10° auf 35°.

Cassie findet für den Temperaturcoëfficienten zwischen 13° und 44° 0·00037; diese auffallend schlechte Übereinstimmung wird wohl durch die Verschiedenheit des Materials, als auch durch die oben erwähnten ganz unregelmässigen Verbiegungen und Zerrungen des Ebonits zu erklären sein.

III. Paraffin.

Die Paraffinplatten wurden zwischen zwei leicht mit Öl bestrichenen Glasplatten gegossen; sorgt man dafür, dass die Abkühlung von unten erfolgt, so bilden sich keine Luftblasen, wovon man sich ja leicht durch Zerschneiden der Platten nach Beendigung der Messungen überzeugen kann. Es erscheint allerdings ein schneeartiger Niederschlag, so dass die Platten inhomogen aussehen; derselbe kann jedoch nicht von grossem Einfluss auf die Dielektricitätsconstante sein, da ich bei zwei auf diese Weise erzeugten Platten, die doch gewiss auch andere Verschiedenheiten aufweisen, ziemlich naheliegende Resultate erhalten habe.

Die Dicke der Platten war beziehungsweise 7·69 und 7·60 *mm*; der Radius der Condensatorbelege war in beiden Fällen 49 *mm*; daraus ergibt sich als Capacität der entsprechenden Luftcondensatoren 37·15 und 37·47 *mm*. Der lineare Ausdehnungscoëfficient des Paraffins ist zwischen 0° und 30° 0·000195; die thermische Ausdehnung wurde hier in gleicher Weise berücksichtigt wie bei Ebonit. Die so gefundenen Werthe gibt die folgende Tabelle. Da sich der Verlauf der Dielektricitätsconstante in diesem Bereich offenbar als linear erweist, habe ich zu jeder Beobachtungsreihe bloss den einen Coëfficienten $\alpha = \frac{dK}{dt}$ angegeben.

Erste Platte.

t	K	$\alpha . 10^2$
15·2	2·340	0·498
28·5	2·273	
11	2·404	0·608
19·5	2 352	0·643
27·5	2·301	

Zweite Platte.

t	K	$\alpha . 10^2$
12	2·446	0·646
20·5	2·391	0·641
27·5	2·346	0·626
15·2	2·423	
11	2·479	0·606
19·5	2·427	0·585
26·3	2·387	

Zieht man aus diesen Werthen das Mittel, so erhält man für die erste Platte:

$$K_t = 2\cdot390 - 0\cdot00583(t-10)$$

und für die zweite Platte:

$$K_t = 2\cdot472 - 0\cdot00621\,(t-10).$$

Nehmen wir noch aus diesen beiden Werthen das Mittel, so erhalten wir

$$K_t = 2\cdot431\,[1 - 0\cdot00247\,(t-10)].$$

Der sich hieraus ergebende Werth $K_{17} = 2\cdot388$ stimmt mit dem in meiner früheren Arbeit (l. c. S. 469) angegebenen 2·1449 schlecht überein. Doch ist dies durch die Anfangs

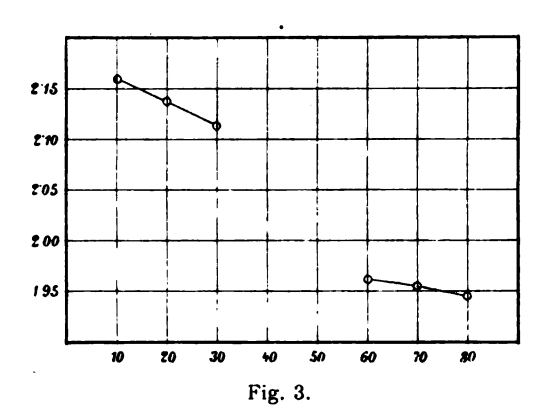


Fig. 3.

gemachten Bemerkungen und wohl auch durch Verschiedenheit des Materials (ich habe das damals verwendete Paraffin aus Versehen nicht aufgehoben) erklärlich.

Fig. 3 habe ich entworfen, um das dielektrische Verhalten des flüssigen und festen Paraffins zu veranschaulichen, und zwar schien es mir consequenter als Absolutwerth der Dielektricitätsconstante des festen Paraffin 2·1449 anzunehmen, da diese Grösse mit demselben Vergleichscondensator bestimmt worden war, wie die Dielektricitätsconstante des flüssigen Paraffin.

Das feste Paraffin ist bisher von Gibson und Barclay[1] untersucht worden, und zwar fanden diese keine nennenswerthe Änderung zwischen —12° und +24° C. Nach dem Früheren muss ich sowohl dem, als auch der Vermuthung von Cassie[2] widersprechen, dass die Dielektricitätsconstante der festen Körper in der Nähe des Schmelzpunktes ein Maximum erreiche.

IV. Quarz.

Die linearen Ausdehnungscoëfficienten von Quarz senkrecht und parallel zur optischen Axe sind beziehungsweise 0·0000133 und 0·0000072 (Landolt-Börnstein). Die thermische Ausdehnung konnte hier ebenso wie beim Glas vernachlässigt werden.

Zuerst wurde eine kleine Platte vorgenommen, die senkrecht zur optischen Axe geschnitten war; ihre Dicke war 4·13 *mm*, und der Radius der Stanniolbelege konnte nicht grösser gemacht werden als 11·5 *mm*; daraus ergibt sich als Capacität des Luftcondensators 11·61 *mm*. Die an dieser Platte ausgeführten Messungen geben für die Dielektricitätsconstante des Quarzes parallel zur optischen Axe (der Absolutwerth ist hier entschieden zu gross, was durch die besonders kleinen Dimensionen des verwendeten Condensators erklärlich ist):

t	K	$\alpha\ 10^3$
13 31	5·645 5·502	0·79
10 14 21·5 29	5·632 5·560 5·551 5·498	0·82 0·65 0·71
14·5 25·5	5·604 5·498	0·96
12·5 28	5·575 5·494	0·53

---

[1] Die Originalarbeit war mir leider unzugänglich; ich entnehme diese Notiz der Arbeit von Cassie, l. c. S. 98.

[2] L. c. S. 98.

Hierin bedeutet wieder α die Grösse $\frac{dK}{dt}$ im Mittel für das betrachtete Temperaturintervall. Zieht man aus diesen allerdings nicht sehr gut übereinstimmenden Grössen das Mittel, so erhält man für den mittleren Temperaturcoëfficienten

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dt} = 0 \cdot 00135.$$

Um jedoch die Dielektricitätsconstante des Quarzes senkrecht und parallel zur Axe bestimmen zu können, habe ich zwei möglichst gleiche Platten parallel und senkrecht zur Axe schneiden lassen. Die Dicke dieser Platten war 5·07 *mm*, und sie wurden mit Stanniolplatten vom selben Radius 14·55 *mm* beklebt. Als Capacität des Luftcondensators erhielt ich so 15·07.

Die Ergebnisse der Messungen sind (siehe Fig. 4):

Parallel zur Axe:

t	K beob.	K ber.	Δ
11	4·921	4·921	—
20	4·858	4·860	—0·05
9·5	4·935	4·930	+0·13
20	4·865	4·860	+0·13
27	4·787	4·800	+0·18
10	4·928	4·926	+0·05
26	4·809	4·807	+0·05
11·5	4·914	4·918	—0·10
21	4·851	4·852	—0·03
31	4·759	4·761	—0·05
9·8	4·928	4·929	—0·03
29·5	4·787	4·765	+0·55

Senkrecht zur Axe:

t	K beob.	K ber.	Δ
12	4·759	4·757	+0·05
21	4·706	4·714	—0·20
17	4·731	4·733	—0·05
11·5	4·759	4·759	—
29·6	4·668	4·674	—0·15
23	4·707	4·705	+0·05
19	4·721	4·724	+0·08
10·5	4·763	4·764	—0·03
30·5	4·654	4·670	—0·40
21·0	4·714	4·714	—

Diese Resultate lassen sich durch folgende Formeln darstellen:

parallel zur optischen Axe:

$$K_t = 4\cdot926[1-0\cdot00110(t-10)-0\cdot000024(t-10)^2],$$

senkrecht zur optischen Axe:

$$K_t = 4\cdot766[1-0\cdot00099(t-10)].$$

Die aus diesen Formeln berechneten Werthe $K_{\text{ber.}}$ stehen in der dritten Rubrik der Tabellen, während Δ der wahrscheinliche Beobachtungsfehler in Percenten ist.

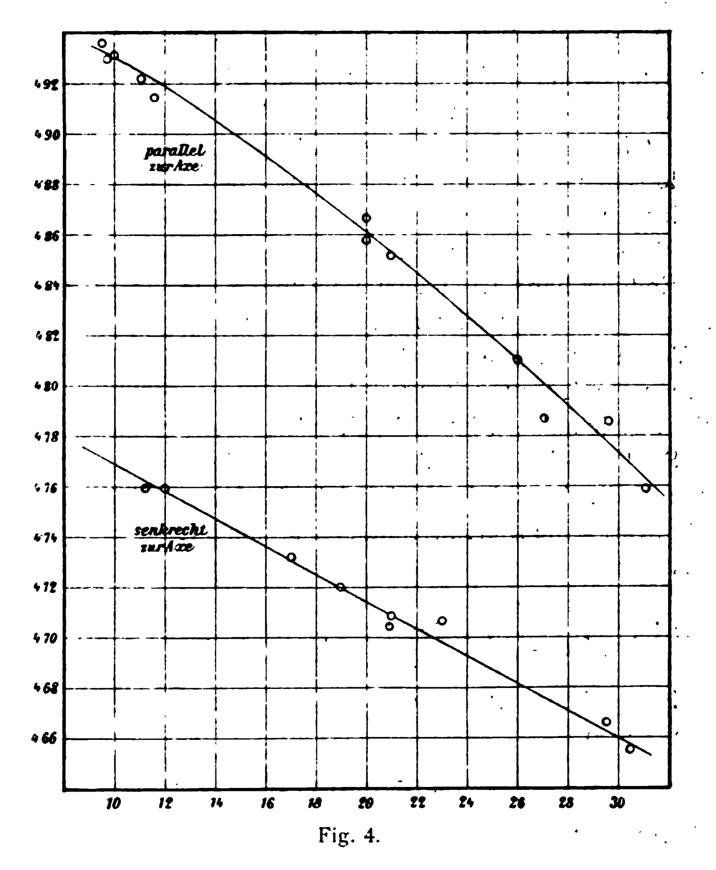


Fig. 4.

Da bei der Berechnung der Dielektricitätsconstante des Quarzes in beiden Richtungen derselbe Fehler begangen wurde, hat das Verhältniss dieser Grössen (bei derselben Temperatur) Anspruch auf Genauigkeit; es ergibt sich dafür 1·034.

Curie[1] hat diese Grössen zu 4·54 und 4·49 bestimmt; das Verhältniss der beiden Dielektricitätsconstanten ergibt sich hieraus zu 1·011. Die Übereinstimmung kann wohl als befriedigend bezeichnet werden.

4.

Will man mittelst dieser Resultate die Giltigkeit der Mosotti-Clausius'schen Formel für feste Dielectrica prüfen, so kommt man zu einem negativen Resultat. Die Zunahme der Dielektricitätsconstante mit der Temperatur, wie dies bei Glas und Ebonit constatirt ist, ist mit dieser Theorie ganz unvereinbar. Beim Paraffin nimmt zwar die Dielektricitätsconstante mit der Temperatur ab, diese Abnahme ist jedoch viel zu gross. (Nach der Clausius-Mosotti'schen Theorie müsste sie von derselben Grössenordnung sein wie beim flüssigen Paraffin, da dies auch vom Ausdehnungscoëfficienten gilt; Fig. 3 zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist.)

Endlich habe ich meine Messungen am Quarz dazu benützt, um eine Formel von Lampa[2] zu prüfen, welche unter der Voraussetzung abgeleitet ist, dass die anisotropen dielektrischen Medien aus leitenden dreiaxigen Ellipsoiden bestehen, welche gleichmässig im nichtleitenden Raum vertheilt sind.

Sind $a > b > c$ die Axen dieser ellipsoidischen Molekel, ferner N die Anzahl der Molekel in der Volumseinheit, so sind nach Lampa die Dielektricitätsconstanten nach den Richtungen der Axen:

$$D_a = 1 + \frac{4\pi a^3 N}{3I(1-g)}; \quad D_b = 1 + \frac{4\pi b^3 N}{3I(1-g)}; \quad D_c = 1 + \frac{4\pi c^3 N}{3I(1-g)}.$$

Hierin bedeutet g die wahre Raumerfüllung der Volumseinheit; also

$$g = \frac{4}{3}\pi abcN. \tag{2}$$

und ferner ist

$$I = \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-\lambda^2 u^2)(1-\lambda'^2 u^2)}},$$

[1] Curie, Ann. chim. phys. (6), 17, p. 385; 18, pag. 203; 1889.

[2] Lampa, diese Sitzungsber., 104, S. 681; 1895.

wo λ und λ' durch das Axenverhältniss der Ellipsoide gegeben ist:

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad \lambda'^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2},$$

sind $D_a D_b D_c$ bekannt, so kann λ und λ' leicht durch Elimination von N und g aus (1) bestimmt werden.

Aus (1) ergibt sich sofort, wenn N mittelst (2) durch g ausgedrückt wird,

$$I\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)} = \frac{g}{1-g}.$$

Daher hat man bei der Temperatur t_0

$$g_0 = \left| \frac{I\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{1+I\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}} \right|_{t=t_0} = R_0,$$

zur Temperatur t hat man

$$g_0(1-at) = \left| \frac{I\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{1+I\sqrt[3]{D_a-1)(D_b-1)(D_{c+4}-1)}} \right|_t = R_t,$$

es muss also die Grösse

$$g_0 = R_t(1+at)$$

eine Constante sein; unter a natürlich den cubischen Ausdehnungscoëfficienten verstanden.

Da der Quarz einaxig ist, ist $b = c$, $D_b = D_c$ zu setzen; dadurch wird das obige elliptische Integral, da jetzt $\lambda = \lambda'$ ist:

$$I = \int_0^1 \frac{u^2 du}{1-\lambda^2 u^2} = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^3} \log \frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

Es ergibt sich nun $\lambda = 0 \cdot 16547$ und daraus $I = 0 \cdot 335$.

Rechnet man aus den früheren Angaben die Grösse R_t und $(1+at)$ für verschiedene Temperaturen aus, so erhält man:

t	D_a	D_b	R_t	$1+at$	$R_t(1+at)$
10	4·926	4·766	0·56128	1·000000	0·56128
20	4·860	4·719	0·55779	1·000341	0·55797
30	4·770	4·672	0·55375	1·000689	0·55412

Das Product $R_t(1+at)$ ändert sich nicht bedeutend, da sich ja auch seine Factoren nicht bedeutend ändern. Dass sich aber die beiden Factoren entgegengesetzt gleich ändern, wie es die Theorie erfordert, ist durchaus nicht der Fall.

Die sogenannte wahre Dichte $\frac{d}{g} = \frac{d_0}{R_t(1+at)}$ ändert sich von 10° auf 30° um 1·3%, während sie nach der Theorie constant zu bleiben hätte. (Die gewöhnliche Dichte ändert sich bloss um 0·07%.)

Die Voraussetzungen, die den Formeln von Lampa oder von Clausius-Mosotti zu Grunde liegen, scheinen daher beim Quarz nicht genügend erfüllt zu sein; ausserdem ist es wohl möglich, dass die thermische Ausdehnung von intramolekularen Vorgängen begleitet sei.

Ferner will ich noch erwähnen, dass der Temperaturcoëfficient des Brechungsexponenten des Quarzes ungefähr 0·0005 des Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante ist.

Endlich erlaube ich mir, auch an dieser Stelle Herrn Prof. Franz Exner für die gütige Unterstützung, die er mir bei dieser Arbeit zu Theil werden liess, meinen wärmsten Dank auszudrücken.

Über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur

von

Ludwig Boltzmann,

w. M. k. Akad.

Ich will zunächst meinen Standpunkt durch eine wahre Anekdote charakterisiren. Es war noch zur Zeit meiner Gymnasialstudien, als mich mein nun lange verstorbener Bruder oft vergeblich von der Widersinnigkeit meines Ideals einer Philosophie zu überzeugen suchte, welche jeden Begriff bei seiner Einführung klar definirt. Endlich gelang es ihm in folgender Weise: In der Schulstunde war uns ein philosophisches Werk (ich glaube von Hume) als besonders consequent gepriesen worden. Sofort verlangte ich dasselbe in Begleitung meines Bruders in der Bibliothek. Es war bloss im englischen Original vorhanden. Ich stutzte, da ich kein Wort englisch verstand; aber mein Bruder fiel sofort ein: »Wenn das Werk das leistet, was du davon erwartest, so kann auf die Sprache nichts ankommen, denn dann muss ja ohnehin jedes Wort, bevor es gebraucht wird, klar definirt werden«.

Man kann kaum drastischer zeigen, welche Menge von Erfahrungen, sowie von Worten und Gedanken, womit sie bezeichnet werden, als bekannt vorausgesetzt werden müssen, wenn wir uns überhaupt verstehen sollen, und dass wir nicht alles definiren können, sondern bloss mittelst ebenfalls bekannter Zeichen Regeln anzugeben haben, wie unsere Bezeichnungen vereinfacht und den bekannten Erfahrungen angepasst werden können.[1] Wie

[1] Widersprüche (z. B. wir können uns die Körper nicht wirklich unendlich theilbar und anderseits auch nicht aus einer endlichen Punktzahl einen ausgedehnten Körper entstehend denken) können nur in den Bezeichnungen

Euklid in der Geometrie unbeweisbare Axiome vorausschickt, so werden wir zunächst prüfen, welche Thatsachen die Grundlage und Vorbedingung der Erkenntniss bilden. Wir werden ehrlich eingestehen, dass wir mit diesen Thatsachen nichts thun können und sollen, als sie durch bekannte Zeichen in Erinnerung bringen, und werden uns nicht wundern, wenn man gerade deren Erklärung bisher für das Allerschwierigste hielt.

Jedermann weiss, was man unter Sinnesempfindungen und Willensimpulsen versteht. Es ist Vorbedingung der Intelligenz, dass ständige Regelmässigkeiten zwischen diesen bestehen,[1] welche wir durch verhältnissmässig wenige Vorstellungsbilder erfassen können. Was dies heisst, ist erfahrungsmässig bekannt, und wir werden kein Räthsel darin erblicken, wenn es ebensowenig näher erklärt werden kann, als warum diese Regelmässigkeiten stattfinden. Wenn ferner auf die Sinnesempfindung (oder den Empfindungscomplex) A nach dem Willensimpulse (oder Impulscomplexe) B immer eine Sinnesempfindung C, nach dem Willensimpulse D aber eine andere Sinnesempfindung E eintritt, so muss dies gewisse Eindrücke (Erinnerungen, Weltbilder) in uns hinterlassen, die sich natürlich zu den wirklichen Vorgängen wie Zeichen zum Bezeichneten verhalten (wir sagen, dass wir nach A und B die Empfindung C, nach A und D aber E

---

liegen, sind also ein Fingerzeig, dass diese unzweckmässig gewählt sind. Die Erfahrung kann sich nicht widersprechen; denn selbst wenn ihre Gesetze ganz wechseln würden, hätte sich die Bezeichnung den veränderten Gesetzen anzupassen.

[1] Dies ist das Causalgesetz, welches man also nach Belieben als die Vorbedingung aller Erfahrung oder selbst als eine Erfahrung bezeichnen kann, die wir bei jeder Erfahrung mitmachen.

Wir können aus Erfahrungen schliessen, dass beim Lotto jeder Zug gleich wahrscheinlich ist. In Folge dessen haben wir die Wahrscheinlichkeitsrechnung so construirt, dass es nach ihren Gesetzen, wenn auch einmal zufällig eine Nummer öfters herauskam, dadurch doch nicht wahrscheinlicher wird, dass sie beim nächsten Zuge wieder herauskommt. Man schloss nun so: A priori ist es gleich wahrscheinlich, dass morgen die Sonne aufgeht oder nicht, folglich wird durch den Umstand, dass sie bisher täglich aufging, ihr morgiger Aufgang nicht wahrscheinlicher. Dem muss entgegnet werden, dass eine aprioristisch gleiche Wahrscheinlichkeit beider Eventualitäten ebenso sinnlos ist, wie ein aprioristisches Wissen der einen oder anderen, dass hier eben die Wahrscheinlichkeitsgesetze des Lottos erfahrungsmässig nicht anwendbar sind.

erwarten), und diese Eindrücke müssen in vielen Fällen zur Folge haben, dass je mehr sie ausgebildet sind, desto sicherer, auf die Sinnesempfindung A stets der Willensimpuls B, nicht aber D erfolgt. (Wir reagiren auf Eindrücke, kommen durch sie in Emotion.) Wir nennen dann die Empfindung C eine erwünschte, D eine unerwünschte.[1] Diese Impulse hängen daher in besonderer Weise von unseren inneren Zuständen (Erinnerungen) ab. Deshalb sagen wir, sie gehen von uns aus und nennen sie willkürlich, womit natürlich nicht behauptet werden kann, dass sie gesetzlos erfolgen.[2]

Da wir durch gute Erinnerungsbilder Erwünschtes erreichen, so sind erstere selbst erwünscht. Es zeigt sich nun, dass wir durch gewisse Willensimpulse die Erinnerungen erhalten, auffrischen, ja auch deren Verbindung ergänzen und vervollständigen können. Da gute Erinnerungsbilder erwünscht sind, werden solche Willensimpulse oft eintreten (wir stellen vor, denken nach).

Wir bezeichnen Handlungen, auf welche Gewünschtes erfolgt, und Vorstellungen, durch welche geleitet wir in solcher Weise handeln, als richtig. Wir müssen trachten, dass unsere Vorstellungen richtig und dabei ökonomisch sind, d. h. dass wir daraus mit dem geringsten Aufwande von Zeit und Mühe jedesmal die richtige Handlungsweise finden können. Die Anforderung an jede Theorie ist, dass sie richtig und ökonomisch sei; dann entspricht sie eo ipso den Denkgesetzen. Ich glaube nicht, dass man letzteres, wie es Hertz thut, als besondere Forderung aufzustellen braucht.

Der eingangs geschilderte Vorgang ist natürlich der grössten Complicationen fähig. Es sei auf verschiedene Empfindungscomplexe $A_1 A_2 A_3 \ldots$, welche gewisse Theile T gemein haben (ähnlich sind), stets eine Empfindung C gefolgt oder es habe

---

[1] Die ganze Einrichtung hat den Zweck, das dem Individuum oder der Gattung Nützliche herbeizuführen, das Schädliche abzuhalten.

[2] Es wäre ganz falsch, hieraus zu folgern, dass man gemeinschädliche Handlungen nicht strafen dürfe. Man muss sie strafen, d. h. im Verbrecher und Anderen Erinnerungen erzeugen, welche die ungewünschte Handlung in Zukunft verhüten. Man darf aber nur willkürliche Handlungen strafen, weil auf unwillkürliche die Erinnerungsbilder ohne Einfluss sind.

der Willensimpuls B darauf die Empfindung C hervorgerufen. Den Eindruck, den dies in unserer Erinnerung hinterlässt, bezeichnen wir so: Wir erwarten, dass auf jeden Empfindungscomplex, der die Empfindungen T enthält, C eintreten oder C von B hervorgerufen werde oder wir schliessen letzteres aus ersterem. Wenn wir den Willensimpuls B nicht erfolgen liessen, sagen wir, es wäre C nach diesem Willensimpulse erfolgt.[1]

Wenn wir nun einen neuen Erfindungscomplex A_x haben, worin ebenfalls die Empfindungen T vorkommen, so schliessen, urtheilen, vermuthen, meinen[2] wir, dass C folgen (respective durch B erzeugt werden) wird. Trifft dies thatsächlich ein, so wird unsere Vermuthung durch die Erfahrung bestätigt, wenn nicht, so werden wir überrascht, unseren Erinnerungen wird eine neue hinzugefügt, unser inneres Bild der Thatsachen wird ergänzt, verbessert, angepasst. Wir machen Willensimpulse, welche Erinnerungen ins Bewusstsein rufen und Empfindungen herbeiführen, die diesen Process beschleunigen. Wir suchen das in A_x Enthaltene, Unterscheidende, die Ursache, wir forschen, experimentiren.[3]

Alle diese Vorgänge können beliebige weitere Complicationen erfahren. Zur Herstellung des Bildes, was wir in einem gegebenen Falle zu erwarten haben, können selbst wieder complicirte Willensthätigkeiten (Constructionen, Rechnungen) erforderlich sein. Das Bild kann so umfassend sein, dass wir mittelst desselben unter den verschiedensten Verhältnissen den Erfolg construiren können. Wenn wir mit den Bildern selbst experimentiren, das Gemeinsame und Verschiedene derselben durch Willensimpulse ins Bewusstsein bringen und in Fällen,

---

[1] Wir können so auch auf Vergangenes schliessen. Wenn B erfolgt wäre, so wäre in der Vergangenheit C darauf eingetreten, oder ein anderer Fall: Ich erinnere mich, einmal einen Empfindungscomplex A gehabt zu haben, von dem ich weiss, dass C immer darauf folgt; ich schliesse, dass auch damals C folgte, selbst wenn ich mich nicht mehr direct daran erinnere.

[2] Vermuthung und Meinung sind unsicher, der Schluss fast sicher, das Urtheil bezieht sich besonders auf die Zweckmässigkeit unserer eigenen Bezeichnungen oder auch von Handlungen, worauf einzugehen mir hier vollkommen ferne liegt.

[3] Vergl. Mach, Principien der Wärmelehre. Leipzig, Barth, 1896, S. 386, 416 und a. a. O.

die sich von den beobachteten unterscheiden, den Erfolg zu construiren suchen, so speculiren wir. Das Resultat wird wie das der einfachsten Vermuthung durch die Erfahrung zu prüfen sein.

Von Meinungen, welche genügend oft durch die Erfahrung bestätigt wurden, sagen wir, sie sind gewiss, wir wissen das durch sie Ausgedrückte. Zur Construction der Gedankenbilder haben wir fortwährend Bezeichnungen für das, was verschiedenen Erscheinungsgruppen oder Gruppen von Gedankenbildern oder Gedankenoperationen gemeinsam ist, nöthig. Solche Bezeichnungen nennen wir Begriffe.

Wenn (im obigen Beispiele) C auf einen uns noch fremden Complex A_y folgt, so sagen wir, wir haben dies erklärt, sobald wir T in A_y finden, oder falls uns alle A noch fremd wären, wenn wir diese beobachtet und T in Allen, sowie in A_y gefunden haben (Erklärung von Arago's Versuch durch Faraday's Entdeckung der Inductionsströme).

Wie kommen wir nun zur Unterscheidung gewisser Sinnesempfindungen als unserer eigenen, anderer als fremder? Mit der Bildung unserer Erinnerungsbilder steht die Reihe der Sinnesempfindungen, welche wir die unserigen nennen, in viel directerem Zusammenhange, als die fremden Sinnesempfindungen. Jede unserer eigenen Empfindungen weckt ein Erinnerungsbild, wenn dieses auch bald verloren geht, wogegen eine fremde nur dann auf unsere Erinnerungsbilder von Einfluss ist, wenn sie auf eigene Empfindungen einwirkt. Unser Weltbild wäre von idealer Vollkommenheit, wenn wir für jede unserer Empfindungen ein Zeichen hätten und ausserdem eine Regel, nach welcher wir das Eintreffen aller unserer künftigen Empfindungen und deren Abhängigkeit von unseren Willensimpulsen aus den Zeichen construiren könnten. Wenn hiebei die Vorhersagung unserer eigenen Empfindungen genügt, ja allein controlirbar ist und wenn fremde Empfindungen nur durch Vermittlung unseriger auf unser Weltbild wirken können, wie kommen wir da überhaupt zu Zeichen für fremde Empfindungen?

Die Beobachtung jedes Kindes gibt uns hierüber Aufschluss. Bei gewissen Vorgängen mit gewissen Empfindungs-

complexen (Annäherung des Gesichtsbildes meiner Hand an das einer Flamme) haben wir (mitunter heftige) neue Empfindungen, welche Willensimpulse zur Folge haben, die wieder auf die Empfindungscomplexe einwirken (wir sehen das Bild der Hand sich entfernen). Vollkommen analog verhält sich das ganz ähnliche Gesichtsbild einer fremden Hand.

Gewisse Willensimpulse erzeugen, wenn wir sprechen, gewisse (z. B. im Spiegel sichtbare) Mundbewegungen und Gehörsempfindungen. Wir sehen an anderen dem Spiegelbilde unseres Kopfes ganz ähnlichen Gesichtsbildern gleiche Mundbewegungen und haben dabei dieselben Gehörsempfindungen.

Wir bezeichneten als Zweck unseres Denkens solche Regeln für unsere Vorstellungsbilder, dass diese unsere künftigen Empfindungen uns vorher verkünden. Dieser Zweck wird in hohem Masse erreicht, wenn wir die an den auf unseren Körper bezüglichen Empfindungscomplexen gemachten Erfahrungen auch auf das Wechselspiel jener uns so ähnlichen Empfindungscomplexe anwenden, die sich auf die Körper anderer Menschen beziehen. Die Gesetze des Ablaufes unserer Empfindungen sind uns geläufig, sind in unserer Erinnerung bereit. Indem wir diese Erinnerungsbilder auch an die Empfindungscomplexe, durch welche uns die Körper fremder Menschen gegeben sind, anknüpfen, erhalten wir die einfachste Beschreibung des Verhaltens dieser Empfindungscomplexe.

Die fremde Hand verhält sich geradeso, als ob bei Berührung mit dem Feuer auch ein Schmerzgefühl einträte, der fremde Mund, als ob Willensimpulse auf ihn wirkten. Wir haben von diesen fremden Empfindungen und Willensimpulsen nicht die mindeste Kenntniss, nur von unseren Vorstellungsbildern derselben, mit denen wir so operiren, wie mit denen unserer eigenen Empfindungen und Willensimpulse, wodurch wir brauchbare Regeln erhalten, den Verlauf unserer auf die Körper fremder Menschen bezughabenden Empfindungen zu construiren und vorherzusagen. Die Vorstellung fremder Empfindung und Willensimpulse ist also bloss der Ausdruck für gewisse Gleichungen, die zwischen dem Verhalten unserer

auf den eigenen und auf die Körper anderer Menschen bezughabenden Empfindungen stets erfüllt sind, sie ist im eminenten Sinne das, was wir eine (freilich nicht mechanische, sondern psychologische) Analogie nennen.

Was hat es nun für einen Sinn, wenn ich behaupte, diese fremden Empfindungen und Willensimpulse existiren ebenso gut als meine eigenen? Füge ich durch diese Behauptung nicht den Thatsachen etwas Hypothetisches, Unbeweisbares hinzu? Verstösst sie nicht dagegen, dass es die Aufgabe meiner Vorstellungen ist, die Thatsachen bloss zu beschreiben?

Wer durch Betrachtungen, die den eben angestellten analog sind, nachzuweisen glaubt, dass die Materie bloss der Ausdruck gewisser, zwischen Complexen von Sinneswahrnehmungen bestehender Gleichungen sei und dass die Behauptung, die Materie existire in gleicher Weise wie unsere Sinnesempfindungen, eine Überschreitung unserer Aufgabe sei, die Erscheinungen bloss zu beschreiben, der bedenke, dass er zu viel beweist, dass dann auch die Empfindungen und Willensäusserungen aller übrigen Menschen als nicht gleichberechtigt existirend wie die Empfindungen des Denkenden, sondern als der blosse Ausdruck für Gleichungen zwischen den Empfindungen des letzteren betrachtet werden müssten.

Analysiren wir das bisher Gesagte weiter. Wir haben unseren Eingangsworten entsprechend nichts bewiesen, nur geschildert; wir werden auch im Folgenden nicht beweisen, sondern nur Ansichten psychologisch entwickeln können.

Die Frage, ob das Einhorn oder der Planet Vulcan in dem Sinne wie der Hirsch oder der Planet Mars existirt, hat natürlich einen ganz bestimmten Sinn, der durch das erfahrungsmässig bekannte Verhältniss der letzteren beiden Dinge zu uns klar ist. Wenn aber Jemand behaupten würde, nur seine Empfindungen existirten, die der übrigen Menschen seien bloss in seinem Denkorgane der Ausdruck für gewisse Gleichungen zwischen gewissen seiner eigenen Empfindungen (wir wollen ihn den Ideologen nennen), so würde es sich erst fragen, was er damit für einen Sinn verbindet und ob er diesen in zweckmässiger Weise zum Ausdrucke bringt. Offenbar müsste er die fremden Empfindungen

doch mit denselben analog angereihten Zeichen wie die eigenen bezeichnen, und es würde für ihn subjectiv kein Unterschied bestehen, ob er sagt, jene Empfindungen kommen fremden existirenden oder von ihm eingebildeten Menschen zu; denn für ihn sind ja die fremden Menschen in der That nur etwas Vorgestelltes. Da wir aber das Wort »nicht existiren« anwenden, wenn wir die durch gewisse Gedankenzeichen ausgedrückten Erwartungen nicht durch die Erfahrung bestätigt finden (ich glaubte irrthümlicherweise, mein Freund habe einen Bruder, und erfahre, dass dieser nicht existirt), so wäre es unzweckmässig, zu sagen, die übrigen Menschen ausser dem denkenden existirten nicht.

Die Behauptung der Ideologie müsste vielmehr so ausgesprochen werden: Die Bezeichnung »Empfindung« oder «Willensact« verwende ich als Gedankensymbol in dreifacher Weise:

1. Zur Darstellung mir unmittelbar gegebener Empfindungen und Willensimpulse.

2. Wenn mir die Verbindung der gleichen Bezeichnungen nach den gleichen Gesetzen zur Darstellung gewisser Regelmässigkeiten zwischen meinen Empfindungscomplexen nützlich ist. (Ich unterscheide die in der zweiten Weise verwendeten Bezeichnungen, indem ich sage, sie seien die Zeichen für die Empfindungen und Willensimpulse anderer existirender Menschen.)

3. Wenn ich entweder früher irrthümlich glaubte, die Bezeichnungen würden zur Darstellung solcher in 2 erwähnter Regelmässigkeiten nützlich sein, oder ohne dies je zu glauben, aus einem anderen Grunde (zur Übung, als Spiel) Bezeichnungen, die den für meine Empfindungen und Willensimpulse geschaffenen ganz analog sind, nach ganz analogen Gesetzen combinire. Ich nenne dann das die Bezeichnungen für die Empfindungen und Willensimpulse nicht existirender, bloss von mir gedachter Menschen.[1] In dieser Form ist aber die Behauptung der Ideologie von der gewöhnlichen Ausdrucksweise

[1] Die Existenz eines Menschen in früheren Zeiten (in der Geschichte) nehme ich an, um mir Mittheilungen oder Überreste und vorhandene Spuren seiner einstigen Thätigkeit zu erklären, d. h. gedanklich darzustellen.

nicht mehr verschieden. Punkt 2 ist der Ausdruck des kolossalen subjectiven Unterschiedes, der für mich zwischen mir und den übrigen Menschen besteht, eines Urtheiles über objective Existenz aber haben wir uns bisher vollständig enthalten.

Ebenso wie mit der Ideologie verhält es sich mit der Behauptung (Idealismus), dass die Materie bloss der Ausdruck für Gleichungen zwischen Empfindungscomplexen sei.[1]

Da wir die Bezeichnung »nicht existiren« für den Venusmond, den Stein der Weisen etc. reservirt haben, so wäre es offenbar unzweckmässig, zu sagen, dass die Materie nicht existire. Es bleibt also nur die Behauptung, dass das, was wir Vorgänge in der unbelebten Natur nennen, für uns blosse Vorstellungen zur Darstellung der Regelmässigkeiten gewisser Complexe unserer Empfindungen sind. In dieser Beziehung stehen also die Vorgänge in der unbelebten Natur auf derselben Stufe wie die Empfindungen und Willensimpulse anderer Menschen, während uns subjectiv die eigenen Empfindungen viel näher stehen; die Vorstellungen von unbelebten Dingen aber, die sich nachher als unrichtig erwiesen oder gleich in der Voraussicht gemacht wurden, dass wir durch sie dargestellte Empfindungscomplexe in der dargestellten Weise nicht haben, stehen mit der Vorstellung nicht existirender Menschen auf einer Stufe.

Ich hoffe, dass das bisher Entwickelte vollkommen klar ist. Wir nehmen die Empfindungen fremder Menschen nicht wahr. Es ist aber nicht eine Complication, sondern eine Vereinfachung unseres Weltbildes, sie zu den Empfindungscomplexen, die wir die Körper fremder Menschen nennen, hinzuzudenken. Wir bezeichnen daher diese fremden Empfindungen mit analogen Gedankenzeichen und Worten wie die eigenen

---

[1] Wenn man aus dieser Behauptung (dem Idealismus) die Folgerung zieht, dass keine Eigenschaft der Materie, z. B. dass diese aus unveränderlichen Theilchen bestehen muss oder dass alle Erscheinungen durch Bewegungserscheinungen darstellbar sein müssen, a priori erkannt werden könne, so unterschreibe ich diese Forderung natürlich sofort. Allein diese Folgerung schliesst nicht aus, dass wir die Materie als etwas Existirendes bezeichnen. So sind z. B. gerade die Empfindungen auch etwas Veränderliches, obwohl sie das zuerst als existirend Gegebene sind.

(wir stellen sie vor), weil uns dies ein gutes Bild des Verlaufes vieler Empfindungscomplexe liefert, unser Weltbild vereinfacht.

Um auszudrücken, dass dies vorgestellte Empfindungen sind, sagen wir, sie sind nicht unsere eigenen, sondern die fremder Menschen. Letztere bezeichnen wir als nicht existirend, wenn die Empfindungscomplexe, zu deren Darstellung ihre Vorstellung dienen würde, bei uns nicht eintreten. Das Kind glaubt wohl, auch Puppen, Bäume etc. empfänden; wir legen diesen Gegenständen keine Empfindung bei, weil dies unser Weltbild compliciren, nicht vereinfachen würde.

Analog wie die Empfindungen fremder Menschen existiren auch die Vorgänge in der unbelebten Natur für uns bloss in unserer Vorstellung, d. h. wir markiren sie durch gewisse Gedanken und Wortzeichen, weil uns dies die Construction eines zur Vorherverkündigung unserer künftigen Empfindungen tauglichen Weltbildes erleichtert. Die Vorgänge in der unbelebten Natur stehen also in dieser Beziehung den Empfindungen der fremden Menschen, die unbelebten Dinge selbst den fremden Menschen vollkommen gleich, nur dass die Zeichen und die Gesetze ihrer Verbindung jetzt von den bei Darstellung unserer Empfindungen angewandten viel verschiedener sind. »Ein unbelebtes Ding existirt oder nicht«, hat dieselbe Bedeutung wie »ein Mensch existirt oder nicht«. Es wäre also ein vollständiger Irrthum, wenn man glauben würde, man hätte auf diesem Wege bewiesen, dass die Materie mehr ein Gedankending ist, als ein fremder Mensch.

Wir können nun sicher unser Weltbild nur aus unseren Empfindungen und Willensimpulsen aufbauen, aber von allen unseren Empfindungen sind uns nur die eine oder die wenigen, die wir gerade augenblicklich haben, unmittelbar gegeben. Es wäre daher ein Irrthum, zu glauben, die Erinnerung, eine Empfindung gehabt zu haben, sei ein sicherer Beweis, dass sie existirt hat. Kinder von drei Jahren unterscheiden oft die Erinnerungen von ihren Phantasien noch gar nicht. Leute, die an nächtlichen Pollutionen leiden, können, wenn sie sich einer solchen des Morgens erinnern, ungewiss sein, ob sie wirklich oder geträumt war. Wäre unser Geistesleben nie regelmässiger als im Traume, so würden wir höchstens zu gewissen Gesetzen

des Wechsels der Vorstellungen, niemals zum Begriffe von etwas ausser uns Existirendem gelangen.

Da ferner eine ganz matte Erinnerung continuirlich in völlige Vergessenheit übergeht, da uns hie und da durch einen blossen Zufall Dinge ins Gedächtniss kommen, deren wir uns unter anderen Umständen niemals erinnert hätten, so haben wir sicher zahllose Empfindungen, Vorstellungen und Willensimpulse gehabt, deren wir uns absolut nicht mehr erinnern. Es wäre aber offenbar ganz unthunlich, einen gewissen Grad der Undeutlichkeit der Erinnerung an einem Vorgange festzusetzen, bei dem man plötzlich sagt, derselbe habe nicht existirt; daher müssen wir ohne Weiteres Vieles als existirend bezeichnen, was mit unserem heutigen Denken in keinem directen Zusammenhange steht. Wir sehen auch, dass viele Empfindungen eintreten, trotz aller Willensimpulse, durch welche wir sie zu verhindern streben, dass es daher auch etwas gibt, was von unserem Willen unabhängig ist. Es existiren also sicher Vorgänge, die von unserem gegenwärtigen Denken und Wollen unabhängig sind, deren Existenz »objectiv richtig«, aber für uns nicht erkennbar ist. Das in unserer Erinnerung Vorhandene ist zu verschiedenen Zeiten verschieden. So kommen wir zunächst zum Begriffe der objectiven, als einer von unserer augenblicklichen Erinnerung unabhängigen Existenz.

Dazu kommt noch ein neues Moment. Eine der wichtigsten Förderungen erfährt unser Weltbild durch die Mittheilungen fremder Menschen an uns, sowie durch unsere Reden an sie. Hiebei wird natürlich jeder sich als den Sprechenden (das Subject) von den Angesprochenen (den Objecten) unterscheiden, sich zunächst auf den von uns bisher eingenommenen Standpunkt (den subjectiven) stellen.

Wir werden passend den Begriff der Existenz und Nichtexistenz, wie wir ihn bisher erörtert haben, als den der subjectiven Existenz oder Nichtexistenz bezeichnen.

Es wäre nun unzweifelhaft unzweckmässig, die Menschen wie folgt anzusprechen: »Ihre Empfindungen sind keineswegs gleichwerthig mit den meinen. Während ich mir meiner Empfindungen unmittelbar bewusst bin, ist das, was ich Ihre Empfin-

dungen nenne, für mich ein Gedankensymbol für gewisse Regelmässigkeiten meiner Empfindungen. Nur weil sich gewisse Empfindungscomplexe von mir, die ich Ihre Körper nenne, consequent so ändern, als ob sie von ganz analogen Willensimpulsen getrieben wären, wie ich sie auf andere meiner Empfindungscomplexe (meinen Körper) ausübe, so muss ich gegen Sie so verfahren, wie Ihre scheinbaren Willensimpulse gegen mich verfahren«. Man würde da fortwährend Worte wiederholen, welche die anderen Menschen gar nicht interessiren, d. h. von gar keiner oder nur ungewünschter Wirkung auf jene meiner Empfindungscomplexe sind, welche ich ihre Körper nenne.

Die Sprache muss sich daher einer anderen, für alle Menschen in gleicher Weise passenden Terminologie bedienen; »wir müssen uns«, wie man sagt, »auf den objectiven Standpunkt stellen«. Es zeigt sich da, dass die Begriffe, welche wir mit »Existiren« und »Nichtexistiren« verbanden, grösstentheils unverändert anwendbar bleiben. Diejenigen Menschen oder unbelebten Dinge, welche ich mir nur einbilde, d. h. vorstelle, ohne dass es durch Regelmässigkeiten von Empfindungscomplexen gefordert wurde, existiren auch für andere Menschen nicht, sie existiren »objectiv« nicht.

Dagegen zerfallen die Empfindungen, welche ich, ohne sie wahrzunehmen, als fremde, d. h. zur Erklärung von Regelmässigkeiten meiner eigenen dienende annehme, in die vieler fremder Menschen, von denen jeder sich zu den seinigen, wie ich mich zu den meinigen, verhält.

Soll ich mich daher verständigen, so muss ich mich ihrer Sprache anschliessen, in der alle als gleichberechtigt (»objectiv«) existirend erscheinen. Diesen Anschluss an die mir erfahrungsmässig gegebene (weil erlernte) Sprache der anderen Menschen nenne ich im Gegensatze zu dem bisher geschilderten subjectiven den objectiven Standpunkt.

Da die Empfindungen, die ich im Wachen habe, die alleinigen Bausteine meines Denkens sind, so muss ich von ihnen ausgehen; ich muss also die Empfindungen, von denen mir alle Erinnerungen übereinstimmend anzeigen, dass ich sie im Wachen hatte, als das in erster Linie Existirende

bezeichnen, wenn nicht alles Denken aufhören soll. Ebenso muss ich der Homogenität der Sprache wegen die Empfindungen der anderen Menschen bezeichnen. Das Kriterium, dass das Urtheil aller Menschen über Existenz und Nichtexistenz gleich ausfällt, trifft auch für die Erscheinungen der unbelebten Natur zu. Allein hier fällt das Argument, dass mir einige ausserordentlich ähnliche direct gegeben sind, ich sie also in erster Linie als existirend denken muss, weg; es könnten daher auch alle Menschen übereinstimmend die Vorgänge in der unbelebten Natur von den psychischen dadurch unterscheiden, dass sie erstere als objectiv nicht existirend bezeichnen. Obwohl dies schon deshalb unzweckmässig wäre, da für mich subjectiv einerseits die existirenden fremden Menschen und die unbelebten Dinge auf der gleichen Stufe stehen und anderseits nicht existirende Menschen und nicht existirende unbelebte Dinge unter sich wieder dieselbe Rolle spielen, so dass für die subjective Existenz Psychisches und Unbelebtes gleichberechtigt ist,[1] so war es doch offenbar der Grund, warum manche Philosophen die Ansicht aussprachen, das Belebte, Empfindende sei allein existirend, das Unbelebte existire erst, wenn es von einem Belebten wahrgenommen werde, während doch auch das fremde Belebte für mich nur existirt, wenn ich es wahrnehme, und nicht nur die Materie, sondern auch die fremden Menschen für mich (d. h. wenn ich mich nicht der Sprache der übrigen accommodire), blosse Gedankensymbole, einzig der Ausdruck von Gleichungen zwischen Empfindungscomplexen von mir sind.

Natürlich wäre die Forderung abgeschmackt, die objective Existenz der Materie zu beweisen oder zu widerlegen. Es wird sich vielmehr bloss darum handeln, weitere Gründe dafür anzugeben, dass es nicht zweckmässig wäre, an die bisher constatirten Thatsachen, deren wir uns aber im Übrigen stets klar bewusst bleiben sollen, immerfort dadurch

[1] Deshalb werden die Regeln für die Handhabung des Begriffes der objectiven Existenz den entsprechenden für die Handhabung des Begriffes dessen, was wir subjective Existenz nannten, am conformsten, wenn wir die Materie als objectiv existirend bezeichnen, und dies ist ein Hauptgrund für die Zweckmässigkeit der letzteren Bezeichnungsweise.

zu erinnern, dass wir die Materie als nicht objectiv existirend bezeichnen.

Wenn es Jemandem als a priori evident erscheint, dass die Materie existirt oder nicht existirt, so kann dies natürlich nur, wofern er nicht irgend eine vorgefasste Meinung hat, als der Ausdruck der subjectiven Überzeugung aufgefasst werden, dass die eine oder andere Bezeichnung zu ganz lächerlichen Complicationen führen würde. Eine solche subjective Überzeugung kann natürlich auch auf einem Irrthum beruhen, wie wenn ein Kind sich kein anderes Weltbild denken kann als das, worin Alles empfindet wie es selbst.

Wir haben im Früheren behufs Feststellung des Begriffes der objectiven Existenz an das gemeinsame Urtheil aller Menschen appellirt. Man könnte sich nun andere menschenähnliche Wesen auf anderen Planeten oder höhere Intelligenzen denken, deren übereinstimmendes Urtheil die objective Existenz definitiv bestimmen würde. Allein damit wäre wenig gewonnen; wir müssen daher wieder zu unseren eigenen Erfahrungen zurückkehren.

Der Grund, weshalb wir die Empfindungen der übrigen Menschen, ausser dem Denkenden als objectiv existirend bezeichneten, war allein deren vollkommene Analogie mit den in erster Linie als existirend zu bezeichnenden Empfindungen des Denkenden. Es wird sich also noch darum handeln, zu prüfen, ob die Vorgänge in der unbelebten Natur so viel Analogie mit den psychischen haben, dass es sich empfiehlt, sie ebenfalls als objectiv existirend zu betrachten, oder ob sich zwischen beiden eine so scharfe Grenze ziehen lässt, dass erstere als objectiv nicht existirend bezeichnet werden können.

Den Empfindungen der Menschen sind zunächst die der höchststehenden Thiere so vollkommen analog, dass wir nothwendig auch den letzteren objective Existenz zuschreiben müssen; wo aber ist da die Grenze? Man hört allerdings manchesmal Zweifel aussprechen, ob Insecten, ob theilbare Thiere, wie gewisse Würmer, empfänden. Doch ist eine scharfe Grenze, wo das Empfinden aufhört, unangebbar. Wir kommen schliesslich zu so einfachen Organismen, dass ihre Weltbilder und Gedanken Null sind. Wollen wir nicht, was ganz unzweck-

mässig wäre, den Empfindungen der unterhalb einer gewissen Stufe stehenden Thiere das Prädicat der Existenz plötzlich verweigern, so müssen wir auch dieser gedankenlosen organisirten Materie, in der Empfindungen kaum nachzuweisen sind, welche sich aber wieder zu den Pflanzen hinauf continuirlich abstuft, Existenz zuschreiben. Dann schiene es mir aber wieder als ein nicht gerechtfertigter unzweckmässiger Sprung, dieses Prädicat der unorganisirten Materie zu verweigern.

Wäre nur dieses Argument für die objective Existenz des Leblosen vorhanden, so könnte derjenige, welcher sich ganz auf den hier vertheidigten Standpunkt stellt, auf den Einfall kommen, die Annahme verschiedener Grade von Existenz vorzuschlagen, die endlich beim Leblosen auf Null herabsinkt. Allein eine solche Ausdrucksweise wäre wieder entschieden unzweckmässig. Erstlich haben wir für dieselbe Thatsache ohnedies schon bezeichnende Begriffe; wir sagen, die Klarheit des Bewusstseins sinkt allmälig auf Null herunter. Zweitens haben wir den Begriff »Existenz« schon in einem Sinne (dem subjectiven) so festgestellt, dass er keiner Comparation fähig ist (existirender und nicht existirender fremder Mensch, zwei Marsmonde existiren, der Venusmond existirt nicht), und man muss die Bezeichnungen immer so wählen, dass man unter allen Umständen mit den gleichen Begriffen stets in gleicher Weise operiren kann, geradeso wie der Mathematiker die Begriffe der negativen und gebrochenen Exponenten so definirt, dass er damit so wie mit den ganzen Exponenten operiren kann.

Die Wörter und daher auch die Begriffe können wir ja formen, wie wir wollen. Es gab sich Jemand einmal Mühe, mir zu beweisen, dass der Gymnasiallehrer wirklich ein Professor ist und daher das österreichische Gesetz, welches ihm diesen Titel zuerkennt, das allein gerechte ist. Ebenso kommt es mir vor, wenn man ein Wort wie das Wort »existiren« aus der Sprache nimmt und ohne dessen Sinn zu fixiren, sich den Kopf zerbricht, was existirt und was nicht.

Der Fortschritt im Denken muss vielmehr dadurch erzielt werden, dass man alle derartigen verfehlten Schlussformen, sowie alle Begriffe eliminirt, welche uns erfahrungsmässig nicht fördern, sondern irreführen oder gar in Widersprüche

verwickeln. Diese Schlussformen und Begriffe sind stets durch Übertragung ursprünglich zweckmässiger Denkgewohnheiten auf Fälle, wo diese nicht hinpassen, entstanden. Man muss das Denken immer mehr anpassen und den Sinn der Wörter immer zweckmässiger fixiren, was bei den einfachsten Begriffen nicht durch Definition, sondern bloss durch den Hinweis auf bekannte Erfahrungen geschehen kann.

Wir sehen ferner, dass jene Reihen von Empfindungen und Willensacten, welche wir einzelne Menschen nennen, immer wieder bald abbrechen, dass die einzelnen Menschen sterben, wogegen die Materie, an welche jene Geistesäusserungen gebunden waren, bleibt. Das subjective Weltbild, welches die Materie als den blossen Ausdruck von Gleichungen zwischen den Empfindungscomplexen der Menschen auffasst, sucht also zunächst das flüchtige, complicirte, durch Bezeichnungen nachzubilden und diese Bilder erst später zur Darstellung der einfachen, beständigeren (der Materie) zu verwenden. Es fasst die ägyptischen Pyramiden, die Akropolis von Athen als blosse Gleichungen auf, welche zwischen den Empfindungen der Generationen von Jahrtausenden bestehen.

Daneben muss doch ein einfacheres (objectives) Weltbild möglich sein, welches vom Beständigeren ausgeht und das Vergängliche durch die Gesetze darstellt, welche im Beständigeren herrschen. Verfolgen wir unsere Gedankenbilder consequent, d. h. nach den Regeln, die immer zur Bestätigung durch die Erfahrung führten, so kommen wir zum Resultate, dass der Planet Mars von ähnlicher Grösse wie die Erde ist, dass darauf Festlande, Meere, Schneefelder etc. existiren, ja es scheint uns nicht unmöglich, dass es auf Planeten anderer Sonnen die grossartigsten Landschaften gibt, ohne dass diese je auf ein lebendes Wesen Sinneseindrücke machen.

Für uns subjectiv ist der Ausdruck hievon freilich nur eine geringfügige innere Vorstellungsthätigkeit oder ein paar gesprochene Sätze, die mit den betreffenden kolossalen kosmischen Vorgängen nichts gemein haben. Diese Vorstellungs- oder Wortzeichen haben für uns keinen anderen Sinn als die Möglichkeit gewisser geometrischer Constructionen in verkleinertem Massstabe, Verbindung derselben mit Zahlenreihen

und irgendwelchen Analogien mit irdischen Landschaften, welche in analogen Fällen auf der Erde stets durch die Erfahrung bestätigt wurden, und ohne welche unser Weltbild inconsequent und lückenhaft wäre. Wir schliessen daraus auf die Möglichkeit uns analoger Wesen, denen diese Landschaften dasselbe wie uns die irdischen sind, mit demselben Rechte wie darauf, dass wir viele Empfindungen hatten, deren wir uns nicht mehr erinnern.[1] Unsere Empfindungen führen uns also da von selbst ganz aus ihrem Gebiete heraus zu ins Einzelne bestimmten Vorstellungen von Dingen, die von unserem Empfindungsleben so weit abstehen.

Hätte also derjenige, der die Marslandschaften bloss unter dem Gesichtspunkte von Gleichungen zwischen den spärlichen, auf den Mars bezüglichen Sinneswahrnehmungen der Menschen betrachtet, nicht ein ebenso einseitiges und unzweckmässiges Weltbild, wie jener, der nur sich, nicht auch die anderen Menschen, als existirend betrachtet? Denn etwaige Marsbewohner würden für uns ja auch erst existiren, wenn wir auf sie bezügliche Wahrnehmungen machen könnten.

Wir sehen ferner, dass unsere geistige Thätigkeit nur dann auf die eines anderen Menschen von Einfluss ist, wenn wir durch Willensimpulse Veränderungen in denjenigen Empfindungscomplexen erzeugen, denen die Materie entspricht, und wenn diese zum Körper des anderen Menschen in ein solches Verhältniss tritt, in dem auch wir Sinneseindrücke empfangen würden. Nirgends finden wir directe Gleichungen zwischen unseren und fremden Empfindungen, alle werden durch die Materie vermittelt. Zwischen den Veränderungen dieser werden wir daher die einfachsten Gleichungen zu erwarten haben.

Die innige Verknüpfung des Psychischen mit dem Physischen endlich ist uns erfahrungsmässig gegeben. Vermöge derselben ist es höchst wahrscheinlich, dass jedem psychischen

---

[1] Es wäre denkbar, dass sich ein Gedankenbild, z. B. die Atomistik, in seiner weiteren Entwicklung so complicirt gestaltet, dass die der ganzen Menschheit zur Verfügung stehende Zeit absolut zur Weiterentwicklung des Bildes nicht mehr ausreicht. Dann hätte die Behauptung der Möglichkeit, dass das Bild, wenn es weiter entwickelt würde, viel von der Welt darstellen könnte, noch immer einen Sinn, wenn doch sicher keine praktische Bedeutung.

Vorgange ein materieller Vorgang im Gehirne entspricht, d. h. eindeutig zugeordnet ist, und dass die letzteren alle echte materielle Vorgänge, d. h. durch dieselben Bilder und Gesetze darstellbar sind, wie die Vorgänge in der unbelebten Natur. Dann müssten aber aus den zur Darstellung der Gehirnvorgänge dienenden Bildern auch alle psychischen Vorgänge vorhergesagt werden können. Es müssten also alle psychischen Vorgänge aus den Bildern, welche zur Darstellung der unbelebten Natur dienen, ohne Änderung der dort geltenden Gesetze vorausgesagt werden können. Die Ansicht, dass dies richtig sei, wollen wir die Ansicht *A* nennen.

Alle diese Umstände machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass ein Weltbild (das objective) möglich ist, in welchem die Vorgänge in der unbelebten Natur nicht nur die gleiche, sondern sogar eine viel umfangreichere Rolle spielen, als die psychischen, in welchem sich die letzteren zu den ersteren nur wie specielle Fälle zum Allgemeinen verhalten. Wir werden zwar nicht bestrebt sein, die Wahrheit oder Falschheit des einen oder anderen Weltbildes zu beweisen, wohl aber nach der Zweckmässigkeit des einen oder anderen zu diesem oder jenem Zwecke fragen, während wir beide neben einander bestehen lassen.

Haben wir bisher mit der Entstehung unseres Weltbildes begonnen und dasselbe rein synthetisch construirt, so wollen wir jetzt behufs Darstellung des objectiven Weltbildes den umgekehrten Weg einschlagen, welcher, wo es sich um möglichst exacte Herausschälung der Begriffe handelt, in der Regel der zweckmässigste ist. Wir geben nur möglichst leicht verständliche Regeln, wie dieses Weltbild zu construiren ist, ohne uns darum zu kümmern, wie wir subjectiv zu diesen Regeln gelangt sind, und erblicken bloss in der Übereinstimmung des Weltbildes mit den Thatsachen dessen Rechtfertigung. Was früher das erste war, wird jetzt gerade das letzte.

Das Gehirn betrachten wir als den Apparat, das Organ zur Herstellung der Weltbilder, welches sich wegen der grossen Nützlichkeit dieser Weltbilder für die Erhaltung der Art entsprechend der Darwin'schen Theorie beim Menschen geradeso

zur besonderen Vollkommenheit herausbildete, wie bei der Giraffe der Hals, beim Storch der Schnabel zu ungewöhnlicher Länge. Mittelst der Bilder, durch welche wir uns die Materie dargestellt haben (ob sich hiezu die Bilder der heutigen Atomistik oder andere als die besten bewähren, ist dabei gleichgiltig), suchen wir uns jetzt die materiellen Vorgänge im Gehirne darzustellen und dadurch zugleich zu einer besseren Anschauung der psychischen zu gelangen, sowie zu einer Darstellung des Mechanismus,[1] welcher sich da im Menschenkopfe entwickelt hat und die Darstellung so complicirter und zutreffender Bilder ermöglicht.

Sobald wir uns der Ansicht *A* anschliessen, müssen wir annehmen, dass die Bilder und Gesetze, die zur Darstellung der Vorgänge in der unbelebten Natur dienen, ausreichen, um auch alle psychischen Vorgänge eindeutig darzustellen, wir sagen kurz die psychischen Vorgänge sind mit gewissen materiellen Vorgängen im Gehirne identisch (Realismus). Es wurde oft die Meinung ausgesprochen, dass dies unmöglich sei. Die Berechtigung dieser Meinung können wir natürlich wieder nur an dem erfahrungsmässig Gegebenen prüfen.

Erfahrungsmässig gegeben ist uns, dass jede Empfindung von jeder anderen irgendwie verschieden ist, dass einige Empfindungen einander ähnlicher, andere einander unähnlicher sind, dass also die einen mehr, die anderen weniger untereinander gemein haben, sowie wie sie zeitlich verlaufen. Über die Qualität, die edlere oder unedlere, materielle oder immaterielle Natur der Empfindungen wissen wir direct gar nichts durch die Erfahrung. Daher begreife ich es gar nicht, wenn man sagt, wir empfänden (oder wüssten a priori oder seien uns dessen unmittelbar bewusst oder was sonst noch), dass die Empfindungen etwas Einfaches oder dass sie qualitativ von den Vorgängen in der unbelebten Natur verschieden oder gar, dass sie edler, erhabener etc. seien. Glaubte man doch einmal sogar zu empfinden, dass das ganze menschliche Ich etwas Einfaches sei. Im Gegentheile, gerade die proteusartig wechselnde, schwer zu definirende Ähnlichkeiten

[1] Das Wort Mechanismus soll natürlich nicht präjudiciren, dass die Gesetze der heutigen Mechanik zu seiner Darstellung genügen müssen.

zeigende Natur der verschiedenen Empfindungen macht es wahrscheinlich, dass deren Verlauf nicht durch die einfachsten, sondern nur durch sehr complicirte Gedankenbilder genau darstellbar ist, wie die verschiedenen physikalischen und chemischen Vorgänge im Gehirne.[1] Mehr aber wollen wir damit ja wieder nicht ausdrücken, wenn wir sagen, die Gedanken sind gewisse Vorgänge im Gehirne oder gar ein Spiel gewisser Atome.

Wenn man sagt, dass die Materie oder gar die Atome empfänden, so hat man sich natürlich ganz falsch ausgedrückt. Man muss vielmehr sagen, dass man es nicht für unmöglich hält, dass die Gesetze des Wechsels der Empfindungen durch das Bild materieller (physikalischer, chemischer, elektrischer) Vorgänge im Gehirne am genauesten darstellbar sind.

Die complicirtesten Systeme materieller Körper, deren Wirkungsweise wir einigermassen durchschauen, sind etwa eine Uhr oder eine Dynamomaschine. Wir glauben daher, dass wir, wenn unsere seelischen Processe durch die Bilder materieller Vorgänge im Gehirne erschöpfend darstellbar wären, ebenso todt und theilnahmslos wie diese Maschinen sein müssten. Dies ist offenbar der Grund, warum diese Ansicht Manchem öde und trostlos erscheint. Doch wie ich glaube ohne jede Berechtigung; denn gerade die Entstehung heftiger Schmerz- und Lustgefühle erklärt sich aus der Darwin'schen Theorie, weil diese behufs Erzielung der zur Erhaltung der Art nothwendigen Energie der Reactionen erforderlich sind. Die ganze Intensität, Mannigfaltigkeit und Reichhaltigkeit des Geistes- und Gemüthslebens kann ja nicht dadurch bedingt sein, dass die betreffenden Vorgänge qualitativ edler und erhabener wären, als die in todten Maschinen, sondern bloss dadurch, dass sie reicher und mannigfaltiger sind, sowie dass unser eigenes Ich derselben Gattung von Wesen angehört. Da

---

[1] D. h. bei richtiger Auffassung des Begriffes des Continuums ein Spiel der Atome desselben, worunter man sich freilich nicht materielle Punkte denken muss, sondern vielleicht Vectoren oder wer weiss was. Auch müssen die Atome nicht nothwendig unveränderlich sein. (Vergl. diese Sitzungsber. Bd. 105, Nov. 1896; Wied. Ann., Bd. 60, S. 231, 1897.

man doch nicht bezweifeln wird, dass auch die geistigen Functionen nach ganz bestimmten Gesetzen erfolgen, so könnte ich darin nichts Entmuthigendes finden, wenn diese mit den Gesetzen identisch wären, nach denen sich gleich complicirte materielle Vorgänge abspielen. Für unser subjectives Gefühl ist eben dasjenige edel und erhaben, was unsere Gattung fördert und erhebt, objectiv existiren diese Begriffe nicht. Wenn daher materielle Vorgänge ebenso mannigfaltig und complicirt sein können wie unsere geistigen, woran zu zweifeln kein Grund ist, so sehe ich nicht ein, wie durch die Behauptung, dass sich durch das Gedankenbild materieller Vorgänge im Gehirne unsere psychischen Thätigkeiten erschöpfend darstellen liessen, der edle, erhabene Charakter der letzteren oder unser leidenschaftliches Interesse für dieselben irgendwie tangirt werden könnte. Wir wissen, dass eine Uhr nicht empfinden kann, d. h. dass sich durch einen so einfachen Mechanismus nicht den Empfindungen einigermassen Ähnliches darstellen lässt. Aber was will man damit ausdrücken, wenn man sagt, aus der qualitativen Verschiedenheit unserer Empfindungen und der materiellen Vorgänge folge, dass der Ablauf der ersteren überhaupt nie durch eine noch so complicirte Zusammenstellung derjenigen Vorstellungsbilder dargestellt werden könnte, welche uns zugleich die Vorgänge in der unbelebten Natur darstellen. Wenn man sagt, die unbelebte Welt sei materiell, ausgedehnt etc., so meint man doch nur, dass sie durch die Gedankenbilder der Geometrie und mathematischen Physik darstellbar ist. Wenn man daher umgekehrt behauptet, die Empfindungen seien immateriell, unausgedehnt etc., so hat man doch nur das zu Beweisende, dass sie durch beliebig complicirte Combinationen dieser Bilder nicht darstellbar seien, nur vorweggenommen. Dass die Darstellung des Zustandekommens der Empfindungen durch complicirte, der Physik und Chemie entnommene Bilder bis heute noch nicht gelungen ist, beweist doch nicht, dass sie principiell unmöglich ist? Unser Urtheil über die Darstellbarkeit einer Erscheinungsgruppe durch gewisse Bilder ist naturgemäss so lange ein vollständig schwankendes und unbestimmtes, als diese Darstellung nicht wirklich vollständig bis ins kleinste Detail gelungen ist. Die Bilder der

Geometrie und Mechanik wurden gemacht, um die gewöhnlichen Gleichgewichts- und Bewegungserscheinungen darzustellen, und dies ist so vollständig gelungen, dass uns die Möglichkeit, alle Erscheinungen des betreffenden Gebietes so darzustellen, nicht zweifelhaft ist. Alle anderen rein physikalischen Vorgänge haften so innig an materiellen Trägern, dass die Nothwendigkeit, die Bilder der Geometrie und Mechanik zu ihrer Erklärung theilweise zuzuziehen, wohl ausser Zweifel ist. Ob aber diese Bilder überall ausreichen, darüber sind die Ansichten noch sehr getheilt. Schon die Wärmeerscheinungen bieten manche Züge, die wenigstens auf den ersten Blick nicht bloss räumliche und zeitliche, sondern anders geartete, sagen wir qualitative Änderungen der Körper zu sein scheinen, und während einige Physiker glauben, dass sich dieselben am besten unter dem Bilde von Bewegungen der kleinsten Theile darstellen lassen, scheint dies anderen unwahrscheinlich. Noch zweifelhafter ist dies bezüglich der Erscheinungen des Elektromagnetismus, der strahlenden Energie und der Chemie. Ja man hört sogar die Ansicht, dass zur Darstellung der letzteren Erscheinungen selbst die Bilder der Geometrie erweitert werden müssten. Es zeigen also auch die rein physikalischen Thatsachen untereinander keineswegs vollständige Homogenität. Aber wer wollte behaupten, dass hierin ein strenger Beweis liege, dass sie qualitativ untereinander so verschieden seien, dass sie sicher principiell durch die Bilder der Mechanik nicht darstellbar sind?

Die psychischen Erscheinungen stehen den materiellen vielleicht weit ferner als die thermischen oder die elektromagnetischen den rein mechanischen; dass aber die beiden ersteren qualitativ, die drei letzteren dagegen nur quantitativ verschieden seien, scheint mir reines Vorurtheil zu sein.

Macht man die Annahme, welche wir die Annahme *A* genannt haben, dass jedem psychischen Vorgange ein gewisser Gehirnvorgang eindeutig entspricht, und dass alle Gehirnvorgänge echt materiell, d. h. durch die Bilder und Gesetze darstellbar sind, welche zur Darstellung der Vorgänge in der unbelebten Natur dienen, so müsste im Gegentheile das Entstehen und der Verlauf der psychischen Vor-

gänge durch diese Gesetze eindeutig bestimmbar, d. h. darstellbar sein.

Wir wollen uns eine Maschine[1] als möglich denken, die so wie unser Körper aussieht und sich auch so verhält und bewegt. In ihrem Inneren soll ein Bestandtheil sein, welcher durch die Wirkung des Lichtes, des Schalles etc. mittelst Organen, die genau wie unsere Sinnesorgane und die damit verknüpften Nerven gebaut sind, Eindrücke empfängt. Dieser Bestandtheil soll die weitere Fähigkeit haben, Bilder dieser Eindrücke zu bewahren und durch Vermittlung dieser Bilder Nervenfasern so anzuregen, dass sie Bewegungen erzeugen, die ganz den Bewegungen unseres Körpers gleichen. Unbewusste Reflexbewegungen wären dann natürlich solche, deren Innervationen nicht so tief ins Centralorgan eindringen, dass daselbst Erinnerungsbilder entstehen. Man sagt, es sei a priori klar, dass sich diese Maschine zwar äusserlich wie ein Mensch verhält, aber nichts empfinden würde. Sie würde die verbrannte Hand zwar ebenso rasch zurückziehen wie wir, aber dabei keinen Schmerz empfinden. Ich glaube, man sagt dies bloss, weil man sich doch nur eine Uhr, nicht eine so complicirte Maschine denkt, analog wie physikalisch ungebildete Leute zu mir oft sagten, es sei ihnen (wir würden sagen a priori) klar, dass man im Weltraume draussen noch wissen müsse, was oben und unten sei, oder dass man, wenn die Erde sich drehte, es spüren müsste. Diese Leute vermochten sich eben nicht in den Weltraum hinauszudenken, sich nicht die kosmischen Verhältnisse vorzustellen.

So zwingend solche Urtheile für den Befangenen sind, so wenig beweisen sie. In der oben fingirten Maschine würde jede Empfindung als etwas Besonderes existiren. Ähnliche Empfindungen hätten Vieles, unähnliche weniger gemein. Ihr zeitlicher Verlauf wäre der durch die Erfahrung gegebene. Freilich wäre keine Empfindung etwas Einfaches, jede wäre

---

[1] Unter Maschine verstehe ich natürlich nichts weiter als ein System, das aus denselben Bestandtheilen nach denselben Naturgesetzen aufgebaut ist, wie die unbelebte Natur, nicht aber ein solches, das durch die Gesetze der heutigen analytischen Mechanik darstellbar ist; denn wir wissen noch keineswegs, ob die gesammte unbelebte Natur durch diese darstellbar ist.

identisch mit einem complicirten materiellen Vorgange; allein für denjenigen, der den Bau der Maschine nicht kennt, wären die Empfindungen wieder nicht durch Länge und Masse messbar, er würde sie durch räumliche und mechanische Bilder ebensowenig darstellen können, als wir unsere Empfindungen. Mehr aber ist uns durch die Erfahrung nicht gegeben. Es wäre also durch unsere Maschine Alles realisirt, was uns erfahrungsmässig vom Psychischen gegeben ist. Alles Übrige denken wir uns, wie mir scheint, willkürlich selbst dazu. Unsere Maschine würde geradeso gut wie jeder Mensch sagen, sie sei sich ihrer Existenz bewusst (d. h. sie habe Gedankenbilder für die Thatsache ihrer Existenz). Niemand könnte beweisen, dass sie sich ihrer selbst weniger bewusst wäre als ein Mensch. Ja man könnte das Bewusstsein gar nicht irgendwie so definiren, dass es dieser Maschine weniger zukäme als dem Menschen.

Wir haben in den letzten Sätzen wieder ganz den einseitigen Standpunkt zum Ausdrucke gebracht und sind ganz ins Fahrwasser der alten Terminologie gerathen, die man natürlich immer anwenden kann, sobald man sich das Richtige dabei denkt. Um Missverständnisse auszuschliessen, wollen wir nochmals erklären, dass die zuletzt geschilderten Betrachtungen eben nur zeigen sollen, wie man sich von einem bestimmten Standpunkte das Weltbild construiren kann. Die ideale Natur des Menschengeistes wird dadurch nicht tangirt. Thatsächlich bleibt Alles beim Alten. Wir erklären es nur für möglich, dass dieselben Gedankensymbole und Gesetze, mittelst deren wir die besten Bilder der Vorgänge in der unbelebten Natur erhalten, in verwickelten Verbindungen auch die einfachsten und klarsten Bilder der psychischen Vorgänge geben können.

Wenn man sich dieser Ansicht (also dem, was wir die Ansicht A nannten) anschliesst, so sind die Vorgänge in der unbelebten Natur so wenig qualitativ von denen in der belebten verschieden, dass sich irgendeine Grenze überhaupt nicht ziehen lässt und es vollkommen unthunlich wäre, bloss den Empfindungen, nicht auch den Vorgängen in der unbelebten Natur objective Existenz zuzuschreiben. Eher könnte es dann

etwa fraglich sein, ob geträumte Empfindungen oder bloss die Erinnerungen daran beim Erwachen objectiv existiren, welche Frage sich aber möglicherweise durch die Physiologie des Gehirnes entscheiden liesse.

Die synthetische Schilderung des Zustandekommens der Gedanken bleibt natürlich nach wie vor folgende: Wir construiren zu allererst Gedankenbilder der uns unmittelbar bewussten Empfindungen; dann kommen wir zu Gedankensymbolen für diejenigen Gesetzmässigkeiten unserer Empfindungscomplexe, welche zur Vorstellung der Materie führen. Indem wir nach dieser Methode die materiellen Vorgänge im Gehirne (die wir möglicherweise einmal auch objectiv, z. B. mittelst Röntgenstrahlen beobachten könnten) darstellen, hoffen wir zu einer besseren, quantitativen Übersicht über die psychischen Vorgänge zu gelangen, von denen wir ausgingen. Aber würden wir da nicht gerade beweisen, dass das, was wir mit den Röntgenstrahlen sehen, etwas ganz Anderes ist als unsere Empfindung? Mit nichten; wir hätten nur einen neuen Zusammenhang zwischen verschiedenen Empfindungen nachgewiesen, denen, die wir schon lange kennen, und gewissen Gesichtsbildern, welche erst beim Blicken auf einen Schirm entstehen, der von Röntgenstrahlen getroffen wird, die unseren Kopf passirt haben.

Will man sich dagegen der Ansicht *A* nicht anschliessen, so muss man entweder annehmen, dass nicht alle Vorgänge im Gehirne durch die Bilder und Gesetze darstellbar sind, welche zur Darstellung der unbelebten Natur dienen, oder dass es psychische, also durch diese Bilder und Gesetze nicht darstellbare Vorgänge gibt, denen keine Gehirnprocesse entsprechen, was durch die Erfahrung zwar unwahrscheinlich gemacht, aber nicht absolut widerlegt wird. Dann würde allerdings die Kluft zwischen Belebtem und Leblosem tiefer. Doch stehen dem Idealismus noch immer die schon erwähnten Schwierigkeiten entgegen, z. B. die Überbrückung dieser Kluft durch den allmäligen Übergang zwischen Belebtem und Unbelebtem, die dominirende Rolle, welche das Unbelebte in jedem Weltbilde wird spielen müssen, der gegenüber das Psychische nur gewissermassen als Anhang erscheint. So darf die Vorstellung

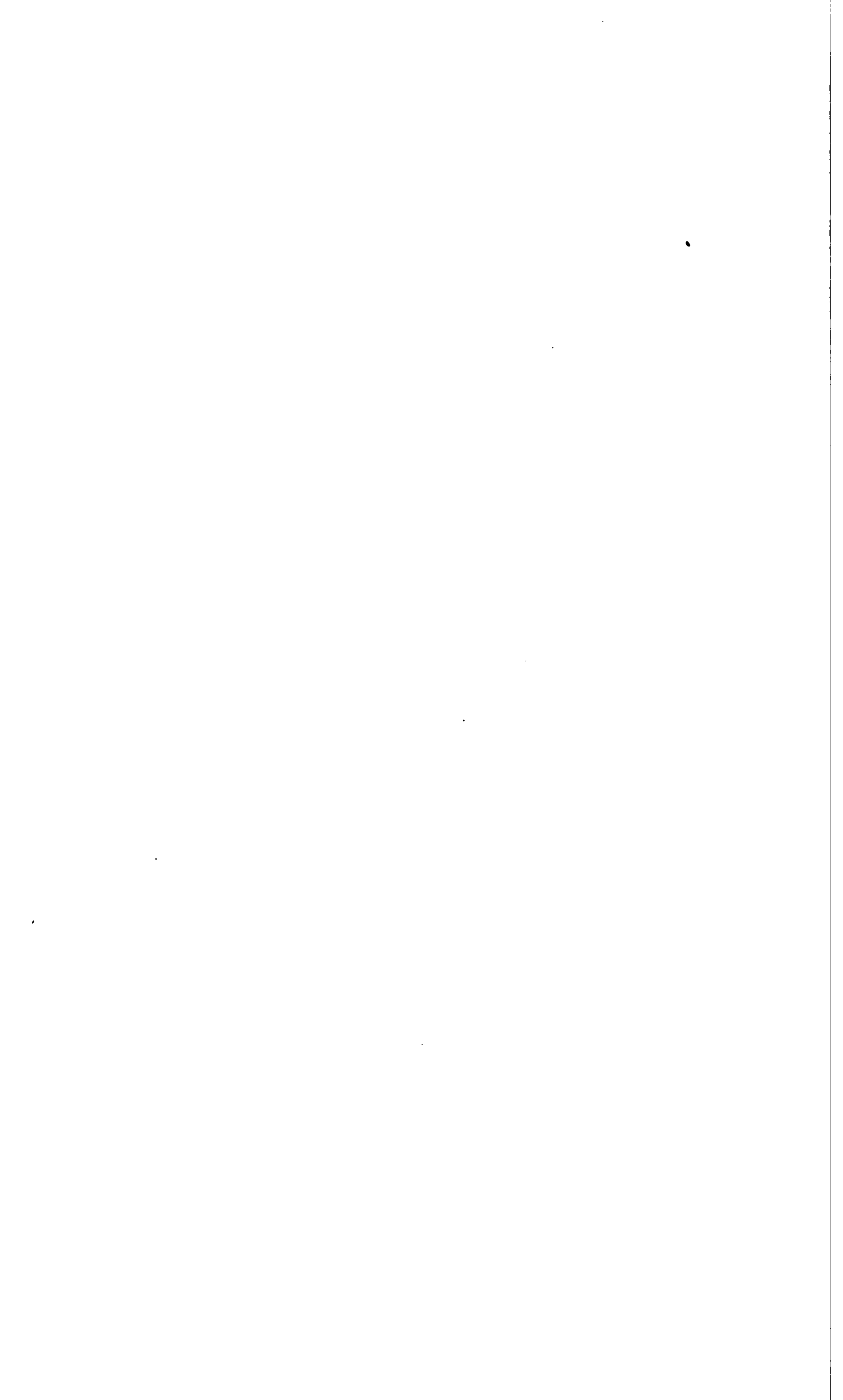
des Denkenden selbst freilich nicht hinweggelassen werden, wenn das Weltbild nicht verschwinden soll. Auch die ihm nahestehenden Personen haben enormen Einfluss auf sein Weltbild, und alle Generationen vorher waren die Vorbedingung seiner eigenen Entwicklung. Allein alle Lebewesen aller ausserirdischen Himmelskörper, neun Zehntel und mehr von allem Belebten, was je auf der Erde war, könnte man fast ohne Störung des Weltbildes als nicht gewesen denken. Man kann auch plötzlich alles Belebte des grössten Theiles der Erde vernichtet denken, ohne dass wir es in der ersten Zeit merken würden, wogegen bei plötzlicher Vernichtung eines Theiles der Erde oder Sonne (ja selbst des Mondes) Alles aus den Bahnen wiche.

Der Idealist vergleicht die Behauptung, dass die Materie ebenso wie unsere Empfindungen existire, mit der Meinung des Kindes, dass der geschlagene Stein Schmerz empfinde, der Realist die, dass man sich nicht vorstellen könne, wie Psychisches durch Materielles oder gar durch ein Spiel von Atomen dargestellt werden könne, mit der eines Ungebildeten, welcher behauptet, die Sonne könne nicht 20 Millionen Meilen von der Erde entfernt sein, denn das könne er sich nicht vorstellen. Wie die Ideologie nur ein Weltbild für einen Menschen, nicht für die Menschheit ist, so scheint mir, wenn wir auch die Thiere, ja das Universum einbegreifen wollen, die Ausdrucksweise des Realismus zweckmässiger als die des Idealismus.

So kann man zwar aus schon gewonnenen Einsichten oder Erfahrungen neue Seiten derselben beweisen, die einfachsten Vorbedingungen aller Erfahrungen und Gesetze alles Denkens aber, wie ich glaube, bloss schildern und beschreiben. Hat man dies eingesehen, so verschwinden alle Widersprüche, auf die man ehemals stiess, wenn man gewisse Fragen beantworten wollte, z. B. die Frage, ob Complexe von unausgedehnten Atomen ein Ausgedehntes liefern oder gar, ob solche Complexe empfinden könnten, ob wir zur Kenntniss fremder Empfindungen oder gar der Existenz nicht empfindender Wesen gelangen können, ob Materie und Seele aufeinander wirken können, ob beide ohne Wechselwirkung parallel nebeneinander sich ver-

ändern oder ob gar nur die eine oder die andere existiren. Man sieht ein, dass man nicht wusste, wonach man eigentlich fragte.

Hieher gehört auch die Frage nach der Existenz Gottes. Gewiss ist es richtig, dass nur ein Wahnsinniger die Existenz Gottes leugnet, aber ebenso richtig ist es, dass alle unsere Vorstellungen von Gott nur unzureichende Anthropomorphismen sind, dass also das von uns als Gott Vorgestellte in dieser Weise, wie wir es uns vorstellen, nicht existirt. Wenn daher der eine sagt, ich bin von der Existenz Gottes überzeugt, der andere, ich glaube nicht an Gott, so denken sich vielleicht beide dabei, ohne es zu ahnen, genau dasselbe. Wir dürfen nicht fragen, ob Gott existirt, bevor wir uns darunter etwas Bestimmtes vorstellen können, sondern vielmehr, durch welche Vorstellungen wir uns dem obersten, Alles in sich fassenden Begriffe nähern können.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 4. FEBRUAR 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. III, Heft VI—VII (Juni—Juli 1896).

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 1. Februar d. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn k. k. Regierungsrath und Universitätsprofessor Dr. Constantin Freiherrn v. Ettingshausen in Graz.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das k. u. k. Ministerium des Äussern theilt mit, dass der k. u. k. diplomatische Agent in Cairo telegraphisch beauftragt worden ist, Vorsorge zu treffen, dass ein Mitglied des internationalen Sanitäts-Conseils in Alexandrien die von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zum Studium der Pest nach Bombay entsendete Expedition auf der Fahrt durch den Suez-Canal begleite.

Ferner theilt das k. u. k. Ministerium des Äussern mit dass der Staats-Secretär für Indien das Gouvernement von Bombay angewiesen hat, die von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften dahin entsendeten ärztlichen Forscher auf das Entgegenkommendste zu empfangen und denselben alle Erleichterungen zu Theil werden zu lassen.

Der Secretär bringt zur Kenntniss, dass sowohl die General-Direction der Südbahn-Gesellschaft, als auch die Direction des Österreichischen Lloyd die kostenfreie Beförderung der ärztlichen Mission nach Indien zur Hin- und Rückreise auf der Eisenbahnlinie Wien—Triest, beziehungs-

weise auf den Lloyd-Dampfern der Eillinie Triest—Bombay auch in diesem Falle wieder in munificentester Weise gewährt hat.

Herr Prof. Rudolf Andreasch an der k. k. Staatsoberrealschule in Währing übersendet eine mit Unterstützung der kaiserl. Akademie ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss der Thiohydantoine« (IV).

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss der Doppelchromate«, von Prof. Josef Zehenter an der k. k. Oberrealschule in Innsbruck.
2. »Die Undulationen ebener Curven C_6^4«, von Prof. Wilh. Binder an der n. ö. Landes-Oberreal- und höheren Gewerbeschule in Wiener-Neustadt.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics überreicht eine Abhandlung von Dr. C. Diener: »Über ein Vorkommen von Orthoceren und Ammoniten im südtirolischen Bellerophonkalk«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung des Privatdocenten Dr. L. Réthi vor, betitelt: »Untersuchungen über die Schwingungsform der Stimmbänder bei den verschiedenen Gesangsregistern«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung von Dr. R. Daublebsky v. Sterneck in Wien: »Über einen Satz der additiven Zahlentheorie«.

Über einen Satz der additiven Zahlentheorie

von

Dr. R. Daublebsky v. Sterneck in Wien.

Bekanntlich hat schon Legendre aus einer von Euler aufgestellten Formel folgenden Satz abgeleitet: Ist n keine Pentagonalzahl, so lässt es sich auf gleich viele Arten als Summe einer geraden, wie einer ungeraden Anzahl verschiedener ganzzahliger positiver Summanden darstellen; ist hingegen n der Pentagonalzahl $\frac{3k^2-k}{2}$ gleich, so beträgt der Unterschied der Anzahlen der geraden und ungeraden[1] Darstellungen $(-1)^k$.

Die Eigenschaft, gleich viele gerade, wie ungerade Darstellungen zu enthalten, hat Herr K. Th. Vahlen[2] auch von jenen kleineren Classen von Darstellungen der Zahl n nachgewiesen, welche dadurch definirt sind, dass bei allen Darstellungen der betreffenden Classe die Summe der modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden einen und denselben Werth hat. Nur für die Pentagonalzahl $\frac{3k^2-k}{2}$ beträgt der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen in jener Classe $(-1)^k$, für welche die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (modulo 3) den Werth k hat.

---

[1] Kürzerer Ausdruck für »Darstellungen durch eine gerade, respective ungerade Anzahl von Summanden«.

[2] Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 112.

In der folgenden kurzen Mittheilung möchte ich nun einerseits zeigen, wie sich in ganz einfacher Weise der letztere Satz auf Grund des Legendre'schen herleiten lässt; anderseits sollen die von Herrn Vahlen definirten Classen von Darstellungen noch weiter in kleinere Classen zerlegt werden, für welche die Eigenschaft, gleich viele gerade, wie ungerade Darstellungen zu enthalten, im Allgemeinen ebenfalls bestehen bleibt.

1.

Den Legendre'schen Satz beweist man am einfachsten folgendermassen:[1] Wir betrachten eine bestimmte Darstellung der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden; es sei α der kleinste dieser Summanden; ferner sollen genau die λ grössten der Summanden eine arithmetische Progression mit der Differenz 1 bilden; ist $\lambda > \alpha$, so vergrössere man die α grössten Summanden um 1 Einheit und annullire hiefür den Summanden α; ist $\lambda \leqq \alpha$, so verkleinere man die λ grössten Summanden um je 1 Einheit und füge zur Compensation λ als neuen Summanden in die Darstellung ein; hiedurch werden je eine gerade und eine ungerade Darstellung einander gegenseitig eindeutig zugeordnet. Diese Zuordnung versagt nur bei den folgenden Darstellungen:

$$n = k+(k+1)+\ldots+(2k-1)$$
$$n = k+(k+1)+\ldots+(2k-2)$$

Im ersteren Falle ist $n = \dfrac{3k^2-k}{2}$, in letzterem $n = \dfrac{3(1-k)^2-(1-k)}{2}$; da überdies die erstere Darstellung aus k, die letztere aus $k-1$ Summanden besteht, ist der Beweis des Legendre'schen Satzes erbracht.

2.

Betrachten wir nun jene Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der

---

[1] Ich verdanke die Kenntniss dieses Beweises den Vorlesungen meines hochverehrten Lehrers, Prof. L. Gegenbauer.

mod. 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden h beträgt und bezeichnen mit $[n]^h$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden derartigen Darstellungen.

Es liege nun eine bestimmte dieser Darstellungen vor. Subtrahiren wir von jedem Summanden seinen absolut kleinsten Rest (mod. 3), so geht der eventuell vorhandene Summand 1 vollständig unter, während alle übrigen Summanden durch 3 theilbare Zahlen liefern. Wir erhalten also aus der vorliegenden Darstellung eine additive Erzeugung von $n-h$ durch lauter durch 3 theilbare Zahlen, deren jede sich höchstens dreimal vorfinden kann.

Umgekehrt fassen wir nun eine bestimmte Darstellung einer Zahl k durch lauter durch 3 theilbare Summanden, deren jeder bis zu dreimal vorkommen kann, ins Auge und wollen abzählen, aus wie vielen Darstellungen von $k+h$ durch lauter verschiedene Summanden mit der Restsumme h wir uns dieselbe durch obigen Process entstanden denken können. Finden wir irgendein Element dreimal vor, etwa $3m$, $3m$, $3m$, so kann dies nur aus der Elementengruppe $3m-1$, $3m$, $3m+1$ hervorgegangen sein; ein Paar gleicher Elemente $3m$, $3m$ kann aus den drei Elementenpaaren $3m-1$, $3m$; $3m-1$, $3m+1$; $3m$, $3m+1$, ein einzelnes Element $3m$ aus den 3 Elementen $3m-1$, $3m$, $3m+1$ entstanden sein, so dass also jedes in der Darstellung nicht dreimal auftretende Element aus je einer Elementengruppe hervorgegangen gedacht werden kann, welche bezüglich den Beitrag -1, 0, $+1$ zur Restsumme h lieferte.

Wir wollen nun ein nicht dreimal auftretendes Element, kurz ein unvollständiges Tripel gleicher Elemente nennen und annehmen, es fänden sich in der Darstellung von k genau ρ unvollständige Tripel vor.

Kommt das Element 1 in der Darstellung von $k+h$ nicht vor, so müssen offenbar von den ρ unvollständigen Tripeln $|h|+2\lambda$ solchen Elementengruppen ihre Entstehung verdanken, welche einen von 0 verschiedenen Beitrag zur Restsumme h liefern, und zwar $|h|+\lambda$ derselben je einer Gruppe mit dem Beitrage sign. h und λ derselben je einer solchen mit dem Beitrage $-$sign. h, wobei λ eine beliebige ganze, nicht negative Zahl sein kann; dies ist auf

$$\xi^{\rho}_{|h|} = \sum_{\lambda=0,1,2,\ldots} \binom{\rho}{|h|+2\lambda}\binom{|h|+2\lambda}{\lambda}$$

Arten möglich, und aus ebenso vielen Darstellungen von $k+h$ ohne Element 1 können wir uns die vorliegende Darstellung von k entstanden denken.

Kommt aber das Element 1 vor, so muss die Restsumme der übrigen Elemente $h-1$ betragen; also kann ich mir die vorliegende Darstellung von k auch aus $\xi^{\rho}_{|h-1|}$ verschiedenen Darstellungen von $k+h$ mit dem Elemente 1 entstanden denken; die letzteren Darstellungen enthalten offenbar um einen Summanden mehr als die früheren.

Besteht also die vorliegende Darstellung von k, wenn man jeden Summanden so oft zählt, so oft er auftritt, aus ν Summanden, so ergeben alle jene Darstellungen von $k+h$, aus welchen diese hervorgegangen sein kann, zur Anzahldifferenz $[k+h]^h$ den Beitrag

$$(-1)^{\nu}(\xi^{\rho}_{|h|}-\xi^{\rho}_{|h-1|}).$$

Da dieser Ausdruck bloss sein Vorzeichen ändert, wenn man darin h durch $-(h-1)$ ersetzt, erhalten wir, wenn wir die Anzahldifferenz $[k-(h-1)]^{-(h-1)}$ bilden, aus der vorliegenden Darstellung von k genau denselben Beitrag, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Dies liefert als erste zum Beweise dienliche Beziehung die folgende für jede beliebige Zahl k und h giltige Gleichung:

$$[k+h]^h = -[k-(h-1)]^{-(h-1)}. \tag{1}$$

Zweitens fassen wir eine bestimmte Darstellung der Zahl k durch lauter verschiedene Summanden, deren absolut kleinste Reste (mod. 3) h zur Summe geben, ins Auge, addiren aber jetzt zu jedem Elemente seinen absolut kleinsten Rest (mod. 3); da hiebei ein Element $3m$ ungeändert bleibt, das Element $3m+1$ aber in $3(m+1)-1$, das Element $3m-1$ hingegen in $3(m-1)+1$ übergeht, wird sich die Summe der absolut kleinsten Reste in $-h$ verwandeln, während die Anzahl der Summanden ungeändert bleibt; dies liefert unmittelbar die für alle k und h giltige Beziehung:

$$[k]^h = [k+h]^{-h}. \tag{2}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) lässt sich nun der Vahlen'sche Satz leicht, wie folgt, beweisen.

Aus (2) folgt zunächst:

$$[k]^{-h} = [k-h]^h,$$

also

$$[k-(h-1)]^{-(h-1)} = [k-2(h-1)]^{h-1}.$$

Dies in (1) eingesetzt, liefert:

$$[k+h]^h = -[k-2(h-1)]^{h-1}$$

oder

$$[k]^h = -[k-3(h-1)-1]^{h-1}. \tag{α}$$

Setzt man hierin h für $h-1$ und kehrt die Gleichung um, so folgt:

$$[k-3h-1]^h = -[k]^{h+1}$$

oder

$$[k]^h = -[k+3(h+1)-2]^{h+1}. \tag{β}$$

Bei positivem h erhalten wir aus (α) successive:

$$[k]^h = -[k-3(h-1)-1]^{h-1} = [k-3(h-1)-3(h-2)-2]^{h-2} =$$
$$\ldots = (-1)^h[k-3(h-1)-3(h-2)-\ldots-3(h-h)-h]^0 =$$
$$= (-1)^h \left[k-\frac{3h^2-h}{2}\right]^0.$$

Bei negativem h aber liefert (β) ebenso:

$$[k]^h = -[k+3(h+1)-2]^{h+1} = [k+3(h+1)+3(h+2)-4]^{h+2} =$$
$$\ldots = (-1)^h[k+3(h+1)+3(h+2)+\ldots+3(h-h)+2h]^0 =$$
$$= (-1)^h \left[k-\frac{3h^2-h}{2}\right]^0.$$

Der Legendre'sche Satz, den wir eingangs bewiesen haben, lässt sich in die Form setzen:

$$\sum_{h \gtrless 0} [k]^h = \begin{cases} 0 \\ (-1)^t, \end{cases}$$

und zwar $(-1)^t$ in dem Falle, wo $k = \dfrac{3t^2-t}{2}$ ist; oder, indem wir für $[k]^h$ den eben gefundenen Werth einsetzen:

$$\sum_{h \gtreqless 0} (-1)^h \left[k - \frac{3h-h^2}{2}\right]^0 = \begin{cases} 0 \\ (-1)^l \end{cases}.$$

Da nun $[0]^0 = 1$ ist (da sich 0 nur durch gar keinen, also eine gerade Anzahl von Summanden darstellen lässt), folgt aus dieser Beziehung durch successives Einsetzen von $k = 1, 2, \ldots$, dass $[k]^0$ für alle Werthe $k > 0$ verschwindet.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass auch $[k]^h$ im Allgemeinen verschwindet und dass es nur für $k = \frac{3h^2-h}{2}$ den Werth $(-1)^h$ hat. Hiemit ist der Vahlen'sche Satz bewiesen.

3.

Die vorstehenden Überlegungen liefern aber auch unmittelbar die eingangs erwähnte weitere Theilung der von Vahlen definirten Classen von Darstellungen in kleinere Classen.

Wir wollen zu diesem Zwecke mit $y_\rho(k)$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen von k bezeichnen, in denen jeder Summand bis zu dreimal auftreten kann und in welchen sich überdies genau ρ nicht dreimal auftretende Summanden finden.

Bezeichnen wir ferner mit η_h^ρ die Differenz

$$\eta_h^\rho = \xi_{|h|}^\rho - \xi_{|h-1|}^\rho,$$

so erhalten wir auf Grund der früheren Betrachtung für die Anzahldifferenz $[3k+h]^h$ den Ausdruck:

$$[3k+h]^h = \sum_\rho y_\rho(k)\eta_h^\rho.$$

Diese Gleichung denken wir uns nun für alle möglichen Werthe h aufgestellt; da aber, wie wir wissen, $\eta_h^\rho = -\eta_{-(h-1)}^\rho$ ist, so genügt es, für h etwa die Werthe $0, -1, -2, \ldots$ zu setzen, da die übrigen doch keine neuen Beziehungen liefern würden. Ferner kann, wie man aus der Definition von $y_\rho(k)$ einsieht, diese Grösse gewiss nur für jene Werthe ρ einen von 0 verschiedenen Werth haben, welche die Bedingung $\frac{\rho^2+\rho}{2} \leqq k$ erfüllen. Die Grösse $[3k+h]^h$ ist nach dem Satze von Vahlen

im Allgemeinen gleich Null; nur wenn $3k+h = \frac{3h^2-h}{2}$, also k der Trigonalzahl $\frac{h^2-h}{2}$ gleich ist, ist $[3k+h]^h = (-1)^h$.

Es sei also erstens k keine Trigonalzahl, sondern liege zwischen den beiden Trigonalzahlen

$$\frac{t^2+t}{2} < k < \frac{(t+1)^2+(t+1)}{2}; \qquad t > 0.$$

Dann können wir folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=t} y_\rho(k)\eta_h^\rho = 0 \qquad (h = 0, -1, -2, \ldots -t).$$

Dasselbe ist homogen in Bezug auf die Grössen $y_0(k)$, $y_1(k) \ldots y_t(k)$; die Determinante der Grössen η ist gleich 1, weil, wie man aus dem Ausdrucke für die Grössen ξ leicht erkennt, $\eta_{-i}^i = 1$, aber η_{-i}^ρ für $\rho < i$, $= 0$ ist. Die Grössen $y_\rho(k)$ müssen also sämmtlich verschwinden. Wir haben also den Satz:

Ist k keine Trigonalzahl und stellt man k derart als Summe von ganzen Zahlen dar, dass eine und dieselbe Zahl bis zu dreimal, jedoch nicht öfter, in einer und derselben Darstellung verwendet werden darf, so gibt es unter den Darstellungen, welche ρ verschiedene Elemente weniger oft als dreimal enthalten, gleich viele gerade wie ungerade für jeden gegebenen Werth des ρ.

Ist k der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$, $t \geqq 0$ gleich, so ändert sich an dem vorstehenden Gleichungssystem bloss die rechte Seite der letzten Gleichung, welche $(-1)^t$ wird; der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen, welche ρ nicht dreimal vorkommende Summanden aufweisen, wird in diesem Falle

$$y_\rho(k) = \begin{vmatrix} \eta_0^0 & \eta_0^1 & \ldots & \eta_0^{\rho-1} & 0 & \eta_0^{\rho+1} & \ldots & \eta_0^t \\ \eta_{-1}^0 & \eta_{-1}^1 & \ldots & \eta_{-1}^{\rho-1} & 0 & \eta_{-1}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-1}^t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{-(t-1)}^0 & \eta_{-(t-1)}^1 & \ldots & \eta_{-(t-1)}^{\rho-1} & 0 & \eta_{-(t-1)}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-(t-1)}^t \\ \eta_{-t}^0 & \eta_{-t}^1 & \ldots & \eta_{-t}^{\rho-1} & (-1)^t & \eta_{-t}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-t}^t \end{vmatrix}$$

Die eben besprochenen Darstellungen von k können wir aber aus den Darstellungen von $3k+h$ durch lauter verschiedene Summanden, deren absolut kleinste Reste mod. 3 die Summe h ergeben, entstanden denken. Bezeichnen wir zum Zwecke einfacherer Ausdrucksweise die drei Elemente $3m-1$, $3m$, $3m+1$ (für einen und denselben von 0 verschiedenen Werth des m) als eine vollständige Gruppe associirter Elemente, hingegen jedes Paar oder einzelnes Element derselben als unvollständige Gruppe associirter Elemente, so können wir in einer Darstellung von $3k+h$ sämmtliche Elemente auf eine einzige Weise in (vollständige oder unvollständige) Gruppen associirter Elemente vereinigen, wobei das Element 1 vollständig unbeachtet gelassen wird. Es liefert dann $y_\rho(k)\eta_h^\rho$ den Überschuss der geraden über die ungeraden Darstellungen von $3k+h$, mit der Restsumme h und mit genau ρ unvollständigen Gruppen associirter Elemente.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Ist $\frac{n-h}{3}$ keiner Trigonalzahl gleich, so gibt es unter den Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen erstens die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (mod. 3) h beträgt und bei welchen zweitens genau ρ unvollständige Gruppen associirter Elemente auftreten, für jeden beliebigen Werth von ρ gleich viele gerade wie ungerade.

Ist aber $\frac{n-h}{3}$ der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$ gleich, so beträgt der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden derartigen Darstellungen $y_\rho\left(\frac{n-h}{3}\right)\eta_h^\rho$.

V. SITZUNG VOM 11. FEBRUAR 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. II. b, Heft VIII—X (October bis December 1896).

Herr Prof. Dr. Friedrich Czapek an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag übersendet eine Arbeit: »Über die Leitungswegeder organischen Baustoffe im Pflanzenkörper«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung des Prof. Dr. S. Schenk: »Über die Aufnahme des Nahrungsdotters während des Embryonallebens« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner überreicht den sechsten Theil seiner »Pflanzenphysiologischen Mittheilungen aus Buitenzorg«, betitelt: »Zur Physiologie von *Taeniophyllum Zollingeri*«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. Edm. v. Mojsisovics legt namens der Erdbeben-Commission die ersten Publicationen dieser Commission vor. Dieselben führen den Titel: »Mittheilungen der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften« und enthalten:

I. Berichte über die Organisation der Erdbebenbeobachtung, nebst Mittheilungen über während des Jahres 1896 erfolgte Erdbeben.

II. Bericht über das Erdbeben von Brüx am 3. November 1896, von dem c. M. Prof. Friedrich Becke in Prag.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Mittheilung von Dr. Rud. Wegscheider: »Über die quantitative Analyse des Werkkupfers«.

VI. SITZUNG VOM 18. FEBRUAR 1897.

Se. Excellenz der Herr Minister-Präsident spricht der kaiserl. Akademie der Wissenschaften mit Note vom 21. Februar l. J. Namens der k. k. Regierung den Dank aus für die Absendung einer wissenschaftlichen Expedition nach Bombay zur Erforschung der Beulenpest.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup übersendet eine im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz von Herrn Dr. F. Henrich ausgeführte Arbeit: »Über zwei Modificationen des Mononitrosoorcins«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Abhandlung von Prof. Dr. Karl Brunner: »Über Indolinone« (II. Abhandlung).

Herr F. J. Popp in Ostrau (Böhmen) übermittelt im Anhange zu seiner unter dem 12. October 1893 behufs Wahrung der Priorität vorgelegten Mittheilung, betitelt: »Mathematische Principien«, eine zweite Mittheilung unter dem Titel: »Mathematische Untersuchungen«.

Herr Max Lewy, Ingenieur in Berlin, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Inhaltsangabe: »Röntgen-Röhren«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung: »Über die Spitzen der Geschmacksknospen«.

Herr Dr. Fritz Blau in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Zur Kenntniss des Salicylaldehyds«.

Dr. Ernst Murmann macht eine vorläufige Mittheilung: »Über eine Atomgewichtsbestimmung des Kupfers«.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. III. UND IV. HEFT.

JAHRGANG 1897. — MÄRZ UND APRIL.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 15 TAFELN UND 1 TEXTFIGUR.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 3. und 4. Heftes März und April 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 30 kr. = 4 Mk. 60 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

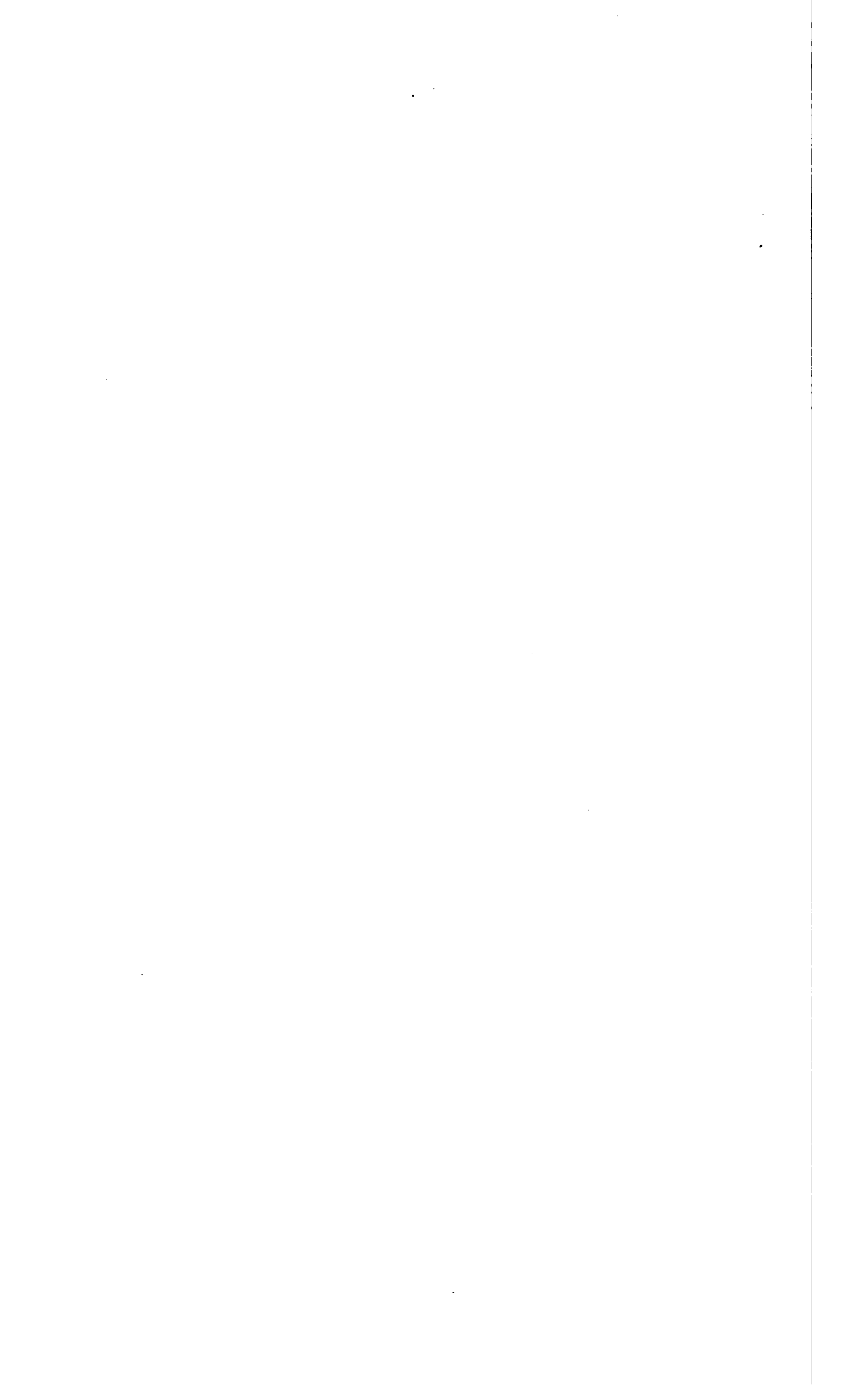
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



VII. SITZUNG VOM 4. MÄRZ 1897.

Erschienen Monatshefte für Chemie, Bd. 17, Heft X (December 1896) mit Register des Bandes.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 19. Februar erfolgte Ableben ihres ausländischen Ehrenmitgliedes Herrn Prof. Dr. Karl Weierstrass zu Berlin erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide an diesem Verluste durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Herr C. L. Griesbach, Director der Geological Survey of India, d. Z. in Capstadt, spricht den Dank aus für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede.

Herr Dr. Rudolf Popper in Wien dankt für die ihm zur Anschaffung eines Apparates für seine Untersuchungen über den Einfluss des geänderten Luftdruckes auf die Blutbeschaffenheit etc. gewährte Subvention.

Herr Prof. Ferdinand Ulzer übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Heinrich Seidel ausgeführte Arbeit aus dem Laboratorium des k. k. technologischen Gewerbemuseums in Wien: »Über Milchsäure«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über den Hirndruck, die Bewegung der Cerebrospinaflüssigkeit im Schädel und den Druck im Gehirn«, von Prof. Dr. Albert Adamkiewicz in Wien.
2. »Über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement«, von Prof. Emil Waelsch in Brünn.

3. »Grundbegriffe der Mediationsrechnung«, von Herrn Franz Malý in Wien.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. Edm. v. Mojsisovics legt Namens der Erdbeben-Commission einen Bericht über das Erdbeben vom 5. Jänner 1897 im südlichen Böhmerwalde von dem c. M. Herrn Prof. Dr. F. Becke in Prag vor, welcher das dritte Stück der »Mittheilungen der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften« bildet.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Prof. Ign. Klemenčič in Innsbruck: »Über magnetische Nachwirkung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Leopold Kohn: »Über Condensationsproducte des Isovaleraldehyds« (II. Mittheilung).

VIII. SITZUNG VOM 11. MÄRZ 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. 1, Heft VIII—X (October bis December 1896).

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Druckwerk: Die Liparischen Inseln. VII. »Stromboli« vor.

Der Secretär verliest ein Schreiben des k. u. k. Generalconsuls in Bombay, Herrn E. O. Rémy-Berzencovich v. Szillas, vom 20. Februar l. J., worin derselbe die Versicherung ausspricht, dass dieses Consulat bestrebt sein wird, den Intentionen der kaiserl. Akademie der Wissenschaften entsprechend die zum Studium der in Bombay herrschenden Beulenpest daselbst angelangten Mitglieder der Wiener medicinischen Schule in den verschiedenen Fach- und sonstigen Kreisen bestmöglichst zu unterstützen und dahin zu wirken, dass den Forschern zum Zwecke bakteriologischer und pathologischer Untersuchungen sowohl von Seite der Municipalität, als von den Sanitätsbehörden grössere Localitäten zur Verfügung gestellt werden.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Toldt überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit von den Doctoren M. Steinlechner und C. Tittel unter dem Titel: »Der Musculus ventricularis des Menschen«.

IX. SITZUNG VOM 18. MÄRZ 1897.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den VI. Band des im Wege des k. u. k. Ministeriums des Äussern eingelangten italienischen Druckwerkes: »Le Opere di Galileo Galilei«.

Der Secretär verliest ein Schreiben ddo. Bombay 27. Februar l. J., in welchem die Mitglieder der ärztlichen Expedition an die kaiserliche Akademie über ihre Ankunft in Bombay am 20. Februar und den ihnen von Seite des k. u. k. General-Consulates daselbst an Bord des »Imperator« bereiteten Empfang, sowie über die freundliche Aufnahme berichten, die ihnen von Seite des Gouverneurs, der Municipalität und der Sanitätsbehörden von Bombay zu Theil wurde, deren Zuvorkommenheit sie auch die Zuweisung von drei ihren Zwecken entsprechenden Arbeitsräumen in einer dortigen High-School verdanken. Sämmtliche Mitglieder der Mission sind in demselben Hôtel (Esplanade) untergebracht, ihr Befinden ist ein gutes.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Anton Wagner, Regimentsarzt an der k. u. k. Theresianischen Militär-Akademie in Wiener-Neustadt, unter dem Titel: »Monographie der Gattung *Pomatias* Studer«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält«.
2. »Über eine zahlentheoretische Aufgabe«.

Herr Dr. Alois Kreidl, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Experimentelle Untersuchungen über das Wurzelgebiet des Nervus glosso-pharyngeus, Vagus und Accessorius beim Affen.«

Herr Dr. Jos. Ritter Lorenz v. Liburnau, k. k. Sections-Chef i. R., überreicht eine Abhandlung: »Über eine fossile *Halimeda* aus dem Flysch bei Salzburg«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. VII. »Stromboli«, Prag, 1896; Folio.

Le Prince Albert I[er], Prince souverain de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht. Publiés sous la direction avec le concours de M. Jules Richard, chargé des Travaux zoologiques à bord. Fascicule XI. Contribution à l'étude des Stellérides de l'Atlantique Nord (Golfe de Gascogne, Açores, Terre Neuve), par M. E. Periere. (Avec 4 Planches.) Monaco, 1896; Folio.

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli Auspicii Sua Maestà il Re d'Italia. Volume VI. Firenze, 1896; 4⁰.

Arth G., Recueil de procédés de dosage pour l'analyse des combustibles des minerais de fer, des fontes des aciers et des fers. Paris, 1897; 8⁰.

Astl-Leonhard H., Ein deutsches Testament. Die Natur als Organismus. Wien, 1897; 8⁰.

Bělohoubek A., M. Louis Pasteur (Biographie in čechischer Sprache). Prag, 1897; 8⁰.

Demoulin A., Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (Complexes, Congruences, Surfaces réglées). Bruxelles, 1894; 8⁰.

Draghicénu M. M., Les Tremblements de Terre de la Roumanie et des pays environnants. Bukarest, 1896; 8⁰.

Socolow S., Nouvelles Recherches Astronomiques Moscou, 1896; 8⁰.

Über eine zahlentheoretische Aufgabe

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Eine Reihe von ganzen Zahlen, deren grösster gemeinschaftlicher Theiler 1 ist, möge kurz primitiv genannt werden.

Ist

$$a_1, a_2, \ldots a_k, m$$

eine gegebene primitive Zahlenreihe und m nicht $= 0$, $k > 1$, so soll in den folgenden Zeilen die Aufgabe behandelt werden, k ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von der Art zu bestimmen, dass die Zahlenreihe

$$a_1 + mx_1, a_2 + mx_2, \ldots a_k + mx_k$$

primitiv ausfällt.

1.

Es sei d der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_k$. Derselbe ist zu m theilerfremd, und man kann daher ganze Zahlen δ, μ ermitteln, welche der Gleichung

$$d\delta + m\mu = 1$$

genügen. Man bestimme irgend eine ganzzahlige Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ der Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = d$$

und eine nicht ausschliesslich aus Nullen bestehende Lösung $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ der Gleichung

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k = 0.$$

Man darf die Lösung $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ primitiv annehmen, da dieselbe eintretendenfalls durch die primitive Lösung $\frac{\beta_1}{\varepsilon}, \frac{\beta_2}{\varepsilon}, \ldots \frac{\beta_k}{\varepsilon}$ ersetzt werden könnte, wo ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ bezeichnet. Setzt man dann

$$\beta_1 + \delta\alpha_1 = \gamma_1, \ \beta_2 + \delta\alpha_2 = \gamma_2 \ldots \beta_k + \delta\alpha_k = \gamma_k, \tag{1}$$

so wird

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_k\gamma_k = d\delta \tag{2}$$

und die Zahlenreihe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ ist eine primitive. Denn der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ geht der Gleichung

$$\frac{a_1}{d} \cdot \gamma_1 + \frac{a_2}{d} \cdot \gamma_2 + \ldots + \frac{a_k}{d} \cdot \gamma_k = \delta$$

zufolge in δ, also nach (1) auch in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ auf und muss demnach $= 1$ sein, weil $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ primitiv sind.

Dies vorausgeschickt, bestimme man irgend eine ganzzahlige Lösung $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ der Gleichung

$$\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_k\xi_k = 1 \tag{3}$$

und setze

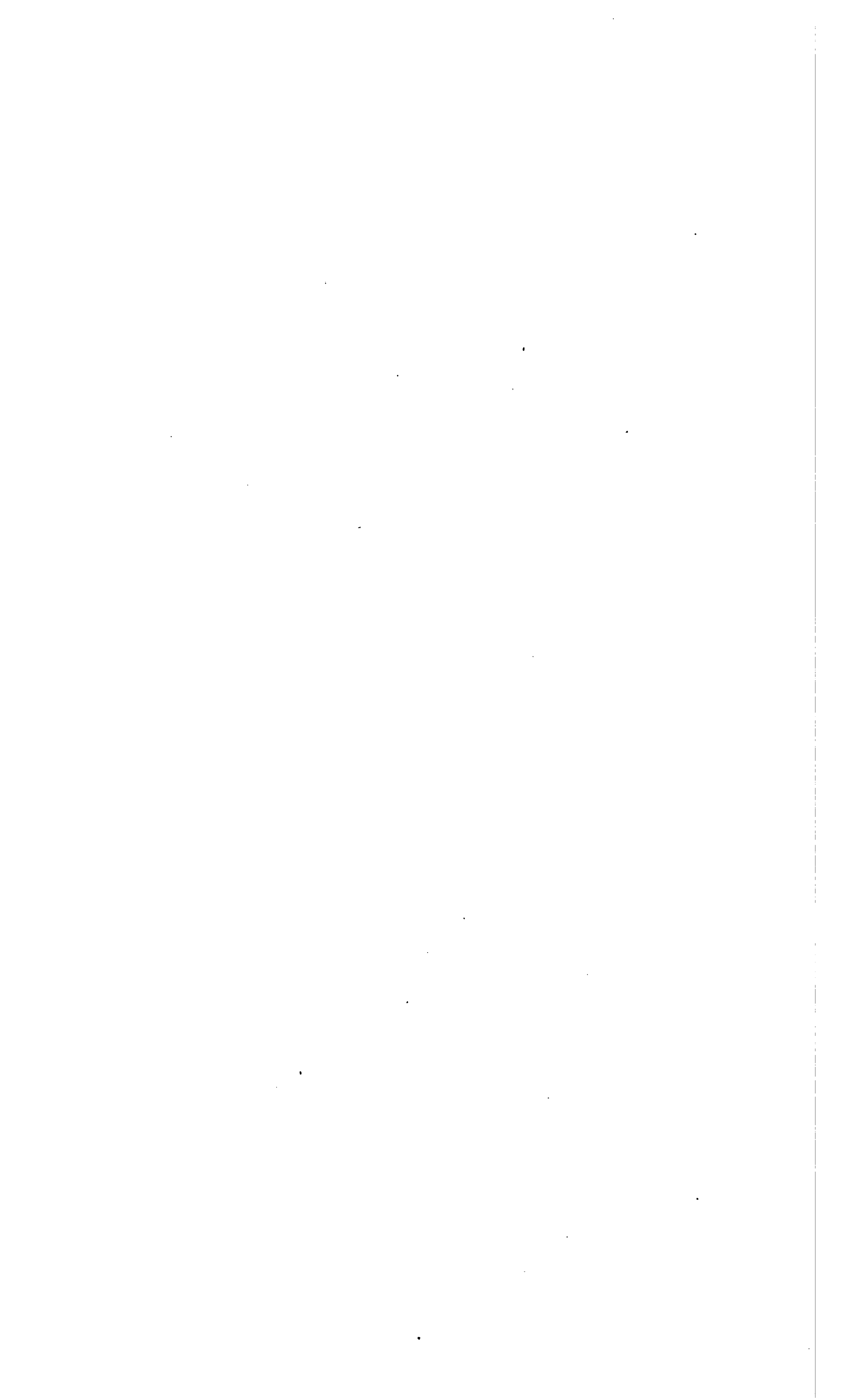
$$\mu\xi_1 = x_1 \qquad \mu\xi_2 = x_2 \qquad \mu\xi_n = x_n.$$

Dann ist die Zahlenreihe

$$a_1 + mx_1, \ a_2 + mx_2, \ldots a_k + mx_k$$

primitiv. Denn man hat nach (2), (3)

$$\begin{aligned} &\gamma_1(a_1 + mx_1) + \gamma_2(a_2 + mx_2) + \ldots + \gamma_k(a_k + mx_k) \\ &= a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_k\gamma_k + m\mu(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \ldots + \gamma_k\xi_k) \\ &= d\delta + m\mu = 1. \end{aligned}$$



Die Farben des Regenbogens und der weisse Regenbogen

von

J. M. Pernter,
c. M. k. Akad.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Jänner 1897.)

Wenn man den Farben des Regenbogens und ihrer Reihenfolge und Vertheilung seine Aufmerksamkeit widmet, fällt es bald auf, dass man eine Mannigfaltigkeit und einen Wechsel darin findet, die jener weitverbreiteten Anschauung von den festliegenden unveränderlichen sieben Regenbogenfarben so gar nicht entsprechen. Die Farben zeigen, so wie die ganzen Bögen, bald grössere, bald geringere Breite und nicht selten sucht man umsonst nach einer bestimmten Farbe, und erscheint so die regelmässige Farbenfolge gestört. Wer überdies nicht nur bei Regen, sondern auch auf Nebeln den Regenbogen zu beobachten Gelegenheit hatte — den Nebelbogen — findet denselben zum Theil einfach weiss und wenn er von den secundären Bögen gleichzeitig einen oder zwei sieht, so zeigt sich in den letzteren die Störung der Farbenreihe bis zur Umkehrung der Farbenfolge gesteigert.

Aus der richtigen Theorie des Regenbogens ist es bekannt, dass die Verschiedenheit der Ablenkung der Maxima und Minima einer und derselben Farbe (Wellenlänge) von der Verschiedenheit der Grösse der den Regenbogen erzeugenden Tropfen abhängt; es war mir von vornherein zweifellos, dass die Verschiedenheit der Farben und Farbenfolge in den Regenbögen auf dieselbe Ursache zurückzuführen sein wird. Da es nun für den Meteorologen im Besonderen nicht nur interessant,

sondern für die Beurtheilung der Grösse der Tropfen verschiedener Regen von grossem Nutzen sein kann, wenn er sofort aus Farbe und Farbenfolge und Breite der Regenbögen die Tropfengrösse erkennt, so hielt ich es auch vom praktischen Standpunkte des meteorologischen Beobachters aus angezeigt auszuführen, was ich schon aus theoretischem Interesse zu thun entschlossen war: die Farben der von Tropfen verschiedener Grösse erzeugten Regenbögen zu berechnen.

Die theoretischen Vorbedingungen für die Berechnung waren vorhanden und ich hatte mich nur aller dieser in entsprechender Weise und Combination zu bedienen, um zu erreichen, was ich anstrebte: die volle aprioristische Darstellung aller Ablenkungs- und Farbenverhältnisse, wie sie in der Wirklichkeit uns bei den verschiedenen Regenbögen die Natur vor Augen führt.

Ich bemerke noch einleitend, dass ich von den drei gebräuchlichen Ausdrücken: secundäre, überzählige, Interferenz-Regenbogen, den ersteren ausschliesslich anwenden werde, weil er allein den Charakter der Erscheinung als secundäre Maxima wiedergibt, während die anderen zwei Ausdrücke nicht nur aus einer falschen Voraussetzung und Auffassung hervorgegangen sind, sondern auch zur Aufrechterhaltung dieser falschen Ansichten beitragen können und leider mit Erfolg beigetragen haben. Es ist ja keiner der secundären Bogen »überzählig«, sondern wesentlich zur Erscheinung gehörig und ein Interferenz-Regenbogen ist der Hauptregenbogen geradeso, wie die secundären.

Ich werde ferner statt des gebräuchlichen Ausdruckes »wirksame« Strahlen die Bezeichnung »mindestgedrehte« Strahlen benützen. In der ganzen Theorie des Regenbogens war das grösste Hinderniss für die allgemeine Annahme der richtigen Theorie von Airy die von Descartes eingeführte Theorie der »wirksamen Strahlen«. Schon dieser äussere Grund würde genügen, um den verfänglichen Ausdruck fallen zu lassen. Allein hier liegt noch ein wichtigerer, innerer Grund vor: die sogenannten »wirksamen« Strahlen sind nicht nur nicht die allein wirksamen, sie sind nicht einmal unter den wirksamen die wirksamsten, denn ihre Intensität unter den

regenbogenbildenden Strahlen ist nur etwa 44 Procent von der Intensität der das Maximum erzeugenden Strahlen. Dieses Maximum würde aber erst für einen Tropfen vom unendlichen Halbmesser mit den sogenannten wirksamen Strahlen zusammenfallen. Es ist daher mehr als gerechtfertigt, von dieser falschen Vorstellung abzugehen, indem man die irreleitende Ausdrucksweise fallen lässt. Da aber die Lage der besagten Strahlen auch in der richtigen Theorie des Regenbogens eine bedeutende Rolle spielt, indem sie für jede Wellenlänge von der Tropfengrösse unabhängig ist, während die Lage des Intensitätsmaximums mit dieser Tropfengrösse sich ändert, so bildet sie den natürlichen Nullpunkt für die Zählung der Ablenkungswinkel der Maxima und Minima jeder Farbe und aller dazwischenliegenden Intensitäten. Man kann daher einer Bezeichnung der fraglichen Strahlen nicht entbehren, und so nehme ich denn dieselbe von ihrer charakteristischen Eigenschaft, dass sie im Minimum der Drehung des ursprünglichen Strahles liegen, den Namen derselben und nenne sie »mindestgedrehte« Strahlen.[1]

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehe ich zunächst daran, alle Zahlenwerthe zu beschaffen, welche für die schliessliche Berechnung der Farben des Regenbogens nothwendig sind.

1. Beschaffung der nöthigen Zahlenwerthe.

a) Werthe der Intensität.

Airy[2] hat gezeigt, dass das Farbenbild jeder einzelnen Farbe (Wellenlänge) im Regenbogen ein Beugungsbild ist mit einer unendlichen Anzahl aufeinanderfolgender Maxima und

---

[1] Man könnte geneigt sein, lieber »mindestabgelenkte« Strahlen zu sagen. Allein wir sind gewohnt, unter Ablenkung den spitzen Winkel zu verstehen, welchen der ursprüngliche Strahl mit dem in das Auge treffenden Strahl macht. Es ist aber hiebei zu beachten, dass der mindestgedrehte Strahl auch der maximalabgelenkte sein kann und gerade beim Hauptregenbogen auch ist. Während also »mindestgedreht« stets richtig ist, wäre »mindestabgelenkt« nicht immer richtig.

[2] Airy, Über die Intensität des Lichtes in der Nähe einer Brennlinie. Pogg. Ergänzungsband, 1842, S. 232.

Minima, worin alle Minima Null sind und die Maxima vom ersten kräftigen ab immer kleiner und kleiner werden. Der mathematische Ausdruck hiefür lautet:

$$J = Mf^2_{(z)},$$

worin

$$M = k\sqrt[3]{\frac{a^7}{h^2\lambda}},$$

wovon das Nähere später, und

$$f_{(z)} = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(u^3 - zu)\,\partial u.$$

Airy hat das Integral $f_{(z)}$ nach dem Argumente z von 0·2 zu 0·2 z, von —5·6 bis +5·6 ausgewerthet. Da auf diese Erstreckung nur drei Maxima fallen und für meine Zwecke ein- und das anderemal noch das achte, beziehungsweise zehnte Maximum wünschenswerth war, so sah ich mich veranlasst, die Werthe von $f^2_{(z)}$ zwar nicht von 0·2 zu 0·2 z, aber doch für die aufeinanderfolgenden Maxima bis zum zehnten zu berechnen. Die entsprechenden Werthe von z, sowie die z-Werthe, auf welche die Minima fallen, hat Stokes berechnet, wie er auch die Art der Auswerthung von $f^2_{(z)}$ nach einer correcten Weise angegeben hat.[1] Nach dieser Methode von Stokes habe ich die Werthe bis zum zehnten Maximum gerechnet.

Die betreffenden Formeln von Stockes lauten:

$$f^2_{(z)} = 2(3z)^{-\frac{1}{2}}\left\{R\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + S\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2,$$

worin

$$R = 1 - \frac{1.5.7.11}{1.2(72\varphi)^2} + \frac{1.5.7.11.13.17.19.23}{1.2.3.4(72\varphi)^4} - \ldots$$

$$S = \frac{1.5}{1.(72\varphi)} - \frac{1.5.7.11.13.17}{1.2.3(72\varphi)^3} + \ldots$$

[1] Stokes, Mathematical and physical papers. Cambridge, 1883, II. vol. p. 332 ff.

und

$$\varphi = \pi\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Factoren von φ^{-1} bis φ^{-6} hat Stokes berechnet; sie sind in der Reihenfolge für

φ^{-1}	φ^{-2}	φ^{-3}	φ^{-4}
0·069444	0·037133	0·037993	0·057649

φ^{-5}	φ^{-6}
0·116099	0·291592.

Ich gebe nun die Werthe der ersten 10 Maxima und der zugehörigen Werthe von z, denen ich die z-Werthe für die ersten 10 Minima beifüge.[1]

Maxima und Minima.

Max.	z	$f^2_{(z)}$	Min.	z
1.	1·0845	1·005	1	2·4955
2.	3·4669	·615	2.	4·3631
3.	5·1446	·510	3.	5·8922
4.	6·5782	·450	4.	7·2436
5.	7·8685	·412	5.	8·4788
6.	9·0599	·384	6.	9·6300
7.	10·1774	·362	7.	10·7161
8.	11·2364	·345	8.	11·7496
9.	12·2475	·330	9.	12·7395
10.	13·2185	·318	10.	13·6924

Da mir so die Intensitätswerthe bis $z = +5·6$ von $0·2$ zu $0·2\,z$ in der Airy'schen Tabelle vorlagen und ich dieselben

[1] Stokes gibt a. a. O. die Werthe von z für die ersten 50 Minima, aber nur für die ersten 10 Maxima. Es könnte nun für Experimente im Laboratorium erwünscht sein, die ersten 20 Maxima wenigstens zu haben. Für diesen Fall würde man die Werthe für z vom 11.—20. Maximum mit genügender Annäherung erhalten können aus

$$\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = (n-1)+0·249.$$

weiter bis zum 10. Maximum mir berechnet hatte, auch die Lage der ersten 10 Maxima und ersten 10 Minima aus der Stokes'schen Tabelle kannte, construirte ich mir die Intensitätscurve bis zum 10. Minimum graphisch und entnahm dieser Curve die Werthe von 0·2 zu 0·2 z bis zum 10. Minimum. Diese Werthe sind allerdings nur bis +5·6z, wie weit sie von Airy direct berechnet sind, ganz genau, darüber hinaus nur soweit, als meine Curven genau sind. Für meine Zwecke und wohl auch für die meisten praktischen Fälle wird aber diese Genauigkeit vollständig genügen. Ich lasse daher die so erhaltenen Intensitätswerthe von 0·2 zu 0·2 z hier folgen.

Werthe von $f^2_{(z)}$ von 0·2 zu 0·2 z.

z	$f^2_{(z)}$	z	$f^2_{(z)}$	z	$f^2_{(z)}$
—2·0	0·006	3·4	0·609	8·8	0·189
—1·8	·011	3·6	·586	9·0	·373
—1·6	·018	3·8	·436	9·2	·320
—1·4	·030	4·0	·225	9·4	·100
—1·2	·048	4·2	·051	9·6	·001
—1·0	·074	4·4	·003	9·8	·054
—0·8	·113	4·6	·104	10·0	·240
—0·6	·167	4·8	·297	10·2	·360
—0·4	·239	5·0	·465	10·4	·220
—0·2	·331	5·2	·502	10·6	·022
0·0	·443	5·4	·378	10·8	·013
0·2	·571	5·6	·172	11·0	·170
0·4	·706	5·8	·014	11·2	·338
0·6	·836	6·0	·022	11·4	·270
0·8	·941	6·2	·174	11·6	·050
1·0	1·001	6·4	·370	11·8	·004
1·2	·996	6·6	·450	12·0	·140
1·4	·914	6·8	·353	12·2	·320
1·6	·758	7·0	·141	12·4	·256
1·8	·545	7·2	·010	12·6	·045
2·0	0·319	7·4	·046	12·8	·006
2·2	·121	7·6	·230	13·0	·136
2·4	·014	7·8	·394	13·2	·314
2·6	·016	8·0	·363	13·4	·202
2·8	·131	8·2	·150	13·6	·013
3·0	·317	8·4	·010		
3·2	·502	8·6	·038		

Hiemit sind denn alle nöthigen Werthe für $f^2_{(z)}$ beschafft.

Würde man nun den Factor M in der anfänglichen Intensitätsgleichung constant annehmen, so würde man nur noch die Ablenkungen für die verschiedenen Farben zu berechnen brauchen. Allein dadurch würde man doch zu weit von der Wirklichkeit abweichen. Wir haben nämlich in

$$M = \frac{k}{(h^2\lambda)^{\frac{1}{3}}} . a^{\frac{7}{3}}$$

alle Grössen veränderlich.[1] Es ist nämlich a der Halbmesser der Regentropfen, λ die Wellenlänge, h ein vom Brechungsexponenten abhängiger Factor und k enthält einen mit der Wellenlänge veränderlichen Theil, welcher die ursprüngliche Intensität der betreffenden Farbe vor dem Eintritt in den Regentropfen darstellt. Diese Intensität ist für die verschiedenen Wellenlängen bekanntlich sehr verschieden und es wird daher selbst für eine bestimmte Grösse des Regentropfens $k:(h^2\lambda)^{\frac{1}{3}}$ mit der Wellenlänge veränderlich. Des Näheren komme ich auf diesen Punkt bei der Aufstellung der Farbengleichungen zurück.

b) Werthe der Ablenkungen für die verschiedenen Farben.

Als Nullpunkt für die Berechnung der Ablenkungen diente naturgemäss der Ablenkungswinkel der mindestgedrehten Strahlen, der für jede Wellenlänge constant und von der Tropfengrösse unabhängig ist und in der Tabelle der Intensitätswerthe dem Werthe für $z = 0$ entspricht. Um die Ablenkung der mindestgedrehten Strahlen anzugeben, bedient man sich bekanntlich des Winkelwerthes, unter welchem uns der Radius des Bogens erscheint, welchen eine bestimmte Farbe im Regenbogen bildet. Die Berechnung dieser Ablenkungen ist allgemein bekannt und ich lasse daher ohneweiters die Tabelle folgen, welche dieselben für jene Wellenlängen angibt, die ich später zur Berechnung der resultirenden Regenbogenfarben benützen werde, und zwar für den Hauptregenbogen (A_1) und den Nebenregenbogen (A_2); n sind die Brechungsexponenten.

---

[1] Mascart, Compt. rend. Bd. 115, 1892, p. 453 und Traité d'Optique, III, p. 437.

Ablenkungen der mindestgedrehten Strahlen.

	B	C	D	E	$\mathfrak{x}$	F	$\mathfrak{y}$	G	H
λ...	0·687	0·656	0·589	0·527	0·494	0·486	0·449	0·431	0·397μ
n...	1·3317	1·3326	1·3343	1·3364	1·3381	1·3386	1·3412	1·3429	1·3448
A_1..	42°16'	42° 8'	41°52'	41°38'	41°20'	41°12'	40°54'	40°44'	40°22'
A_2..	50 22	50 48	51 18	51 42	52 14	52 24	53 0	53 24	54 0

Die Buchstaben am Kopfe der Werthe sind die der Fraunhofer'schen Linien, nur $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ führe ich der Kürze halber für die Wellenlängen ·494 und ·449 ein. Das n entnehme ich Mascart (Traité d'Optique, I, p. 386) und für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ berechnete ich es nach der Formel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Hiedurch ist nun von jedem Bilde der einzelnen Wellenlängen nur die Lage des Nullpunktes ($z = 0$) unseres oben dargestellten Intensitätsbildes festgelegt. Für die Zwecke, die wir im Auge haben, ist es aber am wichtigsten, die Lage der Maxima und Minima des Intensitätsverlaufes jeder Farbe im Regenbogen zu kennen. Die Ablenkung irgend eines Punktes des Bildes einer bestimmten Farbe im Regenbogen ist gegeben durch[1]

$$\Theta = \frac{z}{2}\left(\frac{h\lambda^2}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}};$$

hierin bedeutet Θ den Abstand von der Lage des Nullpunktes

[1] Mascart, Traité d'Optique, I, p. 394. Ich bediene mich der Bezeichnungen von Mascart, obwohl frühere Darstellungen vorhanden sind und besonders von Boitel die Einführung von h und der mathematische Ausdruck dafür herrührt, weil Mascart die ausführlichste Darstellung des Regenbogens in seinem Traité d'Optique im I. und III. Bande gegeben hat, die wohl am leichtesten allgemein zugänglich sein wird.

($z = 0$) im Winkelwerthe, a den Halbmesser des Regentropfens und h eine von n abhängige Grösse, welche gegeben ist durch[1]

$$h = \frac{(p^2-1)^2}{p^2(n^2-1)} \sqrt{\frac{p^2-n^2}{n^2-1}},$$

wo $p = m+1$ und m die Anzahl Reflexionen im Regentropfen bedeutet, also $m = 1$ für den Hauptregenbogen und $m = 2$ für den Nebenregenbogen u. s. w. Die Werthe von h für den ersten und zweiten Regenbogen und die verschiedenen Wellenlängen habe ich berechnet; sie sind die folgenden:

	B	*C*	*D*	*E*	𝔟	*F*	𝔥	*G*	*H*
h_1 . .	4·934	4·910	4·860	4·804	4·756	4·743	4·676	4·631	4·581
h_2 . .	28·10	27·96	27·71	27·41	27·17	27·10	26·74	26·50	26·23

Nach der obigen Formel habe ich die Werthe für Θ_1 berechnet für $a = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 100, 150, 250, 500 und 1000 Mikron. Um daraus die Ablenkungen A_1 zu erhalten, hat man die Werthe für Θ_1 von den A_1 für $z = 0$ (Ablenkung der mindestgedrehten Strahlen) abzuziehen. Die Resultate all dieser langwierigen Rechnungen finden sich in Tabelle I des Anhanges. Ich habe die Rechnungen für alle a bis $a = 100$ bis zum vierten Minimum durchgeführt, für $a = 150$ und $a = 250$ bis zum fünften, und nur für $a = 500$ und $a = 1000$ Mikron dehnte ich dieselben bis zum 10. Minimum aus, weil diese Werthe bei diesen Tropfengrössen für die Farbenmischung von Bedeutung sind.

Diese Werthe beziehen sich alle auf den ersten Regenbogen (Hauptregenbogen mit seinen secundären). Um die entsprechenden Werthe für den zweiten Regenbogen (Nebenregenbogen mit seinen secundären) zu erhalten, hat man nach der Gleichung für Θ

$$\Theta_2 = \sqrt[3]{\frac{h_2}{h_1}} \cdot \Theta_1 .$$

---

[1] Boitel, Compt. rend. Bd. 106, 1888, p. 1522. Mascart, a. a. O. I, p. 193.

Da die Werthe für $(h_2 : h_1)^{\frac{1}{3}}$ von B bis G nur zwischen 1·785 und 1·788 schwanken, so kann man für alle λ dasselbe mittlere Verhältniss beibehalten und setzen

$$\Theta_2 = 1{\cdot}786\,\Theta_1.$$

Nach dieser Formel sind die Werthe für Θ_2 in Tabelle II des Anhanges berechnet und die A_2 erhält man, indem man diese Werthe zum A_2 der mindestgedrehten Strahlen addirt.

c) **Herstellung der Intensitätscurven für die einzelnen Farben.**

Die Gleichung hiefür haben wir schon oben gegeben: sie besteht aus den zwei Factoren M und $f^2_{(z)}$. Den Verlauf von $f^2_{(z)}$ haben wir auf Seite 140 festgestellt und in eine Tabelle gebracht. Dieser Factor bleibt für alle λ derselbe, nur der Werth der Abscisse, auf welcher die Ordinaten $f^2_{(z)}$ aufgetragen werden, ändert sich bei den verschiedenen Farben.

Ich habe nun dem dadurch Rechnung getragen, dass ich als Einheit der Abscisse $0{\cdot}2\,z$ wählte und den Winkelwerth dieser Einheit, welcher für die verschiedenen λ verschieden ist, aus den Tabellen für A_1 und A_2 in folgender Weise berechnete. Der Werth z für das vierte Minimum ist $7{\cdot}2436$, der Werth Θ für das vierte Minimum ist den Tabellen I und II des Anhanges zu entnehmen. Dividirt man diese Werthe für Θ durch 36·218, so hat man den Winkelwerth für $0{\cdot}2\,z$. Man erhält auf diese Weise folgende Tabelle.

Winkelwerthe der Abscisseneinheit $0{\cdot}2\,z$ in Minuten.

1. **Erster Regenbogen.**

$a =$	5	10	15	20	25	30	40	50	100	150	250	500	1000
	Bogenminuten												
B...	85·8	54·0	41·2	34·0	29·3	26·0	21·4	18·5	11·7	8·9	6·32	3·98	2·51
C...	83·0	52·3	39·9	32·9	28·4	25·1	20·7	18·0	11·0	8·6	6·10	3·84	2·43
D...	77·0	48·5	37·0	30·5	26·4	23·3	19·3	16·6	10·5	7·9	5·67	3·57	2·26
E...	71·2	44·9	34·2	28·2	24·4	21·6	17·8	15·4	9·6	7·4	5·25	3·31	2·10
𝔢 ...	68·1	42·8	32·6	27·0	23·1	20·6	17·0	14·7	9·3	7·1	5·02	3·15	2·03
F...	67·2	42·3	32·3	26·7	22·8	20·3	16·8	14·5	9·1	7·0	4·94	3·12	1·99
𝔥 ...	63·4	40·0	30·5	25·2	21·7	19·2	15·9	13·7	8·6	6·6	4·67	2·93	1·88
G...	61·5	38·8	29·6	24·4	21·0	18·6	15·4	13·3	8·3	6·4	4·53	2·87	1·82

2. Zweiter Regenbogen.[1]

$a =$	15	20	25	30	40	50	100	150	250	500	1000
	Bogenminuten										
B	89·4	73·8	63·6	56·5	46·4	40·1	25·4	19·3	13·7	8·6	5·53
C	86·6	71·4	61·6	54·5	44·9	39·1	23·9	18·7	13·2	8·3	5·27
D	80·3	66·2	57·3	50·5	41·9	36·0	22·8	17·1	12·3	7·7	4·91
E	74·2	61·2	52·9	46·9	38·6	33·4	20·8	16·0	11·4	7·2	4·56
𝔟	70·7	58·6	50·1	44·7	36·9	31·9	20·2	15·4	10·9	6·8	4·41
F	70·1	58·0	49·5	44·1	36·4	31·5	19·7	15·2	10·7	6·8	4·32
𝔥	66·2	54·7	47·1	41·6	34·5	29·7	18·7	14·3	10·1	6·4	4·08
G	64·2	52·9	45·6	40·3	33·4	28·9	18·0	13·9	9·8	6·2	3·95

Es sei hervorgehoben, dass unter dem ersten Regenbogen stets der Hauptregenbogen mit seinen secundären und unter dem zweiten Regenbogen der Nebenregenbogen mit seinen Secundären zu verstehen ist.

Man könnte nun die Intensitätscurven construiren, indem man für jede Farbe zuerst den Nullpunkt der Abscissen feststellt. Derselbe ist, in Graden ausgedrückt, der oben angegebene Winkel der mindestabgelenkten Strahlen. Man trägt dann ferner bei jeder Farbe, deren Intensitätscurve gezeichnet wird, die Lage der Maxima und Minima der Intensität an der Abscissenaxe (die in Winkelmass genommen wird) auf und dann geht man daran, von $0 \cdot 2z$ zu $0 \cdot 2z$, das man nach obiger Tabelle ebenfalls in Winkelmass verwandelt, die Intensitätswerthe als Ordinaten aufzutragen und erhält so die Intensitätscurve.

Allein bei der Auftragung der Intensitätswerthe ist die den einzelnen Farben zukommende Intensität zuerst zu ermitteln. Dieselbe berechnet sich nicht nur aus dem Factor $f^2_{(z)}$,

[1] Wir haben gesehen, dass $\Theta_2 = 1 \cdot 786\, \Theta_1$, es ist daher auch

$$\frac{\Theta_2}{5z_m} = 1 \cdot 786 \frac{\Theta_1}{5z_m};$$

da nun $\Theta_1 : 5z_m$ der Winkelwerth von $0 \cdot 2z$ im ersten Regenbogen ist, so wird $1 \cdot 786\,\Theta_1 : 5z_m$ der entsprechende Winkelwerth im zweiten Regenbogen sein. So sind denn auch die obigen Werthe für den zweiten Regenbogen berechnet worden.

der für alle Farben gleichbleibt, sondern es ist dabei auch der Factor M von massgebendem Einflusse. Dieser Factor enthält nun, wie sein Ausdruck es darstellt, erstlich die ursprüngliche Intensität jeder einzelnen Farbe und dann die Veränderung, welche dieselbe im Regentropfen erfahren hat.

Die Vertheilung der Lichtintensität im Sonnenspectrum gibt uns die ursprüngliche Intensität der verschiedenen Farben vor dem Eintritt in den Regentropfen. Diese Intensitätsvertheilung ist — es handelt sich um die Lichtintensität, die Leuchtkraft der Farben — wohl in der exactesten Weise von Abney[1] bestimmt worden; ich sah mich aber gezwungen, für meine Zwecke die Maxwell'schen Intensitätswerthe[2] der einzelnen Farben zu verwenden, obwohl es zweifellos ist, dass dieselben nicht vollkommen richtig sind. Die Rechtfertigung dieser Wahl liegt in dem Ziele, das ich mir gesetzt habe: die Berechnung der Regenbogenfarben für die verschiedensten Werthe der A aus der Farbenmischung, welche durch das Ineinandergreifen der Intensitätscurven der verschiedenen Farben entstehen. Da nun für die einzelnen Farben nur von Maxwell auch die ihnen zukommenden Farbengleichungen angegeben wurden, so blieb mir nichts anderes übrig, als auch die mit seinen Farbengleichungen wesentlich zusammenhängenden Intensitätswerthe zu acceptiren. In den Farbengleichungen, beziehungsweise in der Addition der Farbengleichungen liegt dann auch die Correctur für die Unrichtigkeiten seiner Intensitätswerthe, so dass bei den Farbenmischungen trotz der eingeführten Unrichtigkeiten der Intensitätswerthe die wirkliche Farbe aus der Rechnung sich ergibt. Diese Maxwell'schen Werthe der ursprünglichen Intensitäten für die von mir zur Berechnung der Regenbogenfarben benützten Wellenlängen sind die folgenden.

Intensität der einzelnen Farben in Promille der Intensitätssummen.

λ	J_0	J_1
B	23	20
C	94	86

[1] Colour Photometry. Transact. R. Soc. London 1886, Part. II.

[2] Ich entnehme sie aus Mascart, Traité d'Optique I, p. 200.

λ	J_0	J_1
D........	262	250
E........	153	152
$\mathfrak{x}$........	118	121
F........	130	134
$\mathfrak{y}$........	152	163
G........	68	74
Summe ...	1000	1000.

Ich habe für die Berechnung der Farben des Regenbogens mich auf die obigen acht einzelnen Farben beschränkt, wofür die Begründung weiter unten gegeben wird. Die Intensität J_0 vor Eintritt in den Regentropfen ist der nach der Wellenlänge veränderliche Bestandtheil von $k = CJ_0$ in dem Ausdrucke für M

$$M = k \sqrt[3]{\frac{1}{h^2 \lambda}} \cdot a^{\frac{7}{3}};$$

J_0 ist dann in Promille der Intensitätssumme aller acht Farben ausgedrückt; es sind also die Maxwell'schen Werthe in Promille verwandelt. Die zweite Columne für J_1 gibt die Werthe von

$$J_0 : (h^2 \lambda)^{\frac{1}{3}}$$

ebenfalls als Promille der Summe der Intensitäten aller acht Farben nach dem Austritte des Strahles aus dem Regenbogen. In dieser Form gelten die Werthe für J_1 sowohl für den ersten, als den zweiten Regenbogen und für alle Regenbogen noch höherer Ordnung, so lange es sich um dasselbe a handelt. Sie stellen einfach die relative Intensität der einzelnen Farben bei allen Regenbogenerscheinungen für das erste Maximum dar.

Um nun diese relative Intensität für jedes beliebige z zu erhalten, hat man diese Werthe einfach mit dem entsprechenden Werthe von $f^2_{(z)}$ zu multipliciren. Da der Werth für das erste Maximum von $f^2_{(z)}$ in vollkommen genügender Annäherung 100 ist, so erhält man alle übrigen Intensitäten durch Multiplication mit den entsprechenden $f^2_{(z)}$ als Procente des Maximums. Man findet diese relativen Intensitäten für die acht in Rechnung

gezogenen Farben in Tabelle III des Anhanges für alle Werthe von z in den eingeführten Abständen von $0 \cdot 2\, z$. Damit sind uns nun alle Mittel gegeben, die Curven der Intensitätsvertheilung für jede der acht Farben in jedem Regenbogen zu zeichnen.

d) **Die absolute Intensität.**

Der vollständige Ausdruck für die Intensität im Regenbogen kann nun geschrieben werden:

$$J_r = C \frac{J_0}{\sqrt[3]{h^2 \lambda}} a^{\frac{7}{3}} f^2_{(z)}.$$

Die relative Intensitätsvertheilung in einem Regenbogen ist von a unabhängig, da jeder Regenbogen bei einer bestimmten constanten Tropfengrösse erzeugt wird. Wir haben oben auch das C als constant für jeden bestimmten Regenbogen angenommen. Das ist es auch für Regenbogen derselben Ordnung, denn

$$C = c\beta.$$

c ist eine numerische Constante und β bedeutet den Lichtschwächungscoëfficienten in Folge von Brechung und Reflexion an und im Regentropfen. β ist daher nur für die Regenbogen verschiedener Ordnung verschieden, aber von a unabhängig.

Beim Vergleiche der Intensität verschiedener Regenbogen haben wir daher folgende Fälle:

1. Vergleich der Regenbogen derselben Ordnung bei verschiedener Tropfengrösse. Wir haben hiebei β constant und daher

$$J'_r : J''_r = a_1^{\frac{7}{3}} : a_2^{\frac{7}{3}}.$$

Setzt man die Intensität im Regenbogen, welcher durch eine Tropfengrösse von 1 *mm* Durchmesser oder $a = 500\,\mu$ erzeugt wird, gleich Eins, so ergeben sich für die übrigen Tropfengrössen folgende auf diese Einheit bezogene Intensitätswerthe, die Einheit gleich 1000 gesetzt:

	$a =$ (Mikron)						
	5	10	15	20	25	30	40
J_r	0 02	0·11	0·28	0·55	0·92	1·41	2·76

	$a =$ (Mikron)					
	50	100	150	250	500	1000
J_r	4·64	23·39	60·24	198·4	1000	5039

Mit diesen Zahlen sind die Werthe der Tabelle III des Anhanges und alle aus letzterer erhaltenen Werthe der relativen Intensität zu multipliciren, wenn man das Verhältniss der Intensität der von verschiedenen Tropfengrössen erzeugten Regenbogen derselben Ordnung kennen lernen will.

2. Vergleich der Intensität der Regenbogen verschiedener Ordnung für gleiche Tropfengrösse. Wir haben hier a constant und β verschieden und daher

$$J_r^I : J_r^{II} = \beta_I h_2^{\frac{2}{3}} : \beta_{II} h_1^{\frac{2}{3}}.$$

Zur Berechnung von β dient die Fresnell'sche Intensitätsgleichung für reflectirtes, beziehungsweise gebrochenes Licht. Da in derselben bekanntlich der Sinus und die Tangente der Differenz und der Summe des Einfalls- und Brechungswinkels vorkommt, so ist streng genommen β nicht constant. Da jedoch für die beim Regenbogen in Frage kommenden Strahlen die Einfallswinkel nur wenig verschieden sind, so können wir in unserem Falle ohneweiters einen mittleren Werth dieses Einfallswinkels wählen und denselben als giltig für alle Farben betrachten, wodurch β constant wird für Regenbogen derselben Ordnung. Trotzdem bleibt die Berechnung für β etwas unangenehm. Ich gebe hier nur die Werthe für die Regenbögen erster und zweiter Ordnung (erster und zweiter Regenbogen). Nimmt man die Intensität der einfallenden Strahlen als Einheit, so besitzen die austretenden Strahlen im ersten Regenbogen nur mehr 0·05092 und im zweiten Regenbogen nur mehr 0·01766 der urprünglichen Intensität. Dies sind daher die Werthe von β_I und β_{II}. Der zweite Regenbogen hat also wegen β schon nur 0·347 der Intensität des ersten; $h_1^{\frac{2}{3}} : h_2^{\frac{2}{3}}$ ist aber 0·2112 und so ist schliesslich $J_r^{II} = 0·07\, J_r^I$.

Ich übergehe den dritten möglichen Fall der Vergleichung von Regenbogen verschiedener Ordnung bei verschiedener Tropfengrösse; er ist leicht zu überblicken und dürfte selten in Frage kommen.

Wir haben nun aber immer noch keinen absoluten Werth der Intensität der Regenbogenfarben. Um denselben herzustellen, müssten wir in erster Linie die Intensität der Sonnenstrahlen vor Eintritt in den Regenbogen in bekannten Einheiten der Leuchtkraft angeben können. Dies wird wohl für immer unmöglich bleiben. Wir müssten ferner den Querschnitt des regenbogenerzeugenden Strahlenbündels kennen. Dieses ist aber bei Tropfen verschiedener Grösse verschieden und überhaupt für die einzelnen Tropfen eine kaum zu ermittelnde Grösse. Die Intensität des Regenbogens hängt ferner von der Anzahl der Regentropfen in der Volumeinheit ab. Aber auch die Verschiedenheit der Durchsichtigkeit und Trübung der Luft muss auf die Intensität der Erscheinung einen bedeutenden Einfluss haben. Alle diese Momente lassen es aussichtslos erscheinen, die absolute Intensität zu bestimmen. Aber auch die relative Intensität verschiedener Regenbogen untereinander ist dadurch beeinflusst und so bleibt eigentlich nur die relative Intensität der Farbenvertheilung in einem und demselben Regenbogen der Rechnung zugänglich. Glücklicherweise genügt dies für unseren Zweck der Berechnung der Farben eines beliebigen Regenbogens.

e) Die Vertheilung der Gesammtintensität im Regenbogen.

Mit Hilfe der Tabelle I, beziehungsweise II und III des Anhanges und den oben gegebenen Winkelwerthen der Abscisseneinheit $(0\cdot 2\, z)$ ist es nun vor Allem möglich, unter Zugrundelegung der Ablenkung der mindestgedrehten Strahlen als Anfangspunkt der Coordinaten, für jede einzelne Farbe die Vertheilung der Intensität der letzteren im Regenbogen durch eine Curve darzustellen. Zeichnet man sich diese Curven so, dass man die Lage und Richtung der Abscissenlinie aller Farben gemeinsam lässt, so überlagern und durchschneiden sich alle acht Farbencurven. Um nun an einem beliebigen Punkte die relative Gesammtintensität des Regenbogenbildes zu ermitteln, hat man nur an dem betreffenden Punkte über der Abscissenaxe eine Senkrechte zu errichten und die Ordinatenwerthe der Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit den einzelnen Farbencurven zu addiren; die Summe ist dann die relative

Gesammtintensität an diesem Punkte. Abney[1] hat nämlich gezeigt, dass bei jeder Farbenmischung die Intensität der Mischfarbe gleich ist der Summe der Intensitäten ihrer Componenten.

Ich habe nun diesen Vorgang gewählt und zeichnete in der angegebenen Weise für alle die oben schon aufgezählten Tropfengrössen je die acht Farbencurven, um dann in bestimmten Abständen voneinander die Gesammtintensitäten durch Summirung zu erhalten. Man findet diese Werthe in den Farbentabellen Seite 166–185 in der Columne R. I. (relative Intensität).

Es wäre nun sehr instructiv, die Intensitätscurven sowohl der Einzelfarben in ihrem Übereinandergreifen, als auch die Curven der Gesammtintensität für die verschiedenen Tropfengrössen zur Anschauung zu bringen. Ich muss mich aber auf einige charakteristische Curven der Gesammtintensität beschränken; die Curven der Einzelfarben, welche in ihrem Durcheinandergreifen einen Wirrwarr von Linien bilden würden, wenn man nicht — wie ich für meine Zeichnungen gethan habe — jede Curve in der ihr eigenen Farbe ausführt, will ich, um ein paar ganz charakteristische Züge derselben zur Anschauung zu bringen, für einige Tropfengrössen wenigstens in drei Farben, und zwar Roth (*C*), Grünblau (𝔵) und Violett (*G*) darstellen. Man findet die letzteren auf Tafel I, die ersteren auf Tafel II. Die Curven beziehen sich alle auf den ersten Regenbogen.

Ich führe diese Curven vor, weil sich daraus einige Schlüsse von selbst ergeben.

Die Curven auf Tafel I belehren uns über eine besondere Eigenthümlichkeit in der Farbenfolge des Regenbogens. Bekanntlich folgen im ersten Regenbogen die Farben von Roth zu Violett derart, dass Roth den äusseren Rand der convexen Seite des Bogens bildet und Violett den inneren Rand der concaven Seite, während die dazwischenliegenden Farben in der Reihenfolge des Spectrums sich anordnen. Unsere Curven verlangen nun, dass bei einer gewissen Tropfengrösse diese Farbenanordnung in einem der secundären Bogen und den auf denselben

---

[1] Abney und Festing, Colour photometry. Phil. Transact. R. Soc. London, 1886, part II, p. 433.

folgenden geradezu sich umkehre, so dass, nach einwärts vorschreitend, zuerst Violett und zuletzt Roth auftrete. Eine Beobachtung, die diese Forderung der Theorie bestätigt, muss als experimentum crucis für die Richtigkeit der Theorie angesehen werden. Solche Beobachtungen liegen nun wirklich vor und lässt sich die Richtigkeit dieser theoretischen Forderung auch jederzeit durch Versuche im Cabinete erhärten, wie wir später sehen werden. Wir kommen darauf noch später zurück.

Tafel II belehrt uns über zwei Punkte. Zunächst zeigt sie, dass die relativen Gesammtintensitäten umso grösser werden, je kleiner die Tropfen sind. Da nun an sich die Intensitäten mit der Tropfengrösse abnehmen, so ist im erwähnten Umstande ein Moment gegeben, welches bewirkt, dass die Intensitätsabnahme mit kleiner werdender Tropfengrösse keine so rasche ist, wie es die Zahlen auf Seite 148 verlangen. Im wirklichen Regenbogen sind die Intensitätsverhältnisse von zwei Bogen bei verschiedener Tropfengrösse nach dem Producte aus den Zahlen auf Seite 148 und den Maximalwerthen der relativen Gesammtintensität zu bemessen. Es ist z. B. das Intensitätsverhältniss der Regenbögen bei den Tropfengrössen von $a = 250\,\mu$ und von $a = 25\,\mu$ nicht einfach $198 \cdot 4 : 0 \cdot 92$, sondern $198 \cdot 4 \times 576 : 0 \cdot 92 \times 987$, also nicht 216, sondern nur 125. Diese Zahl wird aber auch dadurch noch verkleinert, dass es wohl wahrscheinlich ist, dass bei Tropfen von $25\,\mu$ Halbmesser die Anzahl derselben in der Volumeinheit eine grössere sein wird, als bei solchen von $250\,\mu$ Halbmesser. So wird es erklärlich, dass auch Regenbögen bei äusserst kleiner Tropfengrösse noch deutlich sichtbar sind.

Der zweite Punkt, über den uns Tafel II belehrt, ist der folgende. Die secundären Bögen schliessen sich an den Hauptregenbogen (erstes Maximumgebiet des ersten Regenbogens) und aneinander ohne Zwischenraum an bis herab zur Tropfengrösse vom Halbmesser $a = 100\,\mu$, von da weg trennt sich aber der erste secundäre deutlich vom Hauptregenbogen ab. Wenn man daher einen Zwischenraum zwischen dem Hauptregenbogen und den ersten secundären beobachtet, so weiss man, dass die regenbogenerzeugenden Tropfen einen Halbmesser haben, der kleiner als $100\,\mu$ ist. Ich füge bei, dass man

auch den zweiten vom ersten secundären getrennt sehen wird bei Tropfengrössen, deren Halbmesser von 50—30 μ messen.

Ich komme nun zur eigentlichen Aufgabe dieser Arbeit: zur Berechnung der Farben des Regenbogens. Es sei bemerkt, dass ich mich hiebei auf den ersten Regenbogen (Hauptregenbogen und seine secundären) beschränke.

2. Die Berechnung der Farben des Regenbogens.

a) Die Farbengleichungen und das Farbendreieck.

Die Farbengleichungen geben jede Farbe zunächst als Resultante aus den drei Grundfarben Roth, Grün, Violett (Blau), und ist auch die Summe der Intensitäten der drei Componenten gleich der Intensität der resultirenden Farbe. Summirt man alle Maxwell'schen Farbengleichungen, so erhält man die Intensitäten der Componenten jener Farbe, welche aus dem Zusammentreffen aller Spectralfarben resultirt, d. h. man erhält die Verhältnisszahlen, welche angeben, mit welchen Intensitäten die drei Grundfarben ausgestattet sein müssen, um bei ihrer Mischung Weiss zu geben. Es ist bekannt, wie man aus dem Vergleiche der Farben mit Weiss nach diesen Gleichungen jede Farbe als eine Mischung aus einer reinen Spectralfarbe mit Weiss darzustellen in der Lage ist.

Streng genommen hätte ich nun zum Zwecke der Farbenberechnung alle Farben (Wellenlängen) benützen müssen, von welchen Maxwell die Farbengleichungen angibt. Allein das hätte zu einer unerschwinglichen Arbeitslast geführt. Ich war unter gewissen Cautelen offenbar berechtigt, eine mässige Anzahl von Farben auszuwählen, wenn ich dabei zweierlei berücksichtigte: erstens, dass die Summe der Grundfarbenintensitäten in demselben Verhältniss zur Gesammtintensität aller benützten Farben stehe, wie in der Maxwell'schen Gleichung für Weiss. Ich habe daher die Wahl so getroffen, wie schon aus dem Früheren bekannt ist.

Die Farbengleichungen für die verwendeten acht Wellenlängen sind nun die folgenden, neben welche ich die ganze Reihe der Maxwell'schen setze:

Mit acht Farben:

λ	R	G	V	J_0 ‰
B . .	23	0·0	0·0	23
C . . .	85	1	8	94
D . . .	146	117	−1	262
E . . .	− 1	152	2	153
𝔟 . . .	− 8	71	55	118
F . . .	− 8	45	93	130
𝔥 . . .	3	1	148	152
G . . .	0	−4	72	68
←Weiss→	240	383	377	1000

Nach Maxwell mit 22 Farben:

λ	R	G	V	J_0 ‰
·698	8·3	0·0	0·0	8·3
·663	24·8	0·5	3·7	29·0
·630	59·0	0·0	0·0	59·0
·606	68·1	21·3	−0·4	89·0
·583	49·8	51·9	−0·4	101·3
·562	28·5	73 4	−1·8	100·1
·544	7·5	71·4	−0·5	78·4
·528	0·0	59·0	0·0	59·0
·513	−3·7	43·5	5·0	44·8
·500	−3·2	29·8	16·6	43·2
·488	−2·9	20·0	29·2	46·3
·477	−2·8	11·2	44·3	52·7
·467	−1·9	1·9	53·4	53·4
·457	0·0	0·0	59·0	59·0
·449	1·1	0·4	55·7	57·2
·441	1·5	0·9	40·9	43·3
·434	0·3	−0·5	28·3	28·1
·428	0·0	0·0	19·6	19·6
·422	0·0	0·0	12·3	12·3
416	0 0	0 0	8·6	8·6
·411	0·0	0·0	4·9	4·9
·406	0·0	0·0	2·5	2·5
←Weiss→	234·4	384 7	380·9	1000·0

Da die beiden Gleichungen für Weiss sehr nahe gleich sind, so ist hiemit die erste Bedingung mit genügender Annäherung erfüllt. Die zweite bei der Auswahl der acht Farben zu erfüllende Bedingung wäre nun gewesen, den drei Farbengruppen Roth-Orange-Gelb, Grün-Grünblau und Blau-Violett dieselben Verhältnisse ihrer Intensitätswerthe zu wahren, wie dieselben bei den 22 Maxwell'schen Farben zum Ausdrucke kommen. Doch diese Bedingung war bei der Auswahl der acht

Farben leider nicht zu erfüllen. Ich erhalte nämlich für die acht Farben die folgenden Intensitätssummen:

Rothe Gruppe 379,
Grüne Gruppe 401,
Blaue Gruppe 220,

während bei den 22 Farben Maxwell's die entsprechenden Intensitätssummen sind:

Rothe Gruppe 387,
Grüne Gruppe 324,
Blaue Gruppe .... 289.

Da eine Besserung dieser Verhältnisse nur durch Beiziehung einer grösseren Anzahl von Wellenlängen zu erreichen wäre, wenn man die jedenfalls und in erster Linie aufrecht zu haltende Bedingung für Weiss nicht alteriren will, so beschloss ich, die Berechnung der Farben trotzdem mit diesen acht Farben zu machen und die nöthige Correctur in einer entsprechenden Abänderung im Farbendreiecke zu suchen. Wenn mir dies gelang, wie es mir thatsächlich gelungen ist, so war damit auch für die Farbenberechnungen im Allgemeinen ein praktisches Abkürzungsverfahren gefunden, so dass man in Hinkunft mit nur acht Farben und dem entsprechend abgeänderten Farbendreiecke statt der 22 Farben und dem Farbendreiecke von Maxwell rechnen kann.

Um die fragliche Abänderung im Farbendreiecke vornehmen zu können, muss man sich zunächst vor Augen halten, dass die drei Grundfarben, welche die Ecken des Farbendreieckes bilden, von Maxwell nicht ganz richtig gewählt wurden. Die Folge hievon ist, dass erstens die Intensitätscurve im Spectrum, wie sie in den unter J_0 angegebenen Zahlen der vorhergehenden Tabelle zum Ausdrucke kommt, eine Unrichtigkeit zeigt, indem die Intensität von $\lambda = \cdot 583\,\mu$ bis $\lambda = \cdot 500\,\mu$ abnimmt und dann wieder bis $\lambda = \cdot 457\,\mu$ zunimmt, was nach den ausgezeichneten exacten Messungen von Abney[1] nicht der Fall

[1] Abney and Festing, Colour Photometry. Philosophical Transactions Royal Soc. London, 1886, part II, p. 447. Die Verfasser bemerken, dass ihnen Lord Rayleigh mittheilte, Maxwell's Werthe der drei Grundfarben seien rein willkürlich gewählt (p. 448 Anmerkung).

ist. Zweitens ergeben sich aber hiebei auch negative Componenten, wie ebenfalls aus obiger Tabelle ersichtlich ist: eine negative Componente hat hier aber nur einen rechnerischen Sinn und entspricht nicht der Wirklichkeit. Die Linie, welche die Lage der Spectralfarben auf dem Maxwell'schen Farbendreiecke darstellt, fällt daher nicht mit den Seiten des Dreieckes zusammen, wie es sein sollte, sondern läuft ausserhalb in einiger Entfernung von den Seiten und trifft dasselbe nur in den drei Ecken. Aber auch hier ergibt sich in der Roth-Ecke und in der Violett-Ecke eine Anomalie, indem sich in ersterer eine Schlinge bildet und in letzterer der Lauf der Linie der Spectralfarben ein ganz eigenthümlicher wird, indem diese Linie zuerst unter Halbirung des Winkels etwa $^1/_{20}$ der Seitenlänge tief ins Farbendreieck hineindringt und dann unter scharfer Biegung die dritte Seite (der Purpurtöne) schneidet und draussen neuerdings eine Biegung macht. Die Maxwell'schen Fixpunkte (Grundfarben) sind:

$$\text{Roth } \lambda = \cdot 630,$$
$$\text{Grün } \lambda = \cdot 528,$$
$$\text{Blau } \lambda = \cdot 457;$$

die richtigen Fixpunkte liegen aber für Roth zwischen $\lambda = \cdot 630$ und der Lithiumlinie, für Grün unweit dem Maxwell'schen und für Violett in der Nähe von *G*, etwa bei $\lambda = \cdot 430$. Hieraus ersieht man, dass besonders der dritte Maxwell'sche Fixpunkt fehlerhaft ist, indem er thatsächlich im Violett liegen soll und nicht im Blau.[1]

Bei der Auswahl der obigen acht Farben ergibt sich ein Übergewicht der grünen Farbentöne gegenüber den blauen. Das Verhältniss derselben mit den 22 Maxwell'schen Farben ergibt sich:

$$\text{Blau} : \text{Grün} = 0 \cdot 891,$$

für die acht ausgewählten Farben:

$$\text{Blau} : \text{Grün} = 0 \cdot 548.$$

---

[1] Abney, Colour Measurement and Mixture, p. 121 und 155.

Daraus geht zweifellos hervor, dass sich für die acht ausgewählten Farben der Maxwell'sche Fixpunkt gegen die Grün-Ecke bedeutend verschieben muss, und zwar angenähert um 0·34 der Dreieckseite, wenn die Intensitäten der verwendeten Farben dabei allein massgebend wären. Letzteres ist nun allerdings nicht ganz richtig, da es auf das Verhältniss der drei Componenten, welche jede Farbe darstellen, ebenfalls wesentlich ankommt. Da ich nicht in der Lage bin, diese Frage durch eine eingehende experimentelle Untersuchung klarzustellen, so musste ich zunächst mich begnügen, eine wahrscheinliche Annahme über den Punkt zu machen, welcher auf der grün-blauen Seite des Farbendreieckes den Übergang vom Blau ins Violett darstellt und Ähnliches, auch Bezügliches des Punktes thun, welcher auf der roth-grünen Seite des Farbendreieckes den Übergang von Gelb zu Grün bedeutet. Erst nachträglich konnte ich dann an den Beobachtungen die Richtigkeit meiner zwar auf Grund der obigen Verhältnisszahlen wahrscheinlichen Annahmen erproben. Es ist daher das Farbendreieck, wie ich es abändere, a posteriori für die acht ausgewählten Farben als richtig nachgewiesen, wenn es sich zeigt, dass die Beobachtung stets jene Farben ergibt, welche die Rechnung mit Hilfe des abgeänderten Farbendreieckes verlangt. Es wird sich in der Folge zeigen, dass die Bestätigung durch die Beobachtung eine durchwegs vollkommene ist, und da dem Maxwell'schen Farbendreiecke so viele theoretische Mängel anhaften, sodass es seinen Werth ebenfalls nur aus der Übereinstimmung mit der Beobachtung, also empirisch, erhält, so zögere ich nicht, dieses abgeänderte Farbendreieck einzuführen, das gleichfalls empirisch als richtig für die gewählten Farben sich erweist, umsomehr, als die Vereinfachung der Rechnung durch Reduction der 22 auf 8 Farben in der Praxis von ausserordentlichem Werthe ist.

Ich nehme nun dieses abgeänderte Farbendreieck, welches auf Tafel III dargestellt ist, als Grundlage der Farbenbestimmung, wie sie die Rechnung mit den acht ausgewählten Farben ergibt.

Da jeder Punkt der Seiten des Farbendreieckes eine bestimmte Farbe (Wellenlänge) repräsentirt, so habe ich jede Seite

in 10 gleiche Theile getheilt und gebe die Farbe stets in erster Linie durch die Zahl an, welche ihre Lage auf einer der Seiten des Farbendreieckes feststellt. Zu diesem Zwecke zähle ich von der Roth-Ecke aus, welche ich mit 0 bezeichne, fort bis 30 (gleich 0); es fällt dann 10 auf die Grün-Ecke, 20 auf die Violett-Ecke und 30 wieder auf den Anfangspunkt der Zählung. Die Farbenvertheilung ist die folgende: 0—3·0 Roth, von da bis 4·2 Orange, von da bis 5·8 Gelb, von da bis 10·5 Grün, von da bis 13·5 Blaugrün, von da bis 17·0 Blau, von da bis 20·5 Violett, von da bis 24·0 Rosa, von da bis 29·0 Purpur, von da bis 30·0, beziehungsweise bis 0 Roth. Eine nähere Bezeichnung der Farben in Worten habe ich nicht eingeführt, da durch die Angabe der Zahl auf dem Farbendreiecke die Farbe viel genauer definirt ist, als es Worte zu thun vermögen.

Die Richtigkeit dieser Farbenvertheilung auf den Dreieckseiten erhellt aus der vollen Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Farben, die durch Experimente im Cabinete und Beobachtungen in der Natur nachgewiesen ist, wie im nächsten Absatze gezeigt werden wird.

Eine weitere Rechtfertigung dieser Farbenvertheilung bei Verwendung der nur acht Farben zur Rechnung werde ich gleich unten geben. Sie besteht darin, dass für einen ganz besonders charakteristischen Punkt die Rechnung mit den 22 Farben und dem Maxwell'schen Dreiecke dieselbe Farbe gibt, wie die Rechnung mit den acht Farben und dem vorliegend abgeänderten Farbendreieck.

Vorerst will ich aber jetzt die Factoren der drei Grundfarben für die verschiedenen Wellenlängen angeben. Die Summe dieser drei Factoren muss für jede Wellenlänge gleich Eins sein. Ich gebe dieselben für die 22 Maxwell'schen und die acht ausgewählten Farben.

Kennt man die Intensitäten der einzelnen Farben, so kann man mit Hilfe dieser Factoren sofort die Farbengleichungen aufstellen und erhält dann durch Summirung dieser Farbengleichungen der einzelnen Farben die Farbengleichung der Mischfarbe.

λ	R	G	V
B ...	1·000	0·000	0·000
C ...	0·904	0·011	0·085
D ...	0·557	0·446	—0·003
E ...	—0·006	0·993	0·013
𝔟 ...	—0·068	0·602	0·466
F ...	—0·061	0·346	0·715
𝔥	0 020	0·007	0·973
G ...	0·000	—0·059	1·059

λ	R	G	V
·698	1·000	0·000	0·000
·663	0·854	0·018	0·128
·630	1·000	0·000	0·000
·606	0·765	0·239	—0·004
·583	0·492	0·511	—0·003
·562	0·285	0 734	—0·019
·544	0·096	0·911	—0·007
·528	0·000	1·000	0·000
·513	—0 083	0·971	0·112
·500	—0·075	0·690	0·385
·488	—0·064	0·433	0·631
·477	—0·052	0·212	0 840
·467	—0·036	0·036	1·000
·457	0·000	0·000	1·000
·449	0·020	0·006	0·974
·441	0·034	0·022	0·944
·434	0·011	—0·017	1·006
·428	0·000	0·000	1·000
·422	0·000	0·000	1·000
·416	0·000	0·000	1·000
·411	0·000	0·000	1·000
·406	0·000	0·000	1·000

b) Die Ausführung der Farbenberechnungen.

Die erste Aufgabe für die Rechnung ist die Bestimmung der Intensität jeder Farbe an einem bestimmten Punkte des Regenbogenbildes. Man erhält diese Intensitäten auf zweierlei Weise. Erstens konnte ich dieselben direct meinen Curvenzeichnungen entnehmen und zweitens konnte ich den rein rechnerischen Weg betreten. Für letzteren hat man

$$J_1' = \frac{J_0}{(h^2\lambda)^{\frac{1}{3}}} \cdot f^2_{(z')} \cdot$$

Für die Bestimmung von z' für den Punkt, an welchem man die Farbe berechnen will, hat man nach Seite 142

$$z' = 2\sqrt[3]{\frac{6a^2}{h\lambda^2}}.\Theta'.$$

Das Θ' lässt sich für jeden bestimmten Punkt des Regenbogenbildes mit Hilfe von A_1 sofort für jede beliebige Farbe, deren A_1 man berechnet hat, finden. Eine Vereinfachung liegt darin, dass man nur für die grösste Wellenlänge das Θ unmittelbar bestimmt und aus diesem mit Hilfe der bekannten A_1-Werthe der übrigen Farben die Θ der letzteren für den fraglichen Punkt berechnet. Nennen wir z. B. das Θ für B (der grössten benützten Wellenlänge) Θ_0 und die Ablenkung der mindestgedrehten Strahlen dieser Wellenlänge α_0, so erhält man die Θ der übrigen Wellenlängen für den fraglichen Punkt aus

$$\Theta' = \Theta_0 - (\alpha_0 - \alpha').$$

Hat man die Intensitäten der einzelnen Farben gefunden, so bildet man die Farbengleichungen und erhält sofort durch Summirung die Farbengleichung jener Mischfarbe, welche an dem fraglichen Punkte des Regenbogenbildes auftritt.

Ich habe in der Folge die Intensitäten aus meinen Curvenzeichnungen entnommen, da dies eine immerhin genügende Genauigkeit ergab. Zwar würde die Rechnung vielleicht etwas genauere Resultate haben liefern können, doch da diese Arbeit an sich schon mit einer Unmasse Zifferrechnung mich belastete, so liess ich es mit dem ersteren Verfahren bewenden, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass es hinreichend genau ist.

Bevor ich nun die Resultate meiner Farbenberechnungen ausführlich mittheile, will ich erst noch zwei Fragen beantworten. Die erste lautet:

»Welches ist die Farbe, welche durch das Übereinanderfallen der Intensitätsmaxima der aus dem Regentropfen austretenden Farben entsteht?«

Ich beantworte dieselbe nach der Rechnung mit den ausgewählten acht Farben und mit den 22 Maxwell'schen in der folgenden Tabelle.

λ	R	G	V	J_1
B ...	20	0	0	20
C ...	78	1	7	86
D ...	139	112	—1	250
b ...	—8	73	56	121
E ...	—1	151	2	152
F ...	—8	46	96	134
h ...	3	1	159	163
G ...	0	—4	78	74
	223	380	397	1000

λ	R	G	V	J_1
·698	7·3	0·0	0·0	7·3
·662	22·5	0·4	3·4	26·3
·630	54·4	0·0	0·0	54·4
·606	63·7	19·9	—0·3	83·3
·583	47·5	49·3	—0·3	96·5
·562	27·6	71·1	—1·8	96·9
·544	7·3	69·8	—0·5	76·6
·528	0·0	58·5	0·0	58·5
·513	—3·7	43·7	5·0	45·0
·500	—3·3	30·3	16·9	43·9
·488	—3·0	20·6	30·0	47·6
·477	—2·8	11·6	46·0	54·8
·467	—2·0	2·0	55·9	55·9
·457	0·0	0·0	62·3	62·3
·449	1·2	0·4	59·3	60·9
·441	1·6	1·0	43·9	46·5
·434	—0·3	—0·5	30·6	30·4
·428	0·0	0·0	21·8	21·8
·422	0·0	0·0	13·4	13·4
·416	0·0	0·0	9·5	9·5
·411	0·0	0·0	5·4	5·4
·406	0·0	0·0	2·8	2·8
	218·6	378·1	403·3	1000·0

Die Auflösung der Farbengleichungen der resultirenden Mischfarbe nach der bekannten Weise gibt für die acht Farben

$$\overset{W}{929}+\overset{G}{24}+\overset{V}{47} = 1000 \qquad \overset{G}{24}+\overset{V}{47} = \overset{X}{71}$$

Lage von X: 16·8 (Blau),

für die 22 Farben:

$$\overset{W}{933\cdot0}+\overset{G}{19\cdot2}+\overset{V}{47\cdot8} = 1000 \qquad \overset{G}{19\cdot2}+\overset{V}{47\cdot8} = \overset{X}{67},$$

Lage von X: 17·1 (Blau).

X ist der Farbenton der Mischfarbe, dessen Lage bestimmt wird durch die Dreieckseite, in unserem Falle die G—V-Seite und das Verhältniss von $V:X$, wodurch der Abstand von der G-Ecke ausgedrückt erscheint. W bedeutet Weiss.

Man kann daher die aufgelösten Gleichungen folgendermassen kürzer anschreiben

$$929(W)+71(16\cdot 8) = 1000,$$

$$933(W)+67(17\cdot 1) = 1000.$$

Im Maxwell'schen Farbendreieck ist 17·1 noch ein blauer Farbenton, wie in unserem abgeänderten Dreiecke 16·8 noch ein blauer Ton ist. Es ergibt sich also auf beiden Wegen die Farbe: Weiss mit blauem Hauche.

Ich werde in Hinkunft aber die Intensitäten von W und X in Procenten der ganzen Intensität der Mischfarbe angeben und z. B. schreiben

R. I.	W	X
	in Procenten	
1000	92·9	7·1

worin R. I. die relative Intensität der entstandenen Mischfarbe bedeutet. Sonach wird das Schema für die Wiedergabe der Rechnungsresultate sein:

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
	223	380	397	1000	93	7	16·8	Blau

In der Rubrik A_1 kommen die Ablenkungen, welche die Orte der Punkte, deren Mischfarbe bestimmt wird, im Regenbogen fixiren. Lage von X bedeutet natürlich die Lage auf dem Farbendreiecke.

Die zweite Frage, die ich voraus erledigen will, ist die: »Stimmen die Farbenangaben, welche durch die Rechnung mit den acht Farben und dem abgeänderten Farbendreiecke erhalten werden, mit den Farben überein, welche man durch die Rechnung mit den 22 Maxwell'schen Farben und dem Maxwell'schen Farbendreiecke erhält?«

Wollte ich diese Frage dadurch beantworten, dass ich für alle untersuchten Fälle gleichzeitig das Resultat sowohl nach der einen, wie der anderen Methode angebe, so hiesse das ja die ganze Untersuchung mit 22 Farben noch einmal machen. Ich kann nur für einige besonders charakteristische Punkte die Rechnung auch mit den 22 Farben durchführen. Und da bietet sich ein ganz besonders interessanter Fall dar. Aus den auf Seite 167 ersichtlichen Resultaten der Farbenberechnung ergibt sich für die Tropfengrösse von $a = 500\,\mu$ bei den Ablenkungen von 41° 0′, 40° 55′, 40° 50′ die Farbe Violett, und zwar nach der Lage auf dem Farbendreiecke ausgedrückt, der Reihe nach: 17·1, 18·4, 17·1, hierauf folgt erst wieder Blau (16·7) in der Ablenkung von 40° 45′. Nun ist die Ablenkung der mindestgedrehten Strahlen für den Anfang von Violett (Linie G etwa), wie wir sahen, 40° 44′; es tritt daher bei dieser Tropfengrösse (nebenbei gesagt auch bei $a = 1000\,\mu$) der immerhin interessante Fall auf, dass Violett im Regenbogen an Punkten erscheint, wo noch die Spectralfarbe Violett gar nicht vorhanden ist, oder jedenfalls ganz unmerklich einfliesst. Ich hielt diesen Fall für charakteristisch genug, um daran die Richtigkeit der Eintheilung der $G-V$-Seite in Bezug auf die Grenze Violett-Blau zu prüfen.

Die Rechnung mit den 22 Farben wurde nach den Formeln Seite 160 ausgeführt, nachdem vorher n und h bestimmt und A_1 für alle 22 Farben berechnet worden war. Die erhaltenen Farbengleichungen sind:

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
41° 0′	78·8	109·5	177·5	365·8	78	22	21·5	Violett
40 55	99·4	110·8	212·0	422·2	68	32	22·4	Violett
40 50	91·2	135·8	236·3	463·3	76	24	20·8	Violett
40 45	60·8	154·7	243·4	458·9	57	43	17 3	Blau

Die nach den 22 Farben berechnete Farbengleichung und ihre Deutung nach dem ursprünglichen Maxwell'schen Farbendreiecke bestätigt daher, dass man nach der von mir gewählten Methode zu denselben Resultaten kommt, wie mit der Maxwell'schen und die Annäherung jedenfalls eine derart gute ist, dass sie für alle praktischen Fälle vollständig genügt.

c) Die Rechnungsresultate.

Ich lasse die Resultate in zwei Abtheilungen ausführlich im angegebenen Schema folgen.

Die erste Abtheilung gibt die Farbenfolge in der künstlich mittelst einer punktförmigen (bei der Ausführung der Versuche linienförmigen) Lichtquelle erzeugten Regenbogen. Die zweite Abtheilung gibt die Farbenfolge in den Regenbogen, wie sie in der Natur vorkommen, wo die Sonne als Lichtquelle wirkt. Da die Sonne eine scheinbare Ausdehnung von 32′ hat, so tritt in dem natürlichen Regenbogen eine Mischung der Farben des künstlich erzeugten Regenbogens auf, zu welcher alle Punkte in einer Ausdehnung von 32′ beitragen.

Ich habe nun für die punktförmige Lichtquelle die Farben in solchen Abständen berechnet, dass für die verschiedenen Tropfengrössen alle auftretenden Farben in ihrer Reihenfolge wiedergegeben erscheinen. Die Änderung der Farbe ist eine umso raschere, je grösser die Tropfen sind und so habe ich die Farben für die verschiedenen Tropfengrössen in folgenden Winkelabständen berechnet:

für $a = 1000\,\mu$	und	$a = 500\,\mu$	.... von	5	zu	5 Minuten.
» $a = 250$	bis	$a = 100$	.... »	10	»	10 »
» $a = 50$	»	$a = 25$	.... »	20	»	20 »
» $a = 20$	»	$a = 5$	.... »	40	»	40 »

Für den Hauptbogen (Gebiet des ersten Maximums des ersten Regenbogens) habe ich aber wiederholt nur die doppelten Intervalle in den folgenden Tabellen wiedergegeben, da dadurch keine Störung der Farbenfolge eintrat und eine Abkürzung der Tabellen ermöglicht wurde.

Bei Berechnung der Farben des natürlichen Regenbogens habe ich die Winkel von A_1 auf den Sonnenmittelpunkt bezogen. Die Farben berechnete ich dann für jene Tropfengrössen, für welche ich die Farben des künstlichen Regenbogens von 5′ zu 5′ vorliegen hatte, durch Summirung der sieben Farbengleichungen: Mittelpunkt und 5′, 10′, 15′ rechts und links vom Mittelpunkte; für jene Tropfengrössen, für welche nur von 10′ zu 10′ die Farben des künstlichen Regenbogens vorlagen, aus den drei Farbengleichungen: Mittelpunkt und 10′ rechts und links vom Mittelpunkt. Für die übrigen Tropfengrössen erfolgt die Änderung der Farben derart langsam (umso langsamer, je kleiner die Tropfen sind), dass man ohne merklichen Fehler die Farbenfolge des künstlichen Regenbogens als die des natürlichen annehmen darf.

Jede Farbe erscheint dargestellt durch eine Spectralfarbe X gemischt mit Weiss. Es fragte sich nun, ob die Wiedergabe der Farbe in Worten nicht nach einer Scala erfolgen sollte, in welcher das percentuelle Mischungsverhältniss mit Weiss zum Ausdrucke käme, z. B.: gesättigtes Grün, fast gesättigtes Grün, weissliches Grün, grünliches Weiss. Da jedoch bekannt ist,[1] dass den verschiedenen Farben verschiedene Mengen von Weiss beigemischt werden können, ohne dass man die Beimischung von Weiss bemerkt und diese Verhältnisszahlen nicht für alle Farben bestimmt werden konnten, so habe ich es vorgezogen, eine solche Scala nicht anzuwenden. Es wird sich jeder selbst aus dem procentuellen Verhältnisse von Weiss und X den Weissgrad der fraglichen Farbe construiren und so gebe ich einfach die Farbe von X in Worten an.

Und nun lasse ich zunächst die Resultate der Farbenberechnung für den ersten Regenbogen hier folgen.

---

[1] Abney, Colour Measurement and Mixture p. 132. Es sei nur erwähnt, dass man dem Orange bei D 3·3 mal mehr Weiss beimischen kann, ohne dass das Auge es gewahr wird, als dem Blaugrün bei F.

Farben und Farbengleichungen des ersten Regenbogens.

I. Punktförmige Lichtquelle.

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
1. $a = 1000\,\mu$								
42°10'	45·5	3·0	2·5	51	13	87	0 1	Roth
5	71·8	5·9	4·3	82	14	86	0·2	Roth
42 0	106·1	15·5	6·4	128	12	88	0·8	Roth
41 55	133·9	37·0	7·1	178	10	90	1·9	Roth
50	148·2	71·1	5·7	225	7	93	3·1	Orange
45	151·1	118·2	2·7	272	3	97	4·4	Gelb
40	144·7	161·2	0·1	306	0	100	5·3	Gelb
35	128·2	187·8	3·0	319	3	97	5·9	Grün
30	89·7	179·8	8·5	278	19	81	7·6	Grün
25	49·1	162·1	19·8	231	23	77	8·0	Grün
20	40·1	144·5	38·4	223	46	54	8·7	Grün
15	76·2	144·0	70·8	291	65	35	7·0	Grün
10	87·0	162·5	116·5	366	84	16	7·8	Grün
5	34·4	174·8	143·8	353	41	59	14·2	Blau
41 0	20·7	164·7	136·6	322	27	73	14·4	Blau
40 55	76·7	95·7	118·6	291	86	14	24·1	Rosa
50	69·7	76·7	149·6	296	68	32	22·3	Rosa
45	19·7	127 2	238·1	385	21	79	16·8	Blau
40	48·5	103·6	249·9	402	50	50	18·7	Violett
35	60·7	55·2	156·1	272	53	47	22·0	Rosa
30	13·8	90·3	94 9	199	29	71	15·2	Blau
25	46·7	89·0	128·3	264	74	26	17·9	Violett
20	32·5	45·5	129·0	207	57	43	20·4	Violett
15	15·9	82·0	71·1	169	39	61	14·5	Blau
10	44·4	54·7	105·9	205	70	30	21·6	Rosa
5	22·9	68·0	114·1	205	46	54	17·0	Blau
40 0	24·6	37·4	54·0	116	84	16	20·6	Rosa

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
2. $a = 500\,\mu$								
42°10'	54·6	9·4	3·0	67	11	89	1·1	Roth
42 0	104·2	29·8	5·0	139	10	90	2·0	Roth
41 50	167·6	76·9	7·5	252	8	92	3·0	Roth
40	201·5	157·6	8·9	368	7	93	4·3	Gelb
30	162·6	234·0	15·4	412	10	90	5·9	Grün
20	61·7	242·9	46·4	351	25	75	8·6	Grün
10	29·6	187·8	113·6	340	49	51	10·7	Grün
5	47·6	157·3	153·1	358	55	45	14·9	Blau
41 0	79·6	153·2	189·2	422	79	21	17·1	Violett
40 55	97·4	167·9	216·7	482	84	16	18·4	Violett
50	88·4	178·9	228·7	496	74	26	17·1	Violett
45	57·5	162·4	231·1	451	53	47	16·7	Blau
40	33·0	117·0	232·0	382	36	64	17·4	Violett
35	37·4	70·4	235·2	343	45	55	19·4	Violett
30	65·8	63·6	228·6	358	46	54	21·4	Rosa
25	89·0	102·7	196·3	388	69	31	22·1	Rosa
20	73·1	149·5	141·4	364	84	16	14·4	Blau
15	35 0	136·9	88·1	260	56	44	12·9	Blaugrün
10	18·3	79·0	76·7	174	44	56	14·4	Blau
5	44·6	40·5	113·9	199	53	47	22·1	Rosa
40 0	67·8	66·7	148·5	283	61	39	22·4	Rosa
39 55	66·7	122·9	141·4	331	84	16	16·9	Blau
50	40·2	126·2	93·6	260	65	35	13·3	Blaugrün
45	10·4	57·8	67·8	136	32	68	15·6	Blau
40	31 9	28·9	93·2	154	49	51	21·8	Rosa
35	58·1	80·8	128·1	267	79	21	21·3	Rosa
30	53·0	137·8	118·2	309	72	28	14·0	Blau
25	12·3	67·0	56·7	136	38	62	14·4	Blau
20	10·9	16·5	53·6	81	53	47	20·2	Violett
15	47·5	59·7	105·8	213	73	27	21·8	Rosa

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
				3. $a = 250\,\mu$				
42°10'	65·2	24·3	3·5	93	10	90	2·5	Roth
42 0	102·6	50·3	6·1	159	10	90	3·1	Orange
41 50	150·1	91·2	10·7	252	11	89	3·6	Orange
40	195·5	150·7	19·8	366	14	86	4·2	Gelb
30	219·4	222·8	34·8	477	19	81	4·9	Gelb
20	205·8	288·8	64·4	559	31	69	5·8	Gelb
10	146·8	317·4	111·8	576	52	48	7·3	Grün
41 0	64·7	291·1	177·2	533	51	49	12·9	Blaugrün
40 50	5·6	210·5	255·9	472	5	95	15·5	Blau
40	11·0	116·1	312·9	440	10	90	17·5	Violett
30	73·0	74·1	308·9	456	43	57	21·0	Rosa
20	131·3	109·4	244·3	485	59	41	23·0	Rosa
10	114·9	158·8	147·3	421	93	7	3·0	Roth
40 0	42·0	153·6	86·4	282	62	38	11·9	Blaugrün
39 50	—1·3	88·8	95·5	183	—	100	15·2	Blau
40	48·3	59·3	143·4	251	62	38	21·2	Violett
30	113·3	114·7	144·0	372	80	20	25·7	Purpur
20	75·3	146·2	103·5	325	85	15	8·1	Grün
10	5·0	84·8	77·2	167	13	87	14·7	Blau
39 0	18·3	44·3	123·4	186	41	59	18·6	Violett
38 50	86·2	89·9	113·9	290	81	19	25·4	Purpur
40	72·6	114·8	62·6	250	66	24	6·1	Grün
30	1·2	49·2	77·6	128	4	96	16·1	Blau
20	20·6	25·7	98·7	145	46	54	20·6	Rosa
				4. $a = 150\,\mu$				
42°10'	72·2	40·6	5·2	118	21	79	3·4	Orange
41 0	103·1	68·2	10·7	182	15	85	3·7	Orange
41 50	139·0	102·9	18·1	260	18	82	4·0	Orange
40	171·2	152·8	35·0	359	26	74	4·4	Gelb
30	203·8	208·7	52·5	465	30	70	4·8	Gelb

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
41°20'	221·9	268·0	85·1	575	39	61	5·2	Gelb
10	220·2	318·7	129·1	668	51	49	5·8	Gelb
41 0	193·3	347·0	185·7	726	68	32	6·8	Grün
40 50	141·7	337·7	246·6	726	81	19	11·7	Blaugrün
40	82·9	297·2	307·9	688	50	50	15·2	Blau
30	28·6	215·6	348·8	593	30	70	16·4	Blau
20	—0·4	123·5	347·9	471	—	100	17·4	Violett
10	5·9	52·6	304·5	363	7	93	18·7	Violett
40 0	49·4	36·9	216·7	303	30	70	21·3	Rosa
39 50	105·9	77·3	119·8	303	67	33	25·7	Purpur
40	138·4	149·0	53·6	341	41	59	4·7	Gelb
30	127·8	200·1	57·1	385	39	61	6·1	Grün
20	72·1	182·1	118·8	373	80	20	10·8	Grün
10	13·5	109·9	183·6	307	18	82	16·5	Blau
39 0	—3·8	39·6	199·2	235	—	100	18·0	Violett
38 50	30·0	30·9	135·1	196	41	59	20·9	Rosa
40	83·5	87·8	52·7	224	53	47	4·1	Orange
30	113·9	163·8	41·3	319	45	55	5·8	Gelb
20	90·7	163·3	119·0	373	85	15	7·4	Grün
10	33·4	86·6	173·0	293	47	53	17·8	Violett
38 0	0·4	16·2	161·4	178	1	99	19·1	Violett
37 50	21·6	33·8	55·6	111	79	21	20·2	Violett
40	61·4	108·8	22·8	193	31	69	3·6	Orange
30	88·7	145·8	88·5	323	73	27	6·3	Grün
20	60·5	77·4	148·1	286	71	29	21·4	Rosa
10	17·5	13·6	84·9	116	30	70	21·1	Rosa
5. $a = 100\,\mu$								
42° 0'	101·1	84·2	18·7	204	25	75	4·2	Orange
41 40	157·9	155·9	46·2	360	34	66	4·6	Gelb
20	205·0	243·5	99·5	548	48	52	5·0	Gelb
0	223·8	334·9	183·3	742	64	36	5·8	Gelb
40 40	191·2	365·7	289·1	846	91	9	9·1	Grün

A_1	R	G	V	R. I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
40°30'	153·6	342·9	339·5	836	77	23	15·0	Blau
20	108·6	289·4	368·0	766	59	41	16·0	Blau
10	65·5	221·0	370·5	657	42	58	17·0	Blau
40 0	25·5	138·2	342·3	506	21	79	17·6	Violett
39 50	2·4	59·6	270·0	332	3	97	18·2	Violett
40	5·5	9·1	184·4	199	12	88	20·0	Violett
30	25·1	17·9	107·0	150	13	87	21·4	Rosa
20	62·8	51·7	44·5	159	74	26	1·6	Roth
10	107·2	120·7	23·1	251	24	76	5·2	Gelb
39 0	135·4	188·2	50·4	374	36	64	5 7	Gelb
38 50	135·4	216·7	106·9	459	62	38	6·2	Grün
40	107·2	206·1	182·4	496	90	10	12·8	Blaugrün
30	67·2	153·2	223·6	444	63	37	17·2	Violett
20	24·9	76·7	206·4	308	34	66	18·2	Violett
10	3·8	20·9	127·3	152	11	89	18·9	Violett
38 0	1·2	7·8	54·0	63	8	92	19·0	Violett
37 50	26·5	50·3	14·2	91	42	58	6·7	Grün
40	69·6	124·1	37·3	231	53	47	6·6	Grün
30	101·1	176·2	112·7	390	77	23	6·8	Grün
20	110·2	177·0	178·8	466	99	1	18·3	Violett (Weiss)
10	91·5	124·3	184·2	400	81	19	21·8	Rosa
37 0	52·5	47·9	125·6	226	65	35	22·2	Rosa
36 50	19·9	10·9	47·2	78	36	64	22·7	Rosa
40	3·5	24·3	3·2	31	26	74	9·3	Grün
30	17·8	78·7	39·5	136	54	46	13·8	Blau
20	44·0	135·4	113·6	293	62	38	14·1	Blau
10	78·9	134·9	162·2	376	88	12	18·0	Violett
36 0	85·7	89·6	101·7	277	84	16	26·9	Purpur
				6. $a = 50\,\mu$				
42°20'	66·5	66·6	21·9	155	37	63	4·6	Gelb
42 0	94·2	104·2	38·6	237	43	57	4·8	Gelb
41 40	126·5	154·8	72·7	364	53	47	5·0	Gelb

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
41°20'	162·2	215·3	120·5	498	64	36	5·2	Gelb
41 0	194·9	280·3	181·8	657	74	26	5·5	Gelb
40 40	220·0	340·9	253·1	814	83	17	5·9	Grün
20	220·6	372·7	323·7	917	94	6	7·5	Grün (sehr weisslich)
0	200·0	366·7	375·3	942	88	12	15·6	Blau
39 40	156·3	279·1	413·6	849	77	23	18·5	Violett
20	106·9	221·3	344·8	673	66	34	18·0	Violett
0	55·0	112·7	241·3	409	56	44	18·6	Violett
38 40	9 7	24·6	119·7	154	26	74	19·2	Violett (kaum bemerkbar)
20	0·8	3·7	26·5	31	10	90	19·3	Violett } unbemerkbar
0	20 8	53·1	10·1	84	32	68	7·5	Grün } unbemerkbar
37 40	68·9	145·1	80·0	294	72	28	7·8	Grün
20	115·0	216·1	181·9	513	93	7	10·4	Grün } sehr weisslich
0	135·4	226·0	239·6	601	94	6	17·3	Violett } sehr weisslich
36 40	120·1	162·7	193·2	476	91	9	17·3	Violett } sehr weisslich
20	65·5	57·0	79·5	202	74	26	25·6	Purpur
0	18·8	3·7	9·5	32	34	66	27·4	Purpur (unbemerkbar)
35 40	3·5	35·4	41·1	80	19	81	15·4	Blau (unbemerkbar)
20	37·1	133·8	148·1	319	48	52	15·4	Blau
0	69·8	182·1	197·1	449	65	35	15·5	Blau
34 40	108·6	138·7	129·7	377	91	9	2·0	Roth (sehr weisslich)
20	87·9	53·1	23·1	174	34	66	2·6	Roth (kaum bemerkbar)
0	47·3	14·8	21·9	84	46	54	28 5	Purpur (unbemerkbar)
33 40	12·7	52·6	102·7	168	32	68	17·2	Violett (kaum bemerkbar)
20	11·8	118·2	156·0	286	17	83	15·8	Blau
0	53·0	119·3	84·7	257	86	14	10·4	Grün
32 40	83·0	62·5	11·5	157	19	81	4·0	Orange } (kaum bemerkbar)
20	87·8	8·9	34·3	131	17	83	27·7	Purpur } (kaum bemerkbar)

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Färbe von X
7. $a = 40\,\mu$								
42°20'	72·8	75·9	34·3	183	50	50	4·5	Gelb
42 0	98·7	114·2	56·1	269	55	45	4·8	Gelb
41 40	129·9	157·4	86·7	374	61	39	4·8	Gelb
20	160·3	211·5	127·2	499	68	32	5·1	Gelb
0	189·7	266·6	179·7	636	75	25	5·3	Gelb
40 40	213·8	319·6	241·6	775	83	17	5·5	Gelb
20	223·1	359·7	304·2	887	91	9	6·3	Grün (sehr weisslich)
0	222·9	377·5	357·6	958	97	3	12·5	Blaugrün (Weiss)
39 40	188·1	367·2	387·7	943	83	17	15·8	Blau
20	167·0	313 3	384·7	856	80	20	17·2	Violett
0	123·5	236·2	333·3	693	74	26	17·8	Violett
38 40	71·0	141·6	238·4	451	66	34	18·2	Violett
20	28·3	55·5	133·2	217	54	46	19·0	Violett (kaum bemerkbar)
0	4·7	6·3	40·0	51	31	69	20·2	Violett (unbemerkbar)
37 40	3 9	10·6	4·5	19	63	37	8·7	Grün (unbemerkbar)
20	28·2	67·4	37·4	133	74	26	8·7	Grün (kaum bemerkbar)
0	64·3	148·8	117·9	331	81	19	12·7	Blaugrün
36 40	104·6	214·6	205·8	525	83	17	14·6	Blau
20	132·1	228·8	244·1	605	91	9	16·7	Blau (sehr weisslich)
0	130·3	181·9	202·8	515	92	8	24·1	Purpur (sehr weisslich)
35 40	95·4	97·2	111·4	304	84	16	26·9	Purpur
20	45 9	23·5	17·6	87	54	46	1·4	Roth (unbemerkbar)
0	11·0	9·3	12·7	33	72	28	26·0	Purpur (unbemerkbar)
34 40	5 6	57·4	86·0	149	14	86	16·1	Blau (kaum bemerkbar)
20	25·0	134·0	173·0	332	31	69	15·9	Blau

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
34° 0'	67·2	181·2	194·6	443	63	37	15·4	Blau
33 40	115·7	163·9	126·4	406	58	42	5·0	Gelb
20	111·7	90·6	38·7	241	43	57	3·7	Orange
0	78·3	29·9	9·8	118	22	78	2·2	Roth (kaum bemerkbar)
32 40	35·9	24·9	57·2	118	55	45	23·8	Rosa (kaum bemerkbar)
20	8·3	65·7	119·0	193	13	87	16·3	Blau (kaum bemerkbar)
0	13·4	124·0	141·6	279	20	80	15·4	Blau
31 40	42·5	118·7	61·8	223	73	27	9·5	Grün
20	76·5	78·8	13·7	169	21	79	4·9	Gelb (kaum bemerkbar)
0	80·3	37·0	36·7	154	63	37	0·0	Roth (kaum bemerkbar)
8. $a = 30\ \mu$								
42°20'	77·1	90·1	48·8	216	60	40	4·7	Gelb
41 40	122·0	159·6	97·4	379	68	32	5·0	Gelb
41 0	170·0	246·6	182·4	599	81	19	5·4	Gelb
40 20	211·2	336·5	290·3	838	92	8	6·1	Grün (Weiss)
39 40	223·1	378·0	376·9	978	95	5	15·4	Blau (Weiss)
39 0	190·8	336·0	387·2	914	87	13	17·6	Violett
38 40	161·5	280·2	346·3	788	85	15	18·0	Violett
20	125·6	210·7	279·7	616	85	15	19·0	Violett
0	85·1	131·1	193·8	410	83	17	20·5	Violett
37 40	49·1	57·2	97·7	204	74	26	22·4	Rosa
20	19·3	19·9	31·8	71	73	27	23·6	Rosa (unbemerkbar)
0	4·4	2·8	7·8	15	47	53	23·6	Rosa (unbemerkbar)
36 40	10·0	31·0	29·0	70	60	40	14·7	Blau (unbemerkbar)
20	27·9	85·5	84·6	198	59	41	15·0	Blau
0	61·9	153·1	159·0	374	69	31	15·3	Blau

A_1	R	G	V	R,I.	W (in Procenten)	X (in Procenten)	Lage von X	Farbe von X
35°40'	96·9	204·7	220·4	522	77	23	15·8	Blau
20	125·2	226·4	239·4	591	88	12	16·2	Blau
0	143·9	210·7	210·4	565	97	3	28·9	Purpur (Weiss)
34 40	135·4	155·2	140·4	431	86	14	2·2	Roth
20	102·5	86·3	57·2	246	62	38	3·0	Roth
0	62·7	31·3	10·0	104	26	74	2·8	Roth (kaum bemerkbar)
33 40	30·1	14·6	25·2	70	54	46	26·6	Purpur (unbemerkbar)
20	8·6	43 7	89 7	142	25	75	17·2	Violett (kaum bemerkbar)
0	9·5	97·9	161·6	269	15	85	16·4	Blau
32 40	28·4	154·0	195·6	378	31	69	15·8	Blau
20	62·3	177·5	160·2	400	65	35	14·4	Blau
0	91·6	155·8	82·6	330	65	35	6·5	Grün
31 40	107·1	109·1	27·8	244	30	70	4·8	Gelb
20	99·0	55·7	23·3	178	35	65	2·8	Roth (kaum bemerkbar)
0	67·5	25·3	58·2	151	44	56	26·1	Purpur (kaum bemerkbar)
30 40	37·0	34·0	122·0	193	46	54	21·5	Rosa
20	18·7	78·3	144·0	241	32	68	17·0	Blau
0	17·3	118·9	115·8	252	29	71	14·9	Blau
29 40	32·9	123·7	59·4	216	63	37	11·0	Grün
20	59·0	97·0	22·0	178	33	67	6·2	Grün (kaum bemerkbar)
0	74·9	56·5	24·6	156	42	58	3·5	Orange (kaum bemerkbar)
9. $a = 25\,\mu$								
42°20'	83·3	100·2	53·5	237	60	40	4·8	Gelb
0	100·6	128·5	76·9	306	67	33	5 0	Gelb
41 40	121·8	161·5	104·7	388	72	28	5·0	Gelb
20	141·5	198·5	139·0	479	77	23	5·2	Gelb
0	163·6	237·6	176·8	578	81	19	5·3	Gelb

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
40°40'	184·3	280·4	225·3	690	87	13	5·6	Gelb
20	200·4	320·8	271·8	793	91	9	6 2	Grün (Weiss)
0	215·0	351·6	315·4	882	95	5	6·9	Grün (Weiss)
39 40	223·3	374·8	354·9	953	98	2	11·8	Blaugrün (Weiss)
20	221·0	379·5	386·5	987	93	7	16·0	Blau (Weiss)
0	213·2	369·0	397·8	980	91	9	16·8	Blau (Weiss)
38 40	194·3	334·3	383·4	912	89	11	17·6	Violett
20	169·5	287·7	342·8	800	88	12	18·1	Violett
0	137·3	222·8	284·9	645	88	12	19·5	Violett
37 40	100·4	153·5	210·1	464	87	13	20·7	Rosa
20	67·0	90·8	131·2	289	82	18	22·0	Rosa
0	34·9	40·1	60·0	135	78	22	23·3	Rosa (kaum bemerkbar)
36 40	9·5	3·0	9·5	22	36	64	25·4	Purpur (unbemerkbar)
20	—0·2	4·6	1·6	6	0	100	12·5	Blaugrün (unbemerkbar)
0	4·0	30·7	27·3	62	27	73	14·2	Blau (unbemerkbar)
35 40	25·8	83·8	83·4	193	55	45	15·0	Blau (kaum bemerkbar)
20	56·2	141·9	147·9	346	68	32	15·3	Blau
0	86·6	193·8	205·6	486	74	26	15·5	Blau
34 40	116·6	225·2	241·2	583	83	17	16·0	Blau
20	143·8	222·7	228·5	595	98	2	23·2	Rosa (Weiss)
0	153·6	184·8	172·6	511	90	10	1·8	Roth
33 40	137·2	130·6	104·2	372	74	26	2·6	Roth
20	103·1	76·3	36·6	216	44	56	3·4	Gelb (kaum bemerkbar)
0	66·9	29·5	2·6	96	7	93	2·9	Roth (unbemerkbar)
32 40	29·6	11·9	26·5	68	46	54	26·0	Purpur (unbemerkbar)
20	7·3	35·1	91·6	134	22	78	17·7	Violett (kaum bemerkbar)
0	2·6	83·4	152·0	238	5	95	16·5	Blau

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
31°40'	15·8	129·2	189·0	334	20	80	16·2	Blau
20	43·9	168·9	185·2	398	46	54	15·2	Blau
0	69·7	169·4	136·9	376	77	23	13·2	Blaugrün
30 40	97·2	141·5	68·3	307	59	41	5·7	Gelb
20	110·4	96·9	20·7	228	24	76	4·4	Gelb
0	101·7	50·9	16·4	169	26	74	2·8	Roth (kaum bemerkbar)
29 40	77·1	31·6	60·3	169	49	51	26·7	Purpur (kaum bemerkbar)
20	45·2	43·2	116·6	205	55	45	22·0	Rosa
0	19·0	73·8	150·2	243	33	67	17·3	Violett
28 40	8·8	104·9	132·3	246	15	85	15·6	Blau
20	20·0	116·2	80·8	217	38	62	13·7	Blau
0	36·3	105·2	35·5	177	53	47	8·6	Grün (kaum bemerkbar)
27 40	61·7	75·6	25·7	163	42	58	5·1	Gelb (kaum bemerkbar)
20 *	82·0	52·0	43·0	177	64	36	1·3	Roth (kaum bemerkbar)
0 *	79·0	40·0	68·0	187	56	44	26·5	Purpur (kaum bemerkbar)
26 40 *	68·0	39·0	92·0	199	49	51	24·5	Purpur
				10. $a = 20\mu$				
42°20'	84·0	113·2	67·8	265	68	32	5·2	Gelb
41 40	114·7	162·7	112·6	391	77	23	5·3	Gelb
0	155·0	230·6	177·4	563	83	17	5·4	Gelb
40 20	192·7	299·9	257·4	750	91	9	5·8	Gelb (Weiss)
39 40	218·9	359·3	333·8	912	97	3	7·8	Grün (Weiss)
0	222·8	380·2	391·0	994	94	6	16·3	Blau (Weiss)
38 20	200·7	347·4	389·9	938	88	12	17·4	Violett
37 40	150·4	254·3	306·3	711	88	12	18·2	Violett
0	91·2	138·9	174·9	405	90	10	20·9	Rosa

* Angenäherte Werthe.

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
36°20'	32·4	35·5	48·1	116	81	19	24·0	Rosa (unbemerkbar)
35 40	4·3	1·4	0·3	6	0	100	2·0	Roth (unbemerkbar)
0	10·1	48·7	51·2	110	38	62	15·2	Blau (unbemerkbar)
34 20	54·1	149·6	165·3	369	61	39	15·5	Blau
33 40	100·7	222·7	241·6	565	75	25	15·7	Blau
0	132·7	207·1	192·2	532	96	4	5·2	Gelb (Weiss)
32 20	119·3	114·9	74·8	309	63	37	3·5	Orange
31 40	70·4	26·2	6·4	103	17	83	2·3	Roth (unbemerkbar)
0	22·5	19·1	74·4	116	43	57	21·7	Rosa (unbemerkbar)
30 20	4·6	95·5	177·9	278	8	92	16·6	Blau
29 40	32·2	162·5	172·3	367	36	64	15·3	Blau
0	87·2	145·2	64·6	297	58	42	6·4	Grün
28 20	108·1	76·4	19·5	204	26	74	4·2	Orange (kaum bemerkbar)
27 40	76·9	33·1	86·0	196	43	57	24·9	Purpur (unbemerkbar)
0	29·7	60·6	139·7	230	54	46	18·9	Violett (kaum bemerkbar)
26 20	14·5	117·2	85·3	217	29	71	14·0	Blau (kaum bemerkbar)
25 40	38·2	90·8	22·2	151	38	62	7·4	Grün (unbemerkbar)
0	80·2	54·6	60·2	195	74	26	28·8	Purpur (kaum bemerkbar)
24 20	61·9	49·7	111·4	223	59	41	23·3	Rosa (kaum bemerkbar)
11. $a = 15\,\mu$								
42°20'	86·1	115·2	77·7	279	74	26	5·0	Gelb
41 40	114·1	164·0	123·9	402	82	18	5·1	Gelb
0	145·7	217·9	177·4	541	87	13	5·3	Gelb
40 20	172·9	276·4	242·7	692	93	7	6·2	Grün (Weiss)
39 40	200·8	332·0	310·2	843	98	2	8·0	Grün (Weiss)
0	219·9	369·5	367·5	957	96	4	15·5	Blau (Weiss)

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
38°20'	223·0	379·3	397·7	1000	93	7	16·8	Blau (Weiss)
37 40	209·9	352·7	385·4	948	92	8	17·5	Violett (Weiss)
0	172·0	285·4	318·6	776	92	8	18·3	Violett (Weiss)
36 20	127·8	193·3	214·9	536	94	6	22·0	Rosa (Weiss)
35 40	79·5	98·4	104·1	282	91	9	26·9	Purpur (Weiss) (kaum bemerkbar)
0	30·8	24·3	20·9	76	73	27	1·0	Roth } (unbemerkbar)
34 20	6·6	3·9	4·5	15	66	34	0·0	Roth
33 40	7·2	39·9	63·9	111	26	74	16·5	Blau
0	32·4	115·7	158·9	307	43	57	16·3	Blau (kaum bemerkbar)
32 20	73·1	193·4	232·5	499	61	39	16·0	Blau
31 40	114·9	228·9	225·2	569	84	16	14·9	Blau
0	134·6	193 6	144·8	473	81	19	14·6	Blau
30 20	121·9	116·3	49·8	288	46	54	4·2	Gelb (kaum bemerkbar)
29 40	87·2	39·5	10·3	137	20	80	2·7	Roth (unbemerkbar)
0	42·5	17·1	66·4	126	35	65	24·0	Rosa (unbemerkbar)
28 20	6·7	56·9	160·4	224	13	87	17·6	Violett (kaum bemerkbar)
27 40	9·5	126·1	187·4	323	13	87	16·1	Blau
0	38·2	166·1	131·7	336	47	53	14·0	Blau
26 20	82·3	140·7	43·0	266	43	57	6·4	Grün } (kaum bemerkbar)
25 40	107·5	86·9	22·6	217	28	72	4·1	Orange
0	94·7	41·9	74·4	211	52	48	26·8	Purpur
24 20	56·5	44·5	129·0	230	50	50	22·5	Rosa
23 40	19·2	86·2	121·6	227	35	65	16·2	Blau
0	14·5	117·0	64·5	196	30	70	13·1	Blaugrün } (unbemerkbar)
22 20	34·7	91·2	27 1	153	47	53	7·8	Grün
21 40	69·4	62·4	51·2	183	64	36	2·1	Roth
0	71·0	45·5	99·5	216	55	45	24·3	Purpur (kaum bemerkbar)
20 20	51·3	62·0	121·7	235	69	31	21·7	Rosa (kaum bemerkbar)

A_1	R	G	V	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
12. $a = 10\,\mu$								
42°20'	89·3	126·1	96·6	312	84	16	5·0	Gelb
41 40	111·6	163·4	134·0	409	87	13	5·6	Gelb
0	133·6	207·9	175·5	517	90	10	5·9	Grün (nahe Weiss)
40 20	158·0	252·0	227·0	637	95	5	6·0	Grün (Weiss)
39 40	180·5	295·9	277·6	754	98	2	8·1	Grün (Weiss)
0	201·1	336·2	330·7	868	97	3	15·0	Blau (Weiss)
38 20	216·3	366·7	372·0	955	94	6	16·0	Blau (Weiss)
37 40	222·8	380·0	396·2	999	93	7	16·6	Blau (Weiss)
0	221·8	375·0	397·2	994	93	7	17·0	Blau (Weiss)
36 20	209·2	346·3	369·5	925	94	6	17·8	Violett (Weiss)
35 40	184·9	295·4	310·7	791	97	3	20·0	Violett (Weiss)
0	151·0	226·4	231·6	609	97	3	24·7	Purpur (Weiss)
34 20	116·2	152·7	143·1	412	92	8	2·2	Roth (Weiss)
33 40	75·1	79·5	59·4	214	73	27	3·5	Orange (kaum bemerkbar)
0	38·3	27·5	15·2	81	49	51	3·2	Orange } (unbemerkbar)
32 20	14·2	4·0	2·8	21	38	62	0·8	Roth }
31 40	1·2	13·0	34·8	49	10	90	17·5	Violett }
0	2·8	43·8	110·4	157	8	92	17·3	Violett }
30 20	22·5	110·7	178·8	312	29	71	16·4	Blau
29 40	55·3	173·1	229·6	458	50	50	16·2	Blau
0	87·4	213·4	233·2	534	68	32	15·6	Blau
28 20	118·4	222·1	189·5	530	93	7	11·0	Grün (Weiss)
27 40	133·0	191·9	120·1	445	71	29	5·5	Gelb
0	133·0	135·8	48·2	317	40	60	4·6	Gelb
26 20	111·3	72·5	12·2	196	16	84	3·9	Orange } (unbemerkbar)
25 40	75·8	27·1	33·1	136	51	49	28·4	Purpur }
0	40·0	23·0	91·0	154	39	61	22·8	Rosa }
24 20	13·3	51·6	154·1	219	25	75	18·1	Violett }
23 40	4·2	103·9	185·9	294	6	94	16·4	Blau (kaum bemerkbar)
0	16·0	149·3	171·7	337	20	80	15·4	Blau

A_1	R	G	V	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
					in Procenten			
22°20'	43·4	163·9	102·7	310	58	42	12·7	Blaugrün
21 40	78·7	140·5	40·8	260	42	58	6·5	Grün (kaum bemerkbar)
0	103·2	97·8	25·0	226	29	71	4·6	Gelb (unbemerkbar)
20 20	102·2	56·2	45·6	204	60	40	1·1	Roth (unbemerkbar)
19 40	90·7	42·3	101·0	234	47	53	25·4	Purpur (unbemerkbar)
				13. $a = 5\,\mu$				
42°20'	92·4	141·6	122·0	356	91	9	5·6	Gelb
41 40	104·2	166·1	147·7	418	94	6	6·0	Gelb — Grün (Weiss)
0	118·3	122·0	175·7	486	96	4	6·9	Grün (Weiss)
40 20	134·0	220·1	206·9	561	98	2	8·3	Grün (Weiss)
39 40	149·1	246·3	238·6	634	98	2	13·9	Blaugrün (Weiss)
0	164·8	275·7	272·5	713	97	4	14·8	Blau (Weiss)
38 20	177·9	302·4	305·7	786	94	6	15·4	Blau (Weiss)
37 40	192·1	328·2	335·7	856	93	7	16·1	Blau (Weiss)
0	203·3	350·7	362·0	916	92	8	16·1	Blau (Weiss)
36 20	212·3	366·6	381·1	960	92	8	16·2	Blau (Weiss)
35 40	219·1	377·9	396·0	993	92	8	16·5	Blau (Weiss)
0	223·0	379·3	397·7	1000	93	7	16·8	Blau (Weiss)
34 20	223·1	375·9	392·0	991	94	6	16·8	Blau (Weiss)
33 40	218·6	362·2	373·2	954	96	4	17·1	Violett (Weiss)
0	210·8	340·4	342·8	894	98	2	18·0	Violett (Weiss)
32 20	194·6	307·3	301·1	803	100	0	2·5	Roth (Weiss)
31 40	176·0	265·2	250·8	692	96	4	3·8	Orange (Weiss)
0	155·5	218·3	197·2	571	92	8	3·7	Orange (Weiss)
30 20	132·0	172·3	140·7	445	84	16	4·1	Orange
29 40	108·6	125·9	90·5	325	74	26	4·0	Orange
0	84·7	83·4	45·9	214	43	57	3·9	Orange (unbemerkbar)
28 20	58·4	44·4	16·2	119	35	65	3·6	Orange (unbemerkbar)
27 40	36·7	20·2	3·1	60	13	87	3·3	Orange (unbemerkbar)
0	21·6	5·3	3·1	30	27	73	1·0	Roth (unbemerkbar)

II. Die Sonne als Lichtquelle.

A_1	R.I.	W in Procenten	X in Procenten	Lage von X	Farbe von X
		14. $a = 1000\,\mu$			
42° 10'	51	13	87	0·1	Roth
5	83	12	88	0·5	Roth
0	132	10	90	1·8	Roth
41 55	178	6	94	3·3	Orange
50	215	5	95	4·0	Orange
45	244	5	95	4·5	Gelb
40	259	7	93	5·2	Gelb
35	264	11	89	5·7	Gelb
30	274	19	81	6·2	Grün
25	288	34	66	6·6	Grün
20	296	51	49	7·5	Grün
15	297	70	30	9·2	Grün
10	297	77	23	10·9	Grün
5	307	79	21	13·1	Blaugrün
0	331	69	31	15·2	Blau
40 55	345	62	38	16·4	Blau
50	331	59	41	17·1	Violett
45	310	59	41	17·5	Violett
40	301	66	34	18·6	Violett
35	290	60	40	18·5	Violett
30	271	52	48	17·6	Violett
25	245	63	37	18·0	Violett
20	217	65	35	18·0	Violett
15	196	62	38	17·2	Violett
10	189	75	25	18·7	Violett
5	168	62	38	17·7	Violett
0	158	66	34	18·0	Violett

A_1	R.I.	W (in Procenten)	X (in Procenten)	Lage von X	Farbe von X
15. $a = 500\,\mu$					
42° 10'	103	11	89	1·7	Roth
0	153	8	92	2·4	Roth
41 50	253	7	93	3·4	Orange
40	344	8	92	4·6	Gelb
30	377	17	83	6·0	Grün
20	363	42	58	7·8	Grün
10	368	64	36	12·1	Blaugrün
5	397	67	33	13·5	Blaugrün
0	412	64	36	14·9	Blau
40 55	417	62	38	16·1	Blau
50	419	62	38	17·2	Violett
45	419	65	35	18·2	Violett
40	414	68	32	18·8	Violett
35	397	67	33	18·5	Violett
30	364	64	36	18·1	Violett
25	324	65	35	18·0	Violett
20	298	73	27	18·9	Violett
15	289	81	19	19·7	Violett
10	285	83	17	18·1	Violett
5	263	76	24	15·8	Blau
0	233	70	30	16·1	Blau
39 55	218	74	26	17·8	Violett
50	233	79	21	18·0	Violett
45	249	79	21	17·4	Violett
40	228	71	29	15·9	Blau
35	191	67	33	13·1	Blaugrün
30	185	72	28	17·5	Violett
25	200	81	19	17·9	Violett

A_1		R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
			in Procenten			
			16. $a = 250\,\mu$			
42°	10'	131	10	90	2·7	Roth
	0	168	11	89	3·2	Orange
41	50	258	12	88	3·8	Orange
	40	365	16	84	4·3	Gelb
	30	468	23	77	5·0	Gelb
	20	537	35	65	5·8	Gelb
	10	556	56	44	7·4	Grün
	0	527	57	43	13·0	Blaugrün
40	50	482	23	77	15·6	Blau
	40	457	27	73	17·4	Violett
	30	461	57	43	20·5	Rosa
	20	453	66	34	22·2	Rosa
	10	396	93	7	22·9	Rosa
	0	296	73	27	13·5	Blaugrün
39	50	239	52	48	15·4	Blau
	40	269	82	18	19·4	Violett
	30	317	89	11	23·1	Rosa
	20	285	94	6	13·5	Blaugrün
	10	226	61	39	15·6	Blau
	0	214	70	30	17·5	Violett
38	50	242	93	7	22·8	Rosa
	40	219	99·9	0·1	21·8	Rosa (Weiss)
	30	174	74	26	17·0	Blau
			17. $a = 150\,\mu$			
42°	10'	150	19	81	3·6	Orange
	0	188	17	83	3·8	Orange
41	50	267	21	79	4·1	Orange
	40	361	26	74	4·4	Gelb
	30	466	32	68	4·8	Gelb
	20	569	41	59	5·3	Gelb

A_1	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
		in Procenten			
41° 10'	656	54	46	5·8	Gelb
0	706	70	30	6·9	Grün
40 50	714	81	19	12·2	Blaugrün
40	672	45	55	15·3	Blau
30	584	26	74	16·4	Blau
20	476	10	90	17·4	Violett
10	379	20	80	18·6	Violett
0	324	45	55	21·1	Rosa
39 50	349	66	34	23·6	Rosa
40	343	59	41	4·6	Gelb
30	366	55	45	6·1	Grün
20	355	83	17	11·4	Blaugrün
10	302	37	63	16·4	Blau
0	246	22	78	18·0	Violett
38 50	218	62	38	20·5	Rosa
40	246	82	18	3·8	Orange
30	305	62	38	5·6	Gelb
20	325	91	9	7·3	Grün
10	281	61	39	17·8	Violett
0	179	42	58	18·2	Violett
37 50	161	73	27	18·2	Violett
40	209	72	28	6·5	Grün
30	266	86	14	6·1	Grün
20	241	85	15	21·9	Rosa
18. $a = 100\,\mu$					
42° 10'	173	23	77	4·1	Orange
41 50	279	31	69	4·4	Gelb
30	451	42	58	4·8	Gelb
10	648	58	42	5·4	Gelb
40 50	801	79	21	6·6	Grün
40	831	92	8	9·7	Grün
30	816	77	23	15·1	Blau

A_1	R.I.	W	X	Lage von X	Farbe von X
		in Procenten			
40° 20'	752	60	40	16·3	Blau
10	640	44	56	17·1	Violett
0	495	26	74	17·6	Violett
39 50	343	13	87	18·4	Violett
40	227	20	80	19·4	Violett
30	169	40	60	21·5	Rosa } (könnte unter Umständen kaum bemerkbar sein)
20	186	83	17	1·2	Roth }
10	261	40	60	5·1	Gelb
0	361	44	56	5·6	Gelb
38 50	443	32	68	6·2	Grün
40	466	92	8	12·4	Blaugrün
30	415	66	34	17·0	Blau
20	302	44	56	18·0	Violett
10	174	24	76	18·6	Violett
0	102	45	55	18·6	Violett (kaum bemerkbar)
37 50	128	73	27	7·1	Grün (kaum bemerkbar)
40	238	61	39	6·6	Grün
30	363	80	20	6 6	Grün
20	418	99	1	23·3	Rosa (Weiss)
10	364	83	17	22·0	Rosa
0	235	68	32	22·2	Rosa
36 50	112	65	35	22·1	Rosa (kaum bemerkbar)
40	82	71	29	13·3	Blaugrün (kaum bemerkbar)
30	154	60	40	12·7	Blaugrün
20	268	73	27	14·3	Blau
10	315	91	9	16 3	Blau
0	254	85	15	26·2	Purpur
35 50	145	79	21	29·7	Purpur

Das sind die Ergebnisse der Berechnung der Farben des Regenbogens nach der Airy'schen Theorie. Es ist das erstemal, dass eine solche Berechnung durchgeführt wurde. Es wäre möglich, dass man bei Benützung der 22 Farben und des Farbendreieckes von Maxwell zu noch genaueren Resultaten gelangt wäre; ich werde aber im nächsten Kapitel zeigen, dass die Übereinstimmung obiger Rechnungsresultate mit der Erfahrung eine ausgezeichnete ist und dadurch erwiesen erscheint, dass man die Berechnung von Mischfarben mit Hilfe der angewendeten acht Farben und dem hiefür abgeänderten Farbendreiecke stets mit genügender Genauigkeit wird machen können.

Eine Bemerkung bezüglich der grünen Farbe, welche in den Beobachtungen des natürlichen Regenbogens häufig ohne Blau besonders neben Roth und Violett oder Purpur genannt wird, möge hier noch Platz finden. Das Blau, besonders das hellere Blau erscheint neben Roth und Purpur in Folge der Contrastwirkung Grün, besonders dann, wenn das Blau nur einen schmalen Streifen bildet.

3. Die Bestätigung der Rechnungsresultate durch die Beobachtung.

Bevor ich die obigen Ergebnisse der Rechnung unter gewissen einheitlichen Gesichtspunkten ordne und übersichtlich zusammenfasse, will ich die wichtigste Bestätigung der Richtigkeit derselben, die durch die Beobachtung, beibringen.

a) Experimentelle Darstellung und Messungen im Cabinete.

Um die Airy'sche Theorie des Regenbogens als richtig zu erweisen, brauchte ich diese Versuche nicht zu machen, da dies experimentell schon wiederholt geschehen ist. Die ersten Versuche dieser Art rühren von W. H. Miller[1] her, die letzten und ausserordentlich ausgedehnten und exacten von Mascart.[2] Diese Versuche wurden jedoch mit einfärbigem Lichte gemacht. Mir handelt es sich aber um die Farbenmischung, und so

---

[1] Cambridge Phil. Transact. vol. VII, part III, p. 277.

[2] Compt. rend. Bd. 106, 1888, Annales de chim. et de phys. 6ème serie, t. 26, p. 515.

musste ich durch meine Versuche feststellen, dass die nach der Airy'schen Theorie für eine bestimmte Ablenkung berechneten Farben mit den in Wirklichkeit auftretenden übereinstimmen, während bei Versuchen mit monochromatischem Lichte es hinreicht, die Übereinstimmung der Lage der Minima mit den nach der Theorie berechneten Lagen nachzuweisen.

Es hätte sich mir hier ein grosses Feld experimenteller Arbeit geöffnet. Es sei jedoch sofort hervorgehoben, dass ich mich nur auf wenige Versuche beschränken musste. Es steht mir kein Laboratorium zur Verfügung, und nur durch die Güte und das grosse Entgegenkommen meines Collegen, des hiesigen Professors der Physik, Dr. Klemenčič, wurde es mir möglich, wenigstens die wichtigsten experimentellen Bestätigungen zu erlangen. Ich bin Prof. Klemenčič umsomehr hiefür zu Dank verpflichtet, den ich ihm hiemit öffentlich erstatte, als er selbst in seinem Laboratorium beengte Verhältnisse hat und ich meine Versuche mit Sonnenlicht nur im Vorlesungssaale machen konnte. Ich musste mich daher begnügen, die wichtigsten Punkte experimentell festzustellen und überlasse eine eingehendere Untersuchung dieser Art Anderen, denen bessere Mittel und Gelegenheit hiezu geboten sind.

Da es mir darauf ankam, die Regenbogenfarben zu bestimmen, wie sie durch Wassertropfen hervorgerufen werden, so musste ich davon absehen, einen anderen Stoff, z. B. Glas, zu den Versuchen zu verwenden. Ich benützte daher die zuerst im Wesentlichen von Babinet[1] angewandte Methode, indem ich einen cylindrischen Wasserstrahl erzeugte. Dieser wurde durch den Mittelpunkt eines Spectralapparates fliessen gelassen; das Sonnenlicht fiel durch die Spalte des Collimatorrohres auf denselben und mit dem Fernrohre des Spectralapparates wurde der entstandene Regenbogen beobachtet und die Winkel gemessen, welche den verschiedenen Farben entsprachen. Auf diese Weise gelang es mir, die Regenbogen für die Tropfengrössen von $a = 500\,\mu$ und $a = 250\,\mu$ genauer zu vermessen und ich lasse hier die Beobachtungsresultate folgen. Da die Öffnung der Spalte des Collimatorrohres möglichst eng ge-

[1] Pogg. Ann. 41. Bd., S. 139.

nommen wurde, müssen diese Beobachtungsergebnisse mit den Rechnungsresultaten für eine punktförmige (linienförmige) Lichtquelle verglichen werden.

Die Bestimmung des Durchmessers des Wasserstrahles geschah durch unmittelbare Messung mittelst eines Ocularmikrometers. Es war natürlich schwierig, genau die Durchmesser herzustellen, welche denjenigen exact entsprechen, für welche die Rechnungen ausgeführt wurden; ich musste wiederholt mit angenähert denselben Durchmessern mich begnügen. Hiebei kam es zu statten, dass bei Tropfengrössen von $a = 250\,\mu$ aufwärts die Änderungen der A des Farbenbildes langsam sind und desto langsamer, je grösser die Tropfen, daher ein kleiner Unterschied im Werthe von a nicht merklich in die Wagschale fiel.

Die Genauigkeit meiner Winkelmessungen war einigermassen dadurch beeinträchtiget, dass es schwer hielt, den Wasserstrahl genau in den Mittelpunkt des Theilkreises des Spectralapparates zu bringen und dürfte daher der Fehler meiner Winkelangaben bis zu $\pm 4'$ gehen.

Ich lasse nun die Messungsresultate folgen.

Durchmesser des Wasserstrahles 1 *mm* ($a = 500\,\mu$).

Einstellung auf	A_1
1. Am 25. November 1896 [1]	
Grenze der Sichtbarkeit bei Roth	42° 29'
Grenze zwischen Gelb und Grün	41 35
Grenze zwischen Blau und Violett	41 7
Ende des ersten Violett	40 53
Anfang des zweiten Violett	40 45
Ende des zweiten Violett	40 25
Ende des dritten Violett	40 0
Ende des vierten Violett	39 40

[1] Der Durchmesser erscheint um ein Kleines grösser als ein Millimeter.

Einstellung auf	A_1
2. Am 30. November 1896	
Grenze der Sichtbarkeit bei Roth	42° 25'
Helligkeitsmaximum; Farbe Grüngelb	41 36
Anfang des ersten Violett	41 5
Ende des ersten Violett	41 47
3. Am 30. November 1896	
Anfang des ersten Violett	41 6
Ende des ersten Violett	40 50
Mitte des zweiten Violett	40 30
Mitte des dritten Violett	40 2
Mitte des vierten Violett	39 38

Farbenfolge. Man sieht die Farben in der Reihenfolge: Echtes Roth, Orange, Gelb, Grün, daran unmittelbar Violett und erst hierauf Blau und dann das zweite Violett. Es folgen dann deutlich erkennbar 24 Secundäre, die bis zum achten nur je aus Violett (Rosa) und Grün oder hellem Blau bestehen. Nach dem zwölften Violett erscheint ein Streifen, den man als Weiss ansprechen kann mit einem leisen Stich ins Gelbliche. Von da ab merkt man eine Spur Gelb vor dem Violett, also Umkehrung der Farbenfolge.

Violett und Rosa wurde bei den Aufzeichnungen nicht auseinandergehalten.

Durchmesser des Wasserstrahles 0·5 *mm* ($a = 250\ \mu$) circa (bei engem Spalte).

Einstellung auf	A_1
1. Am 26. November 1896 ($a = 245\ \mu$)	
Grenze zwischen Orange und Gelb	41° 45'
Grenze zwischen Grün und Blau	41 2
Grenze zwischen Blau und erstem Violett	40 40
Grenze zwischen erstem Violett und erstem Rosa	40 29

Einstellung auf	A_1
2. Am 26. November 1896 ($a = 231\,\mu$)	
Maximum der Intensität	41° 15'
Grenze zwischen Blaugrün und Blau	40 42
Mitte des ersten Violett	40 25
Mitte des ersten Purpur	40 16
Grenze zwischen zweiten Blaugrün und zweiten Blau	39 44
Mitte des zweiten Purpur	39 25
Anfang des dritten Blau	38 59
Mitte des dritten Purpur	38 44
Mitte des vierten Rosa (Purpur)	38 8
3. Am 7. December 1896 ($a = 240\,\mu$)	
Maximum der Intensität	41° 12'
Blaugrün (Mitte)	40 56
Blau (Mitte)	40 39
Violett—Rosa (Mitte)	40 20
Zweites Gelb (Mitte)	40 2
Zweites Grün (Mitte)	39 53
Zweites Blau (Mitte)	39 46
Zweites Violett (Mitte)	39 39

Bei diesen Versuchen hatte ich sowohl mit den vielen Störungen in Folge der Veränderlichkeit des Wetters, als auch mit den Schwierigkeiten, den Wasserstrahl constant zu erhalten, zu kämpfen. Eine Änderung des letzteren bemerkt man allerdings sofort im Farbenbilde; so wie sie eintritt, ist die Messung aber unterbrochen. Ich habe versucht, noch kleinere Durchmesser des Wasserstrahles herzustellen; es gelang auch bis zu $a = 100\,\mu$. Ich war jedoch dabei nicht in der Lage, den Strahl rein und nicht gedreht zu erhalten und verzichtete dann auf diese kleineren Durchmesser, weil ich ja in Verhältnissen arbeitete, welche eine zu grosse Ausdehnung der Versuche nicht gestatteten, besonders da ich durchaus auch den weissen

Regenbogen experimentell darstellen wollte, wofür die Vorversuche und Vorbereitung über die Massen zeitraubend waren. Über diese Darstellung werde ich im Kapitel über den weissen Regenbogen berichten, dessgleichen wird über Beobachtungen bezüglich des zweiten Regenbogens (Nebenregenbogen mit seinen secundären) im nächsten Kapitel Einiges mitgetheilt werden. Hier sei nur noch die Farbenfolge der Regenbogen, die von Tropfen erzeugt werden, die nahe einen halben Millimeter Durchmesser haben, nach den Beobachtungen wiedergegeben, wie ich sie bei linienförmiger Lichtquelle im Fernrohre des Spectralapparates gesehen habe.

Farbenfolge. Roth, Orange, Gelb, Grün, Blaugrün, Blau, Violett, Rosa; Orange, Gelb, Grün, Blaugrün, Rosa; Orange, Gelb, Blaugrün, Blau, Violett, Purpur; Gelb, Spur von Grün, Blau, Violett, Purpur; Gelb, Weiss mit grünlichem Stich, Violett; weissliches Grün, Gelbgrün, Rosa; Grün, Spur von Gelb, Rosa; Purpur, Blaugrün, etwas Orangegelb, Rosa; Blaugrün, Gelb, Rosa.

Ich zählte noch zwei deutlich erkennbare — also im Ganzen elf — Streifen.

Man sieht, die Farbenpracht dieser Regenbogen ist eine grossartig schöne. Im fünften Bogen tritt Weiss auf und von da ab kehrt sich die Farbenfolge um. Über den elften Bogen hinaus waren zwar noch Streifungen merklich, aber eine Farbenangabe wäre nicht möglich gewesen. Wenn wir uns erinnern, dass bei der Tropfengrösse von einem ganzen Millimeter von 24 Bogen noch die Farben zu erkennen waren, wobei das Weiss im zwölften Bogen auftrat, während dasselbe hier im fünften auftritt, dafür auch nur von elf Bogen die Farben erkennbar sind, so wird man daraus entnehmen, dass die Anzahl der farbigen Bogen um so geringer sein wird, je kleiner die Tropfengrösse ist. Die Lichtschwächung dürfte daran wohl den grössten Antheil haben.

Dass in meiner Farbentabelle für $a = 250\,\mu$ die gelben Töne in den Secundären nicht erscheinen, ist dem Umstande zuzuschreiben, dass dieselben nur eine sehr geringe Breite besitzen und meine Rechnungen von 10 zu 10 Minuten geführt sind, so dass sie, wie die Beobachtungen zeigen, gerade in die

betreffenden Intervalle hineinfallen. Im natürlichen Regenbogen kommen sie in Folge der Übereinanderlagerung, die von der Ausdehnung der Lichtquelle herrührt, auch thatsächlich nicht mehr zum Vorschein; erst bei der Tropfengrösse von $a = 150\mu$ erscheinen sie auch da noch.

Die oben mitgetheilten Versuche bestätigen durchwegs die Richtigkeit der Resultate der Farbenberechnung für die Tropfengrössen von $a = 500$ und $a = 250\,\mu$. Ich ziehe daraus wohl mit Recht den Schluss, dass damit die Resultate dieser Farbenberechnungen auch für die übrigen Tropfengrössen ihre Bestätigung gefunden haben, besonders in Hinblick darauf, dass für die Tropfengrössen von $a = 25$ und $a = 5\,\mu$ die Bestätigung durch Versuch und Beobachtung unten im Kapitel über den weissen Regenbogen gegeben werden wird.

b) Beobachtungen des Regenbogens in der Natur.

Eine eigentliche Beweisführung durch Messungen der Regenbogenerscheinungen in der Natur würde nur dann möglich sein, wenn man gleichzeitig die Tropfengrösse zu bestimmen in der Lage wäre. Dieser Fall tritt äusserst selten ein. Wir werden bei dem weissen Regenbogen solche Beispiele kennen lernen. In den gewöhnlichen Fällen ist dies nicht möglich. Unsere Beweisführung wird daher nur in Folgendem bestehen können: Eine grosse Anzahl von Regenbogenbeobachtungen liegt vor. Aus der verschiedenen Farbenfolge, aus der Lage der einzelnen Farben, aus dem Aneinanderschliessen oder den Zwischenräumen der Secundären und des Hauptregenbogens entsteht eine Mannigfaltigkeit in der Erscheinung des Regenbogens, die in der Theorie der sogenannten »wirksamen Strahlen« absolut keine Erklärung findet, ja derselben direct widerspricht. Wenn aber diese Mannigfaltigkeit durch unsere Rechnungen einerseits verlangt wird, anderseits stets eine Tropfengrösse gefunden wird, welche den Regenbogen genau so wie er beobachtet wurde, rechnerisch ergibt, so haben wir eine Theorie gefunden, welche die Erscheinungen allseitig und vollkommen erklärt. Die Versuche im Cabinete dazugenommen, erreichen wir hiedurch die Gewissheit der Richtigkeit unserer Theorie.

Es tritt nun hier eine merkwürdige Thatsache auf, welche beweist, wie sehr auch ernste Naturforscher sich durch eine falsche Theorie, die sie für richtig halten, beeinflussen lassen. Ich habe in der mir zugänglichen Literatur vergeblich nach Messungen der eigentlichen Regenbogen gesucht, nur für die selteneren Erscheinungen der Nebelbogen (fog-bow oder mist-bow sagt man in England), welche zwar wesentlich dieselbe Erscheinung sind wie die eigentlichen Regenbogen, da sie beide von Wassertropfen erzeugt werden, das einemal von solchen, die Nebel bilden, das anderemal von solchen, die als Regen niederfallen, aber nicht bei Regen, sondern nur auf Nebeln sich zeigen, liegen mir brauchbare Messungen vor, die jedoch alle ins Kapitel der weissen Regenbogen gehören. Man hat die Farbenfolge beschrieben, die Anzahl und Farben der Secundären angegeben, auch bemerkt, ob die Secundären sich unmittelbar an den Hauptregenbogen anschliessen oder durch einen Zwischenraum davon getrennt erschienen; die Halbmesser der Bogen und ihrer einzelnen Farben zu messen hat man unterlassen, weil man glaubte, diese Halbmesser seien selbstverständlich die der »wirksamen Strahlen« von Descartes. Kämtz[1] geht sogar so weit, dass er lieber die Richtigkeit der Messungen an weissen Regenbogen anzweifelt, als dass er einen Zweifel an der Descartes'schen Theorie in sich aufkommen liesse. Ich muss also darauf verzichten, andere Winkelmessungen, als die gelegentlich der weissen Regenbogen gemachten zu verwenden.

Im Übrigen ergibt ein Vergleich meiner Rechnungsergebnisse mit den vielen Beschreibungen beobachteter Regenbogen Folgendes:

Die Rechnungsergebnisse besagen, dass der Regenbogen in einer grossen Mannigfaltigkeit der Farbentöne, ihrer Aufeinanderfolge und Breite der Bogen auftreten müsse, je nach der Grösse der ihn erzeugenden Tropfen; dass ferner der Hauptregenbogen mit den secundären entweder eine zusammenhängende ununterbrochene Reihenfolge der Farben bilden oder aber von den secundären durch einen Zwischenraum getrennt

---

[1] Kämtz, Lehrbuch der Meteorologie, III. Bd., Seite 171.

sein könne, wiederum je nach der Grösse der ihn erzeugenden Tropfen.

Dieselben Eigenthümlichkeiten weisen die in der Natur beobachteten Regenbogen auf, und wir sind nun auf Grund der ausgeführten Rechnungen in der Lage, für die verschiedenen Arten der Regenbogen die ihnen entsprechenden Grössen der sie erzeugenden Tropfen anzugeben. Eine ausführliche Darlegung dieser Beziehungen wird noch weiter unten bei der Zusammenfassung der Resultate dieser Untersuchungen gegeben werden.

Bezüglich der Tropfengrössen im Regen nimmt man an, dass es bei einem Durchmesser der Tröpfchen von 0·1 *mm* ($a = 50\,\mu$) zu regnen beginne. Als die grössten Regentropfen, selbst in den schwersten tropischen Regen, findet Wiesner[1] in ungewöhnlichen Ausnahmsfällen solche von 3·4 *mm* Halbmesser, im Durchschnitte haben aber selbst diese schwersten tropischen Regen nur Tropfen von $a = 2\cdot6$ *mm*. Bei den schwersten Platzregen kommen bei uns ganz ähnliche Verhältnisse vor. Da jedoch gerade diese grossen Tropfen das Bestreben haben, beim Falle sich zu theilen, so ist es äusserst wahrscheinlich, dass bei so heftigen Regen kein Regenbogen erscheinen wird, weil die dazu geforderte Gleichheit der Tropfen fehlt. Das ist der Grund, warum ich meine Rechnungen nur bis zur Tropfengrösse von 2 *mm* ($a = 1000\,\mu$) ausdehnte.

c) Bemerkungen bezüglich des zweiten Regenbogens.

Obwohl ich für den zweiten Regenbogen die Ablenkungsgrössen berechnete, habe ich doch die Farbenberechnung für denselben nicht durchgeführt, weil ich glaubte, meinen doppelten Zweck: eine volle Bestätigung der Airy'schen Theorie des Regenbogens einerseits zu geben und anderseits Anhaltspunkte für die Beurtheilung der Regentropfengrösse für den praktischen Meteorologen zu gewinnen, schon durch die für den ersten Regenbogen geführten Rechnungen erreicht zu haben. Mit Hilfe der in Tabelle II des Anhanges mitgetheilten Werthe für A_2

---

[1] Wiesner, Beiträge zur Kenntniss des tropischen Regens. S. A. Diese Sitzungsber., Bd. 104, S. 28.

wird es übrigens leicht sein, sich die Farbencurven für den zweiten Regenbogen zu zeichnen und allenfalls auch die ganzen Farbenrechnungen durchzuführen.

Ich möchte hier nur die an den Wasserstrahlen von $a = 500$ und $a = 250\,\mu$ gemachten Beobachtungen des zweiten Regenbogens, also des Nebenregenbogens mit seinen secundären, mittheilen.

Am 30. December 1896. Zweiter Regenbogen, $a = 250\,\mu$. Der Nebenregenbogen mit seinen secundären ist in voller Pracht sichtbar. Ich zähle deutlich fünf Secundäre. Man sieht folgende Farbenfolge: Orange (Roth fehlt vor Orange), Gelb, Grün, Blau, Violett; Gelb, Grün, Blau, Violett (Rosa); Gelb, Grün, Blau, Rosa. Man sieht in den Secundären deutlich alle Farbentöne. Von einer Störung durch den fünften Regenbogen ist nichts zu merken, ausser, wie zu erwarten stand, in Bezug auf das erste Roth.

$a = 500\,\mu$. Ich zähle ausser dem Nebenregenbogen deutlich 13 Secundäre; die Farbenfolge ist in den Tönen nicht so reich wie bei $a = 250\,\mu$, aber doch bunt; man sieht öfters Gelb darin.

Der Wasserstrahl war voll beleuchtet, nicht einseitig, es musste daher der fünfte Regenbogen auch ins Fernrohr fallen. Man sah auch in der That einen sehr schwachen Schein auf der Roth-Seite, der abnehmenden Ablenkungen, der etwas weiter reichte. Da der zweite Regenbogen nach zunehmenden Ablenkungen hin sich ausdehnt, der fünfte nach abnehmenden Ablenkungen hin, ferner das Roth der B-Linie für den fünften Regenbogen etwa $A_5 = 52°$ (für die mindestabgelenkten Strahlen $52° 31'$), also ziemlich knapp auf das E-Licht des zweiten Regenbogens fällt (A_2 der mindestabgelenkten E-Strahlen $51° 42'$), so ist es schon von vornherein sicher, dass nur der Theil von E rückwärts zum Roth im zweiten Regenbogen (im eigentlichen Nebenregenbogen) vom fünften gestört sein kann. Ich glaubte dies feststellen zu sollen, da in den so ausserordentlich schönen und werthvollen Abhandlungen Mascart's sich die Irrung eingeschlichen hat (siehe auch seinen Traité d'Optique, t. III, p. 441), dass die Erscheinung der Secundären des Nebenregenbogens von dem fünften Regenbogen gestört werde.

In der That liegen ja mehrere Beobachtungen über Secundäre des Nebenregenbogens vor; allerdings wird meist nur einer gesehen, was aus der Lichtschwäche des zweiten Regenbogens schon zum grössten Theile erklärlich ist.

4. Der weisse Regenbogen.

Der weisse Regenbogen ist nicht selten beobachtet worden, doch tritt er nicht stets in derselben Weise auf. Der Mondregenbogen wird wohl öfter weiss als farbig gesehen, der weisse Regenbogen bei Sonnenschein wird entweder als einfaches weisses Band beschrieben, oder er zeigt an dem äusseren Rande eine Spur von Gelb, am inneren weissliches Blau und dabei kommt es vor, dass noch ein oder gar zwei Secundäre ihn begleiten, welche dann aber farbig sind.

Diese dreifache Art des weissen Regenbogens macht es wahrscheinlich, dass es mehr als eine Ursache seiner Entstehung gibt. Es liegt nun nahe, folgende drei Ursachen hiefür aufzustellen:

1. Die meist grosse Lichtschwäche in den Fällen des Mondregenbogens;

2. die Ungleichheit der erzeugenden Tröpfchen, wodurch die verschiedenen Farben übereinanderfallen und so Weiss erzeugen;

3. die aus den normalen, nach der Airy'schen Theorie bei sehr kleinen Tröpfchen geforderten Farbenmischungen in dem Intensitätsverhältnisse, nach welchem aus der Mischung Weiss resultiren muss.

Die erstere Ursache, die Lichtschwäche, welche hauptsächlich für Mondregenbogen in Betracht kommt, hat uns nicht viel zu beschäftigen. Es ist eine bekannte Thatsache, dass beim Herabdrücken der Intensität unter eine gewisse Grenze jede Farbe als solche aufhört, wahrnehmbar zu sein und nur mehr den Eindruck eines graulichen Weiss hervorbringt.[1]

---

[1] Abney und Festing, Colour Photometry, part III. Philosoph. Transact. London, vol. 183 (1892), p. 537. Die Mitte des Spectrums muss viel stärker geschwächt werden, damit die Farben verschwinden, als die beiderseits gelegenen Farben. Die blauen Töne halten sich länger als die rothen.

Es treten da aber Fragen verwickelterer Natur auf, deren Lösung in Bezug auf die Farbenwahrnehmung im Regenbogen von Bedeutung wäre, die aber für die einzelnen Fälle keine sichere Entscheidung erhalten können. So frägt es sich um die Grenze der Sichtbarkeit der verschiedenen Farben. Wir haben oben in den Tabellen der Farbenberechnungen die relativen Intensitäten für jede berechnete Farbe angegeben; es wäre zu wünschen, dass wir einen möglichst guten Anhaltspunkt dafür fänden, um angeben zu können, welche dieser relativen Intensitäten für jede Tropfengrösse die Grenze der Lichtempfindung bedeutet, da wir erst daraus entnehmen können, ob und wann ein Minimum als farbloser, dunkler Zwischenraum erscheint. Doch hierin sind wir leider mehr auf Schätzungen angewiesen, als auf sichere Angaben. Zwar haben Abney und Festing[1] die Lichtverlöschung ebenfalls genau experimentell verfolgt, doch vor Allem können wir die Intensitäten im Regenbogen nicht auf ein uns bekanntes Mass der Leuchtkraft reduciren, um sie mit den Zahlen der erwähnten Forscher zu vergleichen; dann kommt aber dazu, dass die Verhältnisse, unter denen der Regenbogen gesehen wird, nicht mit der Dunkelheit beim Laboratoriumsversuch vergleichbar und überdies sehr veränderlich sind. Helleres oder gedämpfteres Tageslicht mischt sich zur Farbenempfindung hinzu und beeinflusst sie mehr oder weniger sowohl als Farbenempfindung, als auch bezüglich der Intensität der Lichtempfindung überhaupt. Ferner kann die Luft, durch welche uns die Farben vom Regenbogen zugestrahlt werden, rein oder dunstig sein und so Schwächungen einführen, die für die einzelnen Fälle nicht bestimmbar sind. Da überdies von der Anzahl der erzeugenden Tropfen im Kubikmeter ebenfalls die Intensität des Regenbogens bedingt ist, so sind wir einfach in die Unmöglichkeit versetzt, über die Intensitäten, bei welchen die Lichtwahrnehmung für die verschiedenen Regenbogen aufhört, irgend Anderes zu sagen, als was uns die Vermuthung nahelegt. Man wird daher im Allgemeinen wohl wissen, dass die relativen Intensitäten, wie wir sie in den Farbentabellen gegeben, bei kleinen Tropfengrössen mit höheren

[1] A. a. O. Seite 540 ff.

Werthen schon unter die Wahrnehmung hinabsinken als bei grösseren Tropfen, aber für die concreten Einzelfälle können dabei gar manche Ausnahmen auftreten. Ich werde mich daher begnügen müssen, diese verwickelten Verhältnisse hier angedeutet zu haben.

Was die oben angeführte zweite Ursache des weissen Regenbogens betrifft, so muss ich darüber Folgendes bemerken. Die Ablenkungen einer bestimmten Farbe ändern sich mit der Tropfengrösse, jedoch reicht bei kleinen Tropfen eine äusserst geringe Änderung des Tropfenhalbmessers hin, um ein störendes Übereinandergreifen der Farbe zu bewirken, während bei grösseren Tropfen beträchtlichere Verschiedenheiten im Halbmesser der Tropfen noch keinen merklichen Einfluss haben (man sehe die Tabellen für Θ und A des Anhanges). Man hat nun den weissen Regenbogen in der That noch nie bei Regen gesehen — ausser den Mondregenbogen, welcher durch die Lichtschwäche seine Erklärung findet; es sind immer Nebelbogen, die weiss erscheinen. Dies scheint nun allerdings für diese Erklärung des weissen Regenbogens zu sprechen. Allein die vorliegenden Beobachtungen lassen es als unwahrscheinlich erscheinen, dass die Ungleichheit der Tropfen die Ursache des weissen Regenbogens sei. Alle vorliegenden Beobachtungen berichten entweder von weissen Regenbogen mit secundären farbigen Bogen oder von begleitenden prächtig ausgebildeten Beugungsringen (Nebelbild, Glorie, Brockengespenst werden sie genannt), welche in dieser Vollendung nur bei Gleichheit der erzeugenden Körperchen möglich sind. Ohne daher die absolute Unmöglichkeit der Bildung eines weissen Regenbogens in Folge der Ungleichheit der Tröpfchen behaupten zu wollen, müssen wir für die thatsächlich beobachteten eine andere Ursache suchen, da sie durch die Ungleichheit der Tröpfchen nicht erklärbar sind.

Wir kommen damit zur dritten der oben angeführten Ursachen des weissen Regenbogens, welche für uns die wichtigste ist. Es gibt wohl keine bessere Bestätigung der Airy'schen Theorie des Regenbogens, als das, was wir jetzt zu erörtern haben. Unsere Farbentabellen ergeben unmittelbar für kleinere Tropfengrössen bei normalen Verhältnissen, ohne Beiziehung

der Verschiedenheit in der Grösse der Tröpfchen, den weissen Regenbogen; ein weisser Bogen ist geradezu das Postulat der Airy'schen Theorie, und zwar muss dieser weisse Bogen bei jeder Tropfengrösse vorkommen. Freilich sprechen wir nur dann von einem weissen Regenbogen, wenn der erste, der Hauptbogen, weiss erscheint.

Um diese Verhältnisse genau zu übersehen, müssen wir nun vorab zwei Punkte klarstellen:

1. Wann erscheint uns Weiss?
2. Wann reden wir von einem weissen Bogen?

Wann erscheint uns das Resultat der Farbenmischung an einem Punkte des Regenbogens weiss? Wir wissen, dass das Ergebniss jeder Farbenmischung eine Farbe ist, welche aus einer reinen Spectralfarbe und Weiss besteht. Es wird daher von dem percentuellen Verhältnisse, in welchem das Weiss in der Mischfarbe vorkommt, abhängen, ob wir eine Stelle weiss oder farbig sehen. Es muss daher festgestellt werden, welche Menge (percentuell) einer Farbe dem Weiss beigemischt werden kann, ohne dass man die Farbe bemerkt. Nach den Untersuchungen von Abney[1] ergibt sich das überraschende Resultat, dass diese percentuelle Menge für alle Farben dieselbe ist, und zwar wird jede Farbe zum Verschwinden gebracht durch ein 75mal stärkeres weisses Licht. Das würde bedeuten, dass nur dann Weiss erscheint, wenn die Intensität der Farbe nur 1·3% derjenigen des Weiss ist. Hiernach würde nach unseren Rechnungen ein eigentliches Weiss im normalen Regenbogen nie erscheinen, es müsste aber allerdings immer da, wo die Procente für die Farbe X etwa 4% und darunter betragen, eine kaum merkliche Färbung des Weiss auftreten, so dass wir diese Stellen wohl als Weiss ansprechen würden. Allein dies reicht nicht hin, um die weissen Regenbogen voll zu erklären; dazu ist es nöthig, dass wir zeigen, dass in den beobachteten weissen Regenbogen in der That die percentuelle Intensität der Farbe X auf die von Abney geforderte herabsinkt. Das lässt sich nun ohneweiters beweisen. Die Versuche von Abney wurden natürlich im dunkeln Raume gemacht. Das Resultat unserer Farben-

---

[1] Colour Measurement and Mixture, p. 131.

berechnung besagt nur, dass die Mischung der aus den Regentropfen austretenden, den Bogen hervorbringenden Strahlen das in der Farbentabelle angegebene percentuelle Verhältniss von Weiss und X besitzt. So würde es im dunkeln Raume zur Geltung kommen. Der Regenbogen tritt aber bei Tageslicht, ja bei Sonnenschein auf. Das so über die Regenbogenfarben gelegte Tageslicht ist weiss und drückt daher das percentuelle Verhältniss von X zu Weiss herab. Ist die Intensität des Regenbogens, absolut genommen, schon gering, so wird die Wirkung der Überlagerung mit weissem Tageslicht am stärksten sein. d. h. bei kleinen Tröpfchen wird das Weiss rein hervortreten. falls die Procente von X schon an sich nahe dem theoretischen Grenzwerthe für Weissempfindung lagen. Man wird wohl nicht weit fehlgehen, wenn man für Tropfengrössen bis $a = 30\mu$ annimmt, dass bei percentuellen Intensitätswerthen für X von 9% und darunter Weiss in Erscheinung tritt. Bei Tropfen von grösserem Halbmesser dürfte sich diese Zahl rasch und bedeutend verringern. Nach diesen Grundgedanken wurde in den Farbentabellen »Weiss« notirt. Damit ist die erste Frage beantwortet.

Die zweite Frage veranlasst uns, genauer zu bestimmen. wann man einen weissen Bogen erhält. Nicht eine schmale Stelle Weiss mitten im Farbenbogen wird uns als weisser Regenbogen erscheinen, sondern ein breites Band im Bogen werden wir erst einen weissen Regenbogen nennen. Ein solches breites weisses Band tritt nun bei jeder Tropfengrösse auf. Wir sahen oben aus den Beobachtungen im Cabinete, dass dasselbe bei einer linienförmigen Lichtquelle für $a = 500\,\mu$ im zwölften Bogen (nach dem elften Violett, in der Natur nach dem zehnten Violett), also im elften Secundären auftritt, für $a = 250\,\mu$ aber im fünften Bogen, also im vierten Secundären. Bei $a = 50\,\mu$ finden wir es schon im zweiten Bogen, also im ersten Secundären, wie unsere Farbentabelle zeigt; bei $a = 40\,\mu$ tritt schon im ersten Bogen ein weisser Streifen auf, der aber wohl zu wenig breit sein möchte, um als weisser Bogen zu erscheinen; ähnlich verhält es sich auch bei $a = 30\,\mu$. Erst für $a = 25\,\mu$ haben wir einen ausgesprochenen kräftigen weissen Bogen im Hauptregenbogen. Nur diese weissen Bogen im Hauptregen-

bogen — wenn auch mit farbigen Rändern — heisst man eigentlich »weisse Regenbogen«. Wir sehen aus unseren Farbentabellen, dass der weisse Regenbogen stets auftreten muss, wenn ein Regenbogen durch Tröpfchen erzeugt wird, deren Halbmesser gleich 25 μ oder darunter ist, dass aber auch schon bei $a = 30$ μ, ja sogar bei $a = 40$ μ ein weisser Streifen im Hauptregenbogen auftreten dürfte.

Wir sehen hieraus, dass die nach der Airy'schen Theorie geführten Farbenberechnungen zur vollen Erklärung des weissen Regenbogens führen. Die experimentelle Bestätigung hiefür würde nun am exactesten dadurch gegeben, wenn man im Cabinete den weissen Regenbogen mit Hilfe von Wassertröpfchen, deren Grösse bekannt ist, hervorrufen und durch Messung die Übereinstimmung mit der Berechnung nachweisen würde. Für diese kleinen Tröpfchen versagt die Methode mit dem Wasserstrahle, die wir früher anwendeten — so feine Wasserstrahlen sind nicht herzustellen und würden jedenfalls nicht ruhig und glatt fliessen. Ich wandte daher die Methode der Zerstäubung an. Hier ist nun gleich zu bemerken, dass diese Versuche im dunkeln Raume gemacht werden mussten und daher die Wahrnehmung farbiger Töne selbst bei geringen Procenten von X erfolgen musste. Ich arbeitete zuerst mit gewöhnlichen Zerstäubern, welche gestatteten, feinen Wasserstaub in den vom Heliostaten kommenden Sonnenstrahl zu blasen.

Obwohl ich bei der geringen, vom Zerstäuber gelieferten Menge Wasserstaub nicht in der Lage war, die Grösse der Wassertröpfchen durch die im durchgehenden Lichte enstehenden Beugungsringe zu bestimmen — sie waren zu schwach, um Messungen vornehmen zu können — so erhielt ich dabei doch jene eigenartigen Regenbogen, die nach den in den Farbentabellen hinterlegten Rechnungsergebnissen nur bei den kleinsten Tröpfchen auftreten können. Es fehlte vor Allem an der äussersten Grenze des Hauptregenbogens das Roth und das Orange zeigte einen stark gelblichen Ton.

Hier muss nun bemerkt werden, dass unsere Tabellen für diese Tropfengrössen Gelb als die Randfarbe angeben. Dieses Gelb muss aber wegen seiner sehr geringen Intensität als

Orange erscheinen, da es bekannt ist, dass bei schwachen Intensitäten die Farben tiefere Töne zu haben scheinen.

Nach diesem Gelb-Orange folgten sehr weissliche Töne von Grün und Blau, und erst das Violett war wieder besser gefärbt. Diese Farben, welche bei Tageslicht offenbar als weisses Band mit orangegelbem Aussen- und bläulichem Innenrande erschienen wären, entsprachen offenbar einer der kleinen. oben berechneten Tropfengrössen und auch die grosse Ausdehnung des allein erkennbaren Hauptregenbogens wies darauf hin.

Da es mir darum zu thun war, die Tropfengrösse zu bestimmen, so stellte ich mir einen Zerstäuber her, der eine genügende Menge Wasserstaub lieferte, um die Beugungsringe im durchgehenden Lichte, wenn auch schwach, so doch deutlich sichtbar und messbar zu machen. Die Innsbrucker Wasserleitung erlaubt es, Wasser unter einem Drucke von fünf und mehr Atmosphären ausströmen zu lassen. Ich liess nun eine Bleiröhre an den Ausflusshahn anlöthen und dann aus einer feinen Öffnung, welche eine eingekittete Glasröhre bot — sie hatte eine Lichte von 0·5 *mm* — das Wasser gegen eine in angemessener Höhe befestigte Metallplatte ausströmen. Der Strahl zerstäubte dabei in der vollkommensten Weise und es entstand eine Art feiner Wolke, langsam niederfallender Wasserstaub, der dicht genug war, um mit Hilfe eines durch eine Öffnung von 1 *mm* hindurchgeschickten Strahles der elektrischen Bogenlampe schöne, wenn auch schwache, reine Beugungsringe zu erzeugen; die Messung der letzteren gestattete die Grösse der Tröpfchen zu berechnen.

Durch diesen Wasserstaub sandte ich nun vom Heliostaten her den Sonnenstrahl und erhielt den echten, tadellosen, weissen Regenbogen, als die Tröpfchen einen Halbmesser $a = 5{\cdot}3\,\mu$ hatten. Ich gebe nun zunächst die Messung der Ablenkungen für die verschiedenen Punkte dieses weissen, mit farbigen Rändern versehenen Regenbogens und bemerke, dass nur der Hauptregenbogen sichtbar war, da sich der Wasserstaub nicht weit genug ausdehnte, um einen Secundären zu geben.

4. December 1896: Gelber Rand vor Weiss 41° 59′, Mitte Weiss 40° 0′; bläulicher Rand, wo die Farbe schon ganz

deutlich hervortritt 37° 41′; Grenze zwischen Gelblich und Weiss 41° 8′; Grenze zwischen Weiss und Bläulich 38° 27′.

Die Messungen wurden mit einem als Diopter hergerichteten Sextanten gemacht, und zwar wurde der zum Ablenkungswinkel der Regenbogenstrahlen complementäre Winkel gemessen, woraus dann durch Subtraction von 90 die eben mitgetheilten Werthe erhalten wurden. Ich stellte ein rechtwinkeliges Prisma in die Richtung der Sonnenstrahlen. Indem ich zuerst die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als Spiegel benützte, wurde das Bild der Spalte am Rohre des Heliostaten auf die Spalte selbst zurückgeworfen; durch eine Drehung von 180+45 Graden erhielt ich einen auf den directen Sonnenstrahl senkrechten Strahl, in welchen ich den Augenpunkt des Diopters stellte und von wo aus es also möglich war, den Winkel zu messen, welcher vom total reflectirten Strahle des Prismas und den aus dem Regenbogenbilde kommenden Strahlen gebildet wurde.

Die Messungen stimmen sehr nahe mit der für $a = 5\,\mu$ berechneten Farbentabelle überein. Man sieht, dass im dunkeln Raume, der vom Sonnenstrahl allerdings etwas Licht erhielt, Farbentöne noch wahrgenommen werden, wenn die percentuelle Intensität von X nicht kleiner als 5% ist.

Ich trachtete nun, grössere Tröpfchen zu bekommen, doch gab es dabei zu grosse Schwierigkeiten, als dass ich mich damit hätte unter den gegebenen Verhältnissen aufhalten können. Es gelang mir aber noch eine Messung bei einer Tropfengrösse, welche aus den Beugungsringen sich zu $a = 8{\cdot}4\,\mu$ ergab. Leider geben meine Farbentabellen zwischen 5 und 10 μ nicht die Werthe von Mikron zu Mikron; man wird aber leicht erkennen, dass die gemessenen Winkel für die beobachteten Farben so liegen, dass aus den Farbentabellen von $a = 5\,\mu$ und $a = 10\,\mu$ auf ihre Richtigkeit leicht zu schliessen ist.

Die Messung ergab:

7. December 1896. Orangegelb 41° 25′; Weiss 38° 50′ (der weisse Streifen ist schmal, einerseits grünlich, anderseits bläulich gerändert); Violett 37° 0′ (recht weissliches Violett oder Bläulich-Violett).

Konnte ich nun auch wegen der erwähnten Schwierigkeiten die weissen Regenbogen bis zu $a = 25\,\mu$ nicht mehr zur Darstellung bringen, so war es doch gelungen, den weissen Regenbogen experimentell hervorzubringen. Da die Beugungsringe rein waren und ausser der Aureole der nächste Ring ganz ausgebildet war, von einem weiteren (offenbar wegen der grossen Lichtschwäche) freilich nur Spuren zu sehen waren, so muss daraus geschlossen werden, dass die Tröpfchen sehr gleiche Grössen hatten. Wir haben also nicht weisse Regenbogen in Folge der Ungleichheit der Theilchen, sondern normale weisse Regenbogen vor uns gehabt, wie sie sich durch die Farbenberechnungen ergeben hatten.

Beobachtungen des weissen Regenbogens in der Natur liegen recht viele vor, solche mit Messungen wenige, und Messungen, die so ausgeführt sind, dass man sie zum Beweise unserer Theorie heranziehen kann, kenne ich nur zwei.

Die eine dieser Messungen entnehme ich den Publicationen der schwedischen Nordpolexpedition 1882—1883, tome II. Phénomènes optiques de l'Atmosphère par Carlheim-Gyllenskiöld, p. 12 ff. Ich gebe die Beschreibung der Beobachtung hier wieder:

»En revanche, on a vu plusieurs fois l'arc-en-ciel blanc. Il a été observé pour la première fois le 17 mars a midi. Au début, il ressemblait à une mince strie blanche de cirro-stratus. Plus tard il s'accrut en éclat, et se colora en même temps; le bord inférieur était d'un blanc bleuâtre, le blanc tenait le milieu, l'ocre jaune, venait en suite, enfin, le violet rouge était au bord extérieur.

Un second arc, plus étroit, apparut alors en dedans du premier; il était rouge au bord intérieur et vert au bord extérieur, et n'était séparé de l'anneau extérieur que par un petit intervalle. Plus tard encore un troisième anneau semblable, mais encore plus étroit, fit son apparition. M. Gyllenskiöld a vu avec moi tous ces phénomènes. J'ai mesuré les rayons de trois anneaux et j'ai trouvé les valeurs suivantes: Bord extérieur de l'anneau large 41° 4′ ± 15′5, bord intérieur 37° 19′ ± 7′5; bord extérieur de l'anneau du milieu 35° 24′ ± 12′5, bord intérieur 33° 34′ ± 11′5; bord extérieur de l'anneau intérieur 32° 55′ ± 6′7,

bord intérieur 31° 25'±9'4. La largeur de l'anneau extérieur était de 3° 45', celle de l'anneau du milieu 1° 50', celle de l'anneau intérieur 1° 30'«.

Vorerst bemerke ich zu dieser Beschreibung, dass wir bei der Feststellung der Tropfengrösse, welche bei Erzeugung dieses schönen, weissen Regenbogens vorhanden war, nur den ersten Secundären neben dem Hauptregenbogen benützen dürfen, da das Erscheinen des zweiten Secundären später erfolgte und die kleinste Änderung in der Tropfengrösse, welche unterdessen eintrat, in den Ablenkungen der Farben sich bedeutend merklich machen musste. Da an den ersten beiden Bogen nicht noch nachträglich eine Messung vorgenommen wurde, so besteht zwischen den Messungen des Hauptregenbogens und ersten Secundären einerseits und des zweiten Secundären keine Verbindung.

Die andere dieser Beobachtungen finde ich in einer Abhandlung von Mc. Connel,[1] welcher, ohne unsere Farbenberechnungen durchgeführt zu haben, aus den Ablenkungen mit Hilfe der Airy'schen Theorie die Tropfengrösse berechnete und auch schon darauf hinwies, dass die Farbenumkehrung im ersten Secundären bei der betreffenden Tropfengrösse ebenfalls eine Forderung dieser Theorie ist. Ich lasse zunächst auch diese Beobachtung, welche auf dem Ben Nevis gemacht wurde, folgen.

»December 30. Temp. 24·2 F. Double fogbow seen at 11^h. Red outside outer bow and inside inner bow. The following rough measurements were got:

Radius	of	outside	of	outer	bow	......41° 22'
»	»	middle	»	»	»	......39 20
»	»	inside	»	»	»	......36 36
»	»	outside	»	inner	»	.. ...34 40
»	»	inside	»	»	»	......32 20«.

Zu dieser Beobachtung und zur früheren bemerke ich, dass in der letzteren es heisst: »Roth an der Aussenseite des äussern Bogens«; und in der ersteren: »Ausser dem Weiss kam gelbliches Orange und endlich zu äusserst das violette Roth«. Ich

[1] The theory of fogbows. Phil. Mag. Bd. 29, 1890, p. 453.

halte diese Bezeichnung der Farben des äusseren Randes für ungenau. Man ist gewohnt, als Abschluss der Farben nach aussen das Roth anzusehen, unsere Rechnungen geben aber nur Gelb, das wegen der Lichtschwäche als Orange und Tieforange erscheinen muss. Dies dürfte auch die wirklich gesehene Farbe gewesen sein. Ich habe bei den Versuchen im Cabinete, ehe meine Rechnungen vollkommen durchgeführt waren, bei den Regenbogen, die von sehr kleinen Tröpfchen erzeugt werden, auch immer eine Beunruhigung verspürt, dass ich kein eigentliches Roth am Rande finden konnte und war geneigt, das Orange der äussersten Schichte in Folge dessen als Roth anzusprechen. Ich möchte bitten, dass man die Farbe des äussersten Randes in Hinkunft genau angebe; ich habe stets nur Orange dort gesehen, sobald die Tropfen sehr klein waren. Das entspricht auch den Ergebnissen der Farbenberechnung.

Um nun die Tröpfchengrösse zu bestimmen, welche bei der Entstehung obiger zwei weissen Regenbogen vorhanden war, stehen uns zwei Methoden zur Verfügung: die Vergleichung der Messungen und Farbenangaben mit unseren Farbentabellen und die Berechnung von a nach der Theorie von Airy. Letztere Methode hat Mc. Connel auf die zweite der eben mitgetheilten Beobachtungen angewandt; da ihm die Farbenberechnung nicht zur Verfügung stand, konnte er aus den Farbenangaben keinen bestimmten Schluss auf die Tropfengrösse ziehen. Das beste ist allerdings, wenn man in der Lage ist, beide Methoden anzuwenden. Ich werde zuerst die rechnerische benützen.

Bei einer früheren Gelegenheit[1] habe ich gezeigt, dass man bei Interferenzen des weissen Lichtes für die Bestimmung der Minima als »Wellenlänge des weissen Lichtes« $\lambda = 0\cdot570\mu$ nehmen müsse. Wenn wir die Lage des Minimums zwischen dem Hauptbogen und dem ersten Secundären aus den Beobachtungen entnehmen können, so gibt uns die Formel für θ auf Seite 142 die Möglichkeit, den Halbmesser der Tröpfchen zu berechnen; man hat

$$a = \sqrt{\left(\frac{z}{2\theta}\right)^3 \cdot \frac{h\lambda^2}{6}}.$$

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. 24, Seite 405.

Das Θ für dieses erste Minimum findet man dadurch, dass man aus den Werthen der Winkel für den inneren Rand des Hauptbogens und den äusseren des ersten Secundären das Mittel nimmt. Es geht aus allem Vorhergehenden hervor, dass dieses Mittel die Lage des ersten Minimum recht genau angeben muss. Wir brauchen nun folgende Werthe:

$\lambda = 0 \cdot 570, \qquad n = 1 \cdot 3349, \qquad h = 4 \cdot 841, \qquad A_1 = 41° 44'.$

Zieht man den für das Minimum gefundenen Winkelwerth ab von 41° 44', so hat man das Θ in Graden, und durch Multiplication mit dem Bogenwerthe einer Minute, als Bogenlänge. Das z für das erste Minimum ist 2·4955 (Seite 139).

Berechnet man so das a für die beiden mitgetheilten Fälle, so findet man: Für die Beobachtung der schwedischen Polarexpedition $a = 24 \cdot 9\ \mu$ und für die Beobachtung auf dem Ben Nevis $a = 20 \cdot 7\ \mu$.

Wenden wir uns nun zur Methode der Vergleichung der Beobachtungen mit den Farbentabellen. Wir finden eine geradezu genaue Übereinstimmung der Farbentabelle für $a = 25\ \mu$ mit der Beobachtung von Crailheim-Gyllenskiöld und eine fast ebenso genaue der Farbentabelle für $a = 20\ \mu$ mit der Beobachtung auf dem Ben Nevis. Man sieht daraus auch, wie sehr die Farbenangabe für diese Vergleichungen günstig ist. Man beachte auch, wie die Umkehrung der Farbenfolge im ersten Secundären durch die Farbentabelle unmittelbar gegeben ist. Das Blau bis zum Punkte 15·5 des Farbendreieckes wird man in den Beobachtungen häufig mit Grün bezeichnet finden. Es ist dies offenbar eine Contrastwirkung des nahen Roth und Orange.

Die Bestätigung der Theorie durch Beobachtung und Experiment ist, wie man sieht, eine vollendete.

Es liegt noch eine grössere Anzahl von Beobachtungen des weissen Regenbogens vor, welche nur den Hauptbogen betreffen, aber die Winkel für den äusseren und inneren Rand angeben. Mit Hilfe dieser Winkel lässt sich aus den Farbentabellen die Grösse der erzeugenden Tröpfchen mit genügender Annäherung feststellen. Die Methode der Berechnung des a versagt hier. Dieselbe wäre für den weissen Regenbogen,

und nur für diesen, dann anwendbar, wenn man den Punkt des Maximums des reinen Weiss anzugeben in der Lage wäre. Dies gelingt nun leider weder dadurch, dass man das Mittel aus den Winkeln des äusseren und inneren Randes nimmt, noch auch durch directe Messung dieses Punktes, da die dabei unterlaufenden, nicht zu vermeidenden Beobachtungsfehler zu gross sind. Da es aber doch sehr wünschenswerth erschien, diese Berechnung machen zu können, so suchte ich nach einer Methode, aus den Winkelwerthen des äusseren und inneren Randes diesen Punkt zu finden. Aus mehreren Beobachtungen ergab sich folgender Vorgang: Man nimmt das Mittel der beiden Winkel und zieht es von 41° 44′ ab; das Resultat ist ein rohes, zu grosses Θ für das Maximum. Von diesem Θ zieht man 7% seines eigenen Werthes ab und erhält so ein angenähertes Θ für das fragliche erste Maximum. Mit diesem Θ (z ist für das erste Maximum nach Seite 139: 1·0845) berechnet man das a und erhält so zwar nicht genaue, aber recht genügend angenäherte Werthe für a.

Endlich komme ich noch zu den zwei Beobachtungen »Weisser Regenbogen«, die schon zu den classischen Beispielen gehören, weil sie überall wiedergegeben werden, wo vom weissen Regenbogen die Rede ist. Die (auch zeitlich) erste dieser Beobachtungen rührt von Bouguer her, die zweite von Scoresby. Es ist allgemein bekannt, wann und wo dieselben gemacht wurden und so kann ich mich damit begnügen, dieselben anzuführen und zu untersuchen.

Bouguer schreibt:[1] »...Cette dernière partie etait ornée d'une gloire ou auréole formée de trois ou quatre petites couronnes concentriques d'une couleur très vive, chacune avec la même variété que le premier arc-en-ciel, le rouge etant en déhors. Les intervalles entre ces cercles étaient égaux, le dernier cercle était plus faible; et enfin à une grande distance nous voyons un grand cercle blanc, qui environnait le tout... J'ai eu occasion d'observer depuis, que ces diamètres changeaient de grandeur d'un instant à l'autre, mais en conservant toujours entre eux l'égalité des intervalles, quoique dévenus plus grands ou plus

[1] Mémoires de l'Acad. Roy. des scienc. Paris. Année 1744, p. 264 ff.

petits. Le phénomène outre cela ne se trace que sur les nuages, et même sur ceux, dont les particules sont glacées, et non pas sur les gouttes de pluie, comme l'arc-en-ciel. Ordinairement le diamètre du premier Iris était d'environ 5 degrés $^2/_3$; du suivant d'environ 11 degrés; de l'autre de 17 degrés et ainsi de suite; celui du cercle blanc était d'environ 67«.

Die Beobachtung von Scoresby ist mir im Originale nicht zugänglich. Ich entnehme sie Kämtz's Lehrbuch der Meteorologie, 3. Band, Seite 108. Dort heisst es: »Am 23. Julius 1821, wo das Phänomen sehr lebhaft war, bemerkte Scoresby um seinen Kopf vier concentrische Kreise. Nr. 1 war weiss oder gelb, roth, purpur; Nr. 2 blau, grün, gelb, roth, purpur; Nr. 3 grün, weisslich oder blassgelb, roth, purpur; Nr. 4 grünlich, weiss und an den Rändern dunkler. Die Farben... in Nr. 4 waren bloss helle Schattirungen von Grau. Es ergaben sich folgende Dimensionen. Halbmesser von Nr. 4: innerer Rand 36° 50′, Mitte ungefähr 38° 50′, äusserer Rand 41—42°; den Halbmesser von Nr. 3 schätzte er auf 6° 30′, der von Nr. 2 wurde zu 4° 45′ gemessen und der von Nr. 1 durch Schätzung zu $1^1/_2$—2° bestimmt. Einmal bemerkte Scoresby noch einen Kreis, dessen Dimensionen grösser waren als die von Nr. 4, welcher zu dieser Zeit lebhafte Regenbogenfarben hatte, während Nr. 5 graulichweiss war«.

Bouguer's Winkelangaben beziehen sich auf keinen bestimmten Einzelfall, er sagt nur: »Gewöhnlich war der Durchmesser etc.« Dadurch verlieren sie bedeutend an Werth. Beide angeführten Beobachtungen hätten dadurch grossen Werth für die Vergleichung mit der Airy'schen Theorie, dass sie gestatten, aus den Beugungsringen die Grösse der erzeugenden Tröpfchen zu berechnen. Allein die Messungen wurden nur angenähert gemacht und es wird nicht mitgetheilt, welches die Punkte der Ringe waren, auf welche man beim Messen der Durchmesser oder Halbmesser einstellte; Bouguer unterlässt es sogar beim grossen weissen Ring, dies anzugeben. Nehmen wir aber an, die Durchmesser- und Halbmessergrössen beziehen sich wirklich auf das rothe Ende eines jeden Ringes. In diesem Falle ergeben sich unter der Annahme, dass die betreffende Wolke aus Tröpfchen bestanden habe, folgende Werthe für a:

	aus dem 1. Ringe	aus dem 2. Ringe	aus dem 3. Ringe
bei Bouguer's Beobachtung	7·0	6·6	6·2 μ
» Scoresby's »	11·4	7·7	8·1

Lassen wir die offenbar zu rohe Schätzung für den ersten Ring bei Scoresby weg, so ergeben sich im Mittel die Halbmesser der Tröpfchen bei Bouguer zu 6·6 μ. bei Scoresby zu 7·8 μ (indem man dem Werthe für den zweiten Ring, der durch Messung erhalten wurde, das doppelte Gewicht gibt). Wir können also sagen, die Halbmesser der Tröpfchen waren im ersten Falle etwa 7 μ, im zweiten etwa 8 μ.

Ein Vergleich der für den grossen weissen Kreis, den »weissen Regenbogen«, im ersten und zweiten Falle angegebenen Winkel mit unseren Farbentabellen zeigt uns, dass weder die 33° 30′ Halbmesser des »weissen Regenbogens« von Bouguer mit einem $a = 6$ μ bis 7 μ, noch die entsprechenden Winkelangaben bei Scoresby mit einem $a = 8$ μ zu vereinbaren sind. Die Sache würde nur noch schlimmer werden, wenn die Messungen der Radien der Beugungsringe sich nicht auf die rothen Enden der einzelnen Ringe bezögen. Es würden dann noch kleinere a erhalten werden, und ich will sofort zeigen, dass schon die oben berechneten Werthe für a viel zu klein wären, wenigstens bei Scoresby. Bei Bouguer ist aber der weisse Bogen von 33° 30′ in keiner Weise als weisser Regenbogen möglich, selbst bei noch weit kleinerem a. Vor Allem ist es einfach unmöglich, selbst beim weissen Regenbogen, dass der äussere Rand 33° 50′ Ablenkung habe. Hat denn Bouguer nun etwa die Mitte der Ringe gemessen? Dann würden wir die Radien der Enden des Roth der Beugungsringe erhalten, indem man die Hälfte der Differenz der von Bouguer angegebenen Werthe zweier aufeinanderfolgender Beugungsringe zu den gegebenen Messungswerthen hinzuzählt. Man erhielte dann $a = 5·2$ μ. Nimmt man nun selbst an, dass die Mitte des Bogens das Maximum der Lichtstärke repräsentire, so sehen wir aus unserer Farbentabelle für $a = 5$ μ, dass dieses Maximum auf 35° 0′ und nicht auf 33° 30′ fällt. Erst bei einem

$a = 3\,\mu$ würde das Maximum auf 33° 51′ fallen. Dass aber Bouguer für den weissen Bogen allein den inneren Rand gemessen haben sollte, ist wohl ganz unwahrscheinlich und selbst das würde nach unserer Farbentabelle für $a = 5\,\mu$ nicht stimmen, da bei 33° 30′ die relative Intensität nur 10% kleiner wäre als im Maximum selbst und daher der innere Rand einen bedeutend kleineren Werth hätte ergeben müssen. Der Bouguer'sche weisse Bogen war daher kein weisser Regenbogen.

Ähnlich geht es uns mit dem weissen Bogen von Scoresby. Nach unseren Farbentabellen entspräche derselbe etwa einer Tropfengrösse von $a = 20\,\mu$, nie aber einer solchen von $10\,\mu$ oder darunter. Wendet man die oben Seite 208 angegebene Näherungsmethode zur Berechnung von a aus dem Maximum des ersten (Haupt-) Bogens an, so findet man, dass er einem $a = 24\,\mu$ etwa entspräche, niemals aber einem $a = 8\,\mu$ oder darunter. Wir haben es also auch hier mit keinem weissen Regenbogen zu thun.

Da unter keiner Bedingung angenommen werden kann, dass die beiden hervorragenden Gelehrten derartig grosse Fehler in der Messung der Beugungsringe gemacht haben sollten, dass eine Zurückführung der von ihnen beschriebenen Erscheinung auf den weissen Regenbogen doch möglich wäre, so müssen wir uns um eine andere Erklärung dieser Erscheinung umsehen. Auf eine solche Erklärung werden wir durch die Bemerkungen geführt, welche die zwei ausgezeichneten Forscher an ihre Beobachtungen knüpfen. Bouguer sagt: »Überdies bildet sich die Erscheinung nur auf Wolken und selbst auf solchen, deren Theilchen aus Eis bestehen«. Scoresby aber behauptet geradezu (Kämtz, a. a. O.): »In den erwähnten Fällen bemerkte ich bei dem Nebel eine Menge flimmernder Nadeln.... Es war mir zweifelhaft, ob diese Nadeln nicht einigen Antheil an der Erscheinung hätten, denn diese aus den gewöhnlichen Gesetzen der Brechung und Zurückwerfung von kugelförmigen Körpern abzuleiten, scheint sehr schwierig, wenn überhaupt möglich zu sein.« Diese ganze Untersuchung hat gezeigt, dass dies für den grossen Bogen an sich wohl möglich ist, aber bei den von Bouguer und Scoresby gefundenen Dimensionen ist es allerdings nicht möglich. Wir werden daher

zu den Eisnadeln unsere Zuflucht zu nehmen haben und es erscheint allerdings möglich, dass es gewisse Krystallwinkel in den Eisnadeln gibt, bei welchen bei ein- oder mehrmaliger, in bestimmter Weise vor sich gehender Reflexion des Lichtstrahles in den Nadeln diese von den beiden Forschern beobachteten Erscheinungen ihre volle Erklärung finden. Wir hätten es dann dabei nicht mit dem weissen Regenbogen, sondern mit einem grossen Sonnenring zu thun, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt der Sonne ist. Da diese Untersuchung dem Regenbogen gewidmet ist, so gehe ich hier nicht weiter darauf ein und hoffe bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Hiemit schliesse ich dieses Kapitel über den weissen Regenbogen.

5. Zusammenfassung und Schlussfolgerung.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind die folgenden.

1. Die grosse Mannigfaltigkeit des Regenbogens, sowohl in den Farbenerscheinungen des Hauptregenbogens und seiner Secundären, als in der Breite und Lage der Bogen ergibt sich vollkommen aus den auf Grund der Airy'schen Theorie durchgeführten Farbenberechnungen. Die Übereinstimmung sowohl mit den Beobachtungen des Regenbogens in der Natur, als auch mit den im Laboratorium gemachten Versuchen ist eine vollkommene. Die Airy'sche Theorie erweist sich daher als richtig und gestattet eine einheitliche Erklärung aller Regenbogenerscheinungen selbst in den complicirtesten Fällen, da aus ihr unmittelbar sowohl alle Farbenveränderlichkeit, als auch die secundären Bögen, sowie alle Veränderlichkeit in der Breite und Lage der Bögen sich ergibt.

2. Alle diese Veränderlichkeiten hängen nur von der Verschiedenheit der Grösse der Tropfen ab, welche die Regenbogen erzeugen.

3. Die Umkehrung der Farbenfolge ist für die auf das weisse Band folgenden Secundären ein Postulat der Airy'schen Theorie.

4. Die weissen Regenbogen (Hauptregenbogen) [eigentlich Nebelbogen, da sie nur auf Nebel auftreten], finden in Airy's Theorie nicht nur ihre volle Erklärung, sondern sind für

Tröpfchen von 0·050 *mm* abwärts ebenfalls schlechterdings ein Postulat dieser Theorie.

5. Die Secundären schliessen sich entweder in unmittelbarer Aneinanderreihung an den Hauptregenbogen und unter sich aneinander an oder sie sind durch dunkle Zwischenräume getrennt. Auch diese Erscheinung ergibt sich ohneweiters aus Airy's Theorie; auch sie ist nur von der Grösse der Tröpfchen abhängig.

Wenn nicht schon im Hauptregenbogen das weisse Band auftritt (siehe sub 4), muss, je nach der Tropfengrösse, einer der Secundären dasselbe aufweisen; je grösser die Tropfen, desto höher die Zahl dieser Secundären.

6. Aus den Farben, wie auch aus der Aneinanderreihung oder Abtrennung der Secundären ergeben sich manche Anhaltspunkte, um die Grösse der den Regenbogen erzeugenden Tropfen auch ohne Messung der Winkel der Bogen angenähert bestimmen zu können:

a) Aus den Farben.

α. Ein auffallend intensives Violett-Rosa im Hauptregenbogen mit einem lebhaften Grün (von Blau nur eine Spur oder gar nichts vorhanden) vor demselben weist auf eine Tropfengrösse von 1 bis 2 *mm* Durchmesser hin. Nach den Farbenberechnungen liegt dabei das Maximum der Intensität im Anfange des Violett (vom Grün her). Siehe auch 6 *a)*. Ich habe einen solchen sehr schönen Regenbogen (ohne Secundäre) am 7. Nov. 1896 um $8^h\ 15^m$ a. beobachtet. Meine Aufzeichnung darüber lautet: Schönes, breites Hellroth; dann Orange und Gelb (zusammen nur mässig breit); lebhaftes, strahlendes, breites Grünblau mit blauem Rande gegen das Violett; sehr schönes, intensives, breites Violett.

Es ist ein charakteristisches Kennzeichen der Regenbogen dieser Tropfengrössen, dass nur sie ein volles, schönes, reines Roth im Hauptregenbogen aufweisen. (Siehe die Farbentabellen 14 und 15, Seite 181 und 182).

β. Sind die Farben der Secundären nur Grün und Violett (das Blau zwischen Grün und Violett erscheint meist schon der Contrastwirkung halber auch als Grün, da das Violett meist in Rosa sticht) und fehlt also das Gelb ganz, so hat man es mit einer Grösse der Tropfen von etwa 0·5 *mm* Durchmesser zu thun. Die Secundären zeigen nirgends eine Unterbrechung und schliessen sich unmittelbar an den Hauptbogen an. Solche Beobachtungen liegen sehr viele vor; es wird in ihnen stets hervorgehoben, dass die Farbenwiederholung nur Grün und »Roth« (Rosa) sei. (Siehe die Farbentabelle 150).

Das Roth im Hauptregenbogen ist schon sehr schwach.

γ. Ein Auftreten des Gelb in den Secundären bedeutet entweder Tropfen von 0·3 oder 0·2 *mm* Durchmesser. Ist das Gelb schwächer ausgeprägt und die Secundären an den Hauptregenbogen und untereinander ohne Unterbrechung angeschlossen, so ist die Tropfengrösse näher an 0·3 *mm*; ist das Gelb im ersten Secundären schön entwickelt und fehlt es im zweiten und dritten, wobei letztere untereinander und vom ersten getrennt erscheinen (es möchte zuweilen vorkommen, dass auch der erste Secundäre vom Hauptregenbogen abgetrennt erschiene), so haben wir Tropfen von 0·2 *mm* Durchmesser oder etwas weniger vor uns. (Siehe die Farbentabellen 151 und 152).

Der Hauptregenbogen ist in diesen Fällen auch durch seine Breite ausgezeichnet; er enthält kein reines Roth mehr, aber die ganze übrige Farbenfolge ist sehr schön entwickelt. Beobachtet werden diese Regenbogen nicht selten.

b) Aus dem Aneinanderschliessen oder der Abtrennung der Secundären.

α. Ist keine Abtrennung weder vom Hauptregenbogen, noch der Secundären untereinander vor-

handen, so sind die Tropfen grösser als 0·2 *mm* (Durchmesser); ist eine Abtrennung nur unter den Secundären, nicht aber des ersten Secundären vom Hauptregenbogen zu bemerken, so liegt die Tropfengrösse von 0·2 *mm* Durchmesser vor, wobei es vorkommen kann, dass ein schmaler, schwacher Streifen auch den ersten Secundären vom Hauptregenbogen zu trennen scheint; ist der erste Secundäre deutlich und voll vom Hauptregenbogen getrennt, so ist die Tropfengrösse kleiner als 0·2 *mm* (Durchmesser).

β. Sind ohne jede Abtrennung mehr als fünf oder fünf Secundäre, ohne dass einer Weiss enthält, zu sehen, so liegt die Tropfengrösse von 1 *mm* Durchmesser vor. Die Secundären zeigen dann nur ein breiteres Violett (Rosa) und ein schmales, schwaches Blaugrün. (Siehe die Beobachtung von Hochmayr, Meteorolog. Zeitschrift, Bd. VII, S. 285.)

Bei weniger als fünf Secundären gelten die Kennzeichen unter *a)*, α und β.

γ. Ist der erste Secundäre deutlich und voll vom Hauptregenbogen getrennt und enthält er deutlich weisse Töne, so sind die Tropfen von der Grösse 0·08—0·10 *mm* im Durchmesser.

δ. Ist im Hauptregenbogen deutlich ein weisser Streifen zu sehen, ohne dass man von einem eigentlichen weissen Regenbogen sprechen kann, so ist eine Tropfengrösse von etwa 0·06 *mm* Durchmesser vorhanden.

7. Ein echter weisser Regenbogen (Hauptregenbogen), bei welchem nur der äussere Rand gelblichorange, der innere bläulich gefärbt erscheint, zeigt eine Grösse der Tröpfchen von 0·05 *mm* Durchmesser oder noch kleinere Tröpfchen an. Eine nähere Bestimmung der Tropfengrösse bei den weissen Regenbögen ist nur auf Grund der Winkelmessung des äusseren und inneren Randes und, wenn Secundäre sichtbar sind, des äusseren Randes des ersten Secundären zu erreichen.

8. Der zweite Regenbogen hat im Hauptbogen (Nebenregenbogen) kein eigentliches echtes Roth. Er kann auch Secundäre aufweisen.

9. Die Descartes'sche Theorie der »wirksamen Strahlen« kann keine dieser Mannigfaltigkeiten erklären und die Secundären liegen ganz ausser ihrem Bereiche. Sie ermangelt jeder Übereinstimmung mit den Thatsachen und ist daher wesentlich unrichtig. Sie würde ganz zufällig stimmen für den einzigen unmöglichen Fall, dass die Tropfen eine Grösse von unendlichem Halbmesser haben. Diese Theorie muss daher vollständig verlassen werden.

Ich hoffe, anderwärts Gelegenheit zu haben, eine elementare Darstellung der Airy'schen Theorie zu geben, um die Ausscheidung der Descartes'schen Theorie aus den gewöhnlichen Lehrbüchern zu ermöglichen.

Anhang.

Tabelle I.

a) Θ im ersten Regenbogen (Θ_1).

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
				$a = 5\,\mu$				
B	7°45'	17°50'	24°47'	31°11'	36°46'	42° 7'	47° 0'	51°45'
C	7 30	17 15	23 59	30 11	35 35	40 44	45 29	50 6
D	6 58	16 1	22 15	28 0	33 1	37 48	42 13	46 28
E	6 26	14 49	20 35	25 54	30 32	34 57	39 2	42 59
𝔈	6 9	14 9	19 39	24 43	29 9	33 23	37 16	41 2
F	6 4	13 58	19 25	24 24	28 48	32 59	36 49	40 32
𝔥	5 44	13 12	18 20	23 5	27 12	31 9	34 46	38 18
G	5 34	12 48	17 46	22 22	26 22	30 11	33 43	37 7
				$a = 10\,\mu$				
B	4°53'	11°14'	15°37'	19°39'	23°21'	26°32'	29°37'	32°36'
C	4 43	10 52	15 7	19 1	22 25	25 40	28 39	31 34
D	4 23	10 5	14 1	17 38	20 48	23 49	26 36	29 16
E	4 3	9 20	12 58	16 19	19 14	22 1	24 36	27 5
𝔈	3 52	8 55	12 23	15 34	18 22	21 2	23 29	25 51
F	3 49	8 48	12 14	15 22	18 9	20 44	23 12	25 32
𝔥	3 37	8 19	11 33	14 32	17 8	19 37	21 54	24 6
G	3 30	8 4	11 12	14 5	16 37	19 1	21 14	23 23
				$a = 15\,\mu$				
B	3°44'	8°35'	11°55'	15° 0'	17°41'	20°15'	22°36'	24°53'
C	3 36	8 18	11 32	14 31	17 6	19 36	21 53	24 6
D	3 21	7 42	10 42	13 28	15 53	18 11	20 18	22 21
E	3 6	7 8	9 54	12 27	14 41	16 49	18 46	20 40
𝔈	2 57	6 47	9 27	11 53	14 1	16 3	17 55	19 44
F	2 55	6 43	9 20	11 44	13 51	15 52	17 43	19 30
𝔥	2 45	6 21	8 49	11 5	13 5	14 59	16 43	18 25
G	2 41	6 9	8 33	10 45	12 41	14 31	16 13	17 51

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
				$a = 20\,\mu$				
B	3° 5'	7° 5'	9°50'	12°23'	14°34'	16°43'	18°39'	20°33'
C	2 59	6 51	9 31	11 59	14 5	16 10	18 3	19 53
D	2 46	6 21	8 50	11 7	13 4	15 0	16 46	18 27
E	2 33	5 53	8 10	10 17	12 5	13 53	15 30	17 4
𝔵	2 26	5 37	7 48	9 49	11 33	13 15	14 48	16 17
F	2 24	5 33	7 42	9 42	11 24	13 6	14 37	16 5
𝔶	2 16	5 14	7 17	9 10	10 46	12 22	13 48	15 12
G	2 12	5 5	7 3	8 53	10 26	11 59	13 23	14 44
				$a = 25\,\mu$				
B	2°39'	6° 6'	8°29'	10°40'	12°34'	14°24'	16° 4'	17°42'
C	2 34	5 54	8 12	10 19	12 10	13 56	15 33	17 8
D	2 23	5 29	7 37	9 35	11 17	12 56	14 26	15 56
E	2 12	5 4	7 2	8 51	10 26	11 57	13 21	14 42
𝔵	2 6	4 50	6 43	8 27	9 58	11 25	12 45	14 2
F	2 4	4 47	6 38	8 21	9 51	11 17	12 35	13 51
𝔶	1 58	4 32	6 16	7 54	9 18	10 39	11 53	13 6
G	1 54	4 23	6 4	7 39	9 1	10 19	11 32	12 41
				$a = 30\,\mu$				
B	2°21'	5°24'	7°30'	9°27'	11° 8'	12°46'	14°14'	15°41'
C	2 16	5 14	7 16	9 9	10 47	12 20	13 47	15 11
D	2 7	4 51	6 44	8 29	10 0	11 27	12 47	14 5
E	1 57	4 29	6 14	7 51	9 15	10 35	11 50	13 1
𝔵	1 52	4 17	5 57	7 29	8 49	10 7	11 18	12 26
F	1 50	4 14	5 53	7 24	8 43	10 0	11 9	12 17
𝔶	1 44	4 0	5 33	7 0	8 14	9 26	10 32	11 36
G	1 41	3 53	5 23	6 47	7 59	9 9	10 13	11 15

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
$a = 40\ \mu$								
B	1°56'	4°27'	6°12'	7°48'	9°11'	10°32'	11°45'	12°56'
C	1 53	4 19	6 0	7 33	8 54	10 11	11 22	12 31
D	1 44	4 0	5 34	7 0	8 15	9 27	10 33	11 37
E	1 36	3 42	5 9	6 28	7 38	8 44	9 45	10 45
𝔢	1 32	3 32	4 55	6 11	7 17	8 21	9 19	10 15
F	1 31	3 29	4 51	6 6	7 12	8 15	9 12	10 8
𝔶	1 26	3 18	4 35	5 46	6 48	7 47	8 41	9 34
G	1 23	3 12	4 26	5 35	6 35	7 33	8 26	9 17
$a = 50\ \mu$								
B	1°40'	3°50'	5°20'	6°42'	7°54'	9° 3'	10° 6'	11° 8'
C	1 37	3 42	5 9	6 29	7 39	8 45	9 47	10 46
D	1 30	3 27	4 47	6 1	7 6	8 8	9 5	9 59
E	1 23	3 11	4 25	5 34	6 34	7 31	8 23	9 14
𝔢	1 19	3 2	4 13	5 19	6 16	7 11	8 1	8 49
F	1 18	3 0	4 10	5 15	6 11	7 5	7 55	8 43
𝔶	1 14	2 50	3 56	4 58	5 51	6 42	7 29	8 14
G	1 12	2 45	3 49	4 49	5 40	6 29	7 15	7 59
$a = 100\ \mu$								
B	1° 3'	2°25'	3°22'	4°14'	4°59'	5°43'	6°23'	7° 1'
C	1 1	2 21	3 16	4 6	4 50	5 32	6 10	6 48
D	0 56	2 11	3 1	3 48	4 29	5 8	5 44	6 18
E	0 52	2 1	2 48	3 31	4 9	4 45	5 18	5 50
𝔢	0 50	1 55	2 40	3 21	3 57	4 32	5 3	5 34
F	0 49	1 54	2 38	3 19	3 55	4 29	5 0	5 30
𝔶	0 47	1 48	2 29	3 8	3 41	4 14	4 43	5 12
G	0 45	1 44	2 25	3 2	3 35	4 6	4 34	5 2

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
					$a = 150\,\mu$					
B	0° 48'	1° 51'	2° 34'	3° 14'	3° 49'	4° 22'	4° 52'	5° 22'	5° 49'	6° 16'
C	0 47	1 47	2 29	3 8	3 41	4 13	4 43	5 11	5 38	6 4
D	0 43	1 39	2 18	2 54	3 25	3 55	4 22	4 49	5 14	5 37
E	0 40	1 32	2 8	2 41	3 10	3 37	4 3	4 27	4 50	5 12
𝔢	0 38	1 28	2 2	2 34	3 1	3 27	3 52	4 15	4 37	4 58
F	0 38	1 27	2 1	2 32	2 59	3 25	3 49	4 12	4 34	4 54
𝔥	0 36	1 22	1 54	2 23	2 49	3 14	3 36	3 58	4 18	4 38
G	0 35	1 20	1 51	2 19	2 44	3 8	3 30	3 51	4 11	4 30
					$a = 250\,\mu$					
B	0° 34·3	1° 19'	1° 50'	2° 18'	2° 43'	3° 6'	3° 28'	3° 49'	4° 9'	4° 27'
C	0 33·2	1 16	1 46	2 13	2 37	3 0	3 21	3 41	4 1	4 19
D	0 30·8	1 11	1 38	2 4	2 26	2 47	3 7	3 25	3 43	4 1
E	0 28·4	1 6	1 31	1 55	2 15	2 35	2 53	3 10	3 26	3 42
𝔢	0 27·2	1 3	1 27	1 49	2 9	2 28	2 45	3 1	3 17	3 32
F	0 26·8	1 2	1 26	1 48	2 7	2 26	2 43	2 59	3 15	3 29
𝔥	0 25·3	0 58	1 21	1 42	2 0	2 18	2 34	2 49	3 4	3 18
G	0 24·6	0 56	1 19	1 39	1 57	2 14	2 29	2 44	2 58	3 12

$a = 500\,\mu$

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	0° 21'6	0° 49'7	1° 9'0	1° 26'9	1° 42'4	1° 57'3	2° 10'9	2° 24'2	2° 36'6	2° 48'8
C	0 20·9	0 48·1	1 6·8	1 24·0	1 39·1	1 53·5	2 6·7	2 19·5	2 31·5	2 43·4
D	0 19·4	0 44·6	1 2·0	1 18·0	1 31·9	1 45·3	1 57·5	2 9·4	2 20·5	2 31·5
E	0 17·9	0 41·2	0 57·3	1 12·1	1 25·0	1 37·4	1 48·7	1 59·7	2 10·0	2 20·2
𝔈	0 17·1	0 39·4	0 54·7	1 8·8	1 21·1	1 32·9	1 43·7	1 54·2	2 4·1	2 13·8
F	0 16·9	0 38·9	0 54·1	1 8·0	1 20·2	1 31·8	1 42·5	1 52·9	2 2·6	2 12·2
𝔥	0 16·0	0 36·8	0 51·1	1 4·2	1 15·8	1 26·7	1 36·8	1 46·6	1 55·8	2 4·9
G	0 15·5	0 35·6	0 49·5	1 2·3	1 13·5	1 24·1	1 33·9	1 43·5	1 52·3	2 1·1

$a = 500\,\mu$ (Fortsetzung)

	VI.		VII.		VIII.		IX.		X.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	3° 0'3	3° 11'8	3° 22'6	3° 33'3	3° 43'7	3° 53'8	4° 3'7	4° 13'5	4° 23'2	4° 32'7
C	2 54·5	3 5·5	3 15·9	3 26·4	3 36·4	3 46·2	3 55·8	4 5·3	4 14 6	4 23·8
D	2 41·9	2 52·1	3 1·8	3 11·5	3 20·8	3 29·9	3 38·8	3 47·5	3 56·2	4 4·8
E	2 29·7	2 39·2	2 48·2	2 57·1	3 5·7	3 14·2	3 22·4	3 30·5	3 38·6	3 46·4
𝔈	2 22·9	2 31·9	2 40·5	2 49·1	2 57·3	3 5·3	3 13·2	3 20·9	3 28·6	3 36·1
F	2 21·2	2 30·1	2 38·6	2 47·1	2 55·2	3 3·1	3 10·9	3 18·5	3 26·1	3 33·6
𝔥	2 13·4	2 21·8	2 29·8	2 37·8	2 45·5	2 53·0	3 0·3	3 7·5	3 14·7	3 21·7
G	2 9·4	2 17·5	2 25·3	2 33·1	2 40·5	2 47·8	2 54·9	3 1·9	3 8·8	3 15·6

$a = 1000\,\mu$

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	0° 13'6	0° 31'3	0° 43'5	0° 54'7	1° 4'5	1° 13'9	1° 22'5	1° 30'8	1° 38'6	1° 46'3
C	0 13·2	0 30·3	0 42·1	0 52·9	1 2·4	1 11·5	1 19·8	1 27·9	1 35'4	1 42·9
D	0 12·2	0 28·1	0 39·0	0 49·1	0 57·9	1 6·3	1 14·0	1 21·5	1 28·5	1 35·4
E	0 11·3	0 26·0	0 36·1	0 45·4	0 53·6	1 1·3	1 8·5	1 15·4	1 21·9	1 28·2
𝔵	0 10·8	0 24·8	0 34·4	0 43·3	0 51·1	0 58·5	1 5·3	1 11·9	1 18·1	1 24·2
F	0 10·7	0 24·5	0 34·1	0 42·8	0 50·5	0 57·9	1 4·6	1 11·1	1 17·2	1 23·3
𝔥	0 10·1	0 23·2	0 32·2	0 40·5	0 47·7	0 54·6	1 1·0	1 7·2	1 13·0	1 18·7
G	0 9·8	0 22·5	0 31·2	0 39·3	0 46·3	0 53·0	0 59·2	1 5·2	1 10·8	1 16·3

$a = 1000\,\mu$ (Fortsetzung)

	VI.		VII.		VIII.		IX.		X.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	1° 53'6	2° 0'7	2° 7'6	2° 14'4	2° 20'9	2° 27'3	2° 33'5	2° 39'7	2° 45'8	2° 51'8
C	1 49·9	1 56·9	2 3·5	2 10·1	2 16·4	2 22·6	2 28·6	2 34·5	2 40·4	2 46·2
D	1 42·0	1 48·4	1 54·5	2 0·6	2 6·5	2 12·2	2 17·8	2 23·3	2 28·8	2 34·2
E	1 34·3	1 40·2	1 45·9	1 51·6	1 57·0	2 2·3	2 7·5	2 12·5	2 17·6	2 22·6
𝔵	1 30·0	1 35·6	1 41·0	1 46·4	1 51·6	1 56·7	2 1·6	2 6·5	2 11·3	2 16·0
F	1 29·0	1 34·6	1 40·0	1 45·3	1 50·4	1 55·4	2 0·2	2 5·1	2 9·8	2 14·5
𝔥	1 24·0	1 29·3	1 34·4	1 39·4	1 44·2	1 49·0	1 53·6	1 58·1	2 2·6	2 7·1
G	1 21·5	1 26·7	1 31·6	1 36·5	1 41·1	1 45·7	1 50·2	1 54·6	1 59·0	2 3·3

b) A im ersten Regenbogen (A_1).

	I.		II.		III.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
			$a = 5\,\mu$			
B	34° 31'	24° 26'	17° 29'			
C	34 38	24 53	18 9			
D	34 54	25 51	19 37			
E	35 12	26 49	21 3			
𝔈	35 11	27 11	21 41			
F	35 8	27 14	21 47			
𝔥..........	35 10	27 42	22 34			
G	35 10	27 56	22 58			
			$a = 10\,\mu$			
B	37° 23'	30° 58'	26° 39'	22° 27'		
C	37 25	31 16	27 1	23 7		
D	37 29	31 47	27 51	24 14		
E	37 35	32 18	28 40	25 19		
𝔈	37 28	32 25	28 57	25 46		
F	37 23	32 24	28 58	25 50		
𝔥..........	37 17	32 35	29 21	26 22		
G	37 14	32 40	29 32	26 39		
			$a = 15\,\mu$			
B	38° 32'	33° 41'	30° 21'	27° 16'	24° 35'	22° 1'
C	38 32	33 50	30 36	27 37	25 2	22 32
D	38 31	34 10	31 10	28 24	25 59	23 41
E	38 32	34 30	31 44	29 11	26 57	24 59
𝔈	38 23	34 33	31 53	29 29	27 19	25 17
F	38 17	34 29	31 52	29 28	27 21	25 20
𝔥..........	38 9	34 33	32 5	29 49	27 49	25 55
G	38 3	34 35	32 11	29 39	28 3	26 13

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
				$a = 20\ \mu$				
B	39°11'	35°11'	32°26'	29°53'	27°42'	25°33'	23°37'	21°43'
C	39 9	35 17	32 37	30 9	28 3	25 58	24 5	22 15
D	39 6	35 31	33 2	30 45	28 48	26 52	25 6	23 25
E	39 5	35 45	33 28	31 21	29 33	27 45	26 8	24 34
𝔟	38 54	35 43	33 32	31 31	29 47	28 5	26 32	25 3
F	38 48	35 39	33 30	31 30	29 48	28 6	26 35	25 7
𝔥	38 38	35 40	33 37	31 44	30 8	28 32	27 6	25 42
G	38 32	35 39	33 41	31 51	30 18	28 45	27 21	26 0
				$a = 25\ \mu$				
B	39°37'	36°10'	33°47'	31°36'	29°42'	27°52'	26°12'	24°34'
C	39 34	36 14	33 56	31 49	29 58	28 12	26 35	25 0
D	39 29	36 23	34 15	32 17	30 35	28 56	27 26	25 56
E	39 26	36 34	34 36	32 47	31 12	29 41	28 17	26 56
𝔟	39 14	36 30	34 39	32 53	31 22	29 55	28 35	27 18
F	30 8	36 25	34 34	32 51	31 21	29 55	28 37	27 21
𝔥	38 56	36 22	34 38	33 0	31 36	30 15	29 1	27 48
G	38 50	36 21	34 40	33 5	31 43	30 25	29 12	28 3
				$a = 30\ \mu$				
B	39°55'	36°52'	34°46'	32°49'	31° 8'	29°30'	28° 2'	26°35'
C	39 52	36 54	34 52	32 59	31 21	29 48	28 21	26 57
D	39 45	37 1	35 8	33 23	31 52	30 25	29 5	27 47
E	39 41	37 9	35 24	33 47	32 23	31 3	29 48	28 37
𝔟	39 28	37 3	35 23	33 51	32 31	31 13	30 2	28 54
F	39 22	36 58	35 19	33 48	32 29	31 12	30 3	28 55
𝔥	39 10	36 54	35 21	33 54	32 40	31 28	30 22	29 18
G	39 3	36 51	35 21	33 57	32 45	31 35	30 31	29 29

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
				$a = 40\,\mu$				
B	40°20'	37°49'	36° 4'	34°28'	33° 5'	31°44'	30°31'	29°20°
C	40 15	37 49	36 8	34 35	33 14	31 57	30 46	29 37
D	40 8	37 52	36 18	34 52	33 37	32 25	31 19	30 15
E	40 2	37 56	36 29	35 10	34 0	32 54	31 53	30 53
𝔟	39 58	37 48	36 25	35 9	34 3	32 59	32 1	31 5
F	39 41	37 43	36 21	35 6	34 0	32 57	32 0	31 4
𝔥	39 28	37 36	36 19	35 8	34 6	33 7	32 13	31 20
G	39 21	37 32	36 18	35 9	34 9	33 11	32 18	31 27
				$a = 50\,\mu$				
B	40°36'	38°26'	36°56'	35°34'	34°22'	33°13'	32°10'	31° 8'
C	40 31	38 26	36 59	35 39	34 29	33 23	32 21	31 22
D	40 22	38 25	37 5	35 51	34 48	33 44	32 47	31 53
E	40 15	38 27	37 13	36 4	35 4	34 7	33 15	32 24
𝔟	40 1	38 18	37 7	36 1	35 4	34 9	33 19	32 31
F	39 54	38 12	37 2	35 57	35 1	34 7	33 17	32 29
𝔥	39 40	38 4	36 58	35 56	35 3	34 12	33 25	32 40
G	39 32	37 59	36 55	35 55	35 4	34 15	33 29	32 45
				$a = 100\,\mu$				
B	41°13'	39°51'	38°54'	38° 2'	37°17'	36°33°	35°53'	35°15'
C	41 7	39 47	38 52	38 2	37 18	36 36	35 58	35 20
D	40 56	39 41	38 51	38 4	37 23	36 44	36 8	35 34
E	40 46	39 37	38 50	38 7	37 29	36 53	36 20	35 48
𝔟	40 30	39 25	38 40	38 9	37 23	36 48	36 17	35 46
F	40 23	39 18	38 34	37 53	37 17	36 43	36 12	35 42
𝔥	40 7	39 6	38 25	37 46	37 13	36 40	36 11	35 42
G	39 59	39 0	38 19	37 42	37 9	36 38	36 10	35 42

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
$a = 150\,\mu$										
B	41° 28'	40° 25'	39° 42'	39° 2'	38° 27'	37° 54'	37° 24'	36° 54'	36° 27'	36° 0'
C	41 21	40 21	39 39	39 0	38 27	37 55	37 25	36 57	36 30	36 4
D	41 9	40 13	39 34	38 58	38 27	37 57	37 30	37 3	36 38	36 15
E	40 58	40 6	39 30	38 57	38 28	38 1	37 35	37 11	36 48	36 26
𝔟	40 42	39 52	39 18	38 46	38 19	37 53	37 28	37 5	36 43	36 22
F	40 34	39 45	39 11	38 40	38 13	37 47	37 23	37 0	36 38	36 18
𝔥	40 18	39 32	39 0	38 31	38 5	37 40	37 18	36 56	36 36	36 16
G	40 9	39 24	38 53	38 25	38 0	37 36	37 14	36 53	36 31	36 14
$a = 250\,\mu$										
B	41° 41'7	40° 57'	40° 26'	39° 58'	39° 33'	39° 10'	38° 48'	38° 27'	38° 7'	37° 29'
C	41 34·8	40 52	40 22	39 55	39 31	39 8	38 47	38 27	38 7	37 49
D	41 21·2	40 41	40 14	39 48	39 26	39 5	38 45	38 27	38 9	37 51
E	41 9·6	40 32	40 7	39 43	39 23	39 3	38 45	38 28	38 12	37 56
𝔟	40 52·8	40 17	39 53	39 31	39 11	38 52	38 35	38 19	38 3	37 50
F	40 45·2	40 10	39 46	39 24	39 5	38 46	38 29	38 13	37 57	37 43
𝔥	40 28·7	39 56	39 33	39 12	38 54	38 36	38 20	38 5	37 50	37 36
G	40 19·4	39 48	39 25	39 5	38 47	38 30	38 15	38 0	37 46	37 32

$a = 500\,\mu$

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	41° 54'4	41° 26'3	41° 7'0	40° 49'1	40° 33'6	40° 18'7	40° 5'1	39° 51'8	39° 39'4	39° 27'2
C	41 47·1	41 19·9	41 1·2	40 44·0	40 28·9	40 14·5	40 1·3	39 48·5	39 36·5	39 24 6
D	41 32·6	41 7·4	40 50·0	40 34·0	40 20·1	40 6 7	39 54·5	39 42 6	39 31·5	39 20·5
E	41 20·1	40 56·8	40 40·7	40 25·9	40 13·0	40 0·6	39 49·3	39 38·3	39 28·0	39 17·8
ꝁ	41 2·9	40 40·6	40 25·3	40 11·2	39 58·9	39 47·1	39 36·3	39 25·8	39 15 9	39 6 2
F	40 55·1	40 33·1	40 17·9	40 4·0	39 51·8	39 40·2	39 29·5	39 19 1	39 9·4	38 59·8
ŋ	40 38·0	40 17·2	40 2·9	39 49·8	39 38·2	39 27·3	39 17·2	39 7·4	38 58·2	38 49·1
G	40 28·5	40 8·4	39 54·5	39 41·7	39 30·5	39 19·9	39 10·1	39 0·5	38 51·7	38 42·9

$a = 500\,\mu$ (Fortsetzung)

	VI.		VII.		VIII.		IX.		X.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	39° 15'7	39° 4'3	38° 53'4	38° 42'7	38° 32'3	38° 22'2	38° 12'3	38° 2'5	37° 52'8	37° 43'3
C	39 13·5	39 2·5	38 52·1	38 41·6	38 31·6	38 21·8	38 12·2	38 2·7	37 53·4	37 44·2
D	39 10·1	38 59·9	38 50·2	38 40·5	38 31·2	38 22·1	38 13·2	38 4·5	37 55·8	37 47·2
E	39 8·3	38 58·8	38 49·8	38 40·9	38 32·3	38 23·8	38 15·6	38 7·5	37 59·4	37 51·6
ꝁ	38 57·1	38 48·1	38 39·5	38 30·9	38 22·7	38 14·7	38 6·8	37 59·1	37 51·4	37 43·9
F	38 50·8	38 41·9	38 33·4	38 24·9	38 16·8	38 8·9	38 1·1	37 53·5	37 45·9	37 38·4
ŋ	38 40·6	38 32·2	38 24·2	38 16·2	38 8·5	38 1·0	37 53·7	37 46·5	37 39·3	37 32·3
G	38 34·6	38 26·5	38 18·7	38 10·9	38 3·5	37 56·2	37 49·1	37 42·1	37 35·2	37 28·4

$a = 1000\,\mu$

	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	42° 2′4	41° 44′7	41° 32′5	41° 21′3	41° 11′5	41° 2′1	40° 53′5	40° 45′2	40° 37′4	40° 29′7
C	41 54·8	41 37·7	41 25·9	41 15·1	41 5·6	40 56·5	40 48·2	40 40·1	40 32·6	40 25·1
D	41 39·8	41 23·9	41 13·0	41 2·9	40 54·1	40 45·7	40 38·0	40 30·5	40 23·5	40 16·6
E	41 26·7	41 12 0	41 1·9	40 52·6	40 44·4	40 36·7	40 29·5	40 22·6	40 16·1	40 9·8
$\mathfrak{x}$	41 9·2	40 55·2	40 45·6	40 36·7	40 28·9	40 21·5	40 14·7	40 8·1	40 1·9	39 55·8
F	41 1·3	40 47·5	40 37·9	40 29·2	40 21·5	40 14·1	40 7·4	40 0·9	39 54·8	39 48·7
$\mathfrak{h}$	40 43·9	40 30·8	40 21·8	40 13·5	40 6·3	39 59·4	39 53 0	39 46·8	39 41·0	39 35·3
G	40 34·2	40 21·5	40 12·8	40 4·7	39 57·7	39 51·0	39 44·8	39 38·8	39 33 2	39 27·7

$a = 1000\,\mu$ (Fortsetzung)

	VI.		VII.		VIII.		IX.		X.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	40° 22′4	40° 15′3	40° 8′4	40° 1′6	39° 55′1	39° 48′7	39° 42′5	39° 36′3	39° 30′2	39° 24′2
C	40 18·1	40 11·1	40 4·5	39 57·9	39 51 6	39 45·4	39 39·4	39 33·5	39 27·6	39 21·8
D	40 10·0	40 3·6	39 57·5	39 51·4	39 45·5	39 39·8	39 34·2	39 28·7	39 23·2	39 17·8
E	40 3·7	39 57·8	39 52·1	39 46·4	39 41·0	39 35·7	39 30·5	39 25·5	39 20·4	39 15·4
$\mathfrak{x}$	39 50 0	39 44·4	39 39·0	39 33·6	39 28·4	39 23·3	39 18·4	39 13·5	39 8·7	39 4·0
F	39 43·0	39 37·4	39 32·0	39 26·7	39 21·6	39 16·6	39 11·8	39 6·9	39 2·2	38 57·5
$\mathfrak{h}$	39 30·0	39 24·7	39 19·6	39 14·6	39 9·8	39 5·0	39 0·4	38 55·9	38 51·4	38 46·9
G	39 22·5	39 17·3	39 12·4	39 7·5	39 2·9	38 58·3	38 53·8	38 49·4	38 45·0	38 40·7

Tabelle II.

a) Θ im zweiten Regenbogen (Θ_2).

	$a = 15\,\mu$ I.		$a = 20\,\mu$ I.		$a = 30\,\mu$ I.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	6° 40'	15° 20'	5° 30'	12° 39'	4° 12'	9° 39'
C	6 26	14 49	5 20	12 14	4 3	9 21
D	5 59	14 1	4 56	11 20	3 47	8 40
E	5 32	12 44	4 33	10 30	3 29	8 0
𝔢	5 16	12 7	4 21	10 2	3 20	7 39
F	5 13	12 0	4 17	9 55	3 16	7 34
𝔥	4 55	11 20	4 3	9 21	3 6	7 9
G	4 48	10 59	3 56	9 5	3 0	6 56

	$a = 40\,\mu$ I.		$a = 50\,\mu$ I.		$a = 100\,\mu$ I.		$a = 100\,\mu$ II.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	3°27'	7°57'	2°59'	6°51'	1°52'	4°19'	6° 1'	7°34'
C	3 22	7 43	2 53	6 36	1 49	4 12	5 50	7 19
D	3 6	7 9	2 41	6 10	1 41	3 54	5 23	6 47
E	2 51	6 36	2 28	5 41	1 33	3 36	5 0	6 17
𝔢	2 44	6 19	2 21	5 25	1 29	3 26	4 46	5 59
F	2 42	6 13	2 19	5 21	1 28	3 24	4 42	5 55
𝔥........	2 34	5 54	2 12	5 4	1 24	3 12	4 26	5 36
G	2 28	5 43	2 9	4 55	1 22	3 6	4 19	5 25

	a = 250 μ					
	I.		II.		III.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B.........	1° 1'	2° 20'	3° 15'	4° 6'	4° 51'	5° 32'
C.........	0 59	2 16	3 9	3 57	4 41	5 21
D.........	0 55	2 7	2 55	3 41	4 21	4 58
E.........	0 51	1 58	2 43	3 25	4 1	4 37
𝔵.........	0 49	1 52	2 35	3 15	3 50	4 24
F.........	0 48	1 51	2 34	3 13	3 47	4 21
𝔶.........	0 45	1 44	2 25	3 2	3 34	4 6
G.........	0 44	1 40	2 21	2 57	3 29	4 1

	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
	a = 500 μ							
B........	0°38'.5	1°29'	2° 3'	2°35'	3° 2'	3°29'	3°54'	4°17'
C........	37·3	1 26	1 59	2 30	2 57	3 22	3 47	4 9
D........	34·6	1 20	1 50	2 19	2 44	3 8	3 31	3 51
E........	32·0	1 14	1 42	2 9	2 32	2 54	3 15	3 35
𝔵........	30·5	1 10	1 38	2 3	2 25	2 46	3 6	3 24
F........	30·2	1 9	1 37	2 1	2 23	2 44	3 4	3 22
𝔶........	28·6	1 6	1 31	1 55	2 15	2 35	2 53	3 10
G........	27·7	1 4	1 28	1 51	2 11	2 30	2 48	3 4
	a = 1000 μ							
B........	0°24'.3	0°55'.9	1°18'	1°38'	1°55'	2°12'	2°27'	2°42'
C........	23·6	54·1	1 15	1 35	1 51	2 8	2 22	2 37
D........	21·8	50·2	1 10	1 28	1 43	1 58	2 12	2 26
E........	20·2	46·5	1 5	1 21	1 36	1 49	2 2	2 15
𝔵........	19·3	44·3	1 1	1 17	1 31	1 44	1 57	2 9
F........	19·1	43·8	1 1	1 16	1 30	1 43	1 55	2 7
𝔶........	18·1	41·4	0 58	1 12	1 25	1 37	1 50	2 0
G........	17·5	40·1	56	1 10	1 23	1 35	1 46	1 56

b) *A* im zweiten Regenbogen (A_2).

	$a = 15\,\mu$ I.		$a = 20\,\mu$ I.		$a = 30\,\mu$ I.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	57° 2'	65° 42'	55° 52'	62° 59'	45° 34'	60° 1'
C	57 14	65 37	56 8	63 2	54 51	60 9
D	57 17	65 19	56 14	62 38	55 5	59 58
E	57 14	64 26	56 15	62 12	55 11	59 42
ꝁ	57 30	64 21	56 35	62 16	55 34	59 53
F	57 37	64 24	56 41	62 19	55 40	59 58
𝔥	57 55	64 20	57 3	62 21	56 6	60 9
G	58 12	64 23	57 20	62 29	56 24	60 20

	$a = 40\,\mu$ I.		$a = 50\,\mu$ I.		$a = 100\,\mu$ I.		$a = 100\,\mu$ II.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	53°47'	58°19'	53°21'	57°13'	52°14'	54°41'	56°23'	57°56'
C	54 8	58 31	53 41	57 24	52 37	55 0	56 38	58 6
D	54 24	58 27	53 59	57 28	52 59	55 12	56 41	58 5
E	54 33	58 18	54 10	57 23	53 15	55 18	56 42	57 59
ꝁ	54 58	58 33	54 35	57 39	53 43	55 40	57 0	58 13
F	55 6	58 37	54 43	57 45	53 52	55 48	57 6	58 19
𝔥	55 34	58 54	55 12	58 4	54 24	56 12	57 26	58 36
G	55 52	59 7	55 33	58 19	54 46	56 30	57 43	58 49

	$a = 250\,\mu$					
	I.		II.		III.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
B	51° 23'	52° 42'	53° 37'	54° 28'	55° 13'	55° 54'
C	51 47	53 4	53 57	54 45	55 29	56 9
D	52 13	53 25	54 13	54 59	55 39	56 16
E	52 33	53 40	54 25	55 7	55 43	56 19
𝔢	53 3	54 6	54 49	55 29	56 4	56 38
F	53 12	54 15	54 58	55 37	56 11	56 45
𝔥	53 45	54 44	55 25	56 2	56 34	57 6
G	54 6	55 4	55 45	56 21	56 53	57 25

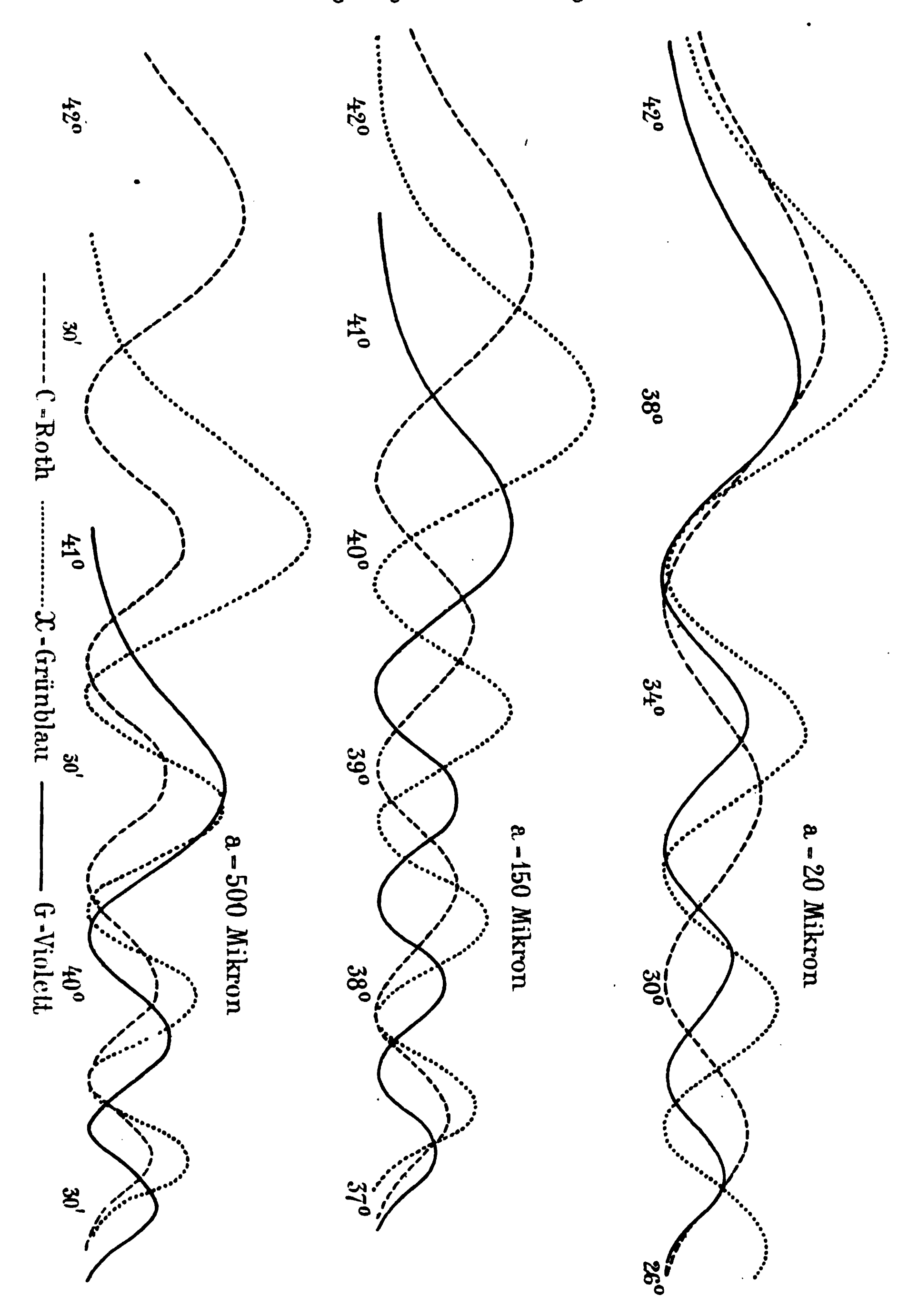
	I.		II.		III.		IV.	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
	$a = 500\,\mu$							
B	51° 0'·6	51°51'	52°25'	52°57'	53°24'	53°51'	54°16'	54°39'
C	51 25·3	52 14	52 47	53 18	53 45	54 10	54 35	54 57
D	51 52·6	52 38	53 8	53 37	54 2	54 26	54 49	55 9
E	52 14·0	52 56	53 24	53 51	54 14	54 36	54 57	55 17
𝔢	52 44·5	53 24	53 52	54 17	54 39	55 0	55 20	55 38
F	52 54·2	53 34	54 1	54 25	54 47	55 8	55 28	55 46
𝔥	53 28·6	54 6	54 31	54 55	55 15	55 35	55 53	56 10
G	53 51·7	54 28	54 52	55 15	55 35	55 54	56 12	56 28
	$a = 1000\,\mu$							
B	50°46'·3	51°17'·9	51°40'	52° 0'	52°18'	52°34'	52°49'	53° 4'
C	51 11·6	51 42·1	52 3	52 23	52 39	52 56	53 10	53 25
D	51 39·8	52 8·2	52 28	52 46	53 1	53 16	53 30	53 44
E	52 2·2	52 28·5	52 47	53 3	53 18	53 31	53 44	53 57
𝔢	52 33·3	52 58·3	53 15	53 31	53 45	53 58	54 11	54 23
F	52 43·1	53 7·8	53 25	53 40	53 54	54 7	54 19	54 31
𝔥	53 18·1	53 41·4	53 58	54 12	54 25	54 37	54 50	55 0
G	53 41·1	54 4·1	54 20	54 34	54 47	54 59	55 10	55 20

Tabelle III.

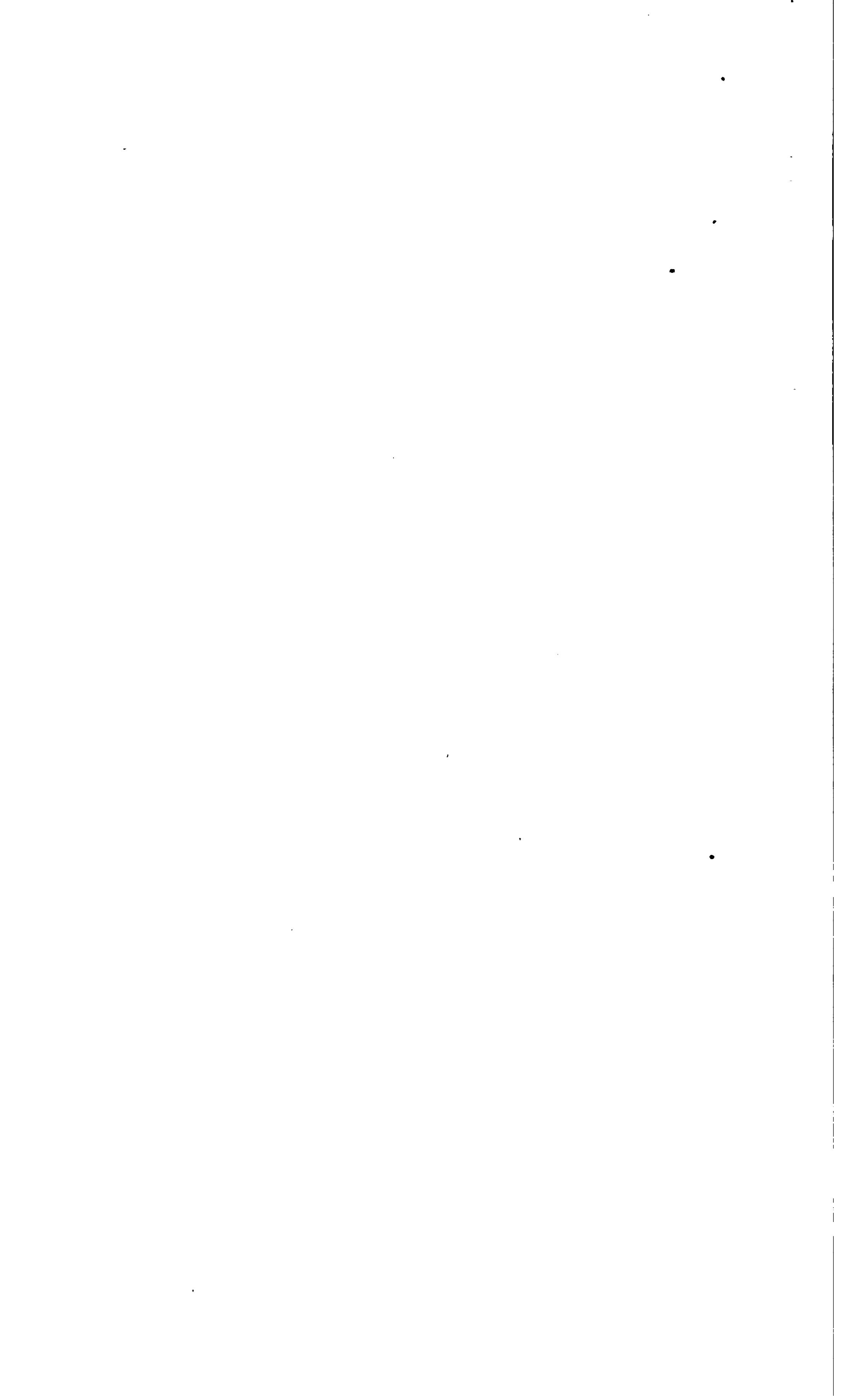
Die relative Intensität der Farben von 0·2 zu 0·2z.

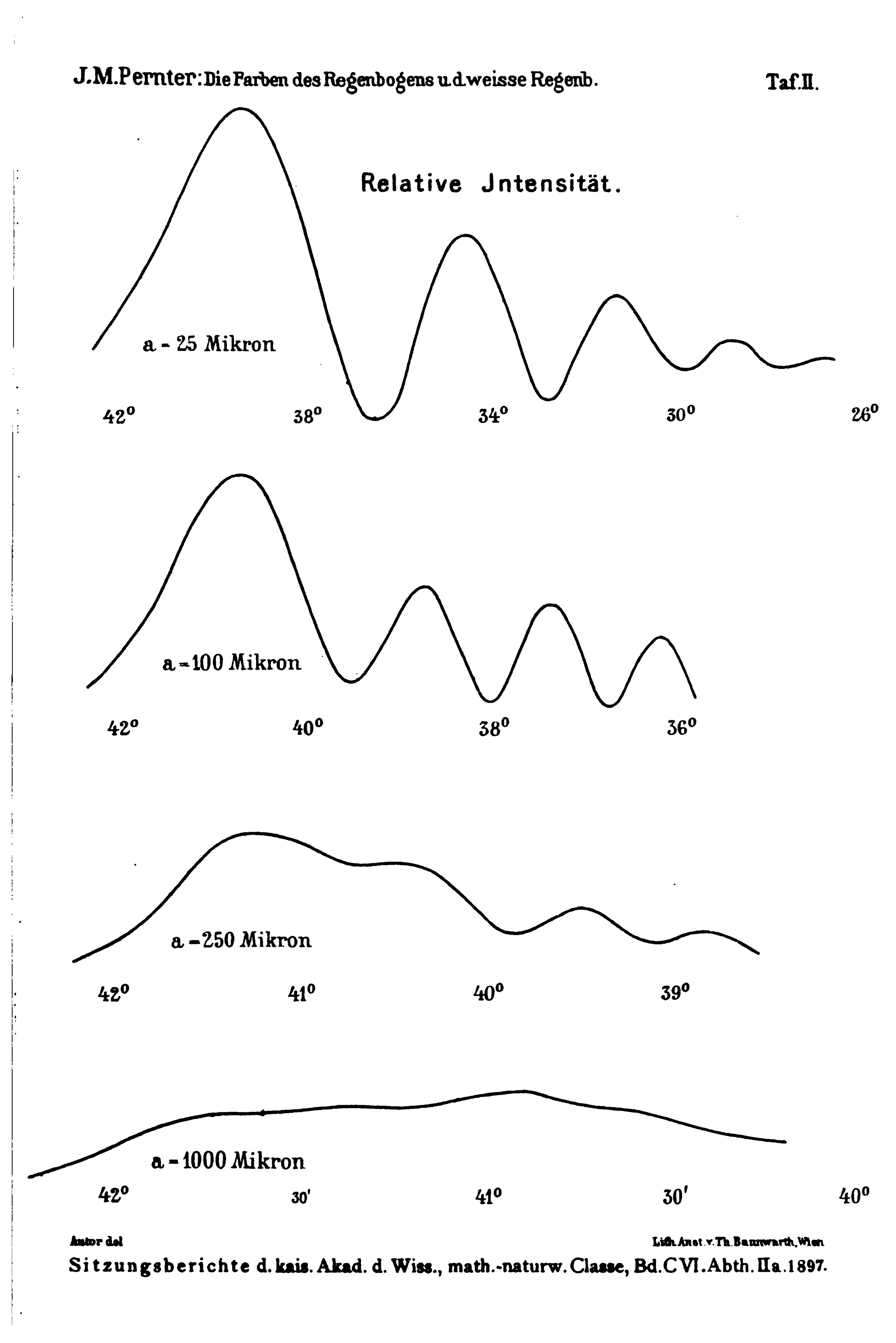
z	B	C	D	E	𝔵	F	𝔥	G	
—2·0	0·1	0·5	1·5	0·9	0·7	0·9	1·0	0·4	
—1·8	0·2	0·9	2·7	1·7	1·3	1·5	1·8	0·8	
—1·6	0·4	1·5	4·5	2·7	2·2	2·4	2·9	1·3	
—1·4	0·6	2 6	7·5	4·6	3·6	4·0	4·9	2·2	
—1·2	1·0	4·1	12·0	7·3	5·8	6·4	7·8	3·6	
—1·0	1·5	6·4	18·5	11·2	9·0	9·9	12·1	5·5	
—0·8	2·3	9·7	28·2	17·2	13·7	15·0	18·4	8·4	
—0·6	3·3	14·4	41·7	25·4	20·2	22·4	27·2	12·4	
—0·4	4·8	20·6	59·7	36·3	28·9	32·0	39·0	17·7	
—0·2	6·6	28·5	82·7	50·3	40·1	44·4	54·0	24·5	
+0·0	8·9	38·1	110·7	67·3	53·6	59·3	72·2	32·8	
0·2	11·4	49·1	142·7	86·8	69·1	76·5	93·1	42·3	
0·4	14·1	60·7	176·5	107·3	85·4	94·6	115·1	52·2	
0·6	16·7	71·9	209·0	127·1	101·2	112·0	136·3	61·9	
0·8	18·8	80·9	235·2	143·0	113·9	126·1	153·4	69·6	
1·0	20·0	86 0	250·0	152·0	121·0	134·0	163·0	74·0	....I. Max.
1·2	19·9	85·7	249·0	151·4	120·5	133·5	162·4	73·7	
1·4	18·3	78·6	228·5	138·9	110·6	122·5	149·0	67·6	
1·6	15·2	65·2	189·5	115·2	91·7	101·6	123·5	56·1	
1·8	10·9	46·9	136·7	83·1	66·2	73·3	89 1	40·5	
2·0	6·4	27·4	79·7	48·5	38·6	41·4	51·9	23·6	
2·2	2·4	10·4	30·2	18·4	14·6	16·2	19·7	9·0	
2·4	0·3	1·2	3·5	2·1	1·7	1·9	2·3	1·0	....1. Min.
2·6	0·3	1·4	4·0	2·4	1·9	2·1	2·6	1·2	
2·8	2·6	11·3	32·7	19·9	15·9	17·6	21·4	9·7	
3·0	6·3	27·3	79·2	48·2	38·4	42·5	51·7	23·5	
3·2	10·0	43·2	125·5	76·2	60·7	67·3	81·8	37·1	
3·4	12·2	52·4	152·2	92·6	73·7	81·6	99·2	45·1	....II. Max.
3·6	11·7	50·4	146·5	89·1	70·9	78·5	95·5	43·4	
3·8	8·7	37·5	109 0	66·3	52·8	58·4	71·1	32·3	
4·0	4·5	19·3	56·2	34·2	27·2	30·1	36·7	16 6	

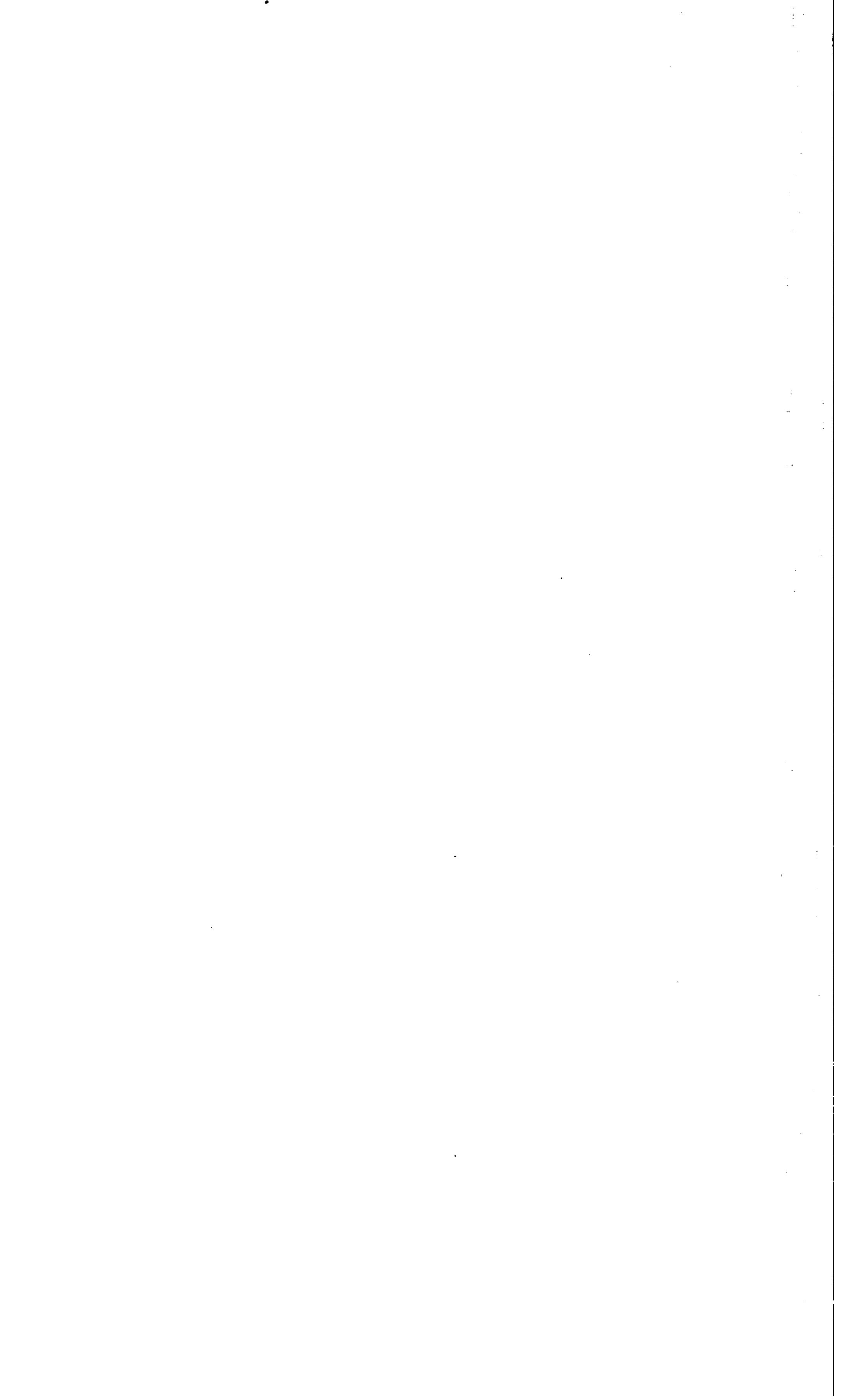
z	B	C	D	E	$\mathfrak{e}$	F	$\mathfrak{y}$	G	
4·2	1·0	4·4	12·7	7·8	6·2	6·8	8·3	3·8	
4·4	0·1	0·3	0·7	0·5	0·4	0·4	0·5	0·2	....2. Min.
4·6	2·1	8·9	26·0	15·8	12·6	13·9	16·9	7·7	
4·8	5·9	25·5	74·2	45·1	35·9	39·8	48·4	22 0	
5·0	9·3	40·0	116·2	70·7	56·3	62·3	75·8	34·4	....III. Max.
5·2	10·0	43·2	125·5	76·3	60·7	67·3	81·8	37·1	
5·4	7·6	32·5	94·5	57·5	45·7	50·7	61·6	28·0	
5·6	3·4	14·8	43·0	26·1	20·8	22·9	28·0	12·7	
5·8	0·3	1·2	3 5	2·1	1·7	1·9	2·3	1·0	....3. Min.
6·0	0·4	1·9	5·5	3·3	2·7	2·9	3·6	1·6	
6·2	3·5	15·0	43·5	26·4	21·1	23·3	28·4	12·9	
6·4	7·4	31·8	92·5	56·2	44·8	49·6	60·3	27·4	
6·6	9·0	38·7	112·5	68·4	54·4	60·3	73·3	33·3	....IV. Max.
6·8	7·1	30·4	88·2	53·7	42·7	47·3	57·5	26·1	
7·0	2 8	12·1	35·2	21·4	17·6	18·9	23 0	10·4	
7·2	0·2	0·9	2·5	1·5	1·2	1·3	1·6	0·7	....4. Min.
7·4	0·9	4·0	9·5	7·0	5·6	6·2	7·5	3·4	
7·6	4·6	19·8	57·5	35·0	27·8	30·8	37·5	17·0	
7·8	7·9	33·9	98·5	60·0	47·7	52·8	64·2	29·2	....V. Max.
8·0	7·3	31·2	90·7	55·2	43·9	48·6	59·2	26·9	
8·2	3·0	12·0	37·5	22·8	18·1	20·1	24 4	11·1	
8·4	0·2	0·9	2·5	1·5	1·2	1·3	1·6	0·7	....5. Min.
8·6	0·8	3·3	9·5	5·8	4·6	5·1	6·2	2·8	
8·8	3·8	16·3	47·2	28·7	22 9	25·3	30·8	14·0	
9·0	7·5	32·1	93·2	56·7	45·1	50 0	60·8	27·6	....VI. Max.
9·2	6·4	27·5	80·0	48·6	38·7	42·9	52·2	23·7	
9·4	2·0	8·6	25 0	15·2	12·1	13·4	16·3	7·4	
9·6	0·0	0·1	0·2	0·1	0·1	0·1	0·2	0·1	....6. Min.
9·8	1 1	4·6	13·5	8·2	6·5	7·2	8·8	4·0	
10·0	4·8	20·6	60·0	36·5	29·0	32·2	39·1	17 8	
10·2	7 2	31·0	90·0	54·7	43·6	48·2	58·7	26·6	....VII. Max.
10·4	4·4	18·9	55·0	33·4	26·6	29·5	35·9	16·3	
10·6	0·4	1·9	5·5	3·3	2·7	2·9	3·6	1·6	....7. Min.
10·8	0·3	1·1	3·2	2·0	1·6	1·7	2·1	1·0	

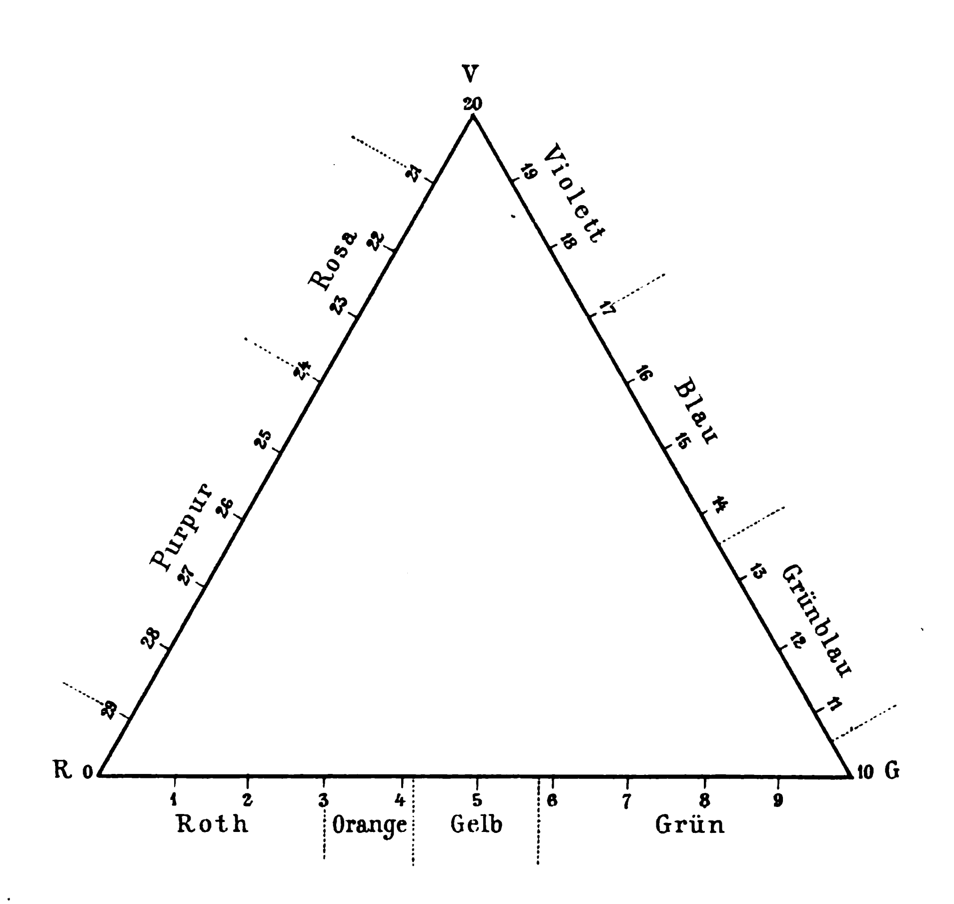


Autor del
Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien
Sitzungsberichte d.kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd.CVI. Abth. IIa. 1897.




J.M.Pernter: Die Farben des Regenbogens u.d.weisse Regenb.
Taf.II.
Relative Jntensität.
a - 25 Mikron
42°
38°
34°
30°
26°
a - 100 Mikron
42°
40°
38°
36°
a - 250 Mikron
42°
41°
40°
39°
a - 1000 Mikron
42°
30'
41°
30'
40°
Autor del
Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien
Sitzungsberichte d.kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd.CVI. Abth. IIa. 1897.

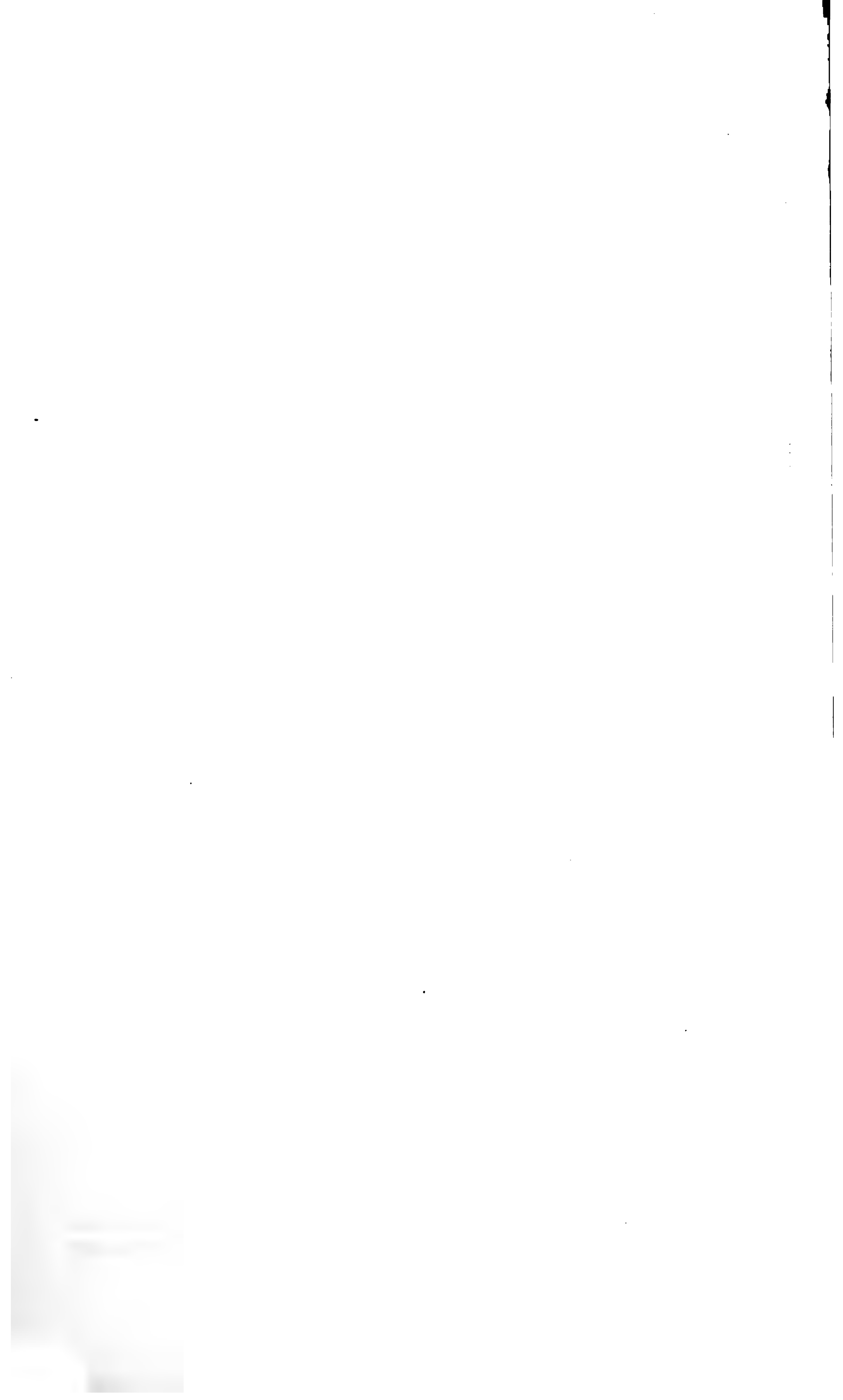




Farben-Dreieck.

Autor del

Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien



z	B	C	D	E	ӿ	F	G	ŋ	
11·0	3·4	14·6	42·5	25·8	20·6	22·8	27·7	12·6	
11·2	6·8	29·1	84·5	51·4	41·0	45·3	55·1	25·0	....VIII. Max.
11·4	5·4	23·2	67·5	41·0	32·7	36·2	44·0	20·0	
11·6	1·0	4·3	12·5	7·6	6·0	6·7	8·1	3·7	....8. Min.
11·8	0·1	0·3	1·0	0·6	0·4	0·5	0·7	0·3	
12·0	2·8	12·0	35·0	21·3	16·9	18·8	22·8	10·4	
12·2	6·4	27·5	80·0	48·6	38·7	42·9	52·2	23·7	....IX. Max.
12·4	5·1	22·0	64·0	38·9	31·0	34·3	41·7	18·9	
12·6	0·9	3·9	11·2	6·8	5·4	6·0	7·3	3·3	....9. Min.
12·8	0·1	0·5	1·5	0·9	0·7	0·8	1·0	0·4	
13·0	2·7	11·7	34·0	20·7	16 5	18·2	22·2	10·1	
13·2	6·3	27·0	78·5	47·7	38·0	42·1	51·2	23·2	....X. Max.
13 4	4·0	17·4	50·5	30·7	24·4	27·1	32·9	14·9	
13·6	0·3	1·1	3·2	2·0	1·6	1 7	2·1	1·0	....10. Min.

Über magnetische Nachwirkung

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

Ewing[1] hat zuerst die Thatsache beobachtet, dass lange Drähte aus weichem Eisen in einem Magnetfelde nicht sogleich nach Erregung desselben ihren vollen Magnetismus annehmen, sondern dass die Magnetisirungsintensität nach und nach wächst und oft erst in einigen Minuten den vollen Werth erreicht. Die gleiche Beobachtung hat auch Lord Rayleigh[2] bei seinen Untersuchungen über das Verhalten von Eisen und Stahl in schwachen magnetischen Feldern gemacht. Diese Erscheinung, welche bis jetzt nur bei Anwendung schwacher magnetischer Felder constatirt wurde, hat Lord Rayleigh als »Kriechen«, Ewing als »zähe Hysteresis« bezeichnet. Ewing gebraucht jedoch auch schon den Ausdruck »magnetische Nachwirkung«, ein Ausdruck, der auch im Folgenden zur Bezeichnung dieses eigenthümlichen Verhaltens weicher Eisendrähte benützt werden soll.

Die Gesetze der magnetischen Nachwirkung sind noch wenig erforscht. Bisher hat nur Ewing[3] in einer längeren Untersuchung mehrere Beobachtungen über den quantitativen Verlauf dieser Erscheinung gemacht. Viele Fragen über die

---

[1] Phil. Transact. 1885, p. 569.

[2] Phil. Mag. 1887, 23, p. 225.

[3] Proc. Royal Soc. Juni 1889. Auch Ewing, Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen. Deutsche Ausgabe, S. 120.

magnetische Nachwirkung sind bisher noch unerledigt. So ist der Verlauf der magnetischen Nachwirkung insbesondere in der ersten Zeit nach Schliessung des magnetisirenden Stromes noch unbekannt. Ewing's Beobachtungen geben den Gesammtbetrag der Nachwirkung nach 5 Secunden. Diese Frage wird wohl nur mit Hilfe eines photographischen Verfahrens unter Anwendung einer ausserordentlich leichten, sehr gut gedämpften Magnetometernadel zu lösen sein. Eine weitere Frage bezieht sich auf die Abhängigkeit der Nachwirkung von der Dimension der Stäbe. Sodann wäre es von grossem Interesse zu wissen, bis zu welchen Feldstärken sich noch eine Nachwirkung constatiren lässt. Ferner ist noch unbekannt, ob diese Eigenschaft den weichen Eisendrähten dauernd anhaftet, oder ob sie mit der Zeit schwindet und ob sie nicht etwa durch heftige Erschütterungen oder starkes Magnetisiren verändert oder ganz aufgehoben werden kann.

Im Nachfolgenden beschreibe ich einige Versuchsresultate, welche zur Lösung der soeben genannten Fragen einen Beitrag liefern sollen. Die meisten Versuche wurden nach der magnetometrischen Methode gemacht. Das verwendete Magnetometer hatte eine ziemlich leichte Nadel, die aber erst nach 4 Secunden zur Ruhe kam, so dass das Anwachsen der Magnetisirungsintensität erst von diesem Momente an beobachtet werden konnte. Meine Angaben über die magnetische Nachwirkung beziehen sich daher nur auf einen Theil des Gesammtbetrages, nämlich auf den Theil, der sich von 4 Secunden an nach Schliessung des magnetisirenden Stromes bis zum Ablauf einer Minute entwickelt. Trotz der Unvollkommenheit meines Apparates liessen sich doch über mehrere Fragen Aufschlüsse erhalten; nur über den Verlauf der Nachwirkung in der ersten Zeit waren Beobachtungen nicht möglich. Um auch in dieser Richtung wenigstens einen qualitativen Aufschluss zu erhalten, habe ich Messungen nach der magnetometrischen und nach der ballistischen Methode combinirt. Die Beobachtungen nach der ballistischen Methode geschahen zu diesem Zwecke wieder in zweierlei Art. Bei der ersten Art wurde die das Galvanometer enthaltende Secundärleitung geschlossen gehalten und der Primärstrom commutirt; bei der zweiten wurde der Primär-

strom und nach einer kurzen gemessenen Zeit hierauf die Secundärleitung ebenfalls geöffnet. Diese letzteren Beobachtungen wurden an drei gleich langen und dicken Drähten gemacht, wovon jedoch nur einer eine magnetische Nachwirkung zeigte.

A. Gleichzeitige Versuche nach der magnetometrischen und ballistischen Methode.

Zu diesen Versuchen diente: 1. Ein Stab *Ew* aus weichem Eisen (sogenanntes steirisches Frischeisen), vor den Versuchen im Ofen auf Kohlengluth ausgeglüht. 2. Ein Stab *En* aus weichem Eisen, von derselben Provenienz wie *Ew*, jedoch nicht weiter ausgeglüht. 3. Ein Stab *St* aus Werkzeugstahl. Die Dimensionen der Drähte waren bei allen gleich. Ihre Länge betrug 50 und ihre Dicke 0·6 *cm*.

a) Die Versuche nach der magnetometrischen Methode.

Das Magnetometer bestand aus einer leichten, auf einem Coconfaden aufgehängten, mit Spiegel versehenen Nadel. Die Nadel befand sich in einem Holzgehäuse; ein an die Nadel befestigter Aluminiumdraht tauchte zum Theile in Paraffinöl, wodurch eine schnelle Dämpfung erreicht wurde. Die Schwingungsdauer der Nadel betrug ungefähr 1 Sec. Die Dämpfung war so gross, dass die Nadel nach einer Ablenkung um ungefähr 200 Scalentheile in 4 Sec. vollkommen zur Ruhe gelangte. Da man bei Flüssigkeitsdämpfungen immer vorsichtig sein muss, so überzeugte ich mich durch eigene Versuche, dass die Nadel den ablenkenden Kräften pünktlich folgte. Ablenkungen, hervorgebracht durch Einwirkung der blossen, vom Strom durchflossenen Spirale zeigten, dass die Einstellung der Nadel sicher und ohne Kriechen geschah.[1]

Die Magnetisirungsspule war 68 *cm* lang und hatte 15 Windungen pro Längeneinheit; sie war entweder in der ersten Hauptlage oder vertical aufgestellt; im letzteren Falle war das

---

[1] In gleicher Weise wurde auch die Proportionalität zwischen Ablenkung und ablenkender Kraft constatirt.

eine Spulenende nahezu in gleicher Höhe mit der Magnetometernadel angebracht.

Die Einwirkung des Stromes der Magnetisirungsspule wurde in bekannter Weise durch eine Galvanometerrolle und durch einen Zweig des Stromes compensirt.

Die Beobachtung der Nachwirkung geschah immer in folgender Weise: In einem bestimmten Momente wurde der Strom der Magnetisirungsspule geschlossen und hierauf 1 Minute lang gewartet. Sodann wurde der Strom commutirt und nach 4 Secunden die Stellung der Nadel notirt. 1 Minute nach dem Commutiren wurde der Stand der Nadel abermals abgelesen und dann sofort wieder commutirt und die Ablesungen so wie vorher gemacht. Im Ganzen wiederholte ich dieses Verfahren 6mal, um bessere Mittelwerthe zu bekommen. Auf diese Weise bekommt man durch die Ablesungen nach 4 und 60 Secunden Werthe der Ablenkungen, die der Intensität des temporären Magnetismus nach 4 und 60 Secunden proportional waren. Beim Stab *Ew* war ein allmäliges Anwachsen der Magnetisirungsintensität sehr ausgeprägt und deutlich wahrzunehmen. Bei den beiden anderen Stäben stellte sich die Nadel nach 4 Secunden auf eine gewisse Ruhelage ein und blieb dort stehen.

Ewing hat in der Weise beobachtet, dass er die der momentan auftretenden Magnetisirung entsprechende Ablenkung compensirte, ein Verfahren, welches schon von Lord Rayleigh (l. c.) geübt wurde. Er konnte also den Betrag der Nachwirkung schon für die ersten 5 Secunden angeben. Dabei ist immerhin zu bedenken, dass es mit Rücksicht auf die Eigenschwingungen der Nadel schwer ist, zu entscheiden, wie gross denn eigentlich die Ablenkung in Folge der momentan auftretenden Magnetisirung ist. Nach meinem Vorgehen wurde also nur die nach 4 Secunden auftretende Nachwirkung beobachtet; ein grosser Theil der Nachwirkung entging auf diese Weise der Beobachtung; doch lässt sich auch aus der Beobachtung dieses Theiles mancher Schluss über den qualitativen und quantitativen Verlauf der Nachwirkung ziehen.

Nachfolgend wird der Betrag der Nachwirkung in Procenten angegeben, und zwar erscheint der Zuwachs der

Ablenkung in der Zeit von 4 auf 60 Secunden in Procenten der Ablenkung nach 4 Secunden ausgedrückt.

Ich gebe nun zunächst einige Daten über die Verhältnisse der Ablenkungen für die drei Stäbe, wie sie einmal in der ersten Hauptlage bei zwei verschiedenen Entfernungen des Stabendes von der Galvanometernadel und sodann bei vertical gestellter Spule erhalten wurden. Im letzteren Falle wurde die Spule mit dem Stab in die Stellung gebracht, bei welcher die Einwirkung auf die Magnetnadel ein Maximum war. Alle Verhältnisse sind in Theilen der Ablenkungen durch den Stahlstab ausgedrückt. Für *Ew* sind die nach 60 Secunden beobachteten Werthe genommen.

α) Magnetisirungsspule in der ersten Hauptlage:

Entfernung des näheren Stabendes von der Magnetometernadel = 25 *cm*.

Feldstärke = 0·164 abs. E. Feldstärke = 0·047 abs. E.

$$\frac{Ew}{St} = 2\cdot 56, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 79 \qquad \frac{Ew}{St} = 2\cdot 21, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 50.$$

Entfernung des näheren Stabendes = 13 *cm*.

Feldstärke = 0·164 Feldstärke = 0·047

$$\frac{Ew}{St} = 2\cdot 39, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 75 \qquad \frac{Ew}{St} = 2\cdot 07, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 57.$$

β) Magnetisirungsspule vertical:

Entfernung des näheren Stabendes von der Nadel = 25 *cm*.

Feldstärke = 0·164 Feldstärke = 0·047

$$\frac{Ew}{St} = 2\cdot 70, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 86 \qquad \frac{Ew}{St} = 2\cdot 33, \quad \frac{En}{St} = 1\cdot 63.$$

In den Tabellen I und II sind diese Werthe übersichtlich zusammengestellt. Dabei bedeutet H die Feldstärke, $Spv =$ = Spirale vertical, Sph_1 = Spirale horizontal, Stabende 25 *cm* entfernt; Sph_2 ebenso, Stabende 13 *cm* entfernt.

Tabelle I. $\frac{Ew}{St}$

H	Spv	Sph_1	Sph_2
0·164	2·70	2·56	2·39
0·047	2·33	2·21	2·07

Tabelle II. $\frac{En}{St}$

H	Spv	Sph_1	Sph_2
0·164	1·86	1·70	1·75
0·047	1·63	1·50?	1·57

Nimmt man für *Ew* die nach 4 Secunden beobachteten Ablenkungen, so ergeben sich für $\frac{Ew}{St}$ folgende Werthe:

$$H = 0{\cdot}164, \quad \frac{Ew}{St} = 2{\cdot}17,\ 2{\cdot}12,\ 2{\cdot}00$$

$$H = 0{\cdot}047, \quad \frac{Ew}{St} = 1{\cdot}72,\ 1{\cdot}65,\ 1{\cdot}61.$$

Die Reihenfolge ist hier so wie in den Tabellen.

Diese Daten zeigen, dass sich der Pol je nach der Intensität der Magnetisirung verschiebt. Nur so ist es erklärlich, dass die Verhältnisse bei den verschiedenen Stellungen der Spule für die gleiche Feldstärke ungleich gross ausfallen. In unserem Falle werden jedenfalls die Werthe, welche bei verticaler Stellung der Magnetisirungsspule erhalten wurden, dem wahren Verhältnisse der Magnetisirungsintensitäten am besten entsprechen. Die Verschiebung der Pole ist eine Thatsache, welche Beobachtungen nach der magnetometrischen Methode, insbesondere in schwachen Feldern, in ungünstiger Weise beeinflusst und in die Messung eine beträchtliche Unsicherheit bringt.

Die Bestimmung der magnetischen Nachwirkung bei *Ew* ergab nun folgende Werthe:

$H = 0{\cdot}164$	Spv,	Magnetische	Nachwirkung =	25%.
»	Sph_1	»	»	21
»	Sph_2	»	»	20
$H = 0{\cdot}047$	Spv	»	»	35
»	Sph_1	»	»	34
»	Sph_2	»	»	28

Der Stab zeigte also in allen Lagen bei der kleineren Feldstärke die grössere Nachwirkung. Überdies drückt sich auch in diesen Daten eine Verschiebung des Poles durch den in Folge der Nachwirkung auftretenden temporären Magnetismus aus.

Wenn man von dem Werth 1·50 der Tabelle II absieht, welcher jedenfalls mit einem grösseren Beobachtungsfehler behaftet ist, so stimmen die verschiedenen Verhältnisse für $\frac{En}{St}$ weit besser als jene für $\frac{Ew}{St}$.

b) Die Versuche nach der ballistischen Methode.

Als ballistisches Galvanometer wurde ein solches von du Bois-Rubens verwendet. Das Nadelsystem hatte eine einfache Schwingungsdauer von 3 Secunden. Mit Rücksicht auf jene Versuche, bei welchen die Secundärleitung bald nach Öffnung des Primärstromes unterbrochen wurde, wo sich also der Einfluss etwa vorhandener thermoelektrischer Kräfte bemerkbar machen konnte, wurde für die Secundärspulen ein feiner Draht mit vielen Windungen gewählt. Dementsprechend wurden auch beim Galvanometer feindrahtige Spulen in Parallelschaltung verwendet. Der Widerstand des Galvanometers betrug bei dieser Schaltung 485 Ohm.[1] Als Magnetisirungsspule diente hier eine 1·2 *m* lange, auf Glas gewickelte Spule mit 10·5 Windungen pro Längeneinheit. Ferner wurden zwei auf Glasröhren gewickelte Secundärspulen verwendet. Die grössere[2] hatte eine Länge von 40·5 *cm*, einen Widerstand von 81 Ohm und bestand insgesammt aus 9400 Windungen. Bei der kürzeren waren die entsprechenden Werthe 5·5 *cm*, 9·8 Ohm und 969 Windungen. Bei den Beobachtungen lag die Mitte der Secundärspule über der Mitte des zu untersuchenden Drahtes.

Es wurde zunächst der Galvanometerausschlag beim Commutiren des primären Stromes gemessen. Dabei ergaben sich

---

[1] Eine Untersuchung der Proportionalität zwischen Galvanometerausschlag und $\int idt$ ergab ein vollkommen befriedigendes Resultat.

[2] Diese Spule ist leider vorzeitig gebrochen worden.

folgende Werthe für die Verhältnisse der Magnetisirungsintensität zwischen *Ew*, *En* und *St*.

Lange Secundärspule:

Widerstand der Galvanometerleitung = 485+81+5000 Ohm.

Feldstärke = 0·164 Feldstärke = 0·047

$$\frac{Ew}{St} = 2{\cdot}19, \quad \frac{En}{St} = 1{\cdot}87 \qquad \frac{Ew}{St} = 1{\cdot}81, \quad \frac{En}{St} = 1{\cdot}67$$

Kurze Secundärspule:

Widerstand in der Galvanometerleitung = 485+81 Ohm

Feldstärke = 0·164 Feldstärke = 0·047

$$\frac{Ew}{St} = 2{\cdot}38, \quad \frac{En}{St} = 2{\cdot}00 \qquad \frac{Ew}{St} = 1{\cdot}87, \quad \frac{En}{St} = 1{\cdot}75$$

Durch Beobachtung der Induction bei einfacher Unterbrechung des primären Stromes konnte die Intensität der remanenten Magnetisirung bestimmt werden. Es wurden dafür folgende Werthe, ausgedrückt in Procenten der temporären Intensität, gefunden:

Feldstärke = 0·164, *Ew* 20%, *En* 12%, *St* 2%
» = 0·047, 5 3 0

Schliesslich untersuchte ich den temporären Magnetismus der drei Stäbe in noch schwächeren Feldern und erhielt folgende Daten (Tabelle III).

Tabelle III.

Feldstärke	α			rem. Magnetism. in Proc.		
	Ew	*En*	*St*	*Ew*	*En*	*St*
0·0481	471·0	378·9	234·5	4·5	3	0·4
0·0101	92·4	75·5	48·8	1·1	1	0
0·00129	11·7	9·3	6·3	0	0	0

α bedeutet hier den Galvanometerausschlag beim Commutiren.

Nach Lord Rayleigh (l. c.) verläuft in schwachen Feldern die Magnetisirungsintensität proportional der Feldstärke. Für *Ew* und *En* tritt das bei Feldstärken unter 0·01 abs. E. ein; für Stahl gilt die Proportionalität auch schon von $H = 0·048$ abwärts. In diesem Gebiete bleibt kein Magnetismus remanent; auf diese Thatsache hat ebenfalls Lord Rayleigh aufmerksam gemacht; sie wird auch durch die Daten der Tabelle III bestätigt. Eine Auswerthung der Galvanometerconstante mit Hilfe eines Inductors gestattete auch die Berechnung der Permeabilität und Susceptibilität für die drei Eisensorten. Für *Ew* und $H = 0·0481$ wurde $\mu = 179$ und $\varkappa = 14$ gefunden. Die Werthe für die anderen Feldstärken und Stäbe ergeben sich leicht aus den angeführten Daten.

Schliesslich wurde der Ablauf der magnetischen Induction bei den drei Stäben mit dem von Hiecke[1] construirten Fallapparat bei einer Feldstärke von 0·047 E. untersucht. Das Wesen des Apparates besteht darin, dass ein fallendes Gewicht zwei Contacte öffnet; davon ist ein Contact fix aufgestellt, der andere mittelst einer Schraube in verticaler Richtung verschiebbar, so dass der Abstand der beiden Contacte und damit die Zeit zwischen der Öffnung derselben variirt werden kann. Es wurde nun durch die Öffnung des ersten Contactes der magnetisirende Strom und durch die Öffnung des zweiten die Galvanometerleitung unterbrochen. Die Unterbrechung des primären Stromes war momentan, da bei den schwachen Strömen kaum ein nennenswerther Funke auftreten konnte. Der beobachtete Galvanometerausschlag gibt ein Maass des Ablaufes der temporären magnetischen Induction für die Zeit, welche vom Öffnen des primären Stromes bis zum Öffnen der Galvanometerleitung verflossen ist. Es wurde auch der Galvanometerausschlag beobachtet in dem Falle, wo der primäre Strom mit der Hand unterbrochen wurde, wobei die Galvanometerleitung geschlossen blieb. Diese Galvanometerausschläge sind mit *b* bezeichnet. Das logarithmische Decrement des Galvanometers war bei geschlossener Leitung $= 0·510$ (brigg.); bei offener $= 0·339$.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 96, S. 134, 1887.

Dementsprechend sind die angeführten Werthe corrigirt und beziehen sich auf $\lambda = 0 \cdot 339$.

Der Anfangspunkt der Zeit t sollte dort liegen, wo die beiden Contacte gleichzeitig geöffnet werden. In unserem Falle liegt der Nullpunkt etwas höher, daher haben wir für $t = 0$ bereits kleine Ausschläge zu verzeichnen.

Tabelle IV.

Beobachtete Galvanometerausschläge.

t in Schrauben-gängen	*t* in Secunden	*Ew* I $b = 223 \cdot 2$	*Ew* II $b = 28 \cdot 5$	*En* $b = 201 \cdot 5$	*St* $b = 127 \cdot 6$
0	0	1·0	0·9	1·1	1·1
1	0·000164	5·9	1·2	5·4	5·2
3	0·000492	14·6	2·2	14·4	14·5
5	0·000820	26·2	3·6	24·0	25·0
10	0·00164	51·4	7·6	47·3	47·4
20	0·00328	91·9	13·9	87·8	79·5
40	0·00656	145·5	21·6	140·5	111·1
80	0·0131	187·8	25·3	182·7	124·7
140	0·0230	198·6	25·9	196·4	126·3
190	0·0312	202·4	25·7	198·0	125·7

Tabelle V.

Auf *Ew* I reducirte Galvanometerausschläge.

t in Schrauben-gängen	*t* in Secunden	*Ew* I $b = 223 \cdot 2$	*Ew* II $b = 223 \cdot 2$	*En* $b = 223 \cdot 2$	*St* $b = 223 \cdot 2$
0	0	1·0	7·0	1·3	2·0
1	0·000164	5·9	9·4	6·0	9·3
3	0·000492	14·6	17·2	16·0	25·4
5	0·000820	26·2	28·2	26·6	43·7
10	0·00164	51·4	59·5	52·4	82·9
20	0·00328	91·9	108·8	97·3	139·1
40	0·00656	145·5	169·1	155·7	194·4
80	0·0131	187·8	198·2	202·4	218·2
140	0 0230	198·6	202·8	217·6	221·0
190	0·0312	202·4	202·6	219·3	220·0

In Tabelle IV sind die zu verschiedenen Zeiten beobachteten Ausschläge angeführt. Für *Ew* gelten zwei, mit I und II bezeichnete Werthe. Bei I wurde die lange, bei II die kurze Secundärspule verwendet; zu den Beobachtungen mit *En* und *St* diente nur die lange. Um den Ablauf der Induction bei den einzelnen Stäben besser vergleichen zu können, wurde die Grösse aller Ausschläge auf *Ew* I reducirt; die Reduction wurde im Verhältnisse der Werthe von *b* vorgenommen.

Betrachten wir jetzt die Verhältnisse, welche nach der ballistischen Methode gewonnen wurden, so finden wir, dass die kurze Secundärspirale durchwegs grössere Verhältnisse ergab als die lange. Es kann dies durch eine gewisse Inhomogenität und Streuung längs der Axe erklärt werden; es ist jedoch nicht unmöglich, dass die Erklärung in einem Umstande zu suchen ist, den wir später besprechen werden.

Vergleichen wir die ballistischen Verhältnisse mit den magnetometrischen, so müssen wir von diesen jene nehmen, welche wir bei vertical gestellter Spule erhalten haben, weil die Wanderung des Poles in diesem Falle die geringsten Fehler bedingt. Ebenso müssen wir von den ballistischen Daten jene heranziehen, welche wir mit der langen Secundärspule beobachtet haben. Betrachten wir zunächst die Verhältnisse $\frac{En}{St}$, also für Stäbe, welche keine Nachwirkung zeigen. Wir haben da die Werthe 1·86 und 1·63, mit denen die Werthe 1·87 und 1·67 correspondiren. Beide Methoden ergeben also dieselben Werthe.

Für $\frac{Ew}{St}$ bekommen wir folgende Daten:

	Magnetometrisch		
	Nach 60 Sec.	Nach 4 Sec.	Ballistisch
$H = 0·146$	2·70	2·17	2·19
$H = 0·047$	2·33	1·72	1·81

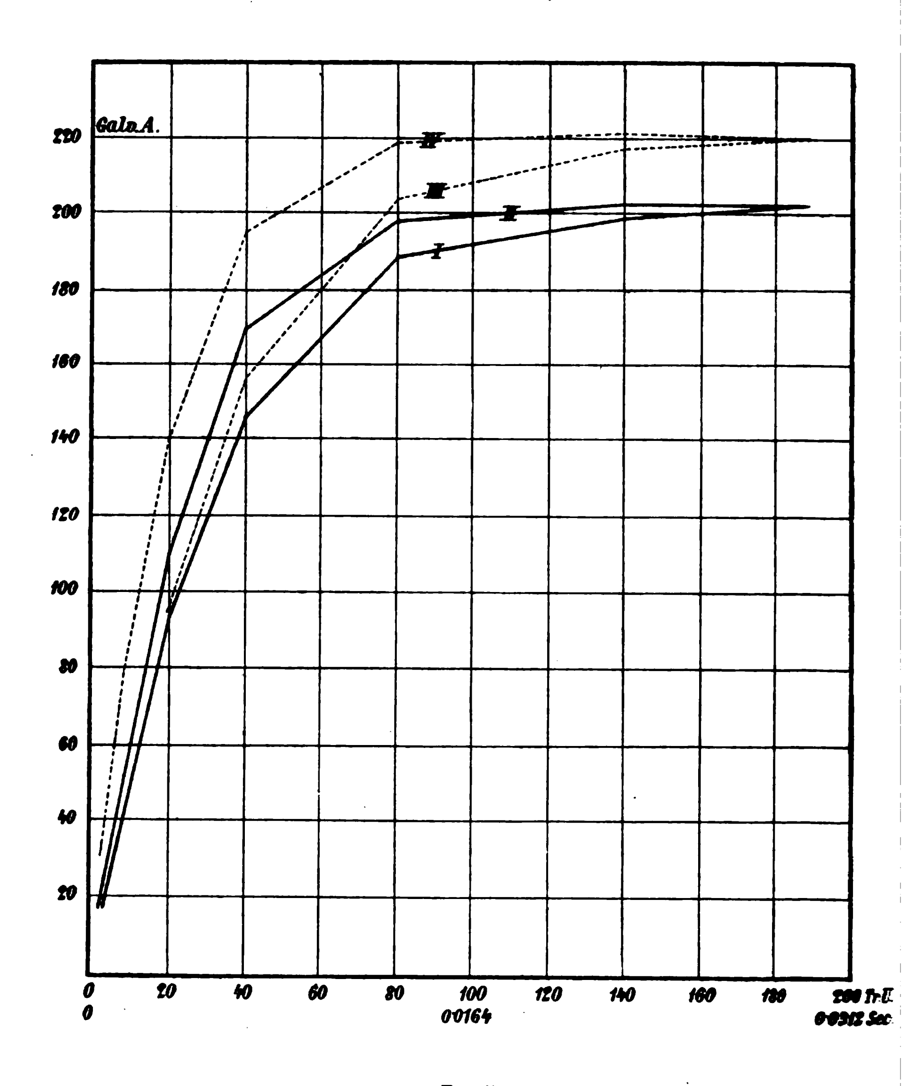
Die magnetometrischen Werthe nach 60 Secunden sind viel grösser als die ballistischen, was zu erwarten war. Überraschend ist jedoch das Resultat, wenn man die nach 4 Secunden magnetometrisch beobachteten Verhältnisse mit den ballistischen

vergleicht. Hier sind die letzteren sogar etwas grösser. Für die Beobachtung mit dem ballistischen Galvanometer kommt bei der Schwingungsdauer der Nadel von 3 Secunden ungefähr der Theil der Nachwirkung in Betracht, welcher sich etwa in 1·5 Secunden nach dem Auftreten der Magnetisirung entwickelt. Setzt man den Unterschied der Verhältnisse auf Beobachtungsfehler, so würde aus der Gleichheit derselben folgen, dass die Nachwirkung in den ersten 4 Secunden ausserordentlich klein ist; das ist jedoch nach den Beobachtungen Ewing's (l. c.) nicht der Fall. Auch die mit dem Fallapparat gewonnenen Resultate sprechen dafür, dass schon in der ersten Secunde bei *Ew* eine magnetische Nachwirkung auftritt.

Betrachten wir jetzt die Daten der Tabelle V, welche uns die auf *Ew* reducirten Galvanometerausschläge, respective den Ablauf der magnetischen Induction in den ersten Zeittheilchen nach Unterbrechung des magnetisirenden Stromes gibt. In der Zeit von 0·03 Secunden ist für *En* und *St* die Induction nahezu ganz abgelaufen.[1] Bei *Ew* ist dies anders, und zwar sowohl bei der Beobachtung mit der kurzen, als auch mit der langen Secundärspirale. Der letzte Werth bleibt hier hinter dem Werthe von b um etwa 10% zurück. Es geht jedoch aus dem Verlaufe der Zahlen und der entsprechenden Curven (Fig. 1) ganz deutlich hervor, dass die Galvanometerausschläge bei $t = 0·031$ Secunden auch hier ein Maximum erreicht haben. Es möge noch bemerkt werden, dass sich in den beiden Curven für *Ew* der Einfluss der Selbstinduction auf den Ablauf des inducirten Stromes deutlich äussert. Im Falle der kürzeren Spirale war ja die Selbstinduction des Galvanometerkreises viel kleiner als mit der längeren Spirale; ein grosser Theil der Selbstinduction lag freilich auch in den Galvanometerwindungen.

Auch beim weichen ausgeglühten Eisen läuft also ein Theil der magnetischen Induction ebenso rasch ab wie beim Stahl, d. h. es ist der Ablauf dieses Theiles nur bedingt durch

[1] Die Galvanometerausschläge nach 0·031 Secunden haben die Werthe von b noch nicht erreicht; doch sieht man ganz deutlich, dass sie ein Maximum geworden sind. Die Nichtübereinstimmung der beiden Werthe wird wohl auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sein, die hauptsächlich in der Bestimmung des log. Decrements der stark gedämpften Nadel liegen dürften.



Es gilt:

I für *Ew* I (Eisen weich, ausgeglüht).
II für *Ew* II (Eisen weich, ausgeglüht).
III für *En* (Eisen weich, nicht ausgeglüht).
IV für *St* (Stahl).

Feldstärke = 0·047 abs. E.

die Selbstinduction des Kreises und durch die in der Eisenmasse auftretenden Foucault'schen Ströme. An diesen Theil setzt sich sodann die magnetische Nachwirkung an.

Wir haben also hier die Thatsache zu erklären, dass die nach 4 Secunden magnetometrisch beobachteten Verhältnisse mit den ballistischen nahezu gleich sind und dass anderseits, gemäss den Versuchen mit dem Fallapparat, die magnetische Nachwirkung jedenfalls auch schon in den ersten 4 Secunden einen messbaren Werth erreicht.

Diese Thatsachen können vielleicht in folgender Weise erklärt werden.

Ein Theil der magnetischen Induction in schwachen Feldern tritt auch beim weichen ausgeglühten Eisen momentan[1] auf; die Geschwindigkeit der Entwicklung dieses Theiles hängt von der Grösse der Selbstinduction und von den Foucault'schen Strömen ab. Zu diesem Theile der Magnetisirungsintensität kommt sodann ein anderer, dessen Entwicklung nach Ablauf des ersten beginnt und oft erst nach mehreren Minuten den vollen Werth erreicht. Die Entwicklung dieser magnetischen Nachwirkung geht jedoch in der Mitte rascher vor sich als an den Enden. Speciell diese letzte Annahme würde die That-

---

[1] Die Frage, ob die Molecularmagnete der Einwirkung der magnetisirenden Kraft ohne oder mit einer Verzögerung folgen, ist schon wiederholt von verschiedenen Forschern experimentell behandelt worden. In jüngster Zeit wurden von Holborn (Sitzungsber. der Berliner Akad., XI, 1896) in der physikalisch-technischen Reichsanstalt in dieser Richtung Versuche angestellt. Er findet, dass der Magnetismus sofort in voller Stärke auftritt, sobald die magnetisirende Kraft die volle Stärke erreicht hat. Insofern kann man also sagen, dass die Molecularmagnete momentan oder besser gesagt ohne merkliche Verzögerung der magnetisirenden Kraft folgen. Die meisten der bisher angestellten Versuche betrafen jedoch magnetisirende Kräfte, deren Entwicklung oder Ablauf doch eigentlich ziemlich langsam vor sich geht, und durch die Versuche Holborn's ist diese Frage auch nur für sehr langsam veränderliche magnetisirende Kräfte entschieden. In den elektrischen Schwingungen, wie sie von Hertz zuerst beobachtet wurden, haben wir ein Mittel, um ausserordentlich rasch wechselnde magnetische Felder zu erzeugen. Die Frage, ob bei diesen rasch wechselnden magnetisirenden Kräften eine Verzögerung auftritt, ist noch nicht ganz erledigt. Einige Versuche, welche ich in dieser Richtung anstellte (diese Sitzungsber., Bd. 103, 1894, S. 205), sprechen dafür, dass die Drehungen der Molecularmagnete den magnetisirenden Kräften nicht ganz folgen können.

sache erklären, dass die nach 4 Secunden magnetometrisch beobachteten Verhältnisse mit den ballistischen gleich sind. Auf diese Weise könnte auch die Beobachtung erklärt werden, dass die mit der kurzen Secundärspule beobachteten Verhältnisse grösser sind als jene mit der langen.

B. Abhängigkeit der magnetischen Nachwirkung von der Feldstärke.

Es wurden drei Drähte von je 50 *cm* Länge und 0·6, 0·5 und 0·2 *cm* Dicke in verschiedenen Feldern hinsichtlich ihrer magnetischen Nachwirkung untersucht. Alle drei Drähte waren von gleicher Provenienz (steirisches Frischeisen); sie wurden auf einer Kohlengluth geglüht und nach vollständiger Abkühlung untersucht. Bei der Untersuchung in stärkeren Feldern musste die Entfernung des Stabes von der Magnetometernadel grösser genommen werden; bei den stärksten Feldern wurde der grösste Theil der Ablenkung durch die Compensationsspule abcompersirt, so dass man die Nachwirkungsablenkung noch ganz gut beobachten konnte. Tabelle VI gibt die Resultate.

Tabelle VI.

Feldstärke	Magnetische Nachwirkung in Procenten		
	0·6 *cm*	0·4 *cm*	0·2 *cm*
0·047	22	23	20
0·163	18	16	11
0·442	9·5	8·2	6·6
1·07	5·8	5·4	4·2
3·00	2·6	1·8	0·6
8·27	0·3	0·0	0·0

Wie man aus der Tabelle VI ersieht, nimmt die Nachwirkung bei allen drei Stäben mit der Feldstärke ab, und zwar umso schneller, je dünner der Draht ist. Darnach müsste sich bei recht massiven Eisenkernen die Nachwirkung auch bei hohen Feldern bemerkbar machen. Vielleicht ist ein Theil jener Verzögerung in der Entwicklung des Magnetismus, die man an starken Elektromagneten beobachtet hat, doch auch einer

magnetischen Nachwirkung und nicht bloss dem hohen Selbstinductionscoëfficienten und den Foucault'schen Strömen zuzuschreiben.

C. Abhängigkeit der magnetischen Nachwirkung von der Drahtdicke.

In höheren Feldern ist die magnetische Nachwirkung bei dicken Drähten entschieden grösser als bei dünnen. Bei der Feldstärke von 0·047 abs. E. konnte ich für die Drahtdicken zwischen 0·8 bis 0·2 *cm* keinen regelmässigen Einfluss bemerken. Jedenfalls macht sich hier die Art des Ausglühens viel mehr bemerkbar als die Drahtdicke. In dieser Richtung müssen weitere Untersuchungen einen genauen Aufschluss bringen. Dabei wird auf das gleichmässige Ausglühen ein besonderes Augenmerk zu richten sein.

Nach Helmholtz[1] soll sehr dünner Eisendraht (Blumendraht) die Magnetisirung ohne zeitliche Verzögerung annehmen. Der nachfolgende Versuch, den ich jedoch nicht für absolut entscheidend ansehe, scheint dafür zu sprechen, dass auch sehr dünne Drähte eine magnetische Nachwirkung zeigen. Es wurden 80 dünne Eisendrähte (Blumendraht von 0·03 *cm* Dicke) zu einem Bündel gebunden, ausgeglüht und sodann hinsichtlich der Nachwirkung in den Feldern 0·047 und 0·163 untersucht.

In beiden Fällen erhielt ich für die Nachwirkung 10%. Die einzelnen Drähte des Bündels waren gegenseitig nicht isolirt, und da lässt sich einwenden, dass sich das Bündel doch wie ein massiver Stab verhält. Es ist jedoch wenig wahrscheinlich, dass die Innigkeit der Berührung so gross war wie bei einem massiven Stab; es ist eher anzunehmen, dass thatsächlich auch Drähte von 0·03 *cm* Dicke eine magnetische Nachwirkung zeigen.

D. Einfluss starker Magnetisirung auf die magnetische Nachwirkung.

Um zu sehen, ob die magnetische Nachwirkung nicht etwa durch starke, vorangehende Magnetisirungen vermindert oder gar vernichtet wird, habe ich einige Drähte in einem starken

[1] Pogg. Ann., 83.

Felde von 120 abs. E. 50mal hin- und hermagnetisirt und dann wieder bezüglich der Nachwirkung untersucht. Ein 0·6 *cm* dicker Stab zeigte im Felde von 0·047 E. 22% vor und 21·5% nach der Magnetisirung. Bei einem anderen, 0·6 *cm* dicken Stabe waren die entsprechenden Werthe 22 und 22%, bei 0·2 *cm* dickem Drahte 15 respective 17%. Ein Einfluss der vorausgegangenen Magnetisirung ist also nicht zu constatiren.

E. Die zeitliche Änderung der Nachwirkung.

Einige Versuche, welche ich mit der hier verwendeten Drahtsorte vor mehreren Jahren angestellt hatte, liessen mich vermuthen, dass das Eisen die Erscheinung der magnetischen Nachwirkung nach und nach ganz verliert, selbst wenn es vollkommen ruhig liegt. Um in dieser Beziehung einigen Aufschluss zu erhalten, habe ich drei Stäbe untersucht.

Die Länge war bei allen gleich 50 *cm*. Die Dicke war respective 0·8, 0·6 und 0·4 *cm*. Diese drei Stäbe wurden alle zu gleicher Zeit ausgeglüht und dann sofort hinsichtlich ihrer Nachwirkung untersucht. Diese Untersuchung wurde später zu verschiedenen Zeiten wiederholt. Tabelle VII gibt die Resultate.

Tabelle VII.

Datum	Magnetische Nachwirkung in Procenten		
	0·8 *cm*	0·6 *cm*	0·4 *cm*
8./1.	19	50	22
8./1.	22	51	30
9./1.	19	44	23
12./1.	19	36	21
18./1.	14	38	19
24./1.	16	37	19
2./2.	12	36	18
12./2.	9	28	15
26./3.	8	25	9
27./3.	5	21	9
28./3.	7	23	10

Von den beiden Beobachtungen am 8./1. wurde die erste gleich nach dem Ausglühen, die zweite 7 Stunden später gemacht. Die bei der ersten Beobachtung gefundenen Werthe

sind etwas kleiner als die zweiten; es kann sein, dass die Drähte zur Zeit der ersten Beobachtung doch noch nicht ganz abgekühlt waren. Vom 8./1. bis Ende März fallen die beobachteten Werthe der magnetischen Nachwirkung (bis auf wenige Abweichungen, die Beobachtungsfehlern zuzuschreiben sind) ganz merklich; es ist daher klar, dass die magnetische Nachwirkung nur eine vorübergehende Erscheinung ist, welche sich bei frisch ausgeglühten Eisendrähten zeigt.

Die Resultate dieser Untersuchungen lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

Die magnetische Induction, welche bei langen, ausgeglühten Drähten aus weichem Eisen in schwachen Feldern beobachtet wird, setzt sich aus zwei Theilen zusammen, eine Thatsache, die schon von Ewing und Lord Rayleigh (l. c.) festgestellt wurde. Der eine Theil folgt ohne merkliche Verzögerung dem Entstehen oder Verschwinden der magnetisirenden Kräfte; der zweite Theil beginnt nach Ablauf des ersten und entwickelt sich sehr langsam, so dass die Magnetisirungsintensität oft erst nach einigen Minuten den vollen Werth erreicht. Diese Erscheinung einer zeitlichen Verzögerung der Magnetisirung wurde als »Kriechen« oder als »zähe Hysteresis« bezeichnet; hier wird sie »magnetische Nachwirkung« genannt. Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Ausbildung der magnetischen Nachwirkung in der Mitte der Drähte rascher vor sich geht als an den Enden.

Die procentische magnetische Nachwirkung zeigt sich hauptsächlich nur in schwachen Feldern; sie nimmt mit der Feldstärke ab, und zwar umso schneller, je dünner der untersuchte Draht ist.

Eine regelmässige Abhängigkeit der magnetischen Nachwirkung von der Drahtdicke konnte, vermuthlich wegen des ungleichen Ausglühens nicht nachgewiesen werden.

Starke Magnetisirungen der Drähte beeinflussen deren magnetische Nachwirkung in keiner Weise.

Die magnetische Nachwirkung ist eine vorübergehende Erscheinung, welche gleich nach dem Ausglühen der Drähte am kräftigsten auftritt, dann aber immer mehr und mehr abnimmt.

Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Legendre hat zuerst den Satz ausgesprochen und zu beweisen versucht,[1] dass in jeder ganzzahligen unbegrenzten arithmetischen Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen vorkommen. Sein Beweis ist jedoch unbefriedigend.

Den ersten strengen Beweis des Legendre'schen Satzes gab Dirichlet.[2] So geistreich aber auch dieser berühmte Beweis sein möge, so ist dennoch eine Vereinfachung und Vervollständigung desselben wünschenswerth. Denn einerseits stützt sich derselbe auf den quadratischen Reciprocitätssatz und die Bestimmung der Classenanzahl der eigentlich primitiven binären quadratischen Formen einer gegebenen Determinante, mit welchen zwei Fragen der zu beweisende Satz in keinem Zusammenhange steht. Anderseits gewährt derselbe nur die etwas vage Einsicht, dass die Progression unendlich viele Primzahlen enthält, ohne dass man eine obere Grenze für die Anzahl der Glieder erfährt, unter welchen die über ein

---

[1] Legendre, Essai sur la théorie des nombres.

[2] Dirichlet, Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1837.

gegebenes Glied der Progression hinaus liegende nächste Primzahl vorkommen muss.

In dem Folgenden soll eine Umarbeitung des Dirichlet'schen Beweises versucht werden, welche die genannten zwei Forderungen erfüllt. Theile derselben sind in früher erschienenen Schriften enthalten.[1]

1.

Es sei n eine über 1 liegende ganze Zahl, p irgend eine n nicht übersteigende Primzahl, p^π die höchste Potenz von p, welche n nicht überschreitet, und P das über alle Primzahlen p zu erstreckende Product[2]

$$P = \Pi p^\pi.$$

Setzt man

$$E\left(\frac{n}{2^\alpha}\right) = n_\alpha$$

$$N = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\nu!},$$

wo $E(x)$ nach Legendre die grösste in x enthaltene ganze Zahl und 2^ν die höchste n nicht übersteigende Potenz von 2 bezeichnen, so ist N ein Vielfaches von P.

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$E\left(\frac{n}{2^k p}\right) + E\left(\frac{n}{2^k p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^k p^\pi}\right) = s_k,$$

so wird, über alle Primzahlen p erstreckt,

$$n! = \Pi p^{s_0} \tag{1}$$

$$n_1!\, n_2! \ldots n_\nu! = \Pi p^{s_1} . \Pi p^{s_2} \ldots \Pi p^{s_\nu}$$

$$= \Pi p^{s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu}$$

und es genügt darzuthun, dass

$$s_0 - s_1 - s_2 - \ldots - s_\nu \geqq \pi$$

ist.

[1] Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 78. — Über Dirichlet'sche Reihen. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV. — Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV.

[2] Tchebischef, Petersburger Akademie, 1850.

Es sei λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots \pi$ und 2^μ die höchste Potenz von 2, welche $\frac{n}{p^\lambda}$ nicht übersteigt. Ist $\mu > 0$, so wird

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\nu p^\lambda}\right) =$$

$$= E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right)$$

$$\overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right);$$

es ist aber

$$\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda} + 1 = \frac{n}{p^\lambda} - \left(\frac{n}{2^\mu p^\lambda} - 1\right)$$

$$\overline{\gtrless} \frac{n}{p^\lambda}$$

und daher

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right) + 1 \overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{p^\lambda}\right).$$

Demzufolge wird

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\nu p^\lambda}\right) + 1 \overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{p^\lambda}\right).$$

Diese Ungleichung gilt auch noch für $\mu = 0$, da in diesem Falle ihre linke Seite den Werth 1 hat.

Setzt man $\lambda = 1, 2, \ldots \pi$ und addirt, so ergibt sich

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu + \pi \overline{\gtrless} s_0,$$

w. z. b. w.

Aus der Theilbarkeit von N durch P folgt

$$P \leqq N.$$

Ist n gerade, so wird

$$\frac{n!}{n_1!\, n_1!} = 2^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n};$$

da aber

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n+1},$$

also

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}\right)^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n+1}$$

$$<\frac{1}{n+1}$$

ist, so folgt

$$\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}<\frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{2}$$

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!}<\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Ist dagegen n ungerade, so wird

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!}=n.2^{n-1}\,\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}$$

und nach (2)

$$\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

also

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!}<2^{n-1}\sqrt{n}.$$

In beiden Fällen ist demnach

$$\left(\frac{n!}{n_1!\,n_1!}\right)^2<2^{2n}.\frac{n}{4}<2^{2n}\left(1+\frac{1}{4}\right)^n$$

$$<5^n$$

und man hat

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!}<5^{\frac{n}{2}}.$$

Hieraus folgt

$$N = \frac{n!}{n_1!\,n_1!} \cdot \frac{n_1!}{n_2!\,n_2!} \cdots \frac{n_{\nu-1}!}{n_\nu!\,n_\nu!}$$

$$< 5^{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{2^\nu}}$$

$$< 5^{n-\frac{n}{2^\nu}} \leqq 5^{n-1}$$

und daher auch

$$P < 5^{n-1}. \tag{3}$$

Dies vorausgeschickt, sei, das Product über alle Primzahlen p erstreckt,

$$\Pi p^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{p^\pi}} = L.$$

Da

$$s_0 \leqq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^\pi}$$

$$> \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^\pi} - \pi$$

ist, so folgt aus (1)

$$n! \leqq L^n$$

$$> \frac{L^n}{P}$$

und man hat nach (3)

$$5^{n-1}\,n! > L^n \geqq n!$$

Nun ist

$$\frac{n^n}{n!} = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e$$

und demzufolge

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < e^n$$

$$\geqq 2^{n-1}$$

oder

$$n! > n^n e^{-n}$$
$$\leqq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Umsomehr ist also

$$L^n > n^n e^{-n}$$
$$< 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n . 5^{n-1} < \left(\frac{5n}{2}\right)^n < n^n e^n$$

und daher

$$\frac{n}{e} < L < ne.$$

Hienach genügt die Summe

$$\Lambda(n) = \log L = \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^{\alpha}}\right)$$

der Ungleichung

$$\log n - 1 < \Lambda(n) < \log n + 1. \qquad (4)$$

2.

Es sei k eine gegebene positive, über 2 liegende Zahl. Nach Kronecker[1] gibt es zwei Reihen von ganzen positiven Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots g_\rho$$
$$m_1, m_2, \ldots m_\rho,$$

welche die Eigenschaft besitzen, dass die nicht negativen kleinsten Reste des Ausdruckes

$$g_1^{i_1} g_2^{i_2} \ldots g_\rho^{i_\rho}$$

in Bezug auf den Modul k genau alle $\varphi(k)$ positiven, unter k liegenden und zu k theilerfremden Zahlen ergeben, wenn i_1 von 0 bis $m_1 - 1$, i_2 von 0 bis $m_2 - 1$ u. s. w., i_ρ von 0 bis $m_\rho - 1$ laufen.

Ist

$$n \equiv g_1^{i_1} g_2^{i_2} \ldots g_\rho^{i_\rho} \qquad (\text{mod. } k)$$

[1] Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870.

so mögen $i_1, i_2, \ldots i_\rho$ die Indices von n in Bezug auf den Modul k genannt werden. Man erhält die Indices des Productes zweier Zahlen n, n', wenn man beziehungsweise die Indices von n und n' addirt und die Resultate mittelst der Moduln $m_1, m_2, \ldots m_\rho$ auf ihre nicht negativen kleinsten Reste reducirt.

Sind

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$$

beziehungsweise Wurzeln der Gleichungen

$$\omega_1^{m_1} = 1 \quad \omega_2^{m_2} = 1 \ldots \omega_\rho^{m_\rho} = 1,$$

so gibt es $m_1 m_2 \ldots m_\rho = \varphi(k)$ Wurzelcombinationen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$, wenn jeder Werth von ω_1 mit jedem Werthe von ω_2, jedem Werthe von ω_3 u. s. f. zusammengestellt wird. Unter diesen Wurzelcombinationen werde eine bestimmte, sonst beliebige Reihenfolge festgesetzt, wobei aber die Combination der Werthe

$$\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 1 \ldots \omega_\rho = 1$$

die erste Stelle einnehmen möge. Sind dann $i_1, i_2, \ldots i_\rho$ die Indices einer zu k theilerfremden Zahl n in Bezug auf den Modul k, so werde das aus den Wurzeln der h^{ten} Combination gebildete Product $\omega_1^{i_1} \omega_2^{i_2}, \ldots \omega_\rho^{i_\rho}$ mit $f_{h-1}(n)$ bezeichnet. Für Zahlen n dagegen, welche nicht zu k theilerfremd sind, werde für jedes h

$$f_{h-1}(n) = 0$$

festgesetzt.

Man hat

$$f_h(n) f_h(n') = f_h(nn') \tag{5}$$

und, wenn $h > 0$ ist,

$$f_h(a) + f_h(a+1) + f_h(a+2) + \ldots + f_h(a+k-1) = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge ist für irgend eine nicht negative Zahl μ

$$|f_h(m) + f_h(m+1) + \ldots + f_h(m+\mu)| \leqq \frac{1}{2} \varphi(k). \tag{6}$$

Aus der Abel'schen Umformung

$$f_h(m)a_m + f_h(m+1)a_{m+1} + \dots f_h(m+\mu)a_{m+\mu} =$$
$$f_h(m)(a_m - a_{m+1}) + (f_h(m) + f_h(m+1))(a_{m+1} - a_{m+2})$$
$$+ (f_h(m) + f_h(m+1) + f_h(m+2))(a_{m+2} - a_{m+3})$$
$$+ \dots + (f_h(m) + f_h(m+1) + \dots + f_h(m+\mu-1))(a_{m+\mu-1} - a_{m+\mu})$$
$$+ (f_h(m) + f_h(m+1) + \dots + f_h(m+\mu))a_{m+\mu}$$

folgt dann, wenn $a_m, a_{m+1}, \dots a_{m+\mu}$ positiv und

$$a_m \geqq a_{m+1} \geqq a_{m+2} \geqq \dots \geqq a_{m+\mu}$$

sind,

$$|f_h(m)a_m + f_h(m+1)a_{m+1} + \dots + f_h(m+\mu)a_{m+\mu}| \tag{7}$$
$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k)(a_m - a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \dots + a_{m+\mu})$$
$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k) . a_m .$$

Wird zur Abkürzung

$$\varphi(k) = 1 + r$$

gesetzt, so hat die Summe

$$f_0(n) + f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_r(n) \tag{8}$$

den Werth $\varphi(k)$ oder Null, je nachdem $n \equiv 1 \pmod{k}$ ist oder nicht.

3.

Aufgabe. Es sei

$$\Sigma f_1(\alpha) f_2(\beta) \dots f_r(\varepsilon) = G(m),$$

wo die Summe über alle möglichen Zerlegungen der Zahl m in r positive Factoren $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ zu erstrecken ist und zwei Zerlegungen nur dann als identisch gelten, wenn sie in den ersten, zweiten, ... r^{ten} Factoren übereinstimmen; es soll die Summe

$$\Phi(n) = G(1) + G(2) + G(3) + \dots + G(n)$$

abgeschätzt werden.

$\Phi(n)$ ist die Summe aller Producte

$$f_1(\alpha) f_2(\beta) \ldots f_r(\varepsilon),$$

in welchen $\alpha\beta \ldots \varepsilon \leqq n$ ist.

Unter diesen Producten gibt es zunächst solche, in welchen die $r-1$ ersten Stellenzeiger der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \delta, \varepsilon$ die Zahl

$$\nu = E(\sqrt[r]{n})$$

nicht übersteigen. Ihre Summe sei Σ_r. Fasst man alle Glieder von Σ_r, welche die $r-1$ ersten Factoren $f_1(\alpha), f_2(\beta), \ldots f_{r-1}(\delta)$ gemein haben, in je eine Theilsumme zusammen, so ist eine solche

$$= f_1(\alpha) f_2(\beta) \ldots f_{r-1}(\delta) \left(f_r(1) + f_r(2) + \ldots + f_r\left(E\frac{n}{\alpha\beta\ldots\delta}\right)\right),$$

also ihr absoluter Betrag nach (6)

$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k).$$

Die Anzahl dieser Theilsummen ist ν^{r-1}, da jede der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \delta$ die Werthe $1, 2, \ldots \nu$ annehmen kann, und man hat daher

$$|\Sigma_r| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\nu^{r-1} \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\, n^{\frac{r-1}{r}}.$$

Alle übrigen Glieder von $\Phi(n)$ zerfallen in $r-1$ getrennte Inbegriffe $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_{r-1}$, wenn Σ_i diejenigen Glieder umfasst, in welchen der erste über ν liegende Stellenzeiger der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \delta$ der i^{te} ist.

Alle Glieder von Σ_i, welche sich nur in ihrem i^{ten} Factor unterscheiden, also die übrigen $r-1$ Factoren gemein haben, sind von der Form

$$f_i(l) f_{\mathfrak{a}}(a) f_{\mathfrak{b}}(b) \ldots f_{\mathfrak{e}}(e),$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ nach Ausschluss von i bezeichnen und

$$lab \ldots e \leqq n \qquad l > \nu$$

ist. In diesen Gliedern hat l demnach die Werthe

$$\nu+1, \nu+2, \ldots E\frac{n}{ab\ldots e}$$

und ihre Summe ist

$$= f_{\mathfrak{a}}(a) f_{\mathfrak{b}}(b) \ldots f_{\mathfrak{e}}(e) (f_l(\nu+1)+f_l(\nu+2)+\ldots),$$

der absolute Betrag der letzteren also nach $(\theta) \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)$. Solcher Summen enthält Σ_l so viele, als es Producte $f_{\mathfrak{a}}(a) f_{\mathfrak{b}}(b) \ldots \ldots f_{\mathfrak{e}}(e)$ gibt. Die Anzahl dieser Producte übersteigt, da

$$ab\ldots e \leqq \frac{n}{\nu+1} < n^{\frac{r-1}{r}}$$

ist, nicht die Anzahl $\mathfrak{A}$ aller Systeme von $r-1$ positiven Zahlen $a, b, \ldots e$, welche der Bedingung

$$ab\ldots e \leqq n^{\frac{r-1}{r}}$$

genügen, und es ist daher

$$|\Sigma_l| \leqq \mathfrak{A}\cdot\frac{1}{2}\varphi(k).$$

Bezeichnet aber $\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahl m in $r-1$ Factoren und n_0 die Zahl $E\left(n^{\frac{r-1}{r}}\right)$, so ist

$$\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A}(1)+\mathfrak{A}(2)+\ldots+\mathfrak{A}(n_0)$$
$$\leqq n_0\left(\frac{\mathfrak{A}(1)}{1}+\frac{\mathfrak{A}(2)}{2}+\ldots+\frac{\mathfrak{A}(n_0)}{n_0}\right)$$

und anderseits

$$\frac{\mathfrak{A}(1)}{1}+\frac{\mathfrak{A}(2)}{2}+\ldots+\frac{\mathfrak{A}(n_0)}{n_0} \leqq \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n_0}\right)^{r-1}$$

Da

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n_0} \leqq 1+\log n_0$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{A} \leqq n_0(1+\log n_0)^{r-1} \leqq n^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log n\right)^{r-1}$$

und man hat demnach

$$|\Sigma_i| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\, n^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log n\right)^{r-1}.$$

Hienach wird

$$\begin{aligned} |\Phi(n)| &= |\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_r| \\ &\leqq |\Sigma_1|+|\Sigma_2|+\ldots+|\Sigma_r| \\ &\leqq \frac{r\varphi(k)}{2}\, n^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log n\right)^{r-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Ungleichung ist in der stillschweigenden Voraussetzung abgeleitet worden, dass $r>1$, $n>1$ ist. Sie bleibt aber auch noch in den Fällen $r=1$ $(k=4)$, $n=1$ bestehen. Ist nämlich $r=1$, so folgt sie unmittelbar aus (6). Ist aber $n=1$, so ist

$$\Phi(1)=G(1)=1.$$

Da

$$G(p+1)+G(p+2)+\ldots+G(q)=\Phi(q)-\Phi(p)$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} |G(p+1)+G(p+2)+\ldots+G(q)| &\leqq |\Phi(q)|+|\Phi(p)| \\ &\leqq r\varphi(k)\, q^{\frac{r-1}{2}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log q\right)^{r-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Insbesondere ist

$$|G(m)| \leqq r\varphi(k)\, m^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}. \tag{11}$$

Aus den vorstehenden Umgleichungen ergibt sich die Convergenz der Reihen

$$G=G(1)+\frac{1}{2}G(2)+\frac{1}{3}G(3)+\ldots$$

$$H=\frac{1}{2}G(2)\log 2+\frac{1}{3}G(3)\log 3+\ldots$$

Setzt man nämlich

$$R_n = \frac{1}{n+1} G(n+1) + \frac{1}{n+2} G(n+2) + \ldots + \frac{1}{m} G(m)$$

$$R'_n = \frac{1}{n+1} G(n+1) \log(n+1) + \frac{1}{n+2} G(n+2) \log(n+2) + \ldots + \frac{1}{m} G(m) \log m,$$

so wird nach der Abel'schen Umformung

$$R_n = G(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + (G(n+1) + G(n+2))\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + (G(n+1) + G(n+2) + \ldots + G(m-1))\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) + (G(n+1) + G(n+2) + \ldots + G(m))\frac{1}{m}$$

$$R'_n = G(n+1)\left(\frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{\log(n+2)}{n+2}\right) + (G(n+1) + G(n+2))\left(\frac{\log(n+2)}{n+2} - \frac{\log(n+3)}{n+3}\right) + \ldots + (G(n+1) + G(n+2) + \ldots + G(m))\frac{\log m}{m}$$

und daher nach (10)

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|R_n| \leqq \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r}\log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} + \frac{\left(1 + \frac{r-1}{r}\log(n+2)\right)^{r-1}}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}} + \ldots$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|R_n'|\leqq\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}\log(n+1)+\dots$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}\log(m-1)+$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}}\log m.$$

Es genügt also eine Summe von der Form

$$S_h=\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{(\log(n+2))^h}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\dots$$

$$\dots+\frac{(\log(m-1))^h}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{(\log m)^h}{m^{\frac{1}{r}}}$$

abzuschätzen.

Man hat zu diesem Ende

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}<\frac{r}{n^{\frac{1}{r}}}-\frac{r}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}$$

und daher, wenn $\lambda\geqq 1$ ist,

$$\frac{(\log(n+\lambda))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}<\frac{r(\log(n+\lambda))^h}{n^{\frac{1}{r}}}-\frac{r(\log(n+\lambda+1))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}$$

$$+\frac{r(\log(n+\lambda+1))^h-r(\log(n+\lambda))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}};$$

wird aber beachtet, dass

$$(\log(n+1+\lambda))^h - (\log(n+\lambda))^h < h(\log(n+\lambda+1) - \log(n+\lambda)) \,.$$
$$.(\log(n+1+\lambda))^{h-1}$$
$$< \frac{h}{n+1}(\log(n+1+\lambda))^{h-1}$$

ist, so folgt

$$\frac{(\log(n+\lambda))^r}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log n+\lambda))^h}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+\lambda+1))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{hr(\log(n+\lambda+1))^{h-1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} .$$

Diese Ungleichung ergibt nach und nach

$$\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+1))^h}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+2))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{hr(\log(n+2))^{h-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{(\log(n+2))^{h-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+2))^{h-1}}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+3))^{h-1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{(h-1)r(\log(n+3))^{h-2}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}$$

. . . .

und man hat demnach

$$\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}}$$
$$- \frac{r\log(n+2)^h + hr^2(\log(n+3))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} .$$

Wird hierin $n = n, n+1, \ldots m-1$ gesetzt und addirt, so folgt

$$S_h < \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}} \tag{12}$$

$$- \frac{r(\log(m+1))^h + hr^2(\log(m+2))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{m^{\frac{1}{r}}} +$$

$$+ \frac{(\log m)^h}{m^{\frac{1}{r}}}$$

$$< \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}}.$$

Die Grössen R_n, R_n' sind demnach von nicht höherer Ordnung als

$$\frac{(\log n)^{r-1}}{n^{\frac{1}{r}}}, \quad \frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{r}}}. \tag{13}$$

4.

Aufgabe. Es sei, die Summe über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma G(\delta) = F(m)$$

und

$$\Theta(n) = F(1) + \frac{1}{2}F(2) + \frac{1}{3}F(3) + \ldots + \frac{1}{n}F(n);$$

es soll der asymptotische Ausdruck von $\Theta(n)$ für grosse Werthe von n gefunden werden.

Es sei

$$E\left(\frac{n}{h}\right) = n_h$$

$$E(\sqrt{n}) = \mu$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = \psi(m)$$

$$A = G(1)\psi(n_1) + \frac{1}{2}G(2)\psi(n_2) + \ldots + \frac{1}{\mu}G(\mu)\psi(n_\mu)$$

$$B = \frac{1}{\mu+1}G(\mu+1)\psi(n_{\mu+1}) + \frac{1}{\mu+2}G(\mu+2)\psi(u_{\mu+2}) + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n}G(n)\psi(n_n).$$

Es wird dann

$$\Theta(n) = G(1)\psi(n_1) + \frac{1}{2}G(2)\psi(n_2) + \ldots + \frac{1}{n}G(n)\psi(n_n)$$
$$= A+B.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{m} - \log(m+1) + \log m = \frac{1}{m} - \log\left(1+\frac{1}{m}\right) = b_m$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = \chi(m),$$

so wird

$$\psi(n_h) = \log(1+n_h) + \chi(n_h)$$
$$= \log\frac{n}{h} + \chi(n) + \log(1+n_h) - \log\frac{n}{h} - (\chi(n) - \chi(n_h)).$$

Da aber

$$\log(1+n_h) - \log\frac{n}{h} > 0$$
$$\leqq \log\left(1+\frac{n}{h}\right) - \log\frac{n}{h} = \log\left(1+\frac{h}{n}\right)$$
$$< \frac{h}{n},$$

ferner

$$b_m = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{4m^4} - \ldots$$
$$> 0$$
$$< \frac{1}{2(m-1)} - \frac{1}{2m},$$

also

$$\chi(n) - \chi(n_h) > 0$$
$$< \frac{1}{2n_h}$$
$$< \frac{h}{n}$$

ist, so wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\psi(n_h) - \log n - \chi(n) + \log h < \frac{h}{n}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{1}{h}G(h)$ und summirt von $h = 1$ bis $h = \mu$, so folgt

$$A - (\log n + \chi n)\left(G(1) + \frac{1}{2}G(2) + \ldots + \frac{1}{\mu}G(\mu)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}G(2)\log 2 + \frac{1}{3}G(3)\log 3 + \ldots + \frac{1}{\mu}G(\mu)\log \mu$$
$$< \frac{1}{n}|G(1)| + \frac{1}{n}|G(2)| + \ldots + \frac{1}{n}|G(\mu)|.$$

Nun ist nach (11), wenn $m \leqq \mu$,

$$|G(m)| \leqq r\varphi(k)n^{\frac{r-1}{2r}}\left(1 + \frac{r-1}{2r}\log n\right)^{r-1},$$

also

$$|G(1)| + |G(2)| + \ldots + |G(\mu)| \leqq n \cdot \frac{r\varphi(k)}{n^{\frac{1}{2r}}}\left(1 + \frac{r-1}{2r}\log n\right)^{r-1},$$

ferner bis auf eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{n}$

$$\chi(n) = \mathfrak{E},$$

wo $\mathfrak{E}$ die Euler'sche Constante bezeichnet, und nach (13) bis auf Grössen von den Ordnungen $\frac{(\log n)^{r-1}}{n^{\frac{1}{2r}}}$, $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$

$$G(1)+\frac{1}{2}G(2)+\ldots+\frac{1}{\mu}G(\mu)=G$$

$$\frac{1}{2}G(2)\log 2+\frac{1}{3}G(3)\log(3)+\ldots+\frac{1}{\mu}G(\mu)\log\mu=H.$$

Bezeichnet daher Δ eine Grösse von der Ordnung $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$, so wird

$$A=G(\log n+\mathfrak{C})-H+\Delta.$$

B geht durch die Abel'sche Umformung in

$$B=G(\mu+1)\left(\frac{\psi(n_{\mu+1})}{\mu+1}-\frac{\psi(n_{\mu+2})}{\mu+2}\right)+$$
$$+(G(\mu+1)+G(\mu+2))\left(\frac{\psi(n_{\mu+2})}{\mu+2}-\frac{\psi(n_{\mu+3})}{\mu+3}\right)$$
$$+\ldots+(G(\mu+1)+G(\mu+2)+\ldots+G(n))\frac{\psi(n_n)}{n}$$

über; da aber

$$\frac{\psi(n_{\mu+\lambda})}{\mu+\lambda}-\frac{\psi(n_{\mu+\lambda+1})}{\mu+\lambda+1}<\frac{\psi(n_{\mu+\lambda})}{(\mu+\lambda)^2}$$
$$<\frac{1+\log n}{(\mu+\lambda)^2}$$

ist, so ergibt sich nach (10)

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|B|<(1+\log n)\left(\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+1)\right)^{r-1}}{(\mu+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+2)\right)^{r-1}}{(\mu+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log n\right)^{r-1}}{n^{\frac{1}{r}}}\right)$$

und B ist demnach nach (12) eine Grösse von der Ordnung $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$.

Man hat hienach den gewünschten asymptotischen Ausdruck

$$\Theta(n) = G(\log n + \mathfrak{C}) - H + \Delta',$$

wo Δ' von der Ordnung $\dfrac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$ ist.

Die Reihen G, H lassen sich in einfacher Weise durch die Reihen

$$L_i = f_i(1) + \frac{1}{2} f_i(2) + \frac{1}{3} f_i(3) + \dots$$

$$M_i = \frac{1}{2} f_i(2) \log 2 + \frac{1}{3} f_i(3) \log 3 + \dots$$

ausdrücken.

Es sei $f_i'(m)$ je nach Bedarf die Zahl $f_i(m)$ oder $f_i(m) \log m$ und entsprechend $f_i^0(m) = 1$ oder $= \log m$. Man setze

$$E(\sqrt[r]{n}) = \nu$$

$$R_i(\nu) = f_i'(1) + \frac{1}{2} f_i'(2) + \frac{1}{3} f_i'(3) + \dots + \frac{1}{\nu} f_i'(\nu)$$

$$\Sigma f_1'(\alpha) f_2'(\beta) \dots f_r'(\varepsilon) = G'(m),$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in r Factoren $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ zu erstrecken ist.

Die Summe

$$H(n) = G'(1) + \frac{1}{2} G'(2) + \dots + \frac{1}{n} G'(n)$$

besteht aus allen Producten

$$\frac{f_1'(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{f_2'(\beta)}{\beta} \dots \frac{f_r'(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

in welchen $\alpha\beta \dots \varepsilon \leqq n$ ist.

Unter diesen Producten bilden alle diejenigen, in welchen keiner der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ die Zahl ν übersteigt, die Entwicklung des Productes

$$R_1(\nu) R_2(\nu) \dots R_r(\nu).$$

In den übrigen Gliedern von $H(n)$ muss wenigstens einer der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die Zahl ν übersteigen, und es sei Σ_i die Summe derjenigen Glieder, in welchen der erste über ν liegende Stellenzeiger in der Zahlenreihe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ der i^{te} ist, so dass $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_r$ zusammen genau die in Rede stehenden Glieder erschöpfen.

Bezeichnen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ die Zahlen $1, 2, \ldots r$ nach Ausschluss von i, so haben alle Glieder von Σ_i die Gestalt

$$\frac{f_i'(l)}{l} \cdot \frac{f_\mathfrak{a}'(a)}{a} \frac{f_\mathfrak{b}'(b)}{b} \cdots \frac{f_\mathfrak{e}'(e)}{e},$$

wo

$$l > \nu$$
$$lab \ldots e \leqq n$$

ist. Fasst man unter denselben alle diejenigen zusammen, welche die Factoren

$$\frac{f_\mathfrak{a}'(a)}{a}, \frac{f_\mathfrak{b}'(b)}{b}, \ldots \frac{f_\mathfrak{e}'(e)}{e}$$

gemein haben und in welchen l die Werthe $\nu+1, \nu+2, \ldots \ldots E\left(\frac{n}{ab \ldots e}\right)$ annimmt, so ist ihre Summe

$$= \frac{f_\mathfrak{a}'(a) f_\mathfrak{b}'(b) \ldots f_\mathfrak{e}'(e)}{ab \ldots e} \left(\frac{f_i'(\nu+1)}{\nu+1} + \frac{f_i'(\nu+2)}{\nu+2} + \ldots \right)$$

und daher der absolute Betrag der letzteren nach (7)

$$\leqq \frac{f_\mathfrak{a}^0(a) f_\mathfrak{b}^0(b) \ldots f_\mathfrak{e}^0(e)}{ab \ldots e} \cdot \frac{1}{2} \varphi(k) \frac{f_i^0(\nu+1)}{\nu+1},$$

wenn angenommen wird, dass die Grössen

$$\frac{\log(\nu+1)}{\nu+1}, \frac{\log(\nu+2)}{\nu+2}, \ldots$$

eine abnehmende Reihe bilden, also $\nu \geqq 2$, $n \geqq 2^n$ ist. Solcher Summen gibt es so viele, als es Systeme von $r-1$ positiven Zahlen $a, b, \ldots e$ gibt, welche der Bedingung

$$ab \ldots e \leqq \frac{n}{\nu+1}$$

genügen und von welchen in dem Falle $i > 1$ die ersten $i-1$ nicht über ν liegen. Daher ist, die Summation über diese Zahlensysteme erstreckt,

$$|\Sigma_i| < \frac{\varphi(k)}{2n^{\frac{1}{r}}} f_i^0(\nu+1) \Sigma \frac{f_\mathfrak{a}^0(a) f_\mathfrak{b}^0(b) \ldots f_\mathfrak{e}^0(e)}{ab \ldots e}.$$

Es ist aber, wenn λ die Anzahl der logarithmischen Factoren in dem Producte $f_i^0(l) f_\mathfrak{a}^0(a) \ldots f_\mathfrak{e}^0(e)$ bezeichnet,

$$f_i^0(\nu+1) \Sigma \frac{f_\mathfrak{a}^0(a) f_\mathfrak{b}^0(b) \ldots f_\mathfrak{e}^0(e)}{ab \ldots e} \leqq (\log n)^\lambda \Sigma \frac{1}{ab \ldots e}$$
$$< (\log n)^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^{r-1}$$
$$< (\log n)^\lambda (1 + \log n)^{r-1}.$$

Da demnach

$$|\Sigma_i| < \frac{\varphi(k) (\log n)^\lambda (1 + \log n)^{r-1}}{2n^{\frac{1}{r}}}$$

ist und mit wachsendem n unbegrenzt abnimmt, so wird der Gleichung

$$H(n) = R_1(\nu) R_2(\nu) \ldots R_r(\nu) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r$$

zufolge

$$G'(1) + \frac{1}{2} G'(2) + \frac{1}{3} G'(3) + \ldots \text{in inf.} = R_1(\infty) R_2(\infty) \ldots R_r(\infty).$$

Insbesondere ist

$$G = L_1 L_2 \ldots L_r.$$

Setzt man ferner

$$\Sigma f_1(\alpha) f_2(\beta) \ldots f_r(\varepsilon) \log \tau = G_i(m),$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in r Factoren $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu erstrecken und τ der i^{te} dieser Factoren ist, so wird

$$G_1(1)+\frac{1}{2}G_1(2)+\frac{1}{3}G_1(3)+\ldots=M_1L_2L_3\ldots L_r$$

$$G_2(1)+\frac{1}{2}G_2(2)+\frac{1}{3}G_2(3)+\ldots=M_2L_1L_3\ldots L_r$$

. . . .

$$G_r(1)+\frac{1}{2}G_r(2)+\frac{1}{3}G_r(3)+\ldots=M_rL_1L_2\ldots L_{r-1}.$$

Da

$$G_1(m)+G_2(m)+\ldots+G_r(m)=\Sigma f_1(\alpha)f_2(\beta)\ldots f_r(\varepsilon)\log(\alpha\beta\ldots\varepsilon)$$
$$=G(m)\log m$$

ist, so folgt durch Addition

$$H=M_1L_2L_3\ldots L_r+M_2L_1L_3\ldots L_r+\ldots+M_rL_1L_2\ldots L_{r-1}.$$

Es ist daher auch

$$\Theta(n)=L_1L_2\ldots L_r(\log n+\mathfrak{C})$$
$$-M_1L_2L_3\ldots L_r-M_2L_2L_3\ldots L_r-\ldots-M_rL_1L_2\ldots L_{r-1}.$$
$$+\Delta'.$$

Der asymptotische Ausdruck für $\Theta(n)$ lehrt, dass L_h nicht Null sein kann, wenn in der $h+1^{\text{ten}}$ Wurzelcombination $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$ wenigstens eine imaginäre Wurzel vorkommt. Ist nämlich in diesem Falle die aus den conjugirten Werthen von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$ bestehende Combination die $h'+1^{\text{te}}$, so ist h' von h verschieden und $L_{h'}$ zu L_h conjugirt. Wäre daher $L_h=0$, so wäre auch $L_{h'}=0$ und $\Theta(n)$ wäre von der Ordnung $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$.

Man kann aber zeigen, dass $\Theta(n)\geqq 1$ ist.

Man hat nämlich

$$F(1)=G(1)=1$$

und für irgend zwei theilerfremde Zahlen n, n' nach (5)

$$F(n)F(n')=F(nn').$$

Ist ferner q^λ eine Primzahlpotenz, so ist der Ausdruck

$$F(q^\lambda)=G(1)+G(q)+G(q^2)+\ldots+G(q^\lambda)$$

der Coëfficient von x^λ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-xf_1(q))(1-xf_2(q))\ldots(1-xf_r(q))}$$

nach steigenden Potenzen von x. Dieser Bruch hat den Werth $\frac{1}{1-x}$, wenn q in k aufgeht. Geht dagegen die Primzahl q nicht in k auf und gehört sie zum Exponenten t nach dem Modul k, so hat die Summe

$$1+f_1(q)^m+f_2(q)^m+\ldots+f_r(q)^m$$
$$=f_0(q^m)+f_1(q^m)+f_2(q^m)+\ldots+f_r(q^m)$$

den Werth $\varphi(k)$ oder Null, je nachdem $q^m\equiv 1 \pmod{k}$ ist oder nicht, je nachdem also m ein Vielfaches von t ist oder nicht. Es ist daher

$$\log(1-x)(1-xf_1(q))\ldots(1-xf_r(q)) =$$
$$=-\frac{\varphi(k)}{t}\left(x^t+\frac{1}{2}x^{2t}+\frac{1}{3}x^{3t}+\ldots\right)$$
$$=\frac{\varphi(k)}{t}\log(1-x^t)$$

und somit

$$\frac{1}{(1-x)(1-xf_1(q))\ldots(1-xf_r(q))}=(1-x^t)^{-\frac{\varphi(t)}{t}}.$$

$F(q^\lambda)$ kann demnach in keinem Falle negativ sein.

Da hienach $F(m)$ für keinen Werth von m negativ sein kann, so ist

$$\Theta(n)\geqq F(1)=1.$$

5.

Aufgabe. Die $i+1$te Wurzelcombination $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ enthalte nur reelle Wurzeln, welche nicht alle $=1$ sind, und es sei, die Summation über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma f_i(\delta)=F(m);$$

es soll der asymptotische Ausdruck der Summe

$$\Theta(n) = \frac{F(1)}{\sqrt{1}} + \frac{F(2)}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{F(n)}{\sqrt{n}}$$

für grosse Werthe von n gefunden werden.

Setzt man

$$E\left(\frac{n}{h}\right) = n_h$$

$$E\sqrt{n} = \mu$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}} = \psi(m)$$

$$A = \frac{f_i(1)\psi(n_1)}{\sqrt{1}} + \frac{f_i(2)\psi(n_2)}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{f_i(\mu)\psi(n_\mu)}{\sqrt{\mu}}$$

$$B = \frac{f_i(\mu+1)\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}} + \frac{f_i(\mu+2)\psi(n_{\mu+2})}{\sqrt{\mu+2}} + \dots + \frac{f_i(n)\psi(n_n)}{\sqrt{n}},$$

so erscheint $\Theta(n)$ in der Gestalt

$$\Theta(n) = \frac{f_i(1)\psi(n_1)}{\sqrt{1}} + \frac{f_i(2)\psi(n_2)}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{f_i(n)\psi(n_n)}{\sqrt{n}}$$
$$= A+B.$$

Es sei zur Abkürzung

$$2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} = b_m.$$

Da nach dem binomischen Satze

$$\sqrt{m-1} = \sqrt{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{m}\left(1 - \frac{1}{2m} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{1}{m^2} - \dots\right)$$

also

$$b_m = 2\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{1}{m\sqrt{m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}{3!}\frac{1}{m^2\sqrt{m}} + \ldots\right)$$

ist, so ergibt sich

$$b_m > 0$$

und anderseits

$$\frac{b_1}{m\sqrt{m}} - b_m = \frac{1}{m\sqrt{m}} - b_m =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}{3!}\frac{1}{m\sqrt{m}}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \ldots$$

$$\geqq 0$$

oder

$$b_m \leqq \frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}.$$

Man hat also

$$0 < b_m < \frac{2}{\sqrt{m-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Summirt man von $m = n_h + 1$ bis $m = n$, so folgt

$$0 < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_h} - \psi(n) + \psi(n_h) < \frac{2}{\sqrt{n_h + \frac{1}{2}}}$$

und nach Subtraction von $2\sqrt{\frac{n}{h}} - 2\sqrt{n_h}$

$$-2\left(\sqrt{\frac{n}{h}} - \sqrt{n_h}\right) < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{h}} -$$

$$- \psi(n) + \psi(n_h) < \frac{2}{\sqrt{n_h + \frac{1}{2}}};$$

da aber

$$2\left(\sqrt{\frac{n}{h}}-\sqrt{n_h}\right)=2\frac{\frac{n}{h}-n_h}{\sqrt{n_h}+\sqrt{\frac{n}{h}}}<\frac{2}{\sqrt{n_h}}$$

und, wenn $h \leqq \mu$ angenommen wird,

$$\frac{2}{\sqrt{n_h+\frac{1}{2}}}<\frac{2}{\sqrt{n_h}}\leqq 2\sqrt{\frac{h}{n-h+1}}<2\sqrt{\frac{2h}{n}}$$

ist, so wird ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\psi(n_h)-2\sqrt{\frac{n}{h}}+2\sqrt{n}-\psi(n)<2\sqrt{\frac{2h}{n}}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{f_i(h)}{\sqrt{h}}$ und summirt man $h=1$ bis $h=\mu$, so ergibt sich

$$A-2\sqrt{n}\left(f_i(1)+\frac{1}{2}f_i(2)+\ldots+\frac{1}{\mu}f_i(\mu)\right)$$
$$+(2\sqrt{n}-\psi(n))\left(\frac{f_i(1)}{\sqrt{1}}+\frac{f_i(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{f_i(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right)<2\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\mu$$
$$<2\sqrt{2}.$$

Nach (7) ist aber

$$\left|\frac{f_i(\mu+1)}{\mu+1}+\frac{f_i(\mu+2)}{\mu+2}+\ldots\right|\leqq\frac{1}{2}\frac{\varphi(k)}{\nu+1}<\frac{\varphi(k)}{2\sqrt{n}}$$

oder

$$\left|L_i-\frac{f_i(1)}{1}-\frac{f_i(2)}{2}-\ldots-\frac{f_i(\mu)}{\mu}\right|<\frac{\varphi(k)}{2\sqrt{n}}$$

und

$$\left|\frac{f_i(1)}{\sqrt{1}}+\frac{f_i(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{f_i(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right|\leqq\frac{1}{2}\varphi(k);$$

ferner folgt aus (14), wenn man von $m=1$ bis $m=n$ summirt,

$$0<2\sqrt{n}-\psi(n)<2\sqrt{2}. \tag{15}$$

Daher wird

$$|A-2\sqrt{n}L_i| < \varphi(k)+(2+\varphi(k))\sqrt{2}.$$

Da $\frac{\psi(n_h)}{\sqrt{n}}$ mit wachsendem h abnimmt, so wird nach (7)

$$|B| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\frac{\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}}$$

und demzufolge nach (15)

$$|B| < \frac{1}{2}\varphi(k)\frac{2\sqrt{n_{\mu+1}}}{\sqrt{\mu+1}} < \varphi(k).$$

Es wird also

$$|A+B-2L_i\sqrt{n}| < 2\varphi(k)+(1+\varphi(k))\sqrt{2}$$

und man hat den gewünschten asymptotischen Ausdruck

$$\Theta(n) = 2L_i\sqrt{n}+\Delta,$$

wo

$$|\Delta| < 2\varphi(k)+(2+\varphi(k))\sqrt{2}.$$

Aus diesem Ausdrucke erhellt, dass L_i nicht Null sein kann.

Da nämlich, wenn q eine Primzahl bezeichnet,

$$\begin{aligned} F(q^\lambda) &= f_i(1)+f_i(q)+f_i(q^2)+\ldots+f_i(q^\lambda) \\ &= 1+f_i(q)+f_i(q)^2+\ldots+f_i(q)^\lambda \end{aligned}$$

ist und nur einen der drei Werthe $\lambda+1$, $\frac{1-(-1)^{\lambda+1}}{2}$, 1 haben kann, je nachdem $f_i(q) = 1, -1$ oder $= 0$ ist, so ist immer

$$F(q^\lambda) \geqq 0$$

und insbesondere bei geradem λ

$$F(q^\lambda) \geqq 1.$$

Da ferner, wenn n, n' theilerfremd sind, nach (5)

$$F(nn') = F(n)F(n')$$

und

$$F(1) = 1$$

ist, so ist allgemein

$$F(m) \geqq 0$$

und für jede Quadratzahl

$$F(m^2) \geqq 1.$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned}\Theta(n) &\geqq \frac{F(1)}{1} + \frac{F(2^2)}{2} + \frac{F(3^2)}{3} + \ldots + \frac{F(\mu^2)}{\mu} \\ &\geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\mu} > \log \mu \\ &> \frac{1}{2} \log n.\end{aligned}$$

6.

Zerlegt man in jedem Gliede $\frac{f_h(m) \log m}{m}$ des Ausdruckes

$$M_h(n) = \frac{f_h(2) \log 2}{2} + \frac{f_h(3) \log 3}{3} + \ldots + \frac{f_h(n) \log n}{n}$$

den Logarithmus $\log m$ in die Summe der Logarithmen der Primfactoren von m, so zerfällt $M_h(n)$ in lauter Glieder, welche den Logarithmus je einer der n nicht übersteigenden Primzahlen als Factor enthalten, und es möge aus der Zusammenfassung aller solcher Glieder, welche den Logarithmus einer bestimmten Primzahl p enthalten, das Resultat $\psi(n) \log p$ hervorgehen. Da die fraglichen Glieder nur aus der Zerlegung der Glieder

$$\frac{1}{p} f_h(p) \log p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \cdot \frac{f_h(1)}{1} + \frac{f_h(p)}{p} \cdot \frac{\log 1}{1}$$

$$\frac{1}{2p} f_h(2p) \log 2p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \cdot \frac{f_h(2)}{2}$$

$$+ \frac{f_h(p)}{p} \cdot \frac{f_h(2) \log 2}{2}$$

. . . .

$$\frac{1}{n_1 p} f_h(n_1 p) \log n_1 p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \cdot \frac{f_h(n_1)}{n_1} +$$

$$+ \frac{f_h(p)}{p} \cdot \frac{f_h(n_1) \log n_1}{n_1}$$

von $M_h(n)$ hervorgehen können, wo $n_1 = E\left(\frac{n}{p}\right)$ ist, so ergibt sich

$$\psi(n) = \frac{f_h(p)\log p}{p} L_h\left(\frac{n}{p}\right) + \psi(n_1)\frac{f_h(p)}{p}.$$

wo

$$L_h(z) = \frac{f_h(1)}{1} + \frac{f_h(2)}{2} + \ldots + \frac{f_h(Ez)}{E(z)}.$$

Hieraus folgt

$$\psi(n) = \frac{f_h(p)}{p} L_h\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{f_h(p^2)}{p^2} L_h\left(\frac{n}{p^2}\right) + \ldots$$

Man hat demnach

$$M_h(n) = \Sigma L_h\left(\frac{n}{p}\right)\frac{f_h(p)\log p}{p} + \Sigma L_h\left(\frac{n}{p^2}\right)\frac{f_h(p^2)\log p}{p^2} + \ldots,$$

wo das erste Summenzeichen alle Primzahlen p umfasst, welche n nicht übersteigen, das zweite alle Primzahlen, deren Quadrat die Zahl n nicht übersteigt u. s. f.

Setzt man nun

$$\Lambda_h(n) = \Sigma\left(\frac{f_h(p)}{p} + \frac{f_h(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_h(p^\pi)}{p^\pi}\right)\log p,$$

$$\Delta(m) = \frac{f_h(m)}{m}\left(L_h - L_h\left(\frac{n}{m}\right)\right),$$

wo die Summe über alle n nicht übersteigenden Primzahlen p zu erstrecken ist und p^π die höchste Potenz von p bezeichnet, welche n nicht überschreitet, so wird, die Summation über alle n nicht übersteigenden Primzahlen p erstreckt,

$$L_h\Lambda_h(n) - M_h(n) = \Sigma(\Delta(p) + \Delta(p^2) + \ldots + \Delta(p^\pi))\log p;$$

hieraus folgt

$$|L_h\Lambda_h(n) - M_h(n)| \leqq \Sigma(|\Delta(p)| + |\Delta(p^2)| + \ldots + |\Delta(p^\pi)|)\log p;$$

da aber nach (7)

$$\left|L_h - L_h\left(\frac{n}{m}\right)\right| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\,\frac{1}{1+E\left(\frac{n}{m}\right)}$$
$$< \frac{1}{2}\varphi(k)\,\frac{m}{n}$$

also

$$|\Delta(m)| < \frac{\varphi(k)}{2n}$$

und nach (3)

$$\Sigma\pi\log p = \log P < n\log 5$$

ist, so ergibt sich

$$|L_h\Lambda_h(n) - M_h(n)| < \Sigma\pi.\frac{\varphi(k)}{2n}\log p$$
$$< \frac{1}{2}\varphi(k)\log 5.$$

Dividirt man mit der für jedes h von Null verschiedenen Grösse $|L_h|$, so folgt

$$\left|\Lambda_h(n) - \frac{M_h(n)}{L_h(n)}\right| < \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(k)\log 5}{|L_h|}$$

und man hat

$$|\Lambda_h(n)| < \frac{|M_h(n)| + \frac{1}{2}\varphi(k)\log 5}{|L_h|}.$$

Da nach (7)

$$\frac{f_h(3)}{3}\log 3 + \frac{f_h(4)}{4}\log 4 + \ldots \frac{f_h(n)}{n}\log n \leqq \frac{\varphi(k)}{2}\cdot\frac{\log 3}{3}$$

also

$$|M_h(n)| \leqq \frac{\log 2}{2} + \frac{\varphi(k)\log 3}{6}$$

ist, so ergibt sich für jedes n

$$|\Lambda_h(n)| < A_h, \tag{17}$$

wo

$$A_h = \frac{\frac{1}{2}\log 2 + \varphi(k)\left(\frac{\log 3}{6} + \frac{\log 5}{2}\right)}{|L_h|}.$$

7.

Es sei nun die arithmetische Reihe $kx+l$ gegeben, wo l zu k theilerfremd ist, und man bestimme l' aus der Congruenz

$$ll' \equiv 1 \pmod{k}.$$

Da

$$\Lambda(n) = \Sigma\left(\frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_0(p^\varkappa)}{q^\varkappa}\right)\log p$$
$$+ \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\varkappa}\right)$$

ist, wo das erste Summenzeichen sich auf alle n nicht übersteigenden Primzahlen bezieht, das zweite hingegen nur auf diejenigen unter denselben, welche in k aufgehen, und $p^\varkappa$ die höchste, n nicht überschreitende Potenz von p bezeichnet, so wird nach (8)

$$f_0(l')\Lambda(n) + f_1(l')\Lambda_1(n) + f_2(l')\Lambda_2(n) + \ldots + f_r(l')\Lambda_r(n)$$
$$= \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\varkappa}\right)$$
$$+ \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q} + \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^2} + \ldots,$$

wo das erste Summenzeichen sich auf die n nicht übersteigenden und in k aufgehenden Primzahlen p, das zweite auf die n nicht übersteigenden Primzahlen q von der Form $kx+l$, das dritte auf die Primzahlen q bezieht, deren Quadrate in der Reihe $kx+l$ vorkommen und n nicht übersteigen u. s. f. Hieraus folgt

$$\varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q} - \log n = \Lambda(n) - \log n + f_1(l')\Lambda_1(n) + \ldots + f_r(l')\Lambda_r(n)$$
$$- \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\varkappa}\right)$$
$$- \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^2} - \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^3}\ldots$$

und nach (4), (17)

$$\left|\varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q}-\log n\right| \leqq 1+A_1+A_2+\ldots A_r$$
$$+\Sigma\left(\frac{\log p}{p}+\frac{\log p}{p^2}+\ldots+\frac{\log p}{p^\pi}\right)$$
$$+\varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^2}+\varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^3}+\ldots$$

Setzt man daher

$$A=\frac{1+A_1+A_2+\ldots+A_r+\Sigma_p\frac{\log p}{p}}{\varphi(k)}+\Sigma_q\frac{\log q}{q(q-1)},$$

wo Σ_p sich auf alle in k aufgehenden Primzahlen, Σ_q dagegen auf alle möglichen Primzahlen bezieht, so ist

$$\left|\Sigma\frac{\log q}{q}-\frac{\log n}{\varphi(k)}\right|<A$$

oder

$$\Sigma\frac{\log q}{q}=\frac{1}{\varphi(k)}\log n+\vartheta(n)$$
$$\vartheta(n)<A,$$

wo die Summe sich auf alle n nicht übersteigenden in der arithmetischen Reihe $kx+l$ vorkommenden Primzahlen q erstreckt.

Ist N eine beliebige ganze positive Zahl und wird

$$1+E(e^{2A\varphi(k)})=K$$

gesetzt, so kommt in der Zahlenreihe

$$N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots KN-1,\ KN$$

sicher eine Primzahl von der Form $kx+l$ vor.

Bezieht sich nämlich das Summenzeichen $\sum\limits_a^b$ auf alle in der Zahlenreihe $a, a+1,\ldots b$ vorkommenden Primzahlen q von der Form $kx+l$, so wird

$$\sum_{N+1}^{KN} \frac{\log q}{q} = \sum_{2}^{KN} \frac{\log q}{q} - \sum_{2}^{N} \frac{\log q}{q}$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \log KN + \vartheta(KN) - \frac{1}{\varphi(k)} \log N - \vartheta(N)$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \log K + \vartheta(KN) - \vartheta(N);$$

da aber

$$\frac{1}{\varphi(k)} \log K > 2A$$

$$A + \vartheta(NK) > 0$$

$$A - \vartheta(N) > 0$$

ist, so folgt

$$\sum_{N+1}^{KN} \frac{\log q}{q} > 0.$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG III.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE
PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



X. SITZUNG VOM 1. APRIL 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. II. a., Heft VIII—X (October bis December 1896); Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft I (Jänner 1897).

Herr Dr. Bruno Bardach übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium des pathologischen Institutes der königlichen Charité in Berlin über die Gerinnungsursache erhitzter Milch.

Der Secretär legt eine Arbeit von Dr. Lazar Car, Privatdocent an der königl. Franz Josef-Universität in Agram: »Über den Mechanismus der Locomotion der Pulmonaten« vor.

Das w. M. Herr Sigm. Exner legt eine im physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Untersuchung von Dr. J. Zanietowski aus Krakau vor, betitelt: »Graphische Studien über die Erregbarkeitsverhältnisse im Elektrotonus«.

Herr Prof. Dr. Josef Schaffer in Wien überreicht eine vorläufige Mittheilung: »Über die Drüsen der menschlichen Speiseröhre«.

Bestimmung der Capacität mit der Wage

von

V. v. Lang,

w. M. k. Akad.

1. Die im Nachfolgenden gegebene Methode ist wohl nur zur Bestimmung der Capacität von Condensatoren geeignet, und da nur, wenn es sich nicht um sehr grosse Genauigkeit handelt. Sie bietet aber vielleicht Vortheile für die Praxis, die ja Condensatoren immer mehr in Verwendung nimmt. Auch dürfte der Versuch, auf welchem die zu beschreibende Methode fusst und die eine viel erörterte Erscheinung bei Wechselströmen illustrirt, für die Schule nicht ohne Interesse sein.

An dem einen Arm einer Wage wird eine Drahtspule II so aufgehängt, dass ihre Windungen horizontal sind. Darunter kommt eine ähnliche Spule I, durch welche unter Anwendung von Vorschaltwiderständen der auf 100 *V* transformirte Wechselstrom der hiesigen Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft geleitet wird. Ist die aufgehängte Spule kurzgeschlossen, so werden dann in ihr ebenfalls Wechselströme inducirt mit einer um 90° verschiedenen Phase, da ja die Maxima derselben zu Zeiten eintreten, wann die Ströme in der fixen Spule die grössten Intensitätsänderungen aufweisen. Zu dieser Phasenverschiebung der Ströme in Spule II kommt aber noch eine weitere durch die Selbstinduction dieser Spule, wobei der Maximalwerth dieser Phasenverschiebung 90° beträgt. Die Wechselströme in den Spulen I und II sind also in nahezu entgegengesetzter Phase und in Folge dieses Umstandes findet zwischen der fixen und der aufgehängten Spule eine Abstossung statt, deren Betrag durch die Wage ermittelt werden könnte.

Anders jedoch, wenn man die Enden der aufgehängten Spule auf passende Weise (Spiralen aus dünnen Drahte) mit den Belegungen eines Condensators verbindet. Die in Spule II inducirten Ströme erreichen dann allerdings keine beträchtliche Stärke, sind aber in der Phase vorgeschoben, so dass die Phasendifferenz zwischen den Strömen in I und II jetzt zwischen 90° und Null liegt, woraus eine Anziehung G der beiden Spulen resultirt.

Da diese Anziehung jedenfalls proportional der Producte der Stromstärken in beiden Spulen ist, so findet man für dieselbe leicht den Ausdruck

$$G = MJ^2b^2wC \frac{1-b^2LC}{1-2b^2LC+(w^2+b^2L^2)b^2C^2}. \qquad 1)$$

Hierin ist M ein Proportionalitätsfactor, J die Amplitude und $\tau = 2\pi/b$ die Periode des Wechselstromes in der Spule I, ferner sind w und L der Widerstand und die Selbstinduction der Spule II und C die Capacität des mit dieser Spule verbundenen Condensators.

Da in meinen Versuchen C immer sehr klein war (einige Mikrofarad), so kann man in dem vorhergehenden Bruche zweite und höhere Potenzen dieser Grösse vernachlässigen, wodurch der Ausdruck für G übergeht in

$$G = MJ^2b^2wC(1+b^2LC), \qquad 2)$$

wofür wir kurz

$$G = PC(1+\alpha C) \qquad 3)$$

setzen. Im Folgenden benützen wir für die Capacität das Mikrofarad als Einheit, in der letzten Gleichung ist daher

$$\alpha = b^2L10^{-6}. \qquad 4)$$

Hiernach lässt sich der Werth von α berechnen. Da für die bewegliche Spule $bL = 9{\cdot}1$ ist und der Wechselstrom der hiesigen Lichtcentrale ungefähr 5000 Polwechsel in der Minute ausführt, so erhält man aus der letzten Gleichung $\alpha = 0{\cdot}00241$. Es ist aber klar, dass die Berechnung der Beobachtungen nach der Formel 3) einen Werth für α ergeben kann, der möglicherweise sehr von dem berechneten abweicht.

2. Die Messungen der Anziehung G wurden mit einer Standwage für Vorlesungszwecke ausgeführt, die bei einer einseitigen Belastung von 1 *kg* nur 1 bis 3 *cg* erkennen liess. Die aufgehängte Spule wurde aus Pappe verfertigt, um sie möglichst leicht zu machen und dazu mit Seide umsponnener Draht genommen (Gesammtgewicht 1090 *g*). Die fixe Spule dagegen war auf Holz gewickelt und bestand aus Draht, der doppelt mit Baumwolle umsponnen war. Die Dimensionen beider Spulen sind aus folgender Tabelle zu entnehmen.

	Aufgehängte,	fixe Spule
Äusserer Durchmesser	24 *cm*	21 *cm*
Innerer Durchmesser	15·5	18
Höhe	3·5	2
Drahtdurchmesser	1 *mm*	0·8 *mm*
Windungszahl	500	267
Widerstand	5·56 Ω	7·05 Ω

Von den Enden der beweglichen Spule führten zwei Spiralen aus sehr dünnem Kupferdrahte zu einem Stativ mit einem Paare doppelter Klemmen, in welche dann auch die zu den Condensatoren führenden Drähte eingespannt wurden. Als Condensatoren dienten zwei Siemens'sche Originalcondensatoren von je $^1/_2$—5 Mikrofarad und ein selbstverfertigter Condensator, dessen Capacität im Nachfolgenden mit X bezeichnet ist. Diese Apparate kamen theils einzeln, theils parallel gegeschaltet in Verwendung und gaben bei einer effectiven Stromstärke von 1·4 A in der fixen Spule im Mittel aus 3—5 Beobachtungen folgende zusammengehörige Werthe von C und G.

	C	G
1..........	5 μF	0·482 *g*
2..........	X	0·507
3..........	10	0·99
4..........	5+X	1·02
5..........	10+X	1·55

3. Aus der ersten und dritten Beobachtung findet man

$$G = 0\cdot0938\,C(1+0\cdot00554\,C), \qquad 5)$$

und man sieht, dass der nur aus zwei Daten berechnete Werth 0·00554 von α wenigstens der Grössenordnung nach mit dem theoretischen stimmt.

Mit Hilfe der letzten Gleichung findet man umgekehrt aus den für K beobachteten Zahlen der zweiten, vierten und fünften Beobachtung:

$$X = 5\cdot 25$$
$$X = 10\cdot 29 - 5 = 5\cdot 29$$
$$X = 15\cdot 26 - 10 = 5\cdot 26$$

$$\text{Mittel } X = 5\cdot 27\ \mu F$$

Hiedurch ist die unbekannte Capacität X bestimmt, und zwar mit einer Genauigkeit, die 1% des gefundenen Werthes bei weitem übersteigt.

4. Hätte man nur eine einzige Vergleichscapacität K zur Verfügung, so könnte man die Werthe von G bei Einschaltung von K, X und $K+X$ bestimmen. Sind diese Werthe etwa a, b, c, so erhält man durch Anwendung der Gleichung 3):

$$X = K\frac{b+c-a}{c+a-b}.$$

Mit Hilfe dieser Formel findet man z. B. aus den Beobachtungen 1, 2, 4 sowohl, als aus den Beobachtungen 3, 2, 5 für X den Werth $5\cdot 25\ \mu F$.

5. Bei den folgenden Messungen wurde der Condensator X in Reihe mit den anderen geschaltet. Mand fand im Mittel:

	G beobachtet	berechnet
$10 \mid X = 3\cdot 45\ \mu F$	$0\cdot 330\,g$	$0\cdot 330\,g$
$5 \mid X = 2\cdot 57$	$0\cdot 237$	$0\cdot 245$

Die Berechnung dieser Beobachtungen wurde nach Gleichung 5) mit dem früher gefundenen Werth $5\cdot 27\ \mu F$ für X ausgefürt. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist ziemlich befriedigend.

6. Einige wenige Versuche wurden auch bei höheren Stromstärken ausgeführt, um zu sehen, ob die Anziehung G entsprechend der Formel 1) wirklich dem Quadrate der Stromstärke proportional ist.

Es wurde gefunden bei 2·1 A:

C	G beobachtet	berechnet
5 μF	1·15 g	1·08 g
10	1·88	1·93,

bei 2·8 A aber

5	2·46	2·23
10	3·78	3·96.

Die nicht allzu grossen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung kommen wohl daher, dass das benützte Ampèremeter eigentlich nur für Vorlesungszwecke bestimmt ist und von dem Umstand, dass bei höheren Stromstärken die Erwärmung der Drähte sich schon störend fühlbar macht.

Die Undulationen ebener Curven C_6^4

(I. Mittheilung)

von

Prof. **Wilh. Binder** in Wiener-Neustadt.

(Mit 12 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Februar 1897.)

Curven mit drei reellen Doppelpunkten.

Soweit mir die Literatur der geometrischen Wissenschaft zu Gebote steht, ist mir nicht bekannt, dass vorstehendes Thema bisher näher studirt worden sei. Salmon gibt in seinem Werke[1] auf S. 43 eine allgemeine Definition einer Undulation auf höheren Plancurven und S. 268 die Anzahl derartiger Singularitäten speciell auf Curven vierter Ordnung, ohne sich eingehender darüber zu verbreiten. Ich meine, dass die Sache wichtig genug wäre, um zur vollständigen Bekanntschaft der charakteristischen Eigenschaften einer Curve vierter Ordnung mindestens im gleichen Grade beizutragen, wie solches z. B. in Bezug der Doppeltangenten oder der Inflexionselemente bis jetzt mit vielem Nutzen zur Kenntniss benannter Curven geschehen ist. Die Lücke, welche in der Theorie, insbesondere der Unicursalcurven vierter Ordnung, bisher durch die Ausserachtlassung der Undulationseigenschaften besteht, vermag ich mir nicht anders zu erklären, als dass die Grundaufgabe des Problems: »Durch drei Punkte, die nicht auf einem gegebenen Kegelschnitte liegen, an diesen vierpunktig berührende Kegelschnitte zu legen«, noch keiner Lösung entgegengeführt wurde.

---

[1] Analyt. Geom. der höh. Plancurven. Deutsche Bearb. von Dr. W. Fiedler. Leipzig 1873, bei B. G. Teubner.

Als ich im vergangenen Frühlinge während der Drucklegung meines Buches[1] mit den Correcturen desselben beschäftigt war, habe ich die Anregung zu einer Lösung des vorgelegten Problems gefunden, ohne mehr zu meinem Bedauern die Resultate derselben für den Inhalt des Buches verwerthen zu können.

Der Schwierigkeit der erwähnten Grundaufgabe gegenüber habe ich mich keineswegs verschlossen, weshalb ich vorzog, einen andern zum Ziele führenden Weg einzuschlagen: indem ich von der a priori gelösten Aufgabe zurückgreife. Diesen Gang und die damit verbundenen Ergebnisse für die Undulationselemente einer speciell unicursalen Plancurve vierter Ordnung zu zeigen, ist Zweck und Inhalt des nachstehenden Aufsatzes.

Die Curve mit einer Undulation.

1. Das Punktenquadrupel, welches eine beliebige Gerade mit einer Plancurve vom Symbole C_6^4 gemeinsam hat, kann in seinen Elementen Coincidenzen bilden, wodurch die verschiedenen Tangentenarten der Curve hervorgehen. Von diesen Tangentenarten begreift diejenige, welche im Berührpunkte einen Zusammenfall von vier Elementen anzeigt, eine »Undulation« auf der Curve. Aus dieser Definition folgt, dass eine Undulationstangente keinen Tangentialpunkt besitzen kann und dass man sich eine solche immerhin hervorgegangen aus einer Doppeltangente denken kann, auf welcher die beiden Berührpunkte zur Deckung gelangten; oder auch entstanden aus einer Wendetangente, deren Berührpunkt sich ebenfalls mit ihrem Tangentialpunkt vereinigt hat. Dabei muss eine Undulationstangente wohl unterschieden werden von einer Tangente in einem »Berührknoten« oder in einer »Schnabelspitze«, welche Singularitäten bekanntlich gleichfalls vier Punktenelemente zur Coincidenz bringen; allein hier berühren sich jedesmal zwei Äste der Curve, was in einem Undulationspunkte nicht der Fall ist, indem derselbe sich nur auf einem und demselben

---

[1] Theorie der unicurs. Plancurven vierter bis dritter Ordn. in synthet. Behandlung. Mit 65 Fig. im Texte und auf 2 Taf. 400 S. gr. 8⁰. Leipzig 1896, bei B. G. Teubner.

Curvenzug befindet. Der Unterschied beider Fälle ist beiläufig demjenigen vergleichbar, wie er zwischen einer Inflexions- und einer Doppelpunktstangente stattfindet, wo auch jedesmal der eine Tangentialpunkt in den Berührpunkt hineinfällt, jedoch im Falle einer Knotentangente auf dem andern Curvenzuge gelegen ist.

2. Wird eine Curve vierter Ordnung nach den Principien einer quadratischen Verwandtschaft auf einen Grundkegelschnitt transformirt, so entspricht bekanntlich dem Tangentensysteme, dessen Enveloppe die Curve ist, ein Kegelschnittsnetz mit drei Grundpunkten, welche letzteren die bildlich entsprechenden Hauptpunkte der drei Curvendoppelpunkte sind; die Individuen dieses Netzes berühren im Allgemeinen jenen Grundkegelschnitt einfach, insoferne sie die Transformirten von einfachen Curventangenten sind, wogegen den Doppeltangenten und den Inflexionstangenten der Curve im Netze die doppelt berührenden, respective osculirenden Individuen entsprechend sind. Demgemäss wird: »eine Undulationstangente der Curve als ein Kegelschnitt des Netzes transformirt, welcher den Grundkegelschnitt in einem Punkte undulirt«, d. h. in ihm eine Berührung dritter Ordnung (vierpunktig) eingeht. Dieser Netzkegelschnitt, sowie sein Berührpunkt sind im quadratischen Sinne die Bilder der beiden »Undulationselemente« auf der Plancurve.

3. Nachdem das Vorkommen undulirender Kegelschnitte in dem vorbezeichneten Netze an ganz bestimmte Voraussetzungen gebunden sein wird, die nicht unter allen Umständen als gegeben gedacht werden können, so werden wir, um die betreffenden Eigenschaften studiren zu vermögen, zweckmässig den umgekehrten Weg einschlagen, indem wir bei den Grundannahmen einer quadratischen Beziehung zwischen einem bestimmten Grundkegelschnitt und der dadurch bedingten Curve vierter Ordnung hievon ausgehen. Behufs dessen wählen wir beliebig wo in der Ebene einen Kegelschnitt k mit einem Punkt auf ihm und einem Punkt ausser ihm; der erstere sei mit $\overline{P}_1$, der letztere mit $\overline{O}_3$ bezeichnet. Durch diese Annahmen ist ein zweiter Kegelschnitt π_1 bestimmt, welcher k in $\overline{P}_1$ undulirt und durch $\overline{O}_3$ zieht (Fig. 1).

(Bemerkung. Bekanntlich erhält man einen beliebigen Punkt von π_1 folgend: Wir fixiren zunächst die Tangente $\bar{p}_1$ in $\bar{P}_1$ an k, sowie auch den zweiten k-Schnitt $\bar{Z}$ des Strahles $|\bar{O}_3\bar{P}_1|$. Ein beliebiger $\bar{O}_3$-Strahl schneidet $\bar{p}_1$ in einem Punkte τ; zieht man die Gerade $|\bar{Z}\tau|$, so trifft sie k in einem Punkte $\bar{X}$, dessen Verbindungslinie mit $\bar{P}_1$ den $\bar{O}_3$-Strahl in einem Punkte ξ von π_1 schneidet [Fig. 2].)

Auf π_1 werden zwei Punkte $\bar{O}_1\bar{O}_2$ beliebig ausgewählt, und nun wird das Tripel $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ als das Hauptdreieck einer quadratischen Verwandtschaft so angesehen, wie ich in Art. [56][1] auseinandergesetzt habe. Darnach wird sich der Grundkegelschnitt k im Allgemeinen als eine Curve C_6^4 abbilden, die zunächst die beiden Punkte $(\bar{O}_1\equiv)O_2$, $(\bar{O}_2\equiv)O_1$ als Doppelpunkte besitzt; der dritte Doppelpunkt O_3 ist jener Schnitt, den man auf dem dem Dreieck umschriebenen Hauptkreise $\varkappa$ mittelst der Geraden $|\bar{O}_3O_3|\,||\,|\bar{O}_1\bar{O}_2|$ erhält, wobei die Punkte $O_3\bar{O}_3$ insbesondere noch durch die ihnen in [43] zukommende Eigenschaft als »Perspectivitätscentra« der beiden Systeme: des Grundkegelschnittes k und der Curve C_6^4 — ausgezeichnet erscheinen (Fig. 1).

(Bemerkung. Nach der Auffassung in [44] stellt $\varkappa$ eine Deckung von zwei congruenten Kreisen vor, deren jeder für sich das Bild der den beiden Systemen $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, $O_1O_2O_3$ perspectivisch gemeinschaftlichen ∞ fernen Geraden der Trägerebene dieser zwei Systeme ist.)

4. In der Weise des Art. [58] wird von einem beliebigen Punkte $\bar{X}$ des Grundkegelschnittsystems das Bild X gefunden, wenn wir ihn zunächst durch Strahlen mit den Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ verbinden: »Die homologen dieser Geraden treffen sich im X-Punkte«. So z. B. ziehen wir durch das Perspectivcentrum $\bar{O}_3$ eine Parallelgerade zu $|\bar{O}_1\bar{X}|$ und verbinden deren Hauptkreisschnitt mit $O_1(\equiv\bar{O}_2)$, so ist diese Verbindungslinie der homologe Strahl von $|\bar{O}_1\bar{X}|$; analog verhält sich die Sache für den Strahl $|\bar{O}_2\bar{X}|$. Hingegen bekommt man den homologen

[1] Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf den betreffenden Artikel meines oben citirten Buches; diejenigen in ( ) auf den damit bezeichneten Artikel der vorliegenden Abhandlung.

Strahl von $|\bar{O}_3\bar{X}|$ direct als Verbindungslinie des O_3-Centrums mit jenem Hauptkreisschnitte, den $|\bar{O}_3\bar{X}|$ auf dem Hauptkreise $\varkappa$ erzeugt (Fig. 3).

Auf diese Art ist die Curve der geometrische Ort jener X-Punkte, die wir als Bilder von entsprechenden $\bar{X}$-Punkten des Grundkegelschnittes k erhalten. Bilden wir demgemäss den in (3) bezeichneten Undulationspunkt $\bar{P}_1$ als P_1 in die Curve C_6^4 ab, so wird er daselbst seine Eigenschaft als ein Undulationspunkt beibehalten, d. h. die in ihm gehende Tangente p_1 wird vier unendlich nahe auf einander folgende Punkte der Curve vereinigen, so dass die Curve in diesem Coincidenzelemente, und zwar nur auf der einen Seite von p_1 sich viel näher anschmiegt, als solches bei irgend einer andern Tangentengattung der C_6^4 stattfindet (Fig. 1).

Die p_1-Tangente erhalten wir unmittelbar, wenn P_1 mit dem Bilde irgend eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes π_1 verbunden wird.

Anmerkung *a*. Es ist durchaus nicht nothwendig, den in (3) angenommenen und zur Erzeugung des Kegelschnittes π_1 verwendeten $\bar{O}_3$-Punkt gleichzeitig als Hauptpunkt im Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ gebrauchen zu müssen, sondern man kann auch folgend zu Werke gehen: Sind zwei in einem Punkte $\bar{P}_1$ einander undulirende Kegelschnitte $k\pi_1$ bekannt, so nehme man auf dem einen derselben, z. B. π_1, ganz beliebig die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ an und verfahre dann, wie oben angegeben ist. In dieser Voraussetzung ist in Fig. 4 und 5 vorgegangen worden, wo der Grundkegelschnitt k den Kegelschnitt π_1 umschliesst, während in Fig. 1 das Gegentheil stattfindet.

5. In [85] und a. a. O.[1] habe ich gezeigt, dass eine C_6^4 ihre vier Doppeltangenten mit durchwegs reellen Berührpunkten besitzen kann, dass sie aber dann stets, und zwar nur ein einziges Paar reeller Inflexionselemente enthält, was vorkommen kann, gleichgiltig ob der Grundkegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist. Wir werden dabei die Beobachtung machen, dass diese reellen Inflexionspunkte, sowie auch die

---

[1] Über die Realität der Doppeltangenten etc. Zeitschr. für Math. u. Phys., XXXV. Bd., 1. Heft.

zwei Berührpunkte der einen Doppeltangente immer einander begleiten oder »adjungiren«, und zwar stets auf einem und demselben Aste oder Curvenzug, so dass sie nicht durch einen Doppelpunkt der Curve getrennt erscheinen, wogegen eine Doppeltangente von imaginären Inflexionen begleitet wird, sobald deren Berührpunkte durch einen Doppelpunkt geschieden sind.

Es ist nun ohne Schwierigkeit einzusehen, dass eine Coincidenz der Berührpunkte auf einer Doppeltangente nur in dem ersteren der beiden eben betrachteten Fälle möglich ist, wo nämlich diese Punkte durch keinen Doppelpunkt getrennt werden; findet aber dieser Coincidenzfall wirklich statt, dann geht die Doppeltangente in eine Undulationstangente über, und das betreffende adjungirte reelle Inflexionselementenpaar muss sich ebenfalls im Undulationspunkte vereinigen. Oder man kann auch sagen: dass sich die beiden stationären Tangenten mit der von ihnen adjungirten Doppeltangente decken und vereint die als zwei Elemente zählende Undulationstangente formiren.[1]

Unsere Untersuchung culminirt somit in dem Satze: »Die sechs Inflexionselemente einer ebenen C_6^4 sind paarweise den Berührelementen je einer Doppeltangente adjungirt«.

Anmerkung *b*. Wenn oben darauf [85] hingewiesen wurde, dass eine C_6^4 mit vier eigentlichen Doppeltangenten die Transformirte einer Hyperbel sein kann, so darf dieses nicht zu dem Missverständnisse leiten, als wenn eine solche Curve nicht auch von einem anderen Grundkegelschnitt abgeleitet werden könnte. Es thut nichts zur Sache, dass in Fig. 5 die Curve C_6^4, welche wirklich hier von einer Ellipse k ihre quadratische Abstammung erhält, mit drei eigentlichen Doppel- und einer Undulationstangente ausgestattet ist, denn die letztere bedeutet nur eine zufällige Eigenschaft, und man muss thatsächlich diese Curve als eine solche mit vier eigentlichen Doppeltangenten ansehen, wodurch der Satz in [84] seine Richtigkeit behält.

---

[1] Vergl. S. 268 des citirten Salmon-Fiedler'schen Werkes.

Die Curve mit zwei Undulationen.

6. Um eine Curve dieser Eigenschaft herzustellen, werden wir von folgenden Bedingungen auszugehen haben. Denken wir uns zunächst die Annahmen betreffend den Grundkegelschnitt k mit dem ihn in $\overline{P}_1$ undulirenden und durch $\overline{O}_3$ ziehenden Kegelschnitt π_1 conform jenen in (3). Unter den gleichen Voraussetzungen ist für einen zweiten Kegelschnitt π_2, der k in einem beliebigen Punkte $\overline{P}_2$ undulirt und durch $\overline{O}_3$ läuft, Raum gegeben. Beide Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$ haben ausser $\overline{O}_3$ noch drei andere Punkte $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{S}$ gemeinschaftlich, von denen wir $\overline{O}_1 \overline{O}_2$ im Vereine mit $\overline{O}_3$ als Ecken des Hauptdreiecks annehmen und dem letzteren den Hauptkreis $\varkappa$ umschreiben. Mittelst der zu $|\overline{O}_1 \overline{O}_2|$ parallelen Geraden, die durch $\overline{O}_3$ zieht, erhält man auf $\varkappa$ den Punkt O_3. Alles Andere bleibt jetzt den Ausführungen in (3) gleich, so dass also der Grundkegelschnitt k als eine Curve C_6^4 mit den Doppelpunkten $O_1 (\equiv \overline{O}_2)$, $O_2 (\equiv \overline{O}_1)$, O_3 abgebildet erscheint, welche in den Bildpunkten $P_1 P_2$ zwei Undulationen besitzt; sie kann demnach höchstens nur mehr zwei eigentliche Doppeltangenten haben, von denen nach dem Satze (5) bloss die eine ein Paar reelle Inflexionen adjungirt hat, weil von den sechs möglichen je ein Paar durch die Punkte $P_1 P_2$ absorbirt werden (Fig. 6).

7. Vorerst wollen wir noch jene Verhältnisse ins Auge fassen, welche gleichzeitig für die den Doppeltangenten Δ entsprechenden, den Grundkegelschnitt k doppelt berührenden Kegelschnitte δ stattfinden.

Jeder δ-Kegelschnitt, als Individuum des Fundamentalnetzes (2) hat mit dem Grundkegelschnitte eine Berührsehne $\bar{p}$ gemeinsam, die jedoch nicht etwa als »Bild« einer Undulationstangente p verwechselt werden darf. Wir erhalten die vier Sehnen $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4$ nach dem Constructionsschema in [82] oder [83], je nachdem die betreffenden Verzweigungspaare $\overline{V V'}$ oder die Nachbarpunktenpaare $\overline{A A'}$ reell oder imaginär sind. Setzen wir z. B. reelle $\overline{V V'}$-Paare voraus, so gestaltet sich das bezügliche Schema (Fig. 7):

$$(|\bar{V}_1\bar{V}_2|, |\bar{V}_1'\bar{V}_2'|) \equiv \zeta_3;\ (|\bar{V}_1\bar{V}_2'|, |\bar{V}_1'\bar{V}_2|) \equiv \zeta_3' \text{ auf } \bar{o}_3 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_2|;$$
$$(|\bar{V}_1\bar{V}_3|, |\bar{V}_1'\bar{V}_3'|) \equiv \zeta_2;\ (|\bar{V}_1\bar{V}_3'|, |\bar{V}_1'\bar{V}_3|) \equiv \zeta_2' \text{ auf } o_2 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_3|;$$
$$(|\bar{V}_2\bar{V}_3|, |\bar{V}_2'\bar{V}_3'|) \equiv \zeta_1;\ (|\bar{V}_2\bar{V}_3'|, |\bar{V}_2'\bar{V}_3|) \equiv \zeta_1' \text{ auf } o_1 \equiv |\bar{O}_2\bar{O}_3|;$$

Im andern Falle: Bei reellen Nachbarpunktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$ wird folgende Construction auszuführen sein. Z. B.: Wir projiciren das auf der Hauptlinie $\bar{o}_1$ in Fig. 8 vorkommende Paar $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ auf den Hauptkreis $\varkappa$ nach $\bar{A}_I\bar{A}_I'$, und zwar aus dem Hauptpunkte $\bar{O}_1$. Durch die Verbindungslinie $|\bar{A}_I\bar{A}_I'|$ entsteht auf $\bar{o}_1$ ein Schnittpunkt W, von welchem an $\varkappa$ ein Paar Tangenten ziehen. Projicirt man die Berührpunkte der letzteren aus $\bar{O}_1$ auf $\bar{o}_1$, so ergeben sich daselbst die Punkte $\zeta_1\zeta_1'$ etc.

Die drei gefundenen $\zeta\zeta'$-Paare liegen tripelweise auf je einer der vier $\bar{p}$-Geraden, und die letzteren treffen als Sehnen den Grundkegelschnitt k in den Berührpunktenpaaren $\bar{B}\bar{B}'$ der doppelt berührenden Kegelschnitte δ. In unseren zwei Beispielen (4), (6) finden wir jedoch eine, respective zwei der $\bar{p}$-Sehnen als Tangenten des Grundkegelschnittes, bei welchen in dem jeweiligen Berührpunkte $\bar{P}$ die Elemente eines $\bar{B}\bar{B}'$-Paares zur Coincidenz gelangt sind, was abermals die analogen Beziehungen auf der Curve C_6^4 in einem Undulationspunkte P illustrirt.

8. Die Verbindungslinie $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$, sowie der Punkt ζ_3' unserer Fig. 6 sind für die Kegelschnittstrias $\pi_1 k \pi_2$ gemeinschaftlich polar; demzufolge schneidet die Gerade $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ diese drei Kegelschnitte in ihren gemeinsamen Berührpunkten $\bar{P}_1\bar{P}_2$ und speciell noch die zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ in je einem der Punkte $\bar{Q}_1\bar{Q}_2$, deren Strahlen $\bar{q}_1\bar{q}_2$ aus dem ζ_3'-Pole für $\pi_1\pi_2$ einfache, während — den ursprünglichen Annahmen gemäss — die aus ζ_3' durch $\bar{P}_1\bar{P}_2$ laufenden Geraden $\bar{p}_1\bar{p}_2$ für die Paare $\pi_1 k$, $\pi_2 k$ gemeinsame Tangenten sind.

Oben wurde $\bar{S}$ als vierter Schnittpunkt der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ notirt. Dieser Punkt kann sehr einfach linear gefunden werden. Die Gerade $|\bar{O}_3\bar{S}|$, sowie die Hauptlinie $\bar{o}_3$ sind Strahlen des ζ_3'-Poles und gemeinschaftliche Secanten der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$; ein Paar anderer solcher Secanten sind die Gerade $\bar{O}_2\bar{S}$ und die Hauptlinie $\bar{o}_2$, die sich beide auf der Berührsehne $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ in einem Punkte ψ treffen; somit die Construction:

$$(|\bar{O}_3\zeta_3'|, |\bar{O}_2\psi|) \equiv \bar{S}.$$

Endlich möge angemerkt bleiben, dass der Pol Ω_3 der Hauptlinie $\bar{o}_3$ in Bezug des Grundkegelschnittes k der Schnitt zwischen den zwei Geraden $|\bar{O}_3\bar{S}|$, $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ ist, was zur Folge hat, dass die Secante $|\bar{O}_3\bar{S}|$ zu $\bar{o}_3$ harmonisch conjugirt betreffs der Strahlen $\bar{p}_1\bar{p}_2$ ist. Bestimmt man das Bild S von $\bar{S}$, so müssen aus vorstehenden Gründen in demselben die Tangenten p_1p_2 der zwei Curvenundulationen P_1P_2 einander begegnen.

9. Liegt die Berührsehne $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ in Fig. 9 auf einem $\bar{O}_3$-Strahle, so ergeben sich einige bemerkenswerthe Eigenschaften. Zunächst ist das Punktenpaar $\zeta_3\zeta_3'$ auf der Hauptlinie $\bar{o}_3$ ausgezeichnet; es treffen sich nämlich in ζ_3 nicht nur die zwei Sehnengeraden $\bar{p}_3\bar{p}_4$, sondern auch die Sehne $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$, wogegen durch ζ_3', ausser dem Sehnenpaare $\bar{p}_1\bar{p}_2$, das aber jetzt als ein Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ des Grundkegelschnittes, und zwar in den Undulationspunkten $\bar{P}_1\bar{P}_2$ auftritt, noch die Gerade $|\bar{O}_3\zeta_3'|$ läuft. Diese letztere Gerade ist im Jetztfalle eine den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ im $\bar{O}_3$-Punkte g e m e i n s c h a f t l i c h e T a n g e n t e und der Hauptlinie $\bar{o}_3$ in Bezug des Tangentenpaares $\bar{p}_1\bar{p}_2$ h a r m o n i s c h z u g e o r d n e t. Aus dieser Eigenschaft folgt eine Vereinfachung der Construction für die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2$, indem die Hervorrufung des einen der beiden Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ erspart wird.

Schliesslich ist leicht einzusehen, dass die in (7) gefundenen $\zeta\zeta'$-Paare im vorliegenden Beispiele unmittelbar hervorgehen, weil die Geraden $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{p}_1\bar{p}_2$ ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck durch die Geraden: $|\bar{O}_3\zeta_3'|$, $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$, $\bar{o}_3 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_2|$ repräsentirt ist.

10. Der Hauptkreis $\varkappa$, welcher dem Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ umschrieben wurde, enthält mit jedem der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ noch je einen der Punkte $\bar{U}_1\bar{U}_2$. Da diese Punkte nach [76] die Asymptotenpunkte der Undulationstangenten p_1p_2 auf der Curve C_6^4 abbilden, so werden diese Tangenten daselbst sofort nach Bestimmung ihrer Berührpunkte P_1P_2 fixirt erscheinen.[1] Bei dieser Gelegenheit sei nochmals auf [76], sowie auch auf [78] hingewiesen, wo uns das Mittel in die Hand gegeben

[1] Vergl. den Schlusssatz in (4).

wird, in jedem beliebigen Falle einer C_6^4 ihre »Asymptoten« der Richtung und Lage nach festzustellen (Fig. 9).

11. Aus der Beziehung in (9) entnehmen wir, dass sich für den Grundkegelschnitt k der Hauptpunkt $\bar{O}_3$ und die Hauptlinie $\bar{o}_3$ dort einander polar gegenüberstehen, weshalb auch [72] das »Verzweigungselementenpaar« $\bar{V}_3\bar{V}_3'$ auf $\bar{o}_3$ selbst situirt sein muss. Aus diesem Grunde ist im Beispiele (9) nach [134] der Doppelpunkt O_3 ein Inflexionsknoten und kann die Curve nur mehr zwei eigentliche Doppeltangenten Δ [136] besitzen. Wir finden in der That dieses Gesetz durch das Sehnenpaar $\bar{p}_3\bar{p}_4$ bestätigt, dessen Elemente reelle Berührpunktenpaare $\bar{B}_3\bar{B}_3'$, $\bar{B}_4\bar{B}_4'$ der zwei doppelt berührenden Kegelschnitte $\delta_3\delta_4$ auf dem Grundkegelschnitte k anzeigen (Fig. 9).

Der Umstand, dass das Paar $\bar{P}_1\bar{P}_2$ auf einem $\bar{O}_3$-Strahle angenommen wurde, ist Ursache, dass die beiden Undulationspunkte P_1P_2 ebenfalls einem Strahle des Inflexionsknotens O_3 angehören. Der weitere Umstand, als sich das Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ im Punkte ζ_3' auf der Hauptlinie o_3 trifft, begründet auch den Schnitt der zwei Undulationstangenten p_1p_2 in einem Punkte Z_3 auf der Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$, und man findet diesen Punkt mit Hilfe jenes O_3-Strahles, der den Hauptkreisschnitt, den die Gerade $|\bar{O}_3\zeta_3'|$ erzeugt, verbindet.

Die Eigenschaft des O_3-Punktes als Inflexionsknoten involvirt ferner die gesammten harmonischen Beziehungen, welche in [§. 15, II. Th.] zur Entwicklung gelangen. Demzufolge wird auch insbesondere stattfinden, dass sich die zwei Doppeltangenten $\Delta_3\Delta_4$ in einem Punkte auf o_3 ebenso schneiden, wie sich die Sehnengeraden $\bar{p}_3\bar{p}_4$ im Punkte ζ_3 auf $\bar{o}_3 \equiv o_3$ treffen und dass dieser Schnittpunkt wieder wie vorhin mit Hilfe desjenigen O_3-Strahles aufgesucht wird, der dem Strahle $\bar{O}_3\zeta_3$ homolog ist, d. i. die Gerade $|O_3P_1P_2|$ etc.

12. Einiges Interesse dürfte die Annahme erwecken, wo der Grundkegelschnitt ein Kreis k ist und die Gerade $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$ durch das Centrum desselben hindurchgeht. Diesfalls coincidiren [191] die Punkte $\bar{O}_3O_3$, sowie auch die Geraden $|\bar{O}_3\bar{P}_1\bar{P}_2|$, $|O_3P_1P_2|$; die Curve C_6^4 ist circular und symmetrisch für die Axe $|P_1O_3P_2|$; die Undulationstangenten p_1p_2 schneiden sich in $\zeta_3'\infty$, sie laufen also so wie die Tangenten $\bar{p}_1\bar{p}_2$ mit

der Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$ parallel und stehen zur Symmetrieaxe normal; die Doppeltangenten $\Delta_3\Delta_4$ endlich begegnen einander wie auch die Sehnen $\bar{p}_3\bar{p}_4$ identisch im ζ_3-Punkte. Es ist selbstverständlich, dass in diesem Falle die Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ mit dem Grundkreise homothetisch und die Berührpunkte $\bar{P}_1 P_2$ derselben, wie auch der dann nothwendig ebenfalls stattfindende Berührpunkt $\bar{O}_3(\equiv O_3)$ zwischen $\pi_1\pi_2$ Scheitel dieser Kegelschnitte sind, welche Verhältnisse wesentlich die Eigenschaft der Symmetrie sowohl im Systeme des Grundkreises k, als auch der Curve C_6^4 zum Ausdrucke gelangen lassen.

Die Curve mit drei Undulationen.

13. Wenn man vor die Aufgabe gestellt ist: »Man bestimme diejenigen Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt unduliren und durch drei nicht auf ihm liegende Punkte gehen«, so würde deren Lösung erheblichen Schwierigkeiten begegnen. Der Grund dessen ist darin zu erblicken, als die Möglichkeit dieser Aufgabe überhaupt eine bedingungsweise ist und dass es nur bei ganz bestimmten Annahmen in Bezug der Angabebedingungen reelle Lösungen geben kann. Wir werden auch deshalb jetzt einen ähnlichen Weg einschlagen müssen, wie er in den vorausgegangenen Beispielsfällen beobachtet wurde, indem man, von der Lösung selbst ausgehend, auf die Problemannahme zurückschliesst.

Dementsprechend legen wir uns eine Curve C_6^4 vor, in welcher eine Kreisverwandtschaft mit dreiaxiger Symmetrie verbunden ist, was ich in [§. 27] bei circularen Hypocycloiden mit drei Doppelpunkten nachgewiesen habe.

14. Zur Annahme gelangt ein gleichseitiges Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, welchem der Hauptkreis $\varkappa$ umschrieben ist. Bringen wir dieses System, wie bei den vorher behandelten Aufgaben, durch das Deckdreieck $O_1 O_2 O_3$ in eine quadratische Beziehung, so wissen wir (12), dass die Perspectivitätscentra $\bar{O}_3 O_3$ in Coincidenz sind (Fig. 10).

Alle im Mittelpunkte des Hauptkreises concentrischen Kreise transformiren sich jetzt jeder für sich als eine Hypocycloide oben bezeichneter Art mit den drei Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$. Dieselben sind verlängert oder verkürzt [188], je

nachdem der betreffende Grundkreis die Seiten $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ des Hauptdreiecks in reellen oder in imaginären Punktenpaaren schneidet, wobei als Übergangsfall der dem Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ eingeschriebene Grundkreis sich in die dreispitzige Steiner'sche Hypocycloide C_3^4 transformirt.

Bestimmen wir nach (7) das Geradenquadrupel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4$, so bildet zunächst das Tripel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3$ ein ebenfalls gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ auf den bezüglichen Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ liegen, welches mit dem Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ perspectivisch ist. Bekanntlich drückt sich diese Eigenschaft dadurch aus, dass die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken der Dreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2 O_3$, $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ gemeinschaftlich im Centrum der Perspectivität zusammentreffen: vorliegendenfalls im Mittelpunkte $\bar{P}_4$ der zwei concentrischen Kreise $k\varkappa$.

Die Seiten der erwähnten beiden perspectivischen Dreiecke treffen sich ausserdem — weil sie entsprechend einander gleichlaufen — in dem Punktentripel $\zeta_1'\infty\,\zeta_2'\infty\,\zeta_3'\infty$, welches bekanntlich die Gerade $\bar{p}_4\infty$ verbindet. Hieraus folgt [186], dass eine circulare Hypocycloide die unendlich ferne Gerade $g\infty \equiv \bar{p}_4\infty \equiv \Delta_4\infty$ als eine isolirte Doppeltangente perspectivisch mit dem Grundkreise gemeinsam hat. Schliesslich bemerken wir uns noch die Eigenschaft der Polarität, welche in Bezug des Grundkreises k zwischen der Geraden $\bar{p}_4\infty$ und dem vorhin bezeichneten Centrum $\bar{P}_4$ stattfindet.

15. Wir haben in (14) die Steiner'sche C_3^4 als eine Übergangsform bezeichnet; eine andere Übergangsform sowohl bei den verlängerten, als auch eine solche bei den verkürzten Hypocycloiden C_6^4 — jedoch bei unverminderter Classe — findet statt, wenn wir den Radius des Grundkreises seiner Grösse nach verändern. An diesem Orte will ich nur auf den letzteren Fall hingewiesen haben, welcher ein hervorragendes Interesse für unsere Betrachtungen dann gewinnt: »sobald der Grundkreis k dem Dreiecke $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ eingeschrieben ist«.

Diese Voraussetzung folgert, dass jede Gerade des Tripels $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3$ zur Tangente an den Grundkreis wird, deren Berührpunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ uns jedesmal einen den Grundkreis undulirenden Kegelschnitt $\pi_1\pi_2\pi_3$ anzeigen, welcher dem Fundamentalnetz (2) angehört. Diese Kegelschnitte π können der Lagenverhältnisse

wegen nichts Anderes als drei congruente gleichseitige Hyperbeln sein, von denen jede auf dem einen Ast zwei der Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ und den einen der Undulationspunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ enthält, während ihr zweiter Ast durch den dritten Hauptpunkt zieht. Als Resultat der gemachten Annahmen ergibt sich: »eine circulare dreiaxig symmetrische Hypocycloide C_6^4 mit drei isolirten Doppelpunkten und drei nur reellen Undulationen«.

Diese Curve spielt unter den Hypocycloiden mit isolirten Doppelpunkten $O_1O_2O_3$ eine sozusagen »ausgezeichnete« Rolle, weil sie, wie schon oben bemerkt wurde, die einzige dieser Species ist, welche drei Undulationspunkte $P_1P_2P_3$ nachweisen lässt.

Es ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass die Tangenten $p_1p_2p_3$ in den Undulationspunkten entsprechend den Hauptlinien $o_1o_2o_3$ parallel gehen. Um diese Eigenschaft einzusehen, erinnern wir uns der in (10) bezeichneten $\bar{U}$-Punkte. Betrachten wir beispielsweise den Kegelschnitt π_1, welcher nach der obigen Bemerkung jene gleichseitige Hyperbel ist, die — als retroverses Bild der in P_1 laufenden Curventangente p_1 — auf dem einen ihrer beiden Äste das Punktentripel $\bar{O}_2\bar{P}_1\bar{O}_3$ enthält, während der andere Ast durch $\bar{O}_1$ geht. Wegen der stattfindenden Symmetrieverhältnisse erkennt man ohne Schwierigkeit die Punkte $\bar{O}_1\bar{P}_1$ als Hyperbelscheitel, weshalb die Scheiteltangente in $\bar{O}_1$ mit der in diesem Punkte laufenden Hauptkreistangente identisch und also auch der Grundkreistangente $\bar{p}_1$ parallel sein muss. Es vereinigt sich demnach in $\bar{O}_1$ ein Punkt $\bar{U}_1$, d. i. gewissermassen wie in (10) jener Schnitt zwischen der Hyperbel π_1 und dem Hauptkreise $\varkappa$. Denkt man sich also nach diesem $\bar{U}_1 \equiv \bar{O}_1$-Punkte den Hauptstrahl für $\bar{O}_3$ gezogen, so ist dieser Strahl wegen (4) identisch seinem homologen: die Hauptlinie $o_1(\equiv \bar{o}_2)$, welche uns nach (10) die Asymptotenrichtung der p_1-Tangente für den Undulationspunkt P_1 der Curve anzeigt etc.

16. Es wird sich jetzt darum handeln, die Curvenspecialität des vorigen Artikels so zu verallgemeinern, dass wir jederzeit eine beliebige C_6^4-Curve — ohne dass also damit die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft und Symmetrie verknüpft sind — mit drei Undulationselementen zu erzeugen, in der

Lage sind. Dass hiebei der betreffende Grundkegelschnitt k stets dem Dreiecke $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ eingeschrieben bleiben muss, ist nach unseren vorausgegangenen Ableitungen als eine conditio sine qua non für die Lösung des Problems aufzufassen. Allein man darf nicht ausser Acht lassen, dass erstlich einem Dreiecke viererlei Kreise angehören, dessen Seiten von diesen berührt werden; und weiters müssen wir voraussetzen dürfen, dass das Dreieck $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ an und für sich ein beliebiges wird sein können, so dass auch dasjenige der Curvendoppelpunkte ein vom gleichseitigen verschiedenes Dreieck wird.

Um nun die Gesetze für die Verallgemeinerung zu gewinnen, gehen wir zunächst wieder von unserem betrachteten Specialfall aus. Die sich im Centrum $\bar{P}_4$ treffenden Geraden $|\bar{O}\zeta|$ schneiden den Grundkreis k, ausser in dem bezüglichen $\bar{P}$-Punkte, nochmals je in einem Punkte $\bar{Z}$. Wir projiciren diesen $\bar{Z}$-Punkt jedesmal aus den beiden übrigen ζ-Punkten abermals auf k, wo wir ihn dann mit dem zugehörigen $\bar{P}$-Punkte durch zwei Strahlen verbinden, welche durch jene $\bar{O}$-Punkte laufen, deren Verbindungslinie diejenige Hauptlinie $\bar{o}$ ist, auf der ζ liegt. Z. B.: Es trifft die Gerade $|\bar{O}_1\zeta_1|$ den Grundkreis k ausser in $\bar{P}_1$ noch in $\bar{Z}_1$; die Projectionen von $\bar{Z}_1$ aus ζ_2 und ζ_3 auf k sind die Punkte $\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{13}$; die Verbindungsgerade $|\bar{P}_1\bar{Z}_{12}|$ enthält den Punkt $\bar{O}_3$ und die Gerade $|\bar{P}_1\bar{Z}_{13}|$ den Punkt $\bar{O}_2$ etc. (Fig. 11).

Nach diesem Vorgange erkennen wir jetzt das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ als fixirt. Damit ist aber allen Bedingungen Rechnung getragen, die nun auch für jeden beliebigen Grundkegelschnitt k eine Curve C_6^4 erzeugen lassen, welche drei Undulationen $P_1P_2P_3$ enthält, ohne dass also dieser Curve die Specialeigenschaft der Kreisverwandtschaft und der Symmetrie anhaftet, von der wir ursprünglich ausgegangen sind.

Den allgemeinen Fall demonstrirt die Fig. 12, wo dem beliebigen Grundkegelschnitte k ein beliebiges Dreieck $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ umschrieben ist. Ausser der oben bezeichneten Beziehung kann man noch eine Reihe anderer Beziehungen aufstellen, die uns das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ festlegen lassen, welche einfach auf den Perspectivitätseigenschaften von in der Fig. 11 vorkommenden Dreiecken beruhen. In theilweiser Wiederholung des oben Angeführten notiren wir hauptsächlich zweierlei

Constructionsfälle. Wir projiciren also zuerst das Tripel $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ der Berührungspunkte des Tangentendreiecks $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ aus den Gegenecken dieses Dreiecks auf k, wodurch das Dreieck $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3$ entsteht; sodann werden diese Punkte $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3$ in obiger Weise aus den nicht gleich indextirten ζ-Punkten abermals auf k projicirt, womit die Paare $\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{13}$, $\bar{Z}_{21}\bar{Z}_{23}$, $\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{32}$ entstehen. Die beiden Constructionsfälle für das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3 \equiv \bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ kommen nun dadurch zum Ausdrucke, dass wir entweder direct wie oben die Ecken $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ bestimmen oder: wir suchen das auf der Geraden $\bar{p}_4$ situirende Punktentripel $\zeta_1'\zeta_2'\zeta_3'$, dessen Elemente mit den ihnen conjugirten (gleich indextirten) des gegebenen Tripels $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ auf den entsprechenden Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ liegen; z. B.:

I. Es begegnen einander im $\bar{O}_1$-Punkte die Verbindungslinien:

$$|\bar{P}_1\zeta_1|,\ |\bar{P}_2\bar{Z}_{23}|,\ |\bar{P}_3\bar{Z}_{32}|.$$

II. Es treffen sich auf der $\bar{o}_1$-Geraden im ζ_1'-Punkte die Verbindungslinien:

$$|\zeta_2\zeta_3|,\ |\bar{P}_2\bar{P}_3|,\ |\bar{Z}_2\bar{Z}_3|.$$

Zahl und Realität der Undulationen.

17. Salmon gibt auf S. 268 des citirten Werkes an: »Eine Curve vierter Ordnung kann vier reelle Undulationspunkte haben, wie man aus der Gleichungsform

$$x_1x_2x_3x_4 = S^2$$

ersieht, in welcher $S = 0$ einen von den vier Geraden

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

berührten Kegelschnitt darstellt«.

Dieses Resultat kann nur für eine Curve vierter Ordnung ohne sonstige Singularitäten giltig sein. Meine synthetischen Untersuchungen gelangen zu dem Satze: »Eine unicursale Plancurve vierter Ordnung besitzt höchstens drei nur reelle Undulationen«.

Das bereits Vorausgegangene, sowie die nachfolgenden Discussionen sollen die Richtigkeit dieses Satzes erläutern.

18. Zunächst wollen wir uns die Frage vorlegen: »Kann es eine C_6^4 mit vier Undulationen geben und welches Resultat erfolgt, sobald dem Quadrupel $\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4$ der Grundkegelschnitt eingeschrieben ist?« (Fig. 13.)

Vorstehende Annahme bedingt, dass wir erstlich das gegebene $\bar{p}$-Quadrupel wie in den früheren Beispielen als vollständige Figur behandeln, in welcher das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ das Diagonaldreieck ist. Wird nun dem einfachen Viereck $\zeta_1\zeta_1'\zeta_3\zeta_3'$ ein Kegelschnitt k so eingeschrieben, dass die Verbindungslinien der gegenüberliegenden, sowie diejenigen der aufeinanderfolgenden Berührpunkte $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4$ sich in den Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ treffen, so muss nothwendig das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ein in Bezug des Grundkegelschnittes k »selbstconjugirtes« sein, bei welchem bekanntlich der eine Eckpunkt innerhalb k zu liegen kommt. Eine derartige Lage bedingt aber nach [137] eine Curve C_6^4 mit zwei reellen und einem isolirten Inflexionsknoten, und man sieht sofort, dass diesfalls dem $\bar{p}$-Quadrupel nicht jene Eigenschaft anhaftet, welche zur Voraussetzung gemacht wurde. Denn nach dem Constructionsgesetze (7) gibt es nur ein einziges Paar conjugirter ζ-Punkte, und zwar auf derjenigen Hauptlinie $\bar{o}$, welche den Grundkegelschnitt in imaginären Punkten schneidet. In unserer Fig. 13 ist dieses Punktenpaar $\zeta_2\zeta_2'$ auf $\bar{o}_2$ gelegen. Man darf also dieses $\zeta_2\zeta_2'$-Paar nicht mit den oben bezeichneten zwei Paaren $\zeta_1\zeta_1'$, $\zeta_3\zeta_3'$, welche auf den beiden Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_3$ liegen, die durch den im Inneren von k situirenden Hauptpunkt $\bar{O}_2$ ziehen, gleichstellen. In Folge dessen besitzt auch die Curve C_6^4 nur isolirte Doppeltangenten, was nach (5) wieder die Eigenschaft nach sich zieht: dass sie keine Undulationen haben kann.

19. Der Satz (5) spricht aus: »Jedes Inflexionselementenpaar ist dem Berührpunktenpaare einer Doppeltangente adjungirt«. Da wir nun im vorigen Artikel gesehen haben, dass in der betrachteten C_6^4 die Doppelpunkte insgesammt als Inflexionsknoten erscheinen, ein solcher Knoten aber auf einer C_6^4 niemals eine Undulation vorzustellen im Stande ist, weil er sonst in jeder seiner Tangenten mehr als vier Elemente vereinigen müsste, was vermöge der Ordnungszahl einer C_6^4 widersinnig ist, so finden wir weiterhin darin die Bestätigung, dass es

in dem vorliegenden Situationsfalle keine Undulation geben kann.

Bei dieser Gelegenheit gelangen wir zum Beweise unseres Satzes (17). Erinnern wir uns nämlich der Eigenschaft (5), wonach eine Undulation durch die Vereinigung einer Doppeltangente mit dem ihr adjungirten Wendetangentenpaare entsteht, so kann auf einer C_6^4, weil nur drei Inflexionspaare vorkommen, auch nicht öfter als dreimal eine Undulation stattfinden.

Die Connexität zwischen Doppel- und Inflexionstangenten, die wir durch das Gesetz ihrer Adjunction ausdrückten, darf jedoch nicht dahin gedeutet werden, dass es im Falle von imaginären Inflexionen oder isolirten Doppeltangenten auch imaginäre oder isolirte Undulationen geben könne: »Eine Undulation auf einer C_6^4 kann nur reell gedacht werden«. Diese Eigenschaft wird ersichtlich, wenn man sich einerseits die in (1) gegebene Definition vor Augen hält und anderseits die in (15) angeführte Charakteristik damit verbindet, wonach eine Undulation als der Übergang aus dem Reellen in das Imaginäre, also durch eine Coincidenz von reellen Elementen ausgedrückt ist.

Bemerkung. Ein Undulationspunkt lässt sich übrigens ebensogut aus der Vereinigung von zwei Berührpunkten einer isolirten Doppeltangente — also aus zwei imaginären Elementen — herleiten; es wäre jedoch ein Fehlschluss, wollte man deswegen eine derartige Coincidenz als in einem imaginären Punkte vorkommend ansehen. »Imaginäre Punkte können sich nur in einem reellen Punkte vereinigen.« Dieses wird sofort klar, wenn man beispielsweise die auf einem Kegelschnitte durch eine Gerade invitirte Involution betrachtet, deren Doppelelemente ebenfalls bei dem Übergange aus dem elliptischen in den hyperbolischen Fall und umgekehrt stets im parabolischen Falle ein immer nur reelles Coincidenz-Doppelelement bilden.

20. Die von uns behandelten Beispiele lassen in Bezug der Lage des Grundkegelschnittes gegenüber den drei reellen Hauptpunkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ eine weitere Charakteristik für das Vorhandensein von undulirenden Kegelschnitten und damit verbundenen Undulationselementen auf einer C_6^4 herstellen. In

jedem dieser Beispiele sind die Hauptpunkte $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ ausserhalb des Grundkegelschnittes k befindlich. Die Ursache dieser Thatsache liegt darin, dass von zwei sich vierpunktig berührenden Kegelschnitten immer der eine den anderen umfasst, ohne ihn jemals zu schneiden, so dass niemals reelle $\overline{O}$-Punkte gleichzeitig auf beiden Seiten eines dieser beiden Kegelschnitte vorkommen können.

Anders verhält sich die Sache, wenn wir den grundlegenden $\overline{O}_3$-Punkt unserer Ableitungen innerhalb von k verlegen. Man erhält dann z. B. in dem Falle der Annahme in (6), wo zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ den Grundkegelschnitt k unduliren und dieser als Ellipse vorliegt, jene $\pi_1\pi_2$ als zwei Ellipsen, die sich innerhalb k in zwei reellen Punkten schneiden, deren einer $\overline{O}_3$ ist; der zweite Schnittpunkt $\overline{S}$ (6) dürfte für den Fall einer unicursalen Curve vierter Ordnung nicht als Hauptpunkt des Grundkegelschnittsystems gewählt werden, sondern die beiden übrigen Hauptpunkte $\overline{O}_1\overline{O}_3$ müssen als die imaginären Doppelelemente einer elliptischen Punkteninvolution gelten, die sich auf der ideellen Secante $\bar{o}_3$ der zwei Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ befindet und nach (8) gefunden wird. Diese elliptische Involution auf $\bar{o}_3$ ist aber durch den Pol Ω_3 von $\bar{o}_3$ bezugs k vollkommen bestimmt.

Demzufolge würde vorstehende Situation die Grundlage bilden für eine C_6^4 mit einem reellen Doppelpunkte im Bilde O_3 und zwei imaginären Doppelpunkten auf $o_3 \equiv \bar{o}_3$, eine Specialität, die ich in [§. 35] behandelt habe und auf die ich — weil sie diesfalls mit zwei Undulationen verbunden ist — in selbständiger Betrachtung in einer II. Mittheilung zurückzukommen gedenke.

Die Directionscurve D_4^6.

21. Man kann in der Methode, um über das Wesen und Vorkommen von Undulationen auch ihrer Zahl nach in einer C_6^4 vollkommene Klarheit zu schaffen, mit Vortheil »das System der Tangentialpunkte«, das ich in meinem Lehrbuche [§. 12, II. Th.], sowie a. a. O.[1] entwickelt habe, studiren. Dieses System

[1] Über absolute Elementensysteme auf ebenen Unicursalcurven etc. Zeitschr. für Math. und Phys., XXXVI. Jahrg., II. Heft.

ist ein symmetrisches vierten Grades und seine Directionscurve im Allgemeinen vom Symbole D_4^6.

Die $\bar{x}$-Tangenten, welche die Directionscurve einhüllen, erhalten wir nach der diesbezüglichen Anleitung [69] durch eine Linearconstruction: »Ein beliebiger $\bar{X}$-Punkt des Grundkegelschnittes k wird aus den Hauptpunkten $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ auf diesen Kegelschnitt nach $\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$ projicirt und die Axe $\bar{x}$ der zwei perspectivischen Dreiecke $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$, $\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$ aufgesucht«. Diese $\bar{x}$-Gerade ist für die D_4^6 eine Tangente und schneidet, nebenbei gesagt, den Grundkegelschnitt in zwei Punkten $\bar{X}'\bar{X}''$, welche die Tangentialpunkte $X'X''$ derjenigen Tangente abbilden, die im Bildpunkte X der Curve C_6^4 angehört (Fig. 14).

22. Die Hauptlinien $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$ sind für die Directionscurve D_4^6 Doppeltangenten [105], und letztere durchsetzt die Hauptlinien ausserdem [106] in jenen Punktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$, welche diese mit dem Grundkegelschnitt (reell oder imaginär) gemeinsam haben. Den Grundkegelschnitt aber selbst durchsetzt die D_4^6 in denjenigen Punkten $\bar{T}$, deren jeder [107] sich als das Bild des freien Tangentialpunktes einer Wendetangente auf der Curve C_6^4 darstellt. Endlich besitzt die D_4^6 noch mit dem Grundkegelschnitt gemeinschaftliche Tangentenpaare, deren Berührpunkte $\bar{B}\bar{B}'$ [104] auf dem letzteren die Berührpunkte BB' einer Doppeltangente Δ in der C_6^4 abbilden (Fig. 1).

Die vorstehend citirten Haupteigenschaften einer Directionscurve D_4^6 erfahren in dem Falle, wo eine C_6^4 mit Undulationen gegeben ist, dementsprechende Modificationen, welche in dem Satze gipfeln: »Der Grundkegelschnitt k berührt die Directionscurve D_4^6 so oftmals in $\bar{P}$-Punkten, als die Curve C_6^4 Undulationspunkte P enthält, welche letzteren als Bilder der ersteren Punkte erscheinen«.

23. Das Zustandekommen der Eigenschaft, welche in dem vorigen Artikel ausgesprochen wird, stimmt mit dem in (19) Gesagten überein. Bei einer C_6^4 mit z. B. durchwegs reellen Inflexionselementen ist die Directionscurve D_4^6 so beschaffen, dass sie mit je einem ihrer drei Curvenzüge den Grundkegelschnitt k in einem Paare $\bar{T}\bar{T}'$-Punkten durchsetzt. Die in (21) bezeichnete $\bar{x}$-Tangente in einem dieser $\bar{T}$-Punkte trifft k in jenem $\bar{I}$-Punkte, der das Bild eines Inflexionspunktes I von C_6^4

ist, während die in I an C_6^4 gehende stationäre Tangente den Bildpunkt T von $\bar{T}$ zum Tangentialpunkte hat. Anderseits kommen bei einer derartig mit reellen II'-Paaren vorausgesetzten C_6^4 ebensoviele eigentliche Doppeltangenten Δ mit reellen BB'-Berührpunktenpaaren vor, denen wir in (5) die Eigenschaft der Adjunction mit den II'-Paaren zugesprochen haben. Wie schon oben erwähnt wurde, sind die in den Bildpunkten $\overline{BB'}$ ziehenden Grundkegelschnittstangenten gleichzeitig dem $\bar{x}$-Systeme der D_4^6 angehörig.

Stellen wir uns nun mit Salmon vor, dass eine Undulation auf einer C_6^4 durch die Coincidenz der Tangenten in den, wie wir sagen: »adjungirten Paaren II', BB'« entstanden ist und verfolgen wir dabei den bezüglichen Vorgang auch am Grundkegelschnitte, so ergibt sich: In dem Maasse, als die beiden Elemente eines $\overline{II'}$-Paares sich einander nähern, rücken die Punkte eines $\overline{TT'}$-Paares zusammen; gleichzeitig erfolgt aber ein Sichnähern der $\overline{BB'}$-Elemente einer $\bar{p}$-Sehne, und in dem Momente, wo in einem $\bar{P}$-Punkte die Coincidenz der bezeichneten drei Elementenpaare eintritt, ist die $\bar{p}$-Sehne zur Tangente des Grundkegelschnittes geworden, wobei sich die beiden $\bar{x}$-Geraden der Paare $\overline{TI}$, $\overline{T'I'}$ in ihr vereinigten. Mit anderen Worten: »Der Grundkegelschnitt k wird in dem Coincidenzpunkte $\bar{P}$ von der Directionscurve D_4^6 einfach berührt« (Fig. 1 und 9).

Weil nun auf einer C_6^4 nur drei Paare von Inflexionspunkten stattfinden können, so kann auch der eben beschriebene Vorgang nicht öfter als dreimal eintreten, wodurch abermals die Richtigkeit unseres Satzes in (17): »dass eine C_6^4 nicht mehr wie drei nur reelle Undulationen haben kann«, zur Evidenz nachgewiesen erscheint (Fig. 12).

24. Nachdem eine Curve sechster Ordnung mit einem Kegelschnitte $2.6 = 12$ Punkte gemein hat, die sich auch in sechs Berührpunkte gestalten können, so dürfte darüber ein Zweifel entstehen, ob der Grundkegelschnitt in Bezug der Directionscurve wirklich ein nur dreimal berührender ist? Dieser Zweifel wird jedoch sofort wegfallen, wenn wir uns der in (22) bemerkten Thatsache erinnern, dass eine D_4^6 auch noch die drei Paare reellen oder imaginären Schnittpunkte, welche

zwischen dem Grundkegelschnitte k und den Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ vorkommen, eigenthümlich hat. Dieses ist auch Ursache der Eigenschaft, dass eine C_6^4 mit sechs reellen Inflexionen oder statt derselben: mit drei Undulationen, stets wenigstens eine isolirte Doppeltangente besitzt, welche [186] bei einer circularen C_6^4 die ∞ ferne Gerade ihrer Ebene ist, in der die imaginären Kreispunkte die Berührelemente sind.

25. Der Vollständigkeit wegen wollen wir noch die betreffenden Directionscurven in den anderen vorher durchgeführten Beispielen einer kurzen Besprechung unterziehen.

In dem zuerst behandelten Falle der Curve C_6^4 mit nur einer Undulation ist die Directionscurve D_4^6 eine den Grundkegelschnitt k in P_1 berührende und, soferne die Hauptlinie $\bar{o}_3$ mit k ein reelles Punktenpaar $\overline{A}_3\overline{A}_3'$ gemeinsam hat, durchsetzt sie k in diesen Punkten, um jedesmal im Inneren von k eine Spitze zu formen; jener Zweig, der den $\overline{P}_1$-Punkt enthält und von den Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2$ einfach, von $\bar{o}_3$ aber doppelt berührt wird, trägt ebenfalls zur Formirung der beiden Spitzen bei und schneidet den Grundkegelschnitt noch in zwei $\overline{T}\overline{T}'$-Punkten. Mit dem Grundkegelschnitt hat D_4^6 nur mehr zwei in $\overline{B}\overline{B}'$-Punkten gemeinschaftliche Tangentenpaare. Für die transformirte C_6^4 mit dem Doppelpunkte O_3 und den unter allen Umständen isolirten Doppelpunkten O_1O_2 bedingen die eben aufgezählten Eigenschaften: die Undulation in P_1, zwei Inflexionspunkte I_1I_2 und ein Doppeltangentenpaar $\Delta_2\Delta_3$ mit reellen Berührpunkten, während eine dritte Doppeltangente eventuell isolirt ausfällt (Fig. 1).

26. Würde die Hauptlinie $\bar{o}_3 \equiv |\overline{O}_1\overline{O}_2|$ von dem Grundkegelschnitte k tangirt, so entsteht bekanntlich eine transformirte C_5^4 mit O_3 als Spitzenpunkt. In diesem Falle ist die Directionscurve eine geschlossene, dem Dreiseit $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ einbeschriebene Curve, in welcher bloss die $\bar{o}_3$ Doppeltangente ist. Da sie nur eine einzige Spitze besitzt, degenerirt ihr Symbol in D_3^4. Weil sie ferner ausser der Hauptlinie $\bar{o}_3$ als Doppeltangente nur noch in $\overline{P}_1$ eine mit dem Grundkegelschnitte gemeinschaftliche Tangente hat, so enthält die transformirte C_5^4 keine eigentliche Doppeltangente, wohl aber zwei Inflexionspunkte I_1I_2 und die Undulation in P_1.

27. Für das Beispiel in (9), wo die erzeugte C_6^4 mit den beiden Undulationen P_1P_2 nach (11) in O_3 einen Inflexionsknoten und in O_1O_2 isolirte Doppelpunkte hat, ist die Directionscurve wieder vom Symbole D_4^6, und der Grundkegelschnitt ist für sie in den Punkten $\bar{P}_1\bar{P}_2$ ein doppelt berührender. Sie besitzt abermals zwei Spitzen, die sich mit den Berührpunkten $\bar{A}_3 \equiv \bar{V}_3$, $\bar{A}_3' \equiv \bar{V}_3'$ auf $\bar{o}_3$ der aus $\bar{O}_3$ an k gezogenen Tangenten identificiren. Durch dieses Verhältniss der Formung eines Rückkehrpunktes in jedem $\bar{A}_3 \equiv \bar{V}_3$-Elemente zeigt die Directionscurve ungemein ersichtlich die gleichzeitige Coincidenz mit dem einen der $\bar{I}$-, respective T-Punkte und daher die Entstehung der Singularität eines Inflexionsknotens in O_3 (Fig. 9).

Dieserart ist $\bar{o}_3$ eigentlich als eine dreifache Tangente für die D_4^6 zu bezeichnen, während die zwei Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2$ Doppeltangenten sind. Mit dem Grundkegelschnitt kommen auf D_4^6 noch zwei Paare gemeinschaftliche Tangenten vor, weshalb es auch auf der Transformirten C_6^4 zwei eigentliche Doppeltangenten gibt.

Schliesslich wäre noch für den Fall in (12), wo das Erzeugniss C_6^4 eine einaxige Symmetrie in sich begreift, zu bemerken, dass dieses die analoge Eigenschaft für die hiehergehörige Directionscurve ausdrücken müsste.

28. Wir gelangen endlich zur Aufgabe in (18), welche uns die wichtige Frage über die Anzahl der Undulationen auf einer unicursalen Curve vierter Ordnung zur definitiven Entscheidung brachte. Die Directionscurve zeigt sich in diesem Beispiele ausschliesslich innerhalb des angenommenen geschlossenen Grundkegelschnittes und enthält in jenen vier Punkten, wo der letztere von den Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_3$ geschnitten wird, reelle Spitzen, während die dritte Hauptlinie $\bar{o}_2$ in isolirter Lage zwei imaginäre Spitzenpunkte zum Ausdruck bringt. Nachdem bekanntlich eine Rückkehrtangente in ihrem Berührpunkte drei Elemente vereinigt, jede Hauptlinie aber zwei Spitzen enthält, so müssen die drei Hauptlinien $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ wie in (27) als dreifache Tangenten gelten (Fig. 13).

Jedes Spitzenpaar einer Hauptlinie zeigt in der C_6^4 den bezüglichen Doppelpunkt als Inflexionsknoten. Da die Directionscurve D_4^6 mit dem Grundkegelschnitt k keinerlei Tangenten

gemein hat, so besitzt auch die Erzeugnisscurve C_6^4, wie schon in (18) hervorgehoben wurde, weder Undulationen, noch Doppeltangenten.

29. Bei dieser Gelegenheit scheint es mir angezeigt, auf einen interessanten Specialfall der im vorigen Artikel besprochenen Directionscurve hinzuweisen. Denkt man sich nämlich den Grundkegelschnitt als Kreis k gegeben und das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ so angenommen, dass der Mittelpunkt von k einen Hauptpunkt vorstellt, so müssen die beiden anderen Hauptpunkte auf der ∞ fernen Geraden liegen, soferne wir die in (18) bezeichnete Eigenschaft des Hauptdreiecks als »selbstconjugirtes« beachten. Natürlicherweise bilden dann die ∞ ferne Gerade im Vereine mit zwei im Grundkreismittelpunkte rechtwinkeligen Durchmessern die Seiten des Hauptdreiecks (Fig. 15).

Die Construction einer $\bar{x}$-Tangente nach (21) vereinfacht sich jetzt ungemein wegen der vorwaltenden symmetrischen Anordnung, und wir erhalten als Eingehüllte der $\bar{x}$-Geraden: »eine vierspitzige, vieraxig symmetrische Curve D_4^6«. Die Spitzen dieser Curve sind wie in (28) die Durchschnittspunkte zwischen dem Grundkreise k und den zwei erwähnten normalen Durchmesserhauptlinien. Diese letzteren bilden gleichzeitig das eine Paar Symmetrieaxen, während das andere Symmetrieaxenpaar mit jenem einen $\sphericalangle$ 45° einschliesst.

In (28) wurde hervorgehoben, dass die D_4^6 auf derjenigen Hauptlinie, welche den Grundkegelschnitt in imaginären Punkten trifft, diese letzteren als ein Paar imaginäre Spitzen enthält, wegen welcher Eigenschaft eben sich auch der isolirte Doppelpunkt der Transformationscurve C_6^4 als solcher mit zwei imaginären Inflexionen vereint abbildet. Diese Beziehung bleibt in dem jetzt betrachteten Falle auf der ∞ fernen Geraden erhalten, aus welchem Grunde die D_4^6 »bicircular« ist; in Folge dessen gelangen wir zu dem bemerkenswerthen Resultate:

»Die vieraxig symmetrische Directionscurve D_4^6 ist eine bicirculare vierspitzige Hypocycloide: die Astroide.«

Bei einer derartigen Hypocycloide ist bekanntlich der Radius des Rollkreises $\frac{r}{4}$ des Basiskreises; dieser letztere

aber ist identisch unserem Grundkreise k. Diese Curve nimmt unter den bicircularen Plancurven vierter Classe mit drei Doppeltangenten — weshalb sie in diesem Sinne als »unicursal« anzusehen ist — einen ausgezeichneten Platz in Anspruch; man kann sie in dieser Beziehung so einreihen, wie etwa die Steiner'sche dreispitzige Hypocycloide unter die circularen Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten gestellt ist.

Undulationen auf einer C_6^4 mit einem Coincidenz-Doppelpunkte.

30. Die Bedingungen, welche bei den Grundannahmen erforderlich sind, um eine sogenannte »Contactcurve« C_6^4 mit einem Berührknoten oder einer Schnabelspitze zu erzeugen, habe ich im Art. [194] auseinandergesetzt. Soll eine solche Curve mit einer Undulation verbunden sein, dann wird man in nachstehender Weise verfahren müssen.

In der Ebene werden in einem Punkte $\overline{P}_1$ zwei undulirende Kegelschnitte $k\pi_1$ festgesetzt. Auf π_1 wählt man zwei beliebige Punkte $\overline{O}_{13}\overline{O}_2$ und bestimmt in $\overline{O}_{13}$ die Tangente $\bar{o}_2$ in Bezug π_1. Die Construction der letzteren geschieht linear, wenn wir die harmonischen Beziehungen (9) in Erinnerung bringen und die in $\overline{P}_1$ für beide Kegelschnitte $k\pi_1$ gemeinschaftliche Tangente $\bar{p}_1$ mit der Polaren von $\overline{O}_{13}$ bezüglich k in einem Punkte ζ_2 schneiden. Die Verbindungslinie $|\overline{O}_{13}\zeta_2|$ ist die verlangte Tangente $\bar{o}_2$. Über der Sehne $\overline{O_{13}O_2}$ wird ein Kreis $\varkappa$ geschlagen, welcher gleichfalls die Linie $\bar{o}_2$ in $\overline{O}_{13}$ berührt (Fig. 16 und 17).

Nun lässt sich nach dem Situationsfalle [46, c] das Linienpaar $|\overline{O}_{13}\overline{O}_2| \equiv \bar{o}_{13}$, $\bar{o}_2$ mit den Punkten $\overline{O}_{13}\overline{O}_2$ als Elemente eines degenerirten Hauptdreiecks ansehen, in welchem $\overline{O}_{13}$ ein Coincidenz-Hauptpunkt und $\bar{o}_{13}$ eine Coincidenz-Hauptlinie sind und $\varkappa$ der Hauptkreis ist.

31. In dem Hauptdreiecks-Systeme $\overline{O}_{13}\overline{O}_2$ wird k als Grundkegelschnitt angenommen und quadratisch in eine Curve C_6^4 transformirt, welche $O_{13} \equiv \overline{O}_2$ als einen Coincidenz-Doppelpunkt hat, während $O_2 \equiv \overline{O}_{13}$ ein einfacher Knoten oder ein isolirter Doppelpunkt ist. Die Gerade $o_{13} \equiv o_{13}$, sowie die

Hauptkreistangente o_2 im Punkte O_{13} repräsentiren die Seiten des ebenfalls degenerirten Doppelpunktdreiecks im Curvensysteme C_6^4.

Ein beliebiger Punkt $\bar{X}$ des Grundkegelschnittes k wird folgend in sein quadratisches Bild X übersetzt: »Durch $\bar{X}$ werden die Hauptstrahlen der Punkte $\bar{O}_2\bar{O}_{13}$ gezogen; jene Gerade, welche $\bar{O}_2$ mit dem Hauptkreissschnitte des Strahles $|\bar{O}_{13}\bar{X}|$ verbindet, schneidet sich in X mit der durch $\bar{O}_{13}$ zu dem Strahle $|\bar{O}_2\bar{X}|$ parallelen Geraden« (Fig. 18).

Die Curve C_6^4 formt in O_{13} einen »Berührknoten«, in welchem zwei Curvenäste reell oder imaginär gegenseitig, und zwar nur auf einer Seite der Contacttangente o_2 eine Tangention begehen, je nachdem die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ den Grundkegelschnitt k als eigentliche oder als isolirte Secante schneidet; ist aber $\bar{o}_{13}$ eine Tangente von k, dann haben wir in O_{13} den Fall einer »Schnabelspitze«, für welche o_2 die Tangente ist. Diese Tangente o_2 vereinigt in beiden Fällen in ihrem Berührpunkte O_{13} jedesmal vier Punktenelemente der Curve, ohne etwa, wie schon in (1) gesagt ist, mit einer Undulation gleichbedeutend zu sein. Das Symbol einer Schnabelcurve degenerirt auf C_5^4 (Fig. 16 und 17).

Eine Schnabelspitze kann nur reell gedacht werden, weil in dem Falle einer bicircularen Curve eine Coincidenz der ∞ fernen imaginären Kreispunkte der Ebene als Curvendoppelpunkte — was unbedingt vorauszusetzen wäre — nicht möglich ist, denn: ein isolirter Punkt ist immer reell (vergl. Bemerkung in (21)).

32. In unseren Beispielen der Fig. 16, 17 stellt das Bild P_1 von $\bar{P}_1$ eine Undulation vor. Die Undulationstangente p_1 kann wieder durch Abbildung beliebiger Punkte des Kegelschnittes π_1 fixirt werden, von denen insbesondere auch ihr Asymptotenpunkt $U_1\infty$ hervorzuheben ist. Dieser letztere entspricht bildlich wie in (10) dem ausser den Hauptpunkten $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ noch übrig bleibenden Schnitte $\bar{U}_1$ der Kegelschnitte $\varkappa\pi_1$. In (10) ist auch weiters noch auf die Construction der Curvenasymptoten und ihrer Tangentialpunkte aufmerksam gemacht, was für unser vorliegendes Beispiel mit unwesentlichen Modificationen analog wie dort Anwendung findet.

In Bezug von Doppeltangenten Δ einer Contactcurve ist nach [198] zu erinnern, dass höchstenfalls deren nur zwei möglich sind, weil die Contacttangente o_2 schon ein Paar derselben zur Vereinigung bringt. Ist nun auf der Curve C_6^4 eine Undulation vorhanden, so ist im Zusammenhange mit (1) auf einer solchen Curve nur mehr eine einzige Doppeltangente möglich. Wir finden das auch in unseren Fig. 16, 17 bestätigt, wo es auf der Hauptlinie $\bar{o}_2$ nur einen freien Punkt ζ_2 gibt, weil der zweite mit $\bar{O}_{13}$ coincidirt. Im Bildpunkte von ζ_2 müssen also conform mit (11) wieder die Doppeltangente Δ_2 mit der Undulationstangente p_1 zusammentreffen, was durch den Parallelstrahl $|\bar{O}_2\zeta_2|$, der durch den Doppelpunkt O_2 gezogen wird, zur Anzeige kommt. Wenn aber der Contactpunkt O_{13} einer Curve vom Symbole C_5^4 einen Schnabel formirt, dann enthält diese Curve überhaupt keine eigentlichen Doppeltangenten, was aus den angestellten Betrachtungen von selbst hervorgeht.

33. »Eine Contactcurve C_6^4 kann nicht mehr als zwei Undulationen enthalten.« Der Beweis dessen ist in den Erörterungen des vorigen Artikels einbezogen, womit gleichzeitig zur Aussprache gelangt, dass eine derartige Curve auch keine Doppeltangenten haben kann. Man wird ferner ohne Schwierigkeit einsehen, dass solche Curven stets isolirte Doppelpunkte — den Contactpunkt mitinbegriffen — besitzen, somit auch niemals der Fall einer Spitze oder eines Schnabels vorkommen kann, indem die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ nur eine isolirte Secante für den Grundkegelschnitt sein kann.

Soll eine Contactcurve mit zwei Undulationen construirt werden, so verbinden wir die Annahmen in (30) mit jenen in (9) folgendermassen: Auf einem Grundkegelschnitt k werden zwei beliebige Punkte $\bar{P}_1\bar{P}_2$ und auf der Verbindungslinie derselben ausserhalb k ein dritter Punkt $\bar{O}_{13}$ gewählt. In Bezug des letzteren Punktes bestimmen wir die beiden, jeweilig in einem der $\bar{P}_1\bar{P}_2$-Punkte den Kegelschnitt k undulirenden Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$. Diese berühren sich gegenseitig einfach in $\bar{O}_{13}$ und schneiden sich überdies in zwei Punkten $\bar{O}_2\bar{S}$, von welchen einer als Hauptpunkt $\bar{O}_2$ angenommen wird (Fig. 19).

Aus ähnlichen Gründen wie in (9) ist die Verbindungslinie der zwei zuletzt erwähnten Schnittpunkte die Polare von

$\bar{O}_{13}$ in Bezug k, weshalb durch den Schnittpunkt ζ_2 der zwei $\bar{p}_1\bar{p}_2$-Tangenten dieselbe laufen muss und also die Gerade $|\bar{O}_{13}\zeta_2| \equiv \bar{o}_2$ die den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ gemeinschaftliche Tangente ist. Die weiteren Beziehungen bei der Einrichtung einer quadratischen Verwandtschaft zwischen dem Grundkegelschnitte k und der aus ihm transformatorisch hervorgehenden Curve vierter Ordnung mit den zwei Undulationen in P_1P_2 etc. sind denen in (30) und (31) gleich zu halten.

34. In (8), sowie im vorigen Artikel ist dessen Erwähnung gethan, dass sich die Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ noch in einem von $\bar{O}_2$ verschiedenen Punkte $\bar{S}$ schneiden. Dieser Punkt ist insoferne von Interesse, als sich in seinem Bilde S die beiden Undulationstangenten p_1p_2 der Curve C_6^4 treffen müssen. Ist im Systeme des Grundkegelschnittes die Anordnung der Punkte $\bar{P}_1\bar{P}_2$ eine symmetrische, was dann der Fall sein wird, sobald diese Punkte Scheitel des Grundkegelschnittes k sind und die Gerade $|\bar{O}_{13}\bar{P}_1\bar{P}_2|$ die Symmetrale ist, so liegt ζ_2 unendlich fern, und sowohl die den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$ gemeinsame Tangente $\bar{o}_2$ in $\bar{O}_{13}$, als auch das Tangentenpaar $\bar{p}_1\bar{p}_2$ am Grundkegelschnitte sind zur Symmetralen $|\bar{P}_1\bar{P}_2|$ normal. Aus diesem Grunde ist der Schnitt $\bar{S}$ symmetrisch conjugirt dem $\bar{O}_2$-Punkte und mit einem $\bar{U}$-Punkte in (10) auf dem Hauptkreise $\varkappa$ liegend, was wieder zur Folge hat, dass die Undulationstangenten p_1p_2 — weil sie durch das Bild S von $\bar{S}$ ziehen müssen — gleichfalls dem Paare $\bar{p}_1\bar{p}_2$ parallel laufen (vergl. 12).

35. Man beachte, dass eine Contactcurve C_6^4 mit zwei Undulationen dann ovalförmig, in sich geschlossen (elliptischer Fall) verläuft, wenn Grundkegelschnitt und Hauptkreis sich nur in imaginären Punkten schneiden, weil diese nach (10) die Asymptotenpunkte der Curve abbilden. Dieser Fall findet statt, wenn die Hauptpunkte $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ ausserhalb des Grundkegelschnittes liegen. Im Allgemeinen kann eine Contactcurve C_6^4 vier oder zwei reelle Asymptoten enthalten (hyperbolischer Fall), weil sich die zwei Kegelschnitte $k\varkappa$ in vier oder zwei Punkten schneiden. Nur in dem Ausnahmsfalle, wo zwischen $k\varkappa$ eine einfache oder doppelte Berührung oder auch eine Osculation gebildet wird, ist die ∞ ferne Gerade selbst eine dementsprechende Asymptote (parabolischer Fall). Die beiden

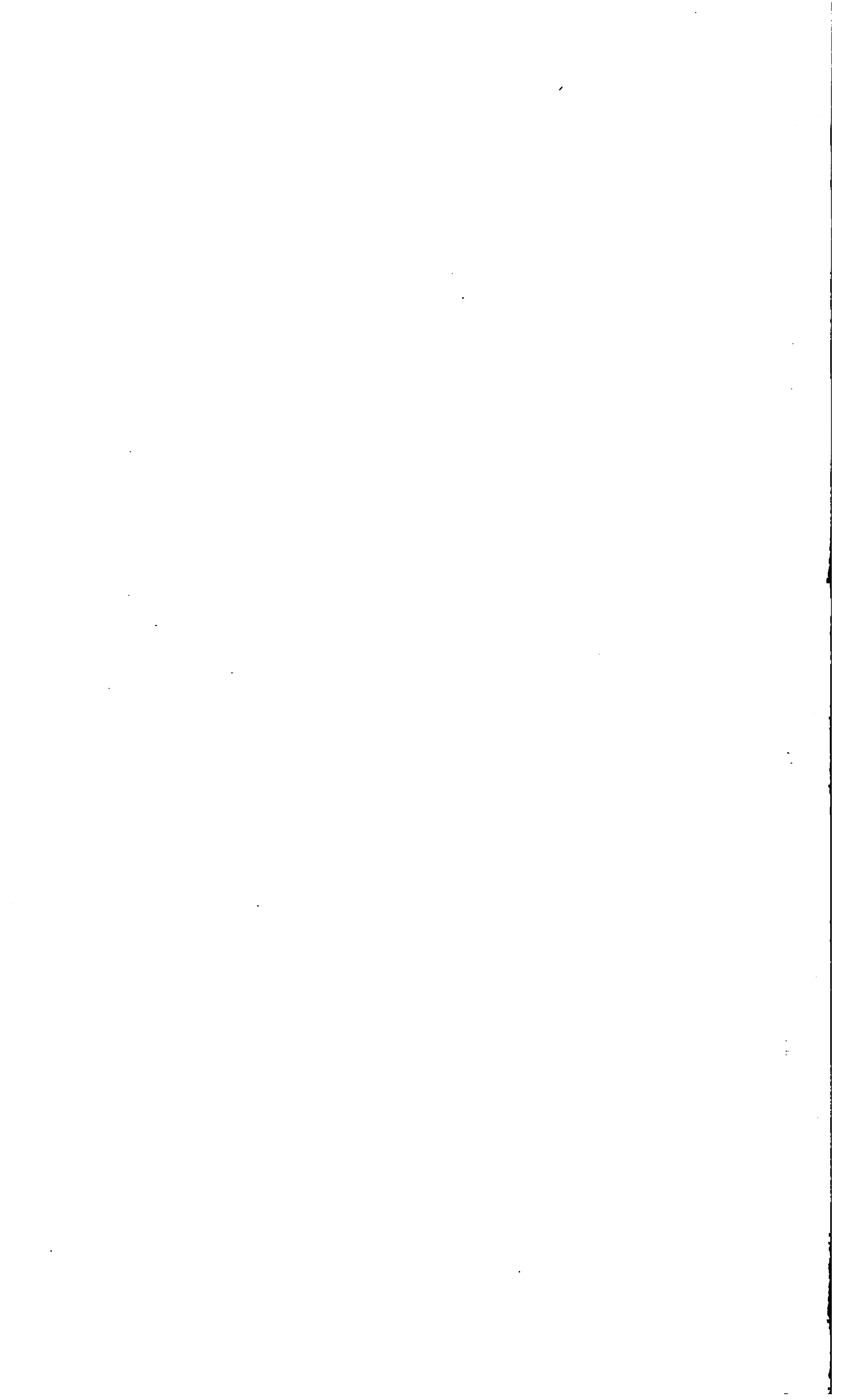
letzteren Fälle, in denen die ∞ ferne Gerade zur Doppel- oder zur Inflexionstangente werden könnte, sind in einer Contactcurve C_6^4 mit zwei Undulationen unmöglich, weil nach (33) eine solche Curve überhaupt weder Doppel-, noch Wendetangenten haben kann (Fig. 19).

Ist endlich die Curve C_6^4 eine »Kreisverwandte« (circular), so besitzt sie in der Regel nur zwei reelle Asymptotenpunkte, weil sich die beiden Kreise $k\varkappa$ in bloss zwei Punkten reell treffen (Fig. 17).

36. Eine Undulation verleiht der Form einer Plancurve einen ausgesprochen eigenthümlichen Charakter, indem sich die Curve an einer derartigen Stelle längs der betreffenden Tangente abflacht und sozusagen platt gedrückt erscheint, welcher Charakter erst wieder in der Nähe der darauf folgenden Verzweigungspunkte — wo in der Regel eine stärkere Krümmung stattfindet — verloren geht. Es muss somit dem Vorkommen von Undulationstangenten bei Beurtheilung der gestaltlichen Verhältnisse einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung die gleiche Berücksichtigung zu Theil werden, welche man längst den Eigenschaften der Doppel- und Wendetangenten zuerkannt hat, wie ich bereits eingangs dieses Aufsatzes zu bemerken die Gelegenheit nahm.

W.Bi

Autor

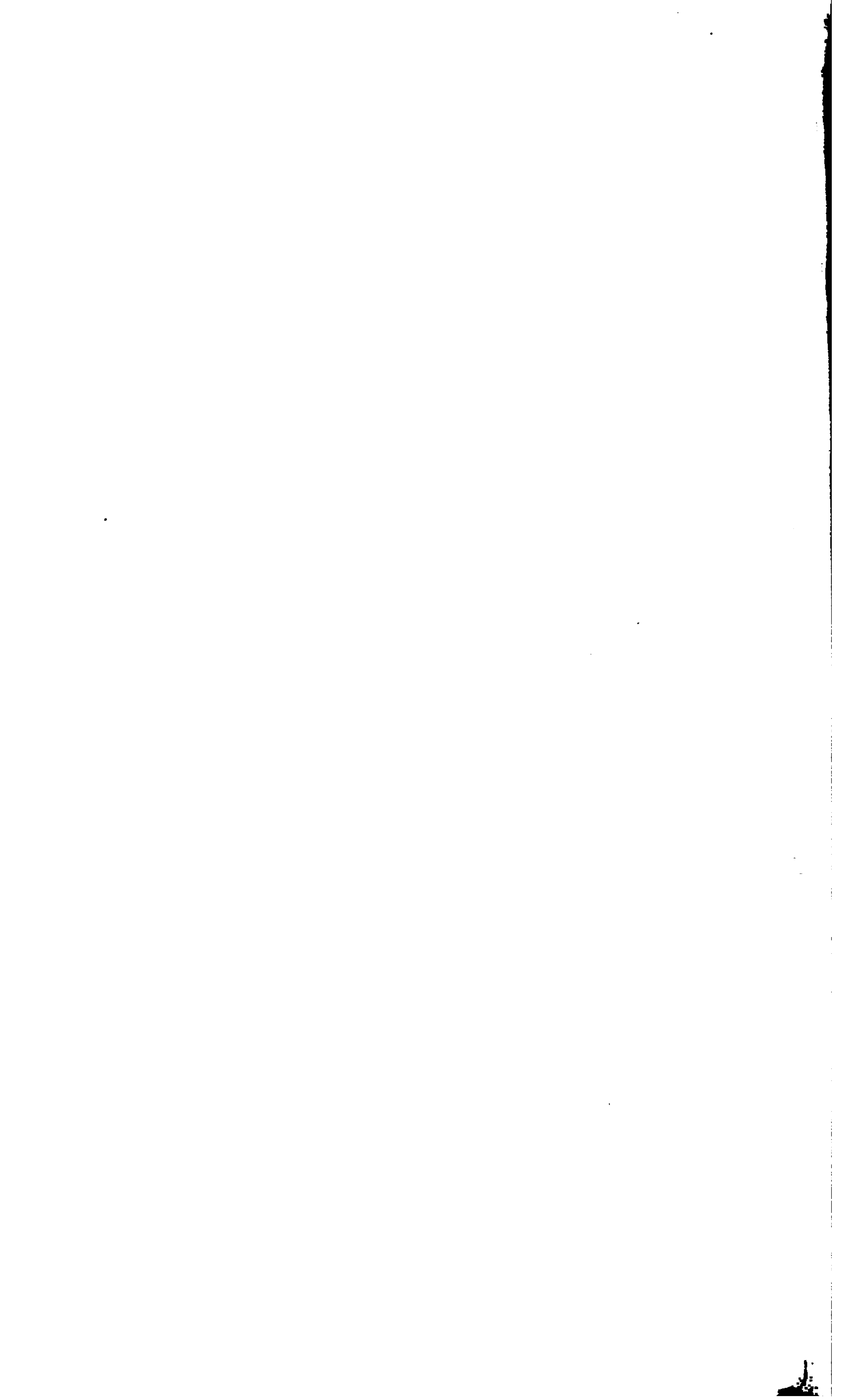


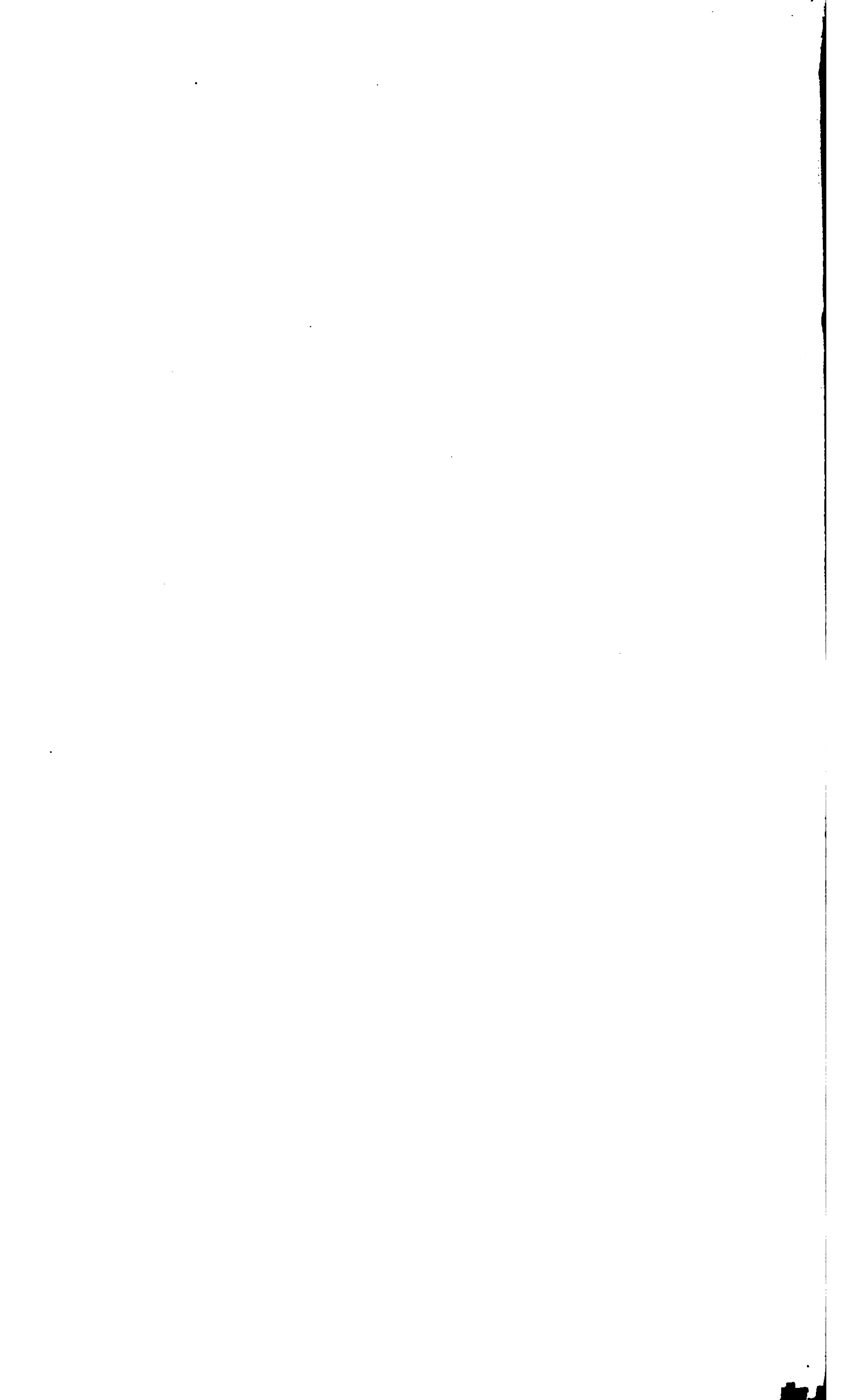
W.I

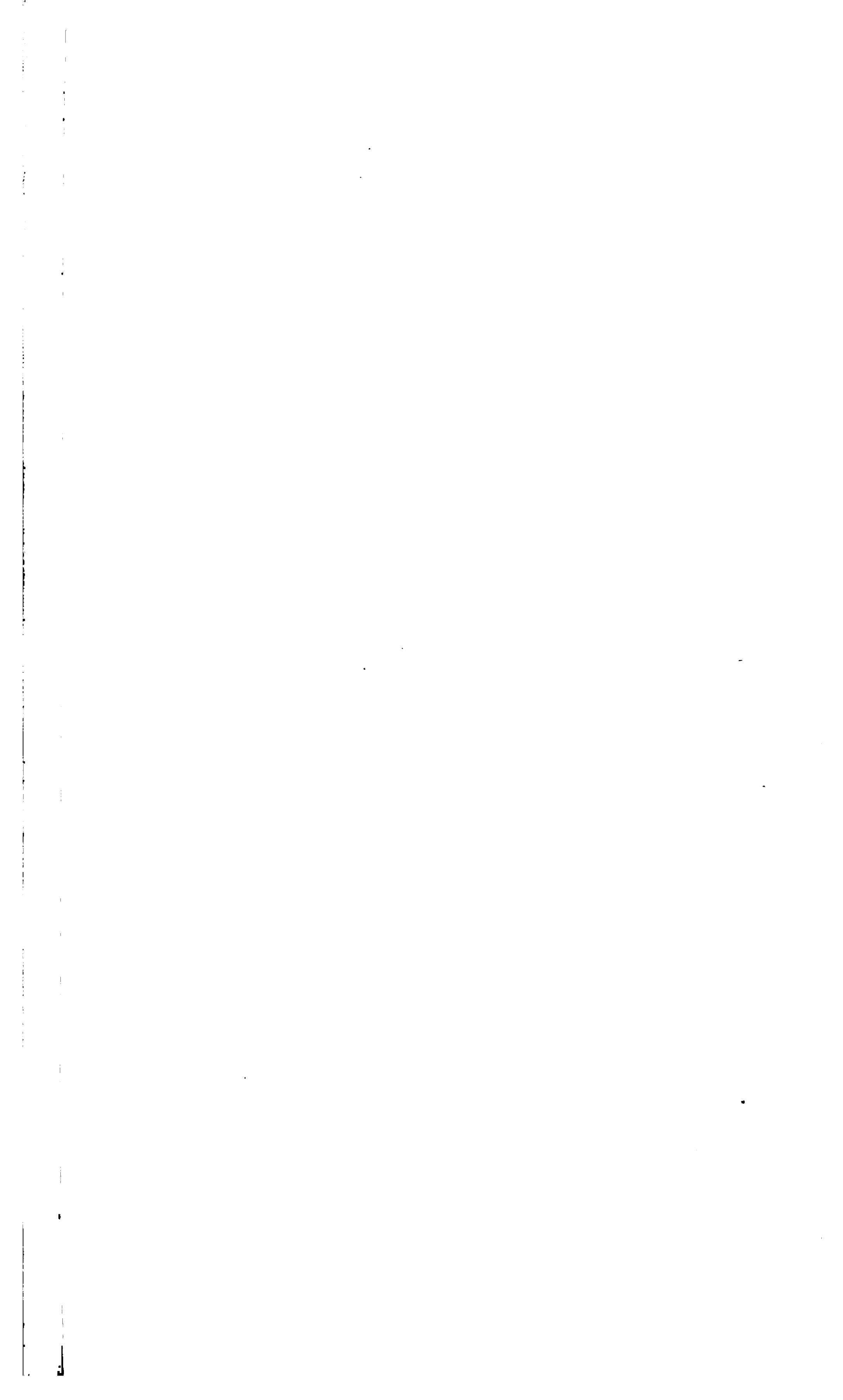
Autol

W. Bi

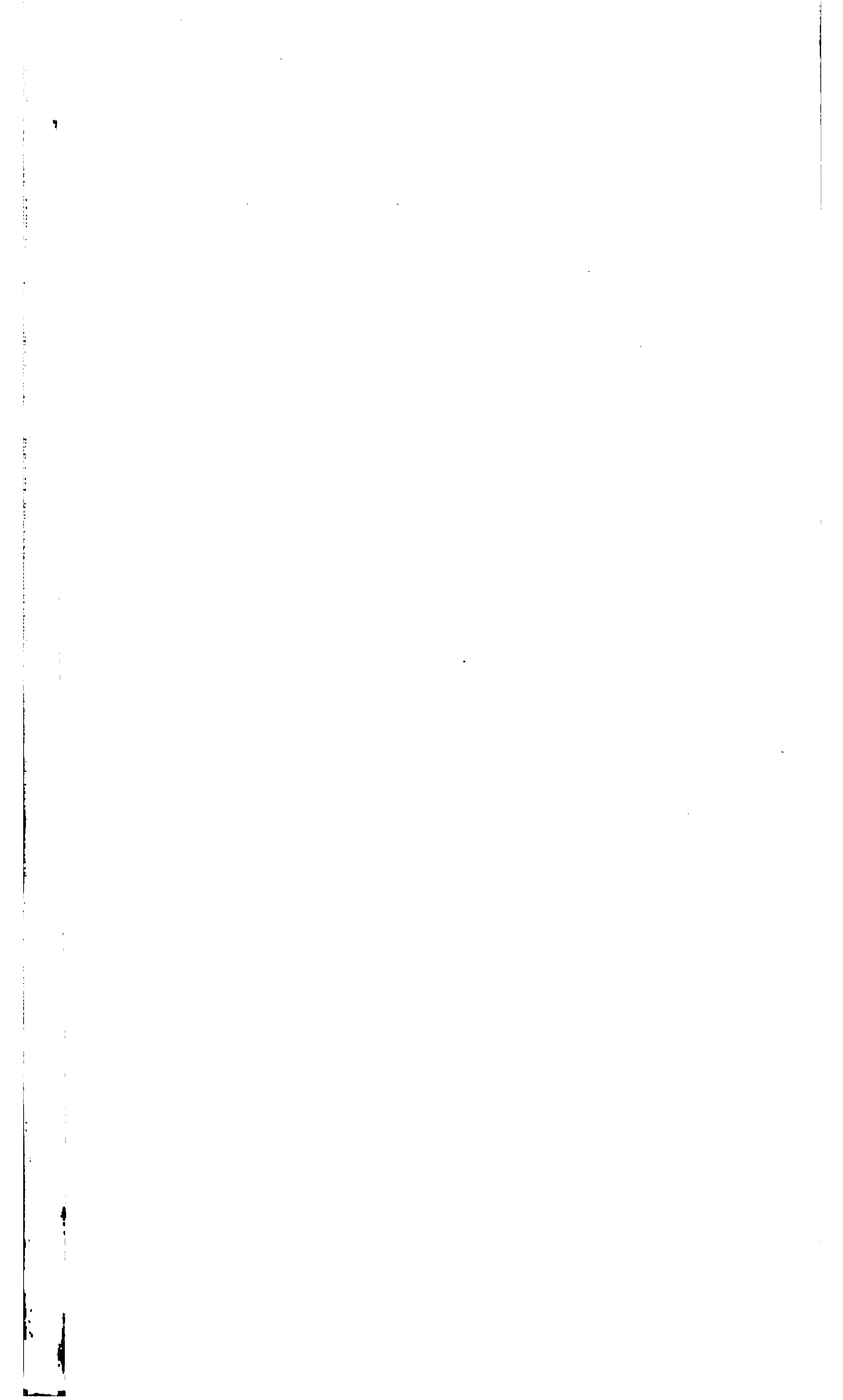
Autor d



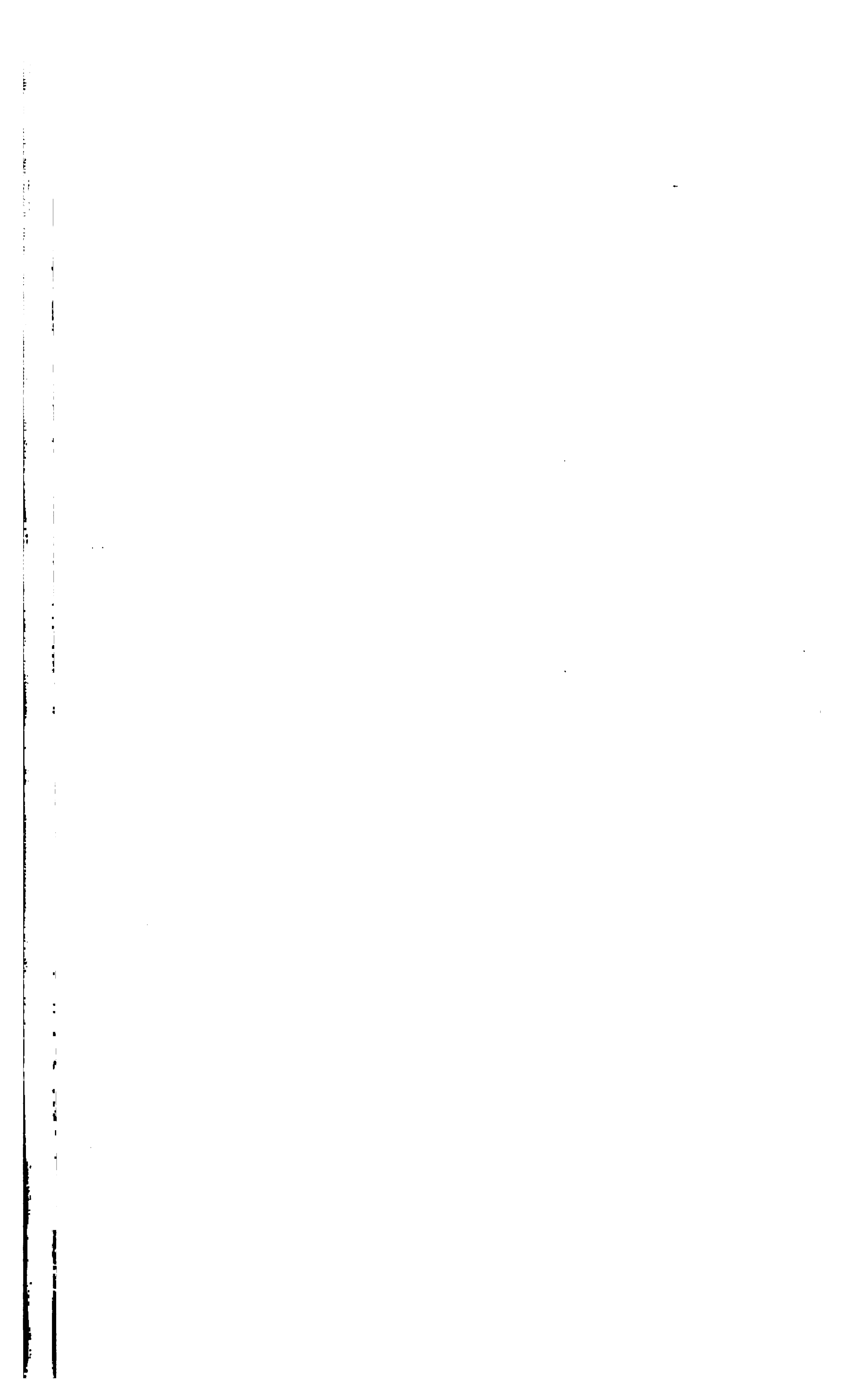


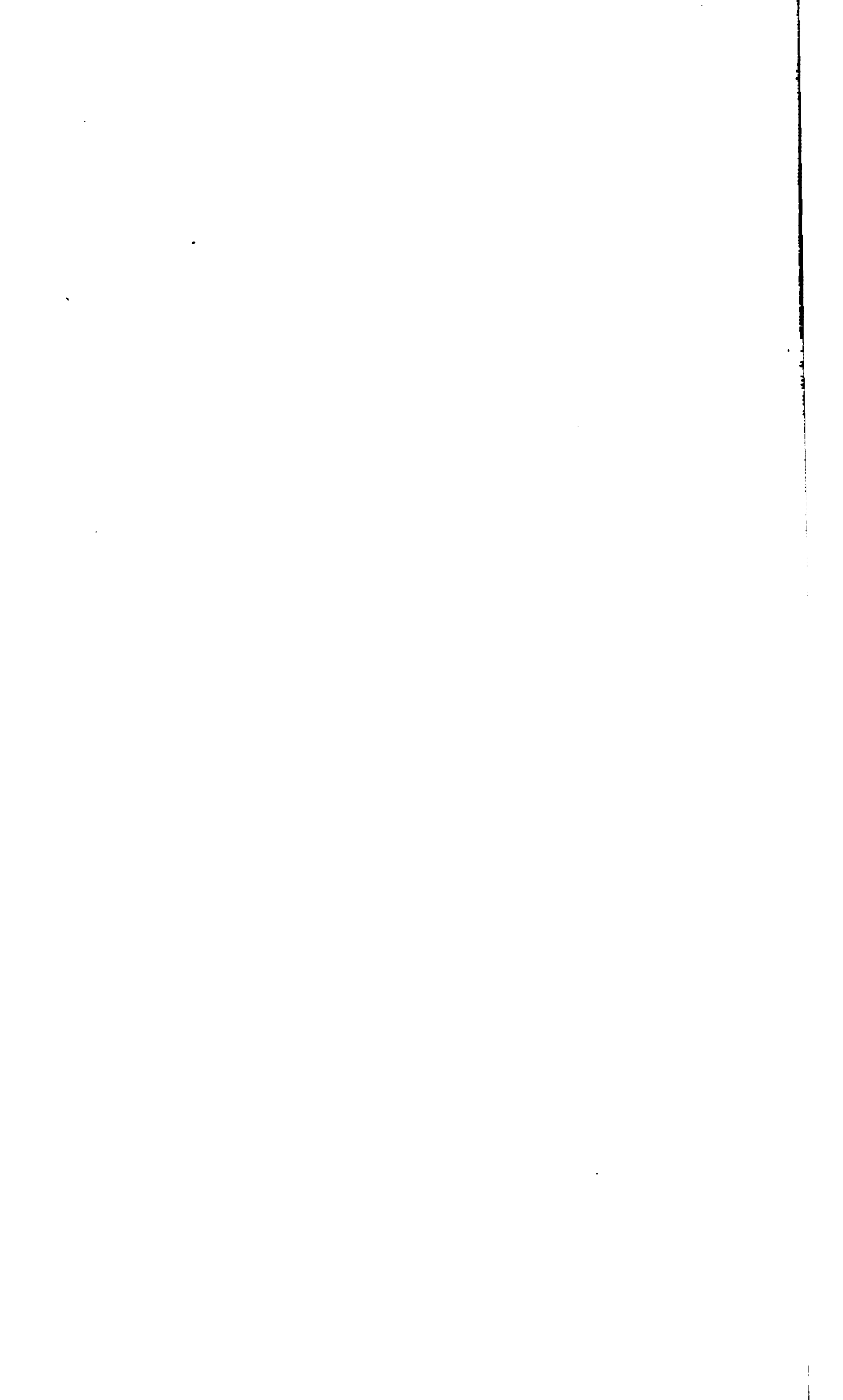


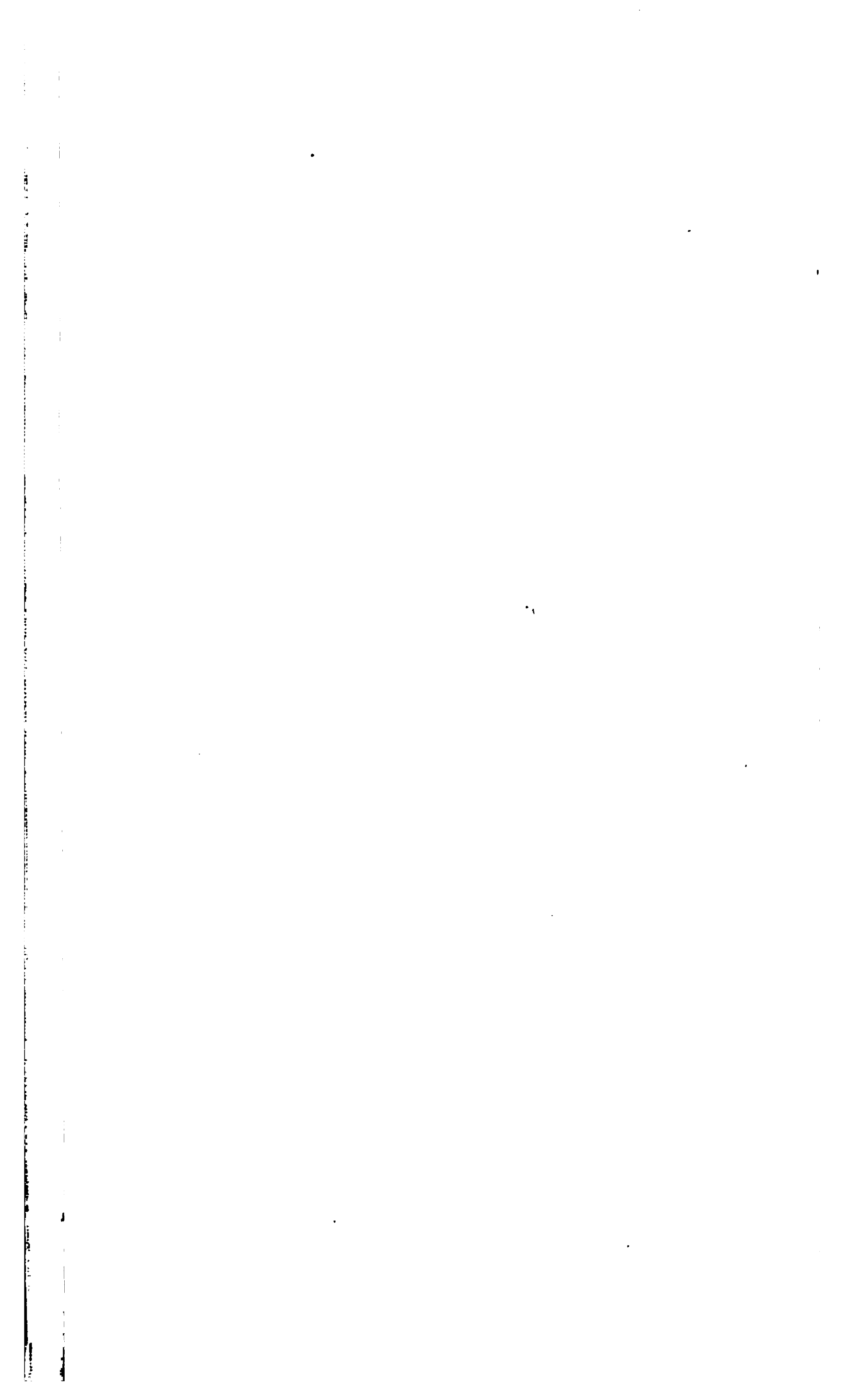




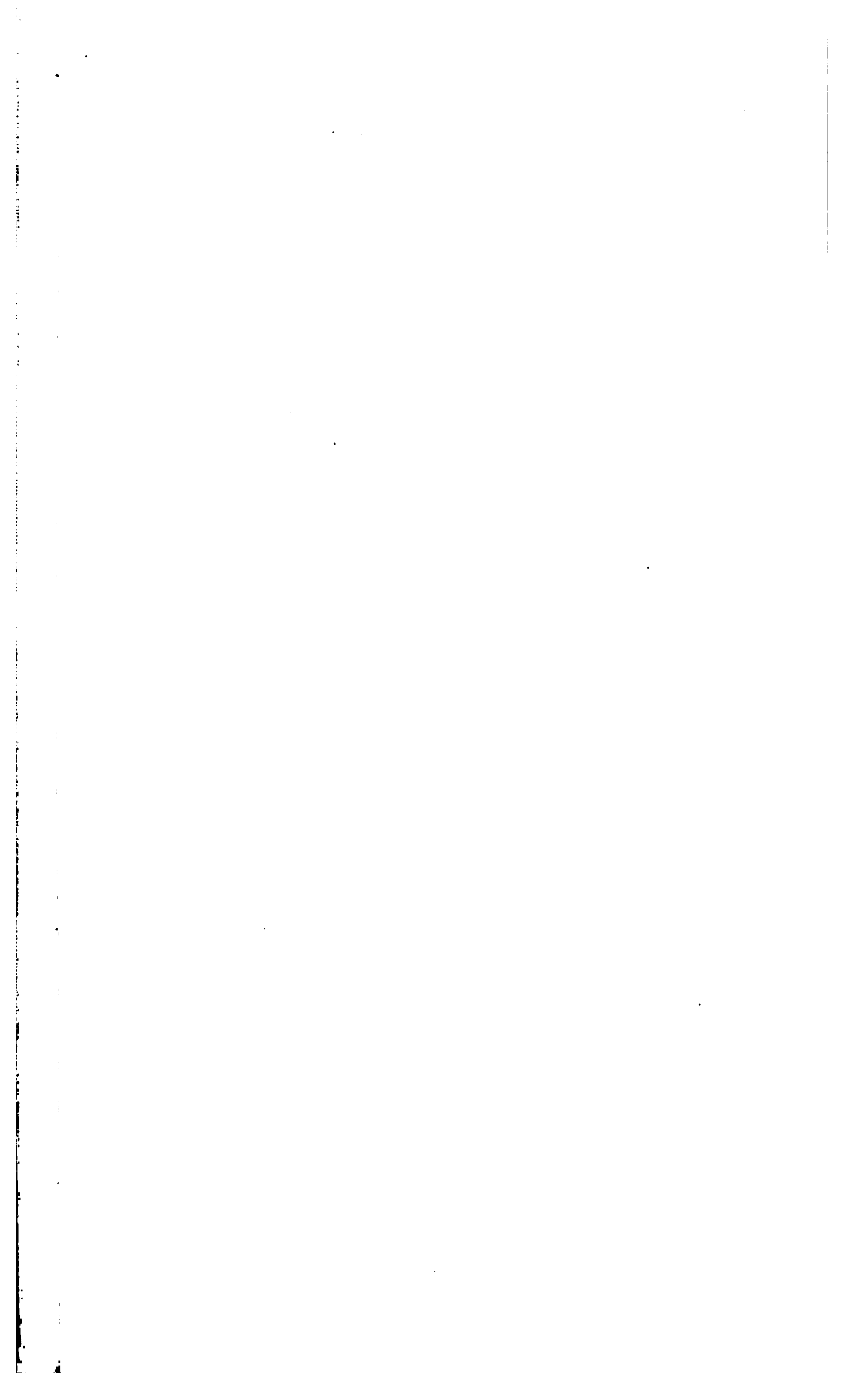
W.

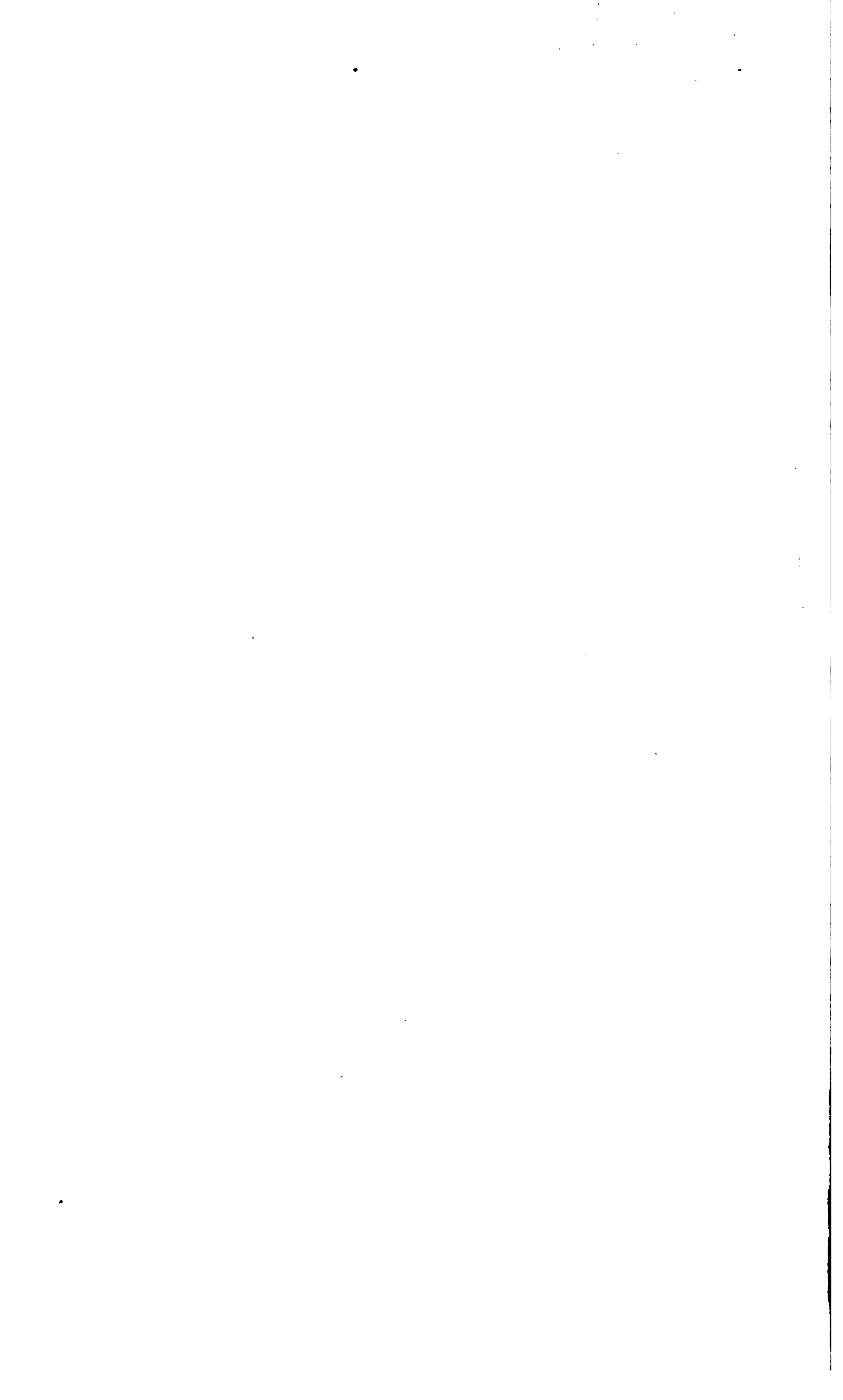












Über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement

von

Emil Waelsch,

a. o. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. März 1897.)

Die Tangenten an eine Schaar S geodätischer Linien einer Fläche F bilden ein Normalensystem, das ausser F noch eine Schale F_1 der Brennfläche hat. Durch einen Punkt a von F geht eine geodätische Linie der Schaar S und die Tangente t_a dieses Punktes berührt F_1 in einem Punkte A. Sind nun die geodätischen Linien von F zu ∞^1 Schaaren S gruppirt, so gehört zu jeder dieser Schaaren ein Punkt A in der Tangentialebene T_a von F im Punkte a, und alle diese Punkte erfüllen eine Curve $\mathfrak{A}$.

Hat die Fläche F das Liouville'sche Bogenelement:

$$(U+V)(du^2+dv^2),$$

so sind ihre geodätischen Linien bekanntlich gegeben durch

$$\sqrt{V+\alpha}\,du-\sqrt{U+\alpha}\,dv = 0.$$

Für jeden Werth von α ergibt sich dann ein Schaar S, und allen diesen Schaaren entspricht eine Curve $\mathfrak{A}$, welche (wie ich in einer früheren Arbeit gezeigt habe)[1] eine Strophoide ist.

Ist F speciell auf eine Rotationsfläche abwickelbar, so ist $\mathfrak{A}$ ein Kreis, der durch den Punkt a geht.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass diese Eigenschaft der Flächen mit Liouville'schem Bogenelement für diese charak-

---

[1] S. Sur les surfaces à l'élément de Liouville etc. Comptes rend. t. 116, p. 1435. — Über Tangentencongruenzen einer Fläche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 757.

teristisch ist. Wenn also verlangt wird, dass die Curven $\mathfrak{A}$, welche einer Gruppirung der geodätischen Linien von F entsprechen, sämmtlich Strophoiden seien, so wird F dieses Bogenelement haben.

1. Bei der Bewegung des rechtwinkeligen Triëders, dessen z-Achse mit der Normale N_a der Fläche F in a übereinstimmt, und dessen x-, respective y-Axe Tangenten an die Linien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind, geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\delta x &= dx + A du + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y, \\
\delta y &= dy + C dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z, \\
\delta z &= dz + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x
\end{aligned}$$

die Incremente der Coordinaten x, y, z eines Punktes A, dessen relative Incremente bezüglich des Triëders dx, dy, dz sind.[1]

Es werde nun verlangt, dass der Punkt A ein Punkt der Tangentialebene T_a sei und sich relativ zu dem Triëder auf der Curve $\mathfrak{A}$ in T_a bewege.

Sind dann

$$x = x(u, v, \lambda), \quad y = y(u, v, \lambda), \quad z = 0$$

die Coordinaten eines Punktes dieser Curve, so folgt, (wenn $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$ gesetzt wird)

$$\begin{aligned}
\delta x &= x_u du + x_v dv + x_\lambda d\lambda + A du - (r du + r_1 dv) y \\
\delta y &= y_u du + y_v dv + y_\lambda d\lambda + C dv + (r du - r_1 dv) x.
\end{aligned}$$

Sollen ferner die Punkte $A + \delta A$ in einer Ebene E_A liegen, die durch N_a geht, so muss

$$y \delta x - x \delta y = 0$$

sein; daher folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\{Ay - r(x^2+y^2)\} du - \{Cx + r_1(x^2+y^2)\} dv + (x_\lambda y - y_\lambda x) d\lambda + \\
+ (x_u y + y_u x) du + (x_v y - y_v x) dv = 0. \qquad 1)
\end{aligned}$$

---

[1] S. Darboux, Surfaces, t. II, p. 385.

Dies ist in den Veränderlichen u, v, λ die Gleichung eines Pfaff'schen Problems, welches das Flächenelement (A, E_A) enthält, das aus dem Punkte A und aus dessen Ebene E_A besteht.

Führt man in Gleichung 1) Polarcoordinaten ein, vermöge

$$x = \rho \cos\varphi, \; y = \rho \sin\varphi,$$

so erhält man:

$$\left(A\frac{\sin\varphi}{\rho} - r\right)du - \left(C\frac{\cos\varphi}{\rho} + r_1\right)dv - d\varphi = 0, \qquad 2)$$

und dies ist die Gleichung des Pfaff'schen Problems in den Veränderlichen u, v, φ. Die Curve $\mathfrak{A}$ ist hierbei in Polarcoordinaten gegeben durch die Gleichung

$$\rho = \rho(u, v, \varphi).$$

2. Soll das Pfaff'sche Problem der Gleichung 2) integrabel sein, so muss die Identität bestehen:

$$[A_v\rho_\varphi + C\rho_u]\cos\varphi - [C_u\rho_\varphi - A\rho_v]\sin\varphi + (r_v - r_{1u})\rho^2 + AC = 0. \qquad 3)$$

Dann ordnen sich die ∞^3 Flächenelemente des Problems zu den ∞^1 Integralflächen an, und diese sind die Schalen F_1 der obigen Brennflächen. Die geodätischen Linien auf F, deren Tangenten eine dieser Flächen F_1 berühren, bilden eine der Schaaren S.[1]

Genügt ρ als Function von u, v, φ der Identität 3), so lassen sich die geodätischen Linien der Fläche F bestimmen. Zunächst muss hiezu das vermöge 3) integrable Pfaff'sche Problem durch Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung integrirt werden. Sind dann die ∞^1 Integralflächen F_1 bestimmt, so gibt jede derselben eine Schaar S geodätischer Linien und durch Integration einer weiteren Differentialgleichung erster Ordnung findet man dann die geodätischen Linien dieser Schaar (S. l. c.)

Da in der Gleichung 2) des Pfaff'schen Problems r und r_1 nur von dem Bogenelement der Fläche F abhängen, folgt

[1] Vergl. meine Arbeit: Über Flächen constanter Krümmung. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 1317.

nebenbei: Ist das Pfaff'sche Problem, das zu den angenommenen Curven $\mathfrak{A}$ gehört, integrabel, so bleibt es integrabel, wenn man die Curven $\mathfrak{A}$ bei einer Deformation der Fläche unverändert mitnimmt.

Es werde nun vorausgesetzt, dass die Curve $\mathfrak{A}$ eine Strophoide sei, dass also sei

$$\rho = \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{a\cos\varphi + c\sin\varphi}, \tag{4}$$

wo a und c Functionen von u, v sind.

Bestimmt man hieraus ρ_u, ρ_v, ρ_φ und setzt diese in die Identität 3), so ergibt sich eine in $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ homogene Form 4ten Grades, deren 5 Coëfficienten für sich verschwinden müssen. So erhält man die 5 Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} A_v a + ACa^2 &= 0 \\ C_u c + ACc^2 &= 0 \\ Ac_v + A_v c - 2ACac &= 0 \\ Ca_v + Ca_u - 2ACac &= 0 \\ Aa_v + Cc_u - AC(a^2+c^2) - (r_v - r_{1u}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus den ersten der beiden Identitäten folgt:

$$a = -\frac{A_v}{AC}, \quad c = -\frac{C_u}{AC} \tag{6}$$

und hiernach ist die letzte der Identitäten 5) von selbst erfüllt, da sie nichts anderes ist, als der Ausdruck des Krümmungsmasses

$$K = \frac{r_v - r_{1u}}{AC}.$$

(Die Formel 6) zeigen nebenbei, dass die Krümmungskreise der Strophoide im Punkte a respective durch die geodätischen Krümmungsmittelpunkte des Punktes a der Coordinatenlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ gehen.)

Die 3. und 4. der Identiäten 5) geben ferner:

$$(Ca)_u - 2ACac = 0, \quad (Ac)_v - 2ACac = 0,$$

woraus sich vermöge 6) ergibt, wenn

$$lA = \alpha, \quad lC = \gamma \tag{7}$$

gesetzt wird:

$$\alpha_{uv} + 2\,\alpha_v\gamma_u = 0, \quad \gamma_{uv} + 2\,\alpha_v\gamma_u = 0. \tag{8}$$

Da also

$$\alpha_{uv} = \gamma_{uv}$$

ist, so folgt:

$$\gamma = \alpha + lU + lV \text{ oder } C = AUV. \tag{9}$$

Daher ergibt sich aus der ersten Gleichung 8):

$$(l\alpha_v)_u = -2\,(\alpha_u + [lU]_u)$$

und hieraus hintereinander:

$$\begin{aligned} l\alpha_v &= -2\,(\alpha + lU) + lV_1, \\ \alpha_v &= A^{-2}U^{-2}V_1, \\ (A^2)_v &= 2\,U^{-2}V_1, \\ A^2 &= U^{-2}V_1 + U_2. \end{aligned}$$

Nach 9) ist nun:

$$C^2 = (U^{-2}V_1 + U_2)\,U^2V^2. \tag{10}$$

Daher hat das Bogenelement von F die Gestalt:

$$(V_1 + U_2U^2)\,\{U^{-2}du^2 + V^2dv^2\}. \tag{11}$$

Werden jetzt die neuen Veränderlichen u_1, v_1 durch die Gleichungen

$$U^{-1}du = du_1, \quad Udv = dv_1$$

eingeführt, so erhält dieses Bogenelement die Liouville'sche Form.

Hiermit ist der Eingangs erwähnte Satz über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement bewiesen.[1]

---

[1] Für eine Fläche 2ter Ordnung, deren Bogenelement bekanntlich die Liouville'sche Form hat und deren confocale Flächen die obigen Flächen F_1 sind, folgt demnach: Der Ort des Punktes A, in welchem eine zu F confocale

4. Wird in Gleichung 4) $c = 0$ gesetzt, zerfällt also die Strophoide in den Kreis mit der Gleichung

$$a\rho = \sin\varphi,$$

so folgt aus der 2. Gleichung 6) $C_u = 0$, demnach muss im Element 11)

$$C^2 = (V_1 + U_2 U^2)\, V^2$$

von u unabhängig, also $U_2 U$ eine Constante sein. Das Bogenelement wird dann das einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche.

Fläche F_1 von einer Tangente des Punktes a der Fläche F berührt wird, ist eine Strophoide; diese Curve schneidet die Focalcurven und hat in a die Hauptkrümmungstangenten zu Doppelpunkttangenten etc.

XI. SITZUNG VOM 8. APRIL 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. III, Heft VIII—X (October bis December 1896), womit nun der Druck dieses Bandes in allen Abtheilungen abgeschlossen ist.

Der Präsident der Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, Herr k. k. Sections-Chef i. R. Dr. J. Ritter Lorenz v. Liburnau, dankt für die dieser Gesellschaft behufs nothwendiger Ausgestaltung des Observatoriums auf dem Sonnblick-Gipfel von der kaiserlichen Akademie aus der Treitl-Widmung bewilligte Subvention.

Herr Dr. Sigmund Fränkel in Wien dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Eiweissspaltungsproducte bewilligte Subvention.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt 30 weitere photographische Mondvergrösserungen mit den hierauf bezüglichen Erläuterungen.

Herr Dr. Rudolf Spitaler, Privatdocent und Adjunct der Sternwarte an der k. k. deutschen Universität in Prag, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Ursache der Breitenschwankungen«.

Dr. Hans Rabl, Assistent am histologischen Institut in Wien, macht eine vorläufige Mittheilung, betitelt: »Die ersten Wachsthumsvorgänge in den Eiern von Säugethieren«.

Ferner überreicht derselbe eine Abhandlung unter dem Titel: »Zur Kenntniss der Richtungsspindeln in degenerirenden Säugethiereiern«.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN



AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. V. UND VI. HEFT.

JAHRGANG 1897. — MAI UND JUNI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 16 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 5. und 6. Heftes Mai und Juni 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 60 kr. = 3 Mk. 20 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

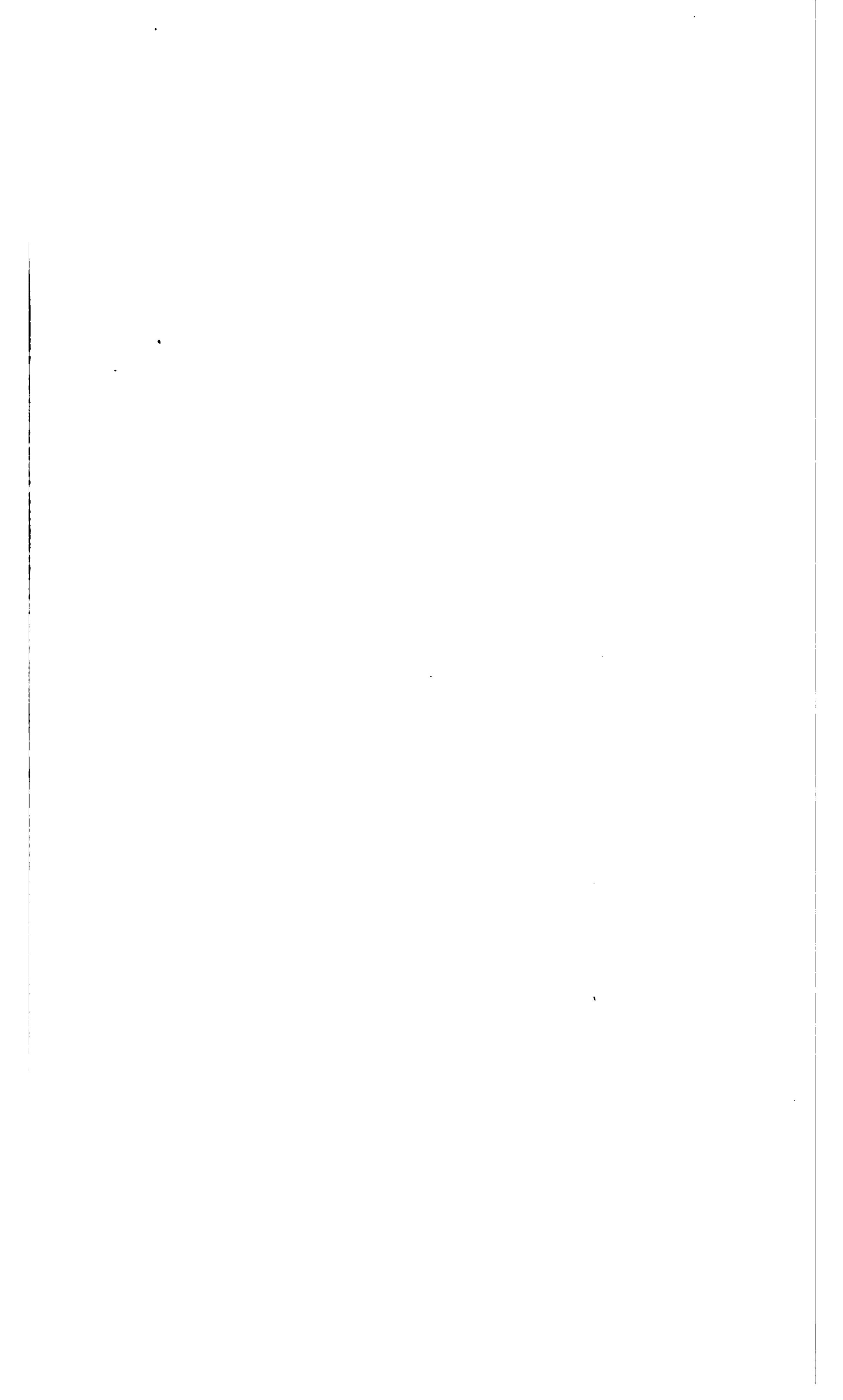
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XII. SITZUNG VOM 6. MAI 1897.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft II—III (Februar—März 1897).

Herr Hofrath F. Ritter v. Hauer führt als Alterspräsident den Vorsitz.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag dankt für die ihm zu einer botanischen Forschungsreise nach Java (Buitenzorg) von der kaiserlichen Akademie bewilligte Subvention.

Von den Mitgliedern der ärztlichen Mission nach Bombay wird ein Bericht ddo. Bombay, 16. April 1897 mitgetheilt.

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übermittelt die für die akademischen Denkschriften bestimmten wissenschaftlichen Arbeiten über die von den k. u k. See-Officieren während der Reise in der nördlichen Hälfte des Rothen Meeres 1895—1896 ausgeführten Beobachtungen. Das Elaborat besteht aus folgenden Abtheilungen:

I. »Beschreibender Theil«, von Herrn k. u. k. Linienschiffs-Capitän und Commandanten des Expeditionsschiffes Paul Edlen v. Pott.

II. »Zeit- und Ortsbestimmungen«, von Herrn k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant Karl Koss.

III. »Relative Schwerebestimmungen«, von Herrn k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant Anton Edlen v. Triulzi.

IV. »Magnetische Beobachtungen«, von Herrn k. u. k. Linienschiffs-Fähnrich Karl Rössler.

Die Bearbeitung der noch folgenden Abtheilung: »Meteorologische Beobachtungen« ist bereits dem Abschlusse nahe.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit von Herrn A. v. Pallisch, Assistent am physikalischen Institute

der k. k. Universität in Graz: »Über Verdunstung aus einem offenen kreisförmigen Becken«.

Das c. M. Herr k. u. k. Oberst Albert v. Obermayer übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Schiessversuche gegen plastischen Thon«.

Das c. M. Herr Prof. V. Uhlig in Prag übersendet den ersten Theil einer für die Denkschriften bestimmten Arbeit über die »Geologie des Tatragebirges«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (14. Fortsetzung).

Herr Prof. Wilhelm Binder an der Landes-Oberrealschule in Wiener-Neustadt übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Undulationen ebener Curven C_6^4 (II. Mittheilung). Curven mit zwei imaginären Doppelpunkten.«

Herr Heinrich Mannaberg in Csalóköz-Abony (Ungarn) übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Meine Erfahrungen über Entstehung und Verhütung der Perlsucht der Rinder«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner Ritter v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. Steiner in Wien, unter dem Titel: »Flechten aus Britisch Ost-Afrika«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

1. »Über die Darstellung der *s*-Tribrombenzoësäure aus *s*-Tribromanilin«, von Dr. R. Wegscheider.
2. »Über die Esterificirung der αβγ-Pyridintricarbonsäure«, von O. Rint.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Carl Storch, Professor und Adjunct am k. u. k. Militär-Thierarznei-Institute in Wien, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Eiweisskörper der Kuhmilch«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Carte géologique internationale de l'Europe. Votée au Congrès géologique international de Bologne 1881, exécutée conformément aux décisions d'une Commission internationale, avec le concours des Gouvernements, sous la direction des M. M. Beyrich et Hauchecorne. Livraison II. Contenant les feuilles *A* V, *A* VI, *B* V, *B* VI et *C* VI. 49 feuilles à l'échelle de 1:1,500.000. Berlin, 1896; gr. Folio.

Obenrauch F., Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich. Brünn, 1897; 8°.

Verbeck R. D. M. et Fennema R., Description géologique de Java et Madoura. Publié par ordre de Son Excellence du Gouverneur Général des Indes Néerlandaises. Tome I et II, 8°. Atlas contenant: Grande carte géologique 1:200.000 en 26 feuilles; Cartes géologique synoptique 1:500.000 en 2 feuilles; Annexes en 22 feuilles. Amsterdam, 1896; gr. Folio.

XIII. SITZUNG VOM 13. MAI 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. b, Heft I—III (Jänner bis März 1897).

Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht setzt die Akademie mit Note vom 7. d. M. in Kenntniss, dass zu Folge mitgetheilter Allerhöchster Entschliessung Seine kaiserliche und königliche Apostolische Majestät huldvollst geruhen werden, bei der am 30. Mai d. J. stattfindenden feierlichen Sitzung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Allerhöchst zu erscheinen.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter der kaiserlichen Akademie übermittelt ein Exemplar der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1897, Capitel IX »Ministerium für Cultus und Unterricht« *A*, *B*, *C*, sowie des Finanzgesetzes für das Jahr 1897 vom 15. Jänner l. J., mit dem Beifügen, dass die ordentlichen und die ausserordentlichen Ausgaben der kaiserl. Akademie der Wissenschaften unverändert nach der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages genehmigt worden sind.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn L. Kann: »Über die innere Reibung des Brom und deren Änderung mit der Temperatur.«

Ferner legt Herr Prof. Exner die VIII. Mittheilung der von ihm in Gemeinschaft mit Herrn E. Haschek ausgeführten »Untersuchungen über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« vor.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(VIII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Te, Hg, Bi, Sb, C)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

In der V. Mittheilung haben wir die Wellenlängen von Ni und Co gegeben, wobei die stärksten Linien ($i = 1$ und 2) auf Hundertel Angström-Einheiten, die schwächeren wie bisher auf Zehntel angeführt sind; da wir bei den folgenden Messungen auch noch die Linien bis inclusive $i = 4$ auf 0·01 AE massen, so geben wir der Conformität halber in den folgenden zwei Tabellen auch noch für die Linien $i = 3$ und 4 des Ni- und Co-Spectrums die Wellenlängen auf 0·01 AE. Wo sich in der Tabelle auch stärkere Linien ($i = 1$ und 2) angeführt finden, da besagt das, dass sich bei der Neumessung derselben die ältere Bestimmung als ungenau herausstellte.

Es ist auffallend, dass im Spectrum des Ni und Co zuweilen starke Linien von gleicher oder nahezu gleicher Intensität identisch auftreten. So z. B. die Linien 3619·52, $i = 1$, im Ni und 3619·55, $i = 2$, im Co. Derartige Coincidenzen kommen bei schwächeren Linien noch häufiger vor, wie man namentlich aus den Messungen Hasselberg's[1] ersehen kann, der auch

---

[1] Hasselberg, Bogenspectrum von Co und Ni Verhandl. der schwed. Akad. der Wiss. in Stockholm, Bd. 28 (1896). — Wir konnten diese Abhandlung bisher leider nicht berücksichtigen, da sie uns erst seit wenigen Tagen zur Verfügung steht.

darauf aufmerksam macht, dass sowohl bei Ni wie Co Linien bei verschiedenen Aufnahmen mit variabler Intensität auftreten. ein Umstand, der an das Vorhandensein eines dritten Körpers in diesen Metallen denken lässt. Ein weiteres Paar gemeinsamer Linien von besonderem Interesse sind: 3274·13, $i = 3$, im Ni, 3274·10, $i = 2$, im Co und 3247·72, $i = 2$, im Ni, 3247·70, $i = 2$, im Co. Diese beiden Linien stimmen auffallend mit den zwei stärksten Linien des Cu-Spectrums, deren Wellenlängen von Rowland mit 3274·09 und 3247·68 angegeben werden. Die naheliegende Annahme, das Ni und Co mit Cu verunreinigt war, wird durch das gänzliche Fehlen der übrigen Cu-Linien höchst unwahrscheinlich, umsomehr, als die beiden fraglichen Linien zu den stärksten im Ni- und Co-Spectrum gehören.

Nickel.

(Als Nachtrag zu Nr. XII).

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
4459·19	4	3465·82	3	3366·33	3
01·72	4	61·80	1	65·92	3
3858·43	2	58·60	1	61·72	4 Co?
31·84	4	53·65	4	22·42	3
3769·58	2	52·98	2	20·38	3
36·97	4	33·71	2	15·80	3
22·64	4	23·80	2	3282·92	4
3688·54	4	14·90	1	74·13	3
74·26	3	13·61	4	71·28	4
70·56	4	07·43	4	50·85	3
64·26	4	05·22	4 Co?	48·55	4
24·92	4	03·55	4	34·83	3
12·91	3	3393·10	2	25·12	3
02·42	4	91·21	3	21·75	4
3597·87	2	81·03	4	21·37	4
76·93	3	80·70	2	14·15	3
48·36	4	74·80	4	02·22	4
3472·70	2	74·35	4	3197·20	4
71·45	4	74·15	4	14·21	3
69·62	3	72·12	3	3099·19	3+

λ	i		λ	i		λ	i	
3097·20	5		2944·07	3		2795·59	2	Mg?
87·12	3		39·41	3	Mn	2593·80	4	(Mn)
45·10	4		13·70	3		80·42	4	(Co)
32·02	4		2863·90	4		76·20	4	Mn
19·28	3		52·26	4	Mg?	05·85	4	
2984·20	4		42·52	4		2473·17	3	
81·76	3		21·35	3		2375·46	3	
49·35	4	Mn	02·76	2	Mg?	34·62	4	

Cobalt.

(Als Nachtrag zu Nr. XIII).

λ	i		λ	i		λ	i	
4092·52	3		3693·61	4		3543·42	3	
86·50	4		93·25	4		29·20	3	
66·50	4		83·19	3		24·70	3	(Ni)
3998·03	3		81·52	4		20·23	4	
95·50	1		76·70	3		15·22	4	Ni
36·13	3		62·30	3		10·55	2	
3895·08	4		52·70	4		09·98	2	
94·22	1		39·60	4		02·75	4	
81·98	3		34·90	4		02·42	2	
61·28	3		33·00	4		01·80	4	
42·12	2		31·60	3	(Fe)	3496·87	4	d.
16·58	4		27·98	3		85·50	4	
16·43	4		11·88	4		83·55	3	
3745·61	3	(Fe)	05·53	3		65·93	1	(Fe)
33·61	4		3585·33	3		62·93	1	
32·58	3		75·52	3		55·38	4	
30·62	4		75·06	3		53·65	1	
08·98	4		65·08	4		46·50	3	
04·21	3		61·00	2		43·02	4	
02·39	3		50·72	3		15·90	4	

λ	i	λ	i	λ	i
3414·90	3	3057·72	4 (Ni)	2613·60	4
3387·80	4	50·93	3 (Ni)	05·76	4
85·35	4	48·95	4	05·58	4
71·08	4	34·80	4	2575·00	4
67·27	4	26·48	4	40·72	3
34·30	4	17·70	3	33·95	3
22·33	4	13·72	4 d.	30·17	4
14·23	4	12·10	4 (Ni)	21·52	4
3271·92	4	03·75	3 (Ni)	2498·91	4
60·97	3	02·55	4 (Ni)	90·47	4
54·35	3	2989·68	3	86·52	3
44·02	4	87·28	3	85·47	4
33·02	4 (Ni)	49·33	3 (Mn)	67·14	4
3177·42	4	43·2	3+	64·30	3
69·91	4	39·40	3 (Mn)	50·05	3
58·90	4	33·10	4 (Mn)	47·80	3
47·20	4	30·62	4+	46·07	3
40·09	4	18·70	4+	43·88	3
37·53	4	2890·52	3	42·72	3
34·30	4 (Fe, Ni)	25·32	3	32·60	4
21·68	4	10·98	4	2397·42	3
21·56	4	2795·68	4 (Ni)	88·95	3+
01·68	4 (Ni)	94·00	4+ br.	83·48	4
3086·90	3	76·30	3	81·73	4
82·72	3	06·83	3+	53·47	4
72·45	3	2684·62	4+	2286·30	4
61·93	3	76·03	4+		

XX. Tellur.

(Tafel I.)

Das Spectrum des Tellur wurde bisher nur von Hartley und Adeney,[1] und zwar im Funken gemessen, leider mit sehr geringer Genauigkeit. Wir benützten Tellur von Schuchardt. Dasselbe erwies sich als vollkommen Fe-frei — was noch bei keiner der von uns bisher untersuchten Substanzen der Fall

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans. 175 (1884).

war — dagegen schwach mit Ca und stark mit Ag und Cu verunreinigt. Es ist auffallend, dass das Tellurspectrum zum Theil aus stark verwaschenen, zum Theil aus besonders scharfen Linien besteht und dass verschiedene Aufnahmen mit Tellur der gleichen Provenienz wechselweise Linien erkennen lassen, die in den anderen fehlen. Doch gilt das nur für schwächere Linien. Zwischen $\lambda = 4689\cdot0$ AE und $2142\cdot6$ haben wir 256 Tellurlinien gemessen.

λ	i	λ	i	λ	i
4689·0	6+ 2 AE	4127·5	6+ br.	3764·2	6+
65·2	6+	23·0	6+ br.	49·5	6+
55·0	6+ 2 AE	01·2	6+	36·5	6+ 2 AE
03·5	6+ 2 AE	4075·2	6+	25·5	6+ br.
4570·0	6+	73·9	5+	17·0	6+
46·2	6+	62·3	5+	12·7	6+
4489·0	6+ 2 AE	55·1	5+	08·5	6+
81·0	6+ 5 AE	49·1	5+	3650·0	6+
35·0	6+ br.	30·0	6+ br.	47·7	6+
15·2	6+	17·0	6+ br.	44·5	6+
4390·0	6+	06·7	5+	26·7	6+ br.
78·0	6+	3984·5	6+	23·0	6+ br.
70·5	6+ br.	81·7	6+	17·6	5+
66·6	6+	76·0	6+	12·0	6+ br.
64·0	6+ 2 AE	73·4	6+	3593·5	6+ br.
61·0	6+	69·3	6+	85·5	6+
55·5	6+ br.	64.5	6+	52·2	5+ br.
42·5	6+	36·5	6+ br.	51·1	5+ br.
25·6	6+	33·8	6 Ca	21·3	5+
02·1	5+ br.	31·0	6+ br.	3496·6	5+ br.
4294·0	6+ br.	22·2	6+	84·0	5+
87·5	6+ br.	18·8	5+	80·5	5+
76·7	6+	3880·5	6+	75·0	6+
75·3	6+	76·5	6+	57·1	5+
60·5	6+ 3 AE	70·0	6+ br.	55·1	5+ br.
31·7	6+	42·0	4+ br.	42·4	5+ br.
20·6	5+	06·0	6+ br.	23·4	6+
4181·7	6+ br.	3797·4	6+	19·9	6+
70·0	6+ 2 AE	88·8	6+	07·0	3+ 4 AE
63·5	5+ br.	76·0	6+	3398·6	5+

λ	i	λ	i	λ	i
3389·0	6+	3090·5	6+ br.	2841·2	5+ br.
88·5	6+	73·6	4+ br.	34·8	6+ br.
85·6	6+ br.	63·4	6+	24·5	6
83·5	6+ br.	61·8	6	18·9	6+ 2 AE
83·07	2 Ag	53·3	5+	12·4	6
74·0	6+ br.	50·0	6+	2793·1	3+ 2 AE
62·7	4+ br.	47·0	1+ 2 AE	77·6	6
51·9	6+ 2 AE	29·6	6	69·82	2
23·0	6+ 3 AE	23·5	5+	48·3	6
15·3	6+ 3 AE	17·9	3+ 3 AE.	45·6	6+
13·3	6+ br.	12·4	5+	39·9	6+ br.
08·0	6+ br.	09·2	6+ br.	24·3	6+
3295·0	6+ br.	06·6	6+ br.	11·7	4+ 2 AE.
91·4	6	06·0	6+	03·5	6+
88·6	6	05·0	6+	2697·6	5+ br.
82·8	5+ br.	2997·3	6+* br.	95·6	5+ br.
80·82	2 Ag	89·0	6+ br.	94·6	6+
79·5	6+ br.	84·0	6+ br.	91·7	6+ br.
74·08	1 Cu	77·5	6+	89·0	6+ br.
61·3	6+ br.	76·2	6+	84·3	6+ br.
57·0	4+ 2 AE	73·7	5+	80·5	6+ br.
51·6	6	67·2	4+ 3 AE.	76·04	4
47·68	1 Cu	61·3	6	61·2	5+ 2 AE
41·0	6	59·7	6+	57·6	6+ br.
32·5	5+ br.	56·7	6+	50·0	5+ br.
21·1	6+	56·0	6+	48·6	5+ br.
20·7	6+	51·5	6+	43·1	6+
19·5	6+ br.	49·9	6+	42·3	6+
14·8	6+	45·0	6+	41·9	6+
13·7	6+	42·3	4+ 2 AE	39·6	6+
11·3	5+	29·9	6+ br.	37·9	6+
04·1	6	20·3	5+ br.	35·7	5+
3184·8	5+ br.	13·7	6	31·4	6+
75·37	3	07·6	6	28·1	6+ br.
60·7	6+ br.	07·1	6+	25·1	6+
32·8	5+	2895·60	1+	05·5	6+ br.
22·9	5	68·85	2+	2599·5	6+ br.
20·0	6+ 4 AE	61·0	5+	91·3	6+ br.
07·6	6+ br.	58·32	1+	85·9	6+ br.
3096·2	6+ br.	46·1	5+ br.	79·3	6+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2576·8	6	2457·7	6	2276·3	6
73·2	6+ br.	37·9	6	65·7	4
50·5	6+ br.	31·9	6	59·1	3 u.
42·2	6	28·05	4	55·7	5+
36·6	6	26·6	6+ br.	47·1	6
30·90	2	24·7	6	42·7	6
18·2	6	20·2	5	30·1	6
08·0	6	13·3	6	28·9	6+
06·6	6+ br.	11·4	6+	27·9	6+
01·0	6	03·6	6+ br.	18·2	6+
00·0	6+ br.	01·7	6+	10·5	6
2492·2	6	00·2	6	08·8	6+ br.
92·0	6	2385·90	2 u.	2190·4	6+
91·8	6	83·38	2 u.	79·5	6+
90·2	6	75·2	6+ br.	43·2	5+
83·4	5	70·0	5	42·6	6+
79·9	6	36·2	6+ br.		
69·8	6+ br.	2294·5	6		

XXI. Quecksilber.

Von älteren Messungen über das Quecksilber liegen vor: Das Bogenspectrum von Kayser und Runge[1] und das Funkenspectrum von Hartley und Adeney,[2] sowie von Eder und Valenta.[3] Bei der Aufnahme befand sich das frisch destillirte Quecksilber in einer kleinen Eisenschale; als Gegenelektrode diente ein Eisenstift, so dass auch die sämmtlichen Eisenlinien im Spectrum erschienen, die aber bei der Messung selbstverständlich weggelassen wurden. Die Linien sind, auch die starken, fast ausnahmslos sehr verwaschen. Es differiren unsere Messungen mit denen von Kayser und Runge in einzelnen Fällen bis zu 0·2 AE, was eben diesem Umstande zuzuschreiben ist. Wir haben bei den oft einseitig verwaschenen Linien stets die

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

[2] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).

[3] Eder und Valenta, Denkschr. der k. Akad. Wien (1894).

dunkelste Partie abgelesen, während Kayser und Runge, wie es scheint, mehr die schärfere, violette Kante eingestellt haben. Dafür spricht, dass unsere Differenzen immer in dem Sinne sich zeigen, dass unsere Wellenlängen die grösseren sind. Verunreinigungen konnten wir im Quecksilber nicht constatiren. Die Zahl der Linien zwischen $\lambda = 4358 \cdot 7$ und $2224 \cdot 9$ beträgt 119.

λ	i	λ	i	λ	i
4358·75	1+ 7 AE	3492·9	6+ br.	2967·27	1+ 3 AE
47·5	5+ 4 AE	73·1	6+ br.	55·2	6+ br.
40·3	6+ 3 AE	52·2	6+	47·48	2
4216·9	6	3395·9	6+	40·7	6+
4122·2	6+	90·45	2+ 2 AE	36·3	6+
15·3	6+ br.	79·4	6+ br.	26·0	6+ 3 AE
4078·13	1	76·3	6+	16·35	3
46·95	1+ 5 AE	66·7	6+ br.	2893·97	1+
24·5	6+	65·0	6+ br.	86·7	6
3984·12	1+ 2 AE	62·8	5+	81·7	6
3860·1	6+ 3 AE	58·7	6+ br.	73·6	6+
20·8	5+	51·3	5 u.	57·3	6+
08·0	6+ 3 AE	42·05	1+ u.?	48·00	1
01·4	6	18·8	6+ br.	20·0	4+ 2 AE
3790·5	4+ 3 AE	17·7	6+ br.	06·5	5
70·9	4+ 2 AE	3278·4	6+ br.	2799·6	6+ br.
55·2	6+ br.	64·5	6+ br.	91·0	5+ br.
51·8	4+ 2 AE	27·4	6+	85·5	6+
3680·6	4+ [1]	08·70	3+	74·6	6+ br.
63·3	1+	3145·0	6+ 3 AE	59·8	6
55·0	1+ } 30 AE	36·2	5+	53·0	5+
50·3	1+	32·2	1+ } 20 AE	24·4	6
04·7	6+	25·7	1+	10·6	6+
3561·4	3+	3095·7	6+ br.	06·1	6
49·6	6	39·0	6+ br.	05·6	6+ br.
43·55	3+ 2 AE	22·	1+ 15 AE[2]	02·7	5

[1] Violette Kante eines gleichmässigen, 20 AE breiten Bandes.

[2] Sehr verwaschen, so dass eine Ablesung auf Zehntel nicht möglich; die von Kayser und Runge bei 3007·0 angegebene Bande erscheint in unserer Aufnahme so gleichmässig verwaschen, dass auch eine angenäherte Bestimmung nicht möglich ist.

λ	i	λ	i	λ	i
2686·6	6+ 2 AE	2483·4	6	2345·4	6
71·3	6+	69·1	6	39·6	6+
58·6	6+ br.	67·9	6+	14·9	6+
53·0	6+ 5 AE	64·2	6	2296·3	6
48·0	6+ 2 AE	60·6	6+	92·2	6+ br.
44·1	6	16·7	6+	84·1	6+
41·5	6+ 3 AE	14·4	5	80·0	6
05·4	6	12·0	6	63·9	5
03·4	5	07·6	5	62·3	5
2584·9	6+	2380·1	6	60·6	5+
75·1	6+	69·3	6	53·0	5+
36·63	3 u.	54·5	6	44·4	6
01·2	6	54·3	6	24·9	5+
2492·3	5	45·8	6		

XXII. Wismuth.

Das Bogenspectrum des Wismuths wurde untersucht von Liveing und Dewar[1] und von Kayser und Runge,[2] das Funkenspectrum von Hartley und Adeney.[3] Das von uns untersuchte Metall war von Schuchardt bezogen. Das Spectrum enthält häufig nach Roth verwaschene Linien, auch zeigt sich die Eigenthümlichkeit, dass bei Umkehrungen die rothe Componente wesentlich stärker erscheint. Zwischen Bogen- und Funkenspectrum scheint ein bedeutender Unterschied zu bestehen, der sich namentlich darin äussert, dass die verwaschenen Linien des letzteren in ersterem fast vollständig fehlen; auch sind die Intersitätsverhältnisse in beiden Spectren vielfach verschieden. An Verunreinigungen enthielt unser Wismuth Spuren von Ca, Cu und Fe. Zwischen $\lambda = 4722 \cdot 8$ und $2187 \cdot 1$ AE wurden 85 Linien gemessen.

---

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1893).

[3] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).

λ	i	λ	i	λ	i
4722·80	1	3709·0	6+	2993·45	2
4615·4	5+ 3 AE	3695·61	1+	89·15	2 u.
4561·40	1	54·5	6+ br.	51·9	6+
4492·9	6+	13·9	4+ 2 AE	51·3	6+
77·1	6+ 3 AE	3596·36	1 r.	38·41	1 u.
4391·5	6+ br.	47·1	6+ br.	2898·08	1 u.
40·9	4+ 2 AE	46·3	6+ br.	63·80	6+ br. u.
08·72	6	10·96	1	55·75	2+
08·35	6	3485·5	5+ 2 AE	47·5	6+ br.
02·3	1+ 4 AE	73·8	5+ 2 AE	17·3	6+
4272·8	5+ 2 AE	55·1	6+ br.	09·8	5+
59·9	1+ 6 AE	51·06	2+	03·68	3
27·8	6+ 2 AE	35·9	6+ 2 AE	2798·5	6+ br.
26·9	6 Ca	30·95	3+ 2 AE	80·65	4+ r.
05·0	6+ 5 AE	05·5	6+ br.	30·60	4
4192·3	6+ 3 AE	3397·42	1 r.	14·0	6+ 4 AE
22·20	2+	95·0	6+ 4 AE	2696·80	4
21·70	2 r.	3299·7	6+ br.	58·2	6+
4079·38	1+	87·0	6+ 10 AE	28·0	4+
3968·6	6 Ca	74·10	5 Cu	2524·6	5+ br.
33·8	6 Ca	56·5	6+ 2 AE	15·7	6+ br.
3888·3	6	47·67	5 Cu	2499·5	6+
88·1	6	3115·4	4+ 2 AE	14·88	3+
64·3	5+ br.	11·4	5+ br.	00·9	5+
49·1	6+	3093·6	6+ br.	2368·3	6+
46·1	6+ br.	76·72	4	2276·6	5+ br.
16·3	5+	67·83	1 u.	30·6	6+ u.
11·4	6+ br.	39·5	6+ br.	28·3	6+
3793·0	2+ 4 AE	35·00	5+ r.	14·2	6+
56·8	5+ 3 AE	24·79	2+ u.	2187·1	6+

XXIII. Antimon.

(Taf. II.)

An älteren Messungen über Antimon liegen vor: Das Bogenspectrum von Liveing und Dewar,[1] und Kayser und

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).

Runge,[1] das Funkenspectrum von Hartley und Adeney.[2] Die starken Linien sind fast alle ausserordentlich breit und nach Roth verwaschen. Das untersuchte Metall war von Schuchardt bezogen und erwies sich nur schwach mit Fe, Ca und Pb verunreinigt. Zwischen $\lambda = 4693 \cdot 2$ und $2289 \cdot 1$ AE wurden 186 Linien gemessen.

λ	i	λ	i	λ	i
4693·2	5+ 2 AE	4058·0	3 (Pb)	3636·8	6
58·0	6+	40·6	6+ br.	30·0	4+ 2 AE
47·8	6+	33·71	2	27·5	6+
23·5	6+ br.	24·8	6+ 2 AE	3597·7	2+ 10 AE
4599·6	6+ br.	3986·1	5+	66·7	2+ 8 AE
91·9	4+ br.	68·6	5 Ca	59·5	2+ 10 AE
44·8	6	64·8	5+	34·0	4+ 2 AE
26·0	6+ 2 AE	60·8	4+ 2 AE	19·7	4+ 2 AE
06·8	6+	33·8	5 Ca	04·8	1+ 7 AE
4499·0	6+	33·7	5+ br.	3498·6	2+ 8 AE
57·8	6+ br.	32·0	6+	74·0	2+ 5 AE
33·0	6+ 3 AE	08·0	6+ br.	59·5	6+ br.
28·6	6+ br.	3883·3	6+	52·0	6+ 2 AE
25·5	6+ br.	50·4	3+ 2 AE	25·9	4+ 2 AE
11·7	6+ br.	41·4	3+ 2 AE	14·7	6+
4378·0	5+ br.	3772·9	5+ br.	03·9	5+ br.
67·0	6+ br.	66·6	6+	00·0	6+
52·4	1+ 5 AE	54·8	6	3396·0	6+ 2 AE
15·0	4+ 3 AE	39·5	2+ 8 AE	93·8	6+ br.
4260·3	2+ 5 AE	22·93	2	90·6	6+ br.
59·5	6+ br.	3692·0	6+ 2 AE	83·2	3
30·0	6+ 2 AE	87·0	5+ 2 AE	77·5	6+ br.
26·9	6 Ca	83·7	5 Pb	74·8	6+ br.
24·5	6+ 3 AE	77·8	6	67·2	6+ br.
19·2	3+	75·6	6+ br.	55·0	6+ br.
01·1	6+ br.	68·0	6+ br.	37·3	4+ 2 AE
4195·3	4+ 2 AE	55·5	6+	12·8	6+
71·0	6+ br.	52·0	3+ 2 AE	04·3	5+ 2 AE
40·7	5+ br.	39·8	6	3288·3	6+ br.
34·0	5+ 4 AE	38·01	2	85·8	6+ br.

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1893).
[2] Hartley und Adenay, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).

λ	i	λ	i	λ	i
3278·7	6+ br.	2863·1	6+ br.	2586·8	6+
76·7	6+ br.	58·1	6	74·1	5
74·1	5	57·2	6+	71·6	6+ br.
67·62	1	53·3	6+	70·6	6+
55·4	6	51·20	2	67·8	6
52·2	6	37·5	6+ br.	65·6	5+ br.
47·7	6	33·1	6	57·6	6+ br.
41·3	2+ 3 AE	26·9	5+ br.	54·8	6
32·65	1	19·0	6+ 2 AE	43·9	5+ br.
3197·4	6+ br.	13·3	6+	28·62	1 u.
93·7	6+	02·0	6 Pb	22·9	6
92·8	6+	2797·9	6+ br.	20·3	6+
75·2	6+	95·7	6	19·3	6+
69·4	6+ br.	90·57	2+	14·5	6+
48·2	6+ br.	86·2	6+	10·6	6
3087·2	6+ br.	75·8	6+ br.	07·8	6+
67·9	6	70·08	2	2488·3	6
40·7	2+ 3 AE	64·8	6+ br.	83·3	6
29·90	1	62·2	6+ br.	81·8	6
24·8	6	41·2	6+	80·5	6
22·1	5+ br.	27·3	6	78·4	5
10·1	5+ br.	19·00	2	74·6	6+ br.
2981·2	2+	2692·3	5	45·7	4
66·4	3+ 2 AE	82·8	3	26·5	6
23·5	6+ br.	70·7	3	22·2	6
13·53	2+	69·6	3+	2395·4	6+
2895·7	6+ br.	56·8	6+ 2 AE	83·8	6+
91·7	4+ br.	52·70	2	61·2	6+
90·0	5+ br.	32·3	6+	60·6	6
87·7	6+ br.	17·5	4+	11·8	5+
86·0	6+ br.	14·8	6	06·6	6+
84·0	6+ br.	12·4	3	2293 5	6
80 0	5+ 2 AE	2598·15	1 u.	89·1	6
78·05	1	90·4	4+ br.		

XXIV. Kohlenstoff.

Die Untersuchung des Kohlenstoffs im Funkenspectrum stösst auf die Schwierigkeit, denselben in fester, leitender Form rein darzustellen, eine Voraussetzung, der bisher überhaupt

noch nicht genügt werden konnte. Wir haben uns darauf beschränkt, vier verschiedene Typen des Kohlenstoffs zu untersuchen, und zwar: *A*. Sibirischer Graphit, *B*. natürliche Gasretortenkohle, *C*. gepresste Gaskohle, *D*. die von H. Moissan als »Carbone sublimé« bezeichnete Varietät. Sämmtliche untersuchte Proben waren stark mit fremden Substanzen verunreinigt, deren chemischer Charakter sich zum grössten Theile nach den bisher bekannten Spectren der Elemente feststellen liess. Für eine geringe Anzahl auftretender Linien war dies allerdings nicht möglich. Man kann von diesen nur sagen, dass sie dem Kohlenstoffe nicht angehören, da sie nicht in allen Proben auftreten. Die dem Kohlenstoff selbst angehörenden Linien sind äusserst wenig zahlreich. An bisherigen Messungen des ultravioletten Kohlenstoffspectrums liegen vor solche von Hartley und Adeney[1] und Liveing und Dewar[2] am Graphit, ferner von Eder und Valenta[3] an der nach der Bunsen'schen Methode gereinigten Holzkohle und von Deslandres[4] an der Moissan'schen Kohle.

In den folgenden Tabellen finden sich bei allen jenen Linien, deren Identität bisher festgestellt werden konnte, die betreffenden chemischen Zeichen in der Rubrik *i* beigesetzt. Die nicht bezeichneten Linien sind unbekannter Provenienz, gehören aber jedenfalls nicht dem Kohlenstoff an. Da die Typen *A*, *B* und *C* sehr stark eisenhältig waren, so haben wir in den betreffenden Tabellen, um diese nicht unnöthig zu verlängern, die Fe-Linien weggelassen. Nur bei *D*, das aber nur äusserst geringe Spuren Fe enthielt, haben wir dieselben angeführt. Die Cyanbanden, die beim Überspringen des Funkens in freier Luft sehr stark auftreten, haben wir, da sie ja nicht einem Elemente angehören, weiter nicht berücksichtigt, und nur gelegentlich die Kanten der Hauptbanden gemessen, deren Zahlen wir am Schlusse der Mittheilung geben.

---

[1] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).
[2] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).
[3] Eder und Valenta, Denkschr. der Wiener Akad., 60 (1893).
[4] Deslandres, C. R. 120 (1895).

A. Sibirischer Graphit.

Derselbe zeigte sich mit Ca, Fe und Si stark, mit Sr, Al, Mn, Cu, Mg in geringerem Masse verunreinigt. 20 Linien konnten nicht identificirt werden.

λ	i	λ	i	λ	i
4568·0	6+	3442·2	6 Mn	2845·8	6+
4411·1	6+ br.	3318·8	6+ br.	37·80	2+ } C
08·9	6+	3274·10	6 } Cu	36·89	1+ } C
4373·0	6+ 4 AE	47·65	6 } Cu	17·1	6+
43·8	6+	42·4	6	16·45	4+ Al
14·0	6+	3181·6	6+ br. } Ca?	02·78	4 } Mg
4267·1	1+ 4 AE, C	79·7	5+ br. } Ca?	2795·60	4 } Mg
26·9	5 Ca	65·6	5+ br. C?	90·9	6+ } Mg
4131·0	6+ br. Si	59·2	5+ br.	85·4	6+
28·0	6+ br. Si?	30·6	6	47·2	5+ 3 AE, C
4077·9	6 Sr	3092·81	3 Al	05·8	6
66·5	6+ br.	86·5	5+ br. Si	2672·6	6 } Si?
3968·6	2 Ca	82·27	4 Al	60·4	6 } Si?
61·62	4 } Al	79·0	6+	41·3	6+ 2 AE, C
44·20	4 } Al	2993·5	6+ 5 AE } C	31·7	6 Si?
36·6	6	68·0	6+ 5 AE } C	2541·95	4 } Si
33·8	2 Ca	39·5	5 } Mn	28·6	5 } Si
31·0	6	00·3	6 } Mn	24·2	5 } Si
21·5	4+ 2 AE, C	2898·9	6 } Mn	19·3	6 } Si
05·70	5 Si	92·5	6 } Mn	16·22	4 } Si
3706·5	6+ br. Ca	89·7	6 } Mn	14·42	4 } Si
3612·6	6+ br. Al	86·9	6 } Mn	12·16	3 } C
01·9	5+ br. Al	81·71	2+ r. Si	09·18	3 } C
3496·0	6 } Mn	79·6	6+ br.	07·00	5 Cu? Si?
83·1	6 } Mn	57·3	5+	2478·67	1 } C
60·4	6 } Mn	52·2	6 Mg	2296·92	2 } C

B. Natürliche Gasretortenkohle.

Dieselbe ist stark verunreinigt mit Ca, Mg, Si, Fe, Ti, in schwächerem Masse mit Ba, Sr, Al, Cu, Ni, Mn und Zr. Doch ist die Anwesenheit des letzteren fraglich. Zu bemerken ist das Auftreten des Ti in allen Arten der Gaskohle, worauf schon

Thalèn vor vielen Jahren aufmerksam gemacht hat (vergl. Hasselberg, Spectrum des Titans. Verh. der schwed. Akad. der Wiss., Bd. 28, 1895). Nur drei Linien waren nicht zu identificiren.

λ	i	λ	i	λ	i
4554·20	4 Ba	3414·95	6 Ni	3078·75	6 } Ti
4435·13	6 } Ca	3388·0	6 } Ti	75·30	6 } Ti
25·58	6 } Ca	83·95	5 } Ti	2939·45	6 Mn
4318·85	6 } Ca	72·95	5 } Ti	36·80	6 Mg
02·68	5 } Ca	61·33	5 } Ti	2881·71	2+ Si
4299·10	6 } Ca	49·65	5 } Ti	52·24	2 Mg
89·52	6 } Ca	49·2	6 } Ti	37·80	2+ C
83·20	6 } Ca	42·05	6[1] } Ti	36·89	1+ C
67·0	4+ 2 AE, C	35·4	6+ } Ti	02·80	1 } Mg
26·88	3 Ca	23·08	6 } Ti	2798·18	3 } Mg
15·68	4 } Sr	18·6	6+ Zr?	95·62	1 } Mg
4077·90	4 } Sr	3274·10	6 Cu	90·88	5 } Mg
34·65	6 } Mn	61·72	6 } Ti	79·95	6 } Mg
33·20	6+ } Mn	53·02	6 } Ti	2631·40	6 Si? Fe?
30·95	6 } Mn	48·7	6 } Ti	2593·82	6 } Mn
3968·63	1 Ca	47·70	6 Cu	76·20	6 } Mn
61·67	4 } Al	42·05	6 } Ti	41·95	4 } Si
44·18	4 } Al	39·15	6 } Ti	28·62	5 } Si
33·81	1 Ca	36·70	6 } Ti	24·20	5 } Si
21·5	5+ 2 AE, C	34·63	6 } Ti	19·28	6+ } Si
3737·07	3 r } Ca	22·95	6 } Ti	16·22	4 } Si
06·20	3 r } Ca	3191·0	6 } Ti	14·42	4 } Si
3685·37	5 Ti	81·35	5 } Ca	12·16	3 C
53·6	6 } Ca	79·45	1 r } Ca	09·18	3 C
44·50	6 } Ca	68·55	6 Ti	07·00	6 Si
3505·02	6 Ti	59·00	1 r Ca	2478·67	1 C
3464·8	6+	30·55	6	2331 0	6+
61·7	6+ } Ni	3092·81	3 Al	2296·94	2 C
58·6	6 } Ni	88·10	5 Ti		
42·15	6 } Ni	82·27	3 Al		

[1] Nach Rowland (Astroph. Journ. V, p. 17, 1897) ist es fraglich, ob diese Linie dem Ti oder Fe zugehört. Nach unseren Aufnahmen muss sie dem Ti angehören, da sie mit grösserer Intensität auftritt, als die in der Nähe stehende fragliche Linie in dem viel stärker exponirten Vergleichspectrum (Eisen).

C. Gepresste Gaskohle.

Diese war von den vier untersuchten Typen die am stärksten verunreinigte, wie zu erwarten war; es fanden sich stark vertreten Ca, Al, Ti, Si, Mg und Fe, schwächer Ba, Sr, Co, Ni, Mn, Cu, Va und Zr. Die Anwesenheit von Be, La, Y ist wahrscheinlich; für 28 Linien waren die zugehörigen Elemente nicht zu bestimmen.

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
4554·2	4 Ba	3737·15	1 } Ca	3361·33	4
4481·3	6+ 2 AE	06·2	1	69·65	5 } Ti
56·0	6	3699·1	6+ Co?	49·2	6
54·9	5	98·4	6+ Ti?	46·0	6+ br.
35·8	6	91·7	6+	44·9	6
35·1	6	85·37	5 Ti	42·05	6
25·6	6 } Ca	62·5	6+ br. Ti	40·55	6
4318·8	6	53·7	6+ } Ca	35·4	6 } Ti
02·7	5	44·6	5+	29·7	6
4299·1	6	35·6	6+ Ti	23·08	6
89·5	6	29·0	6+ La?	21·9	6
83·15	6	12·6	6+ } Al	18·6	6+ br.
67·1	1+ C	01·9	6+	3287·80	6
26·90	2 Ca	00·9	6+ (Fe) Y?	82·5	6 } Ti
4077·90	4 Sr	3511·0	6+ } Ti	79·05	6
27·0	6+ br.	05·1	6+	78·45	6
25·0	6+ br.	3496·0	6+	76·25	6 V.
3968·63	1 Ca	88·9	6 } Mn	74·10	5 Cu
61·67	4 Al	83·1	6+	72·15	6 } Ti
60·3	6+	74·2	6+	71·8	6
58·8	6+ br.	69·0	6+ br. Ca?	62·8	6+
57·5	6+ Ca	65·0	6+ 2 AE	61·72	5 Ti
44·20	4 Al	61·7	6+ Ni	53·02	6 (Ti, Mn)
36·6	6	60·5	6 Mn	52·02	6
33·81	1 Ca	44·5	6+ Ti	48·7	5 Ti?
21·5	5+ 2 AE, C	42·2	5+ Ni	47·7	5 Cu
14·5	6 Ti	14·95	6+ Ni?	42·05	5 (Ti)
13·7	6+	3388·0	6	41·2	6 Zr
05·70	5 Si	83·9	5 } Ti	39·15	5 } Ti
00·7	6 Ti	72·95	5	36·70	5

λ	i	λ	i	λ	i
3234·63	4	3078·8	6	2785·4	6+
32·6	6	75·3	6	83·1	6
29·55	6	73·1	6 } Ti	81·5	6
29·35	6	72·3	6+	79·95	6 } Mg
28·7	6	66·4	6+	78·4	6
24·4	6 } Ti	2993·5	6+ 5 AE, C	76·80	6
22·95	6	68·0	6+ 5 AE, C	47·2	5+ 2 AE, C
18·4	6	39·5	5 Mn	05·8	6
17·1	6	37·0	4+ Mg	2672·6	6 } Si?
02·65	6	33·2	5	60·4	6
00·0	6	29·1	5+	41·3	6+ 2 AE, C
3191·0	6	09·1	6	31·7	6
81·6	6+ br. Ca	00·3	6	2593·82	6 } Mn
79·52	1 Ca	2898·9	6	76·20	6
68·65	6 Ti	92·5	6 } Mn	41·95	4
65·6	6 C?	89·7	6	28·6	5
59·02	1 Ca	86·9	6	24·2	5 } Si
31·2	6 Be?	81·71	2+ Si	19·3	6
30·6	5	79·6	6+ br.	16·22	4
18·5	6+	57·3	5+	14·42	4
17·9	6+	52·24	2 Mg	12·16	3 } C
10·85	6	45·8	6+	09·18	3
06·35	6+ } Ti?	37·80	2+ } C	07·00	5
05·25	6+	36·89	1+	2478·67	1 C
03·95	6 } Co	17·1	6+	03·3	6
02·45	6	16·45	5+ Al	2351·6	6+
3092·81	3 Al	02·78	1	41·8	6
88·1	5 Ti	2798·18	3+ } Mg	40·3	6
86·5	5+ Si	95·60	1	2296·94	2 C
82·27	3 Al	90·9	5		

D. Carbone sublimé.

Diese Varietät der Kohle wird nach H. Moissan erhalten, indem sich an der positiven Elektrode des starken elektrischen Bogens, wie er von Moissan zur Darstellung der Elemente benützt wird, der Kohlenstoff durch eine Art Sublimationsprocess ablagert. Nach den Angaben von Moissan beträgt der Gehalt an Kohlenstoff 99·9% und verbleiben nur 0·017% an

Asche.[1] Es gehört demnach diese Kohle unzweifelhaft zu den reinsten der leitenden Varietäten. Trotzdem ergab die spectralanalytische Untersuchung noch die Anwesenheit verschiedener Verunreinigungen. Von diesen treten in erster Linie auf Ca, Bo und Ti, in schwächerem Grade Ba, Mg, Cu, Mn, Zr und Fe, das letztere sogar, worauf noch besonders aufmerksam gemacht werden soll, nur in eben nachweisbarer Menge. Die Anwesenheit von Be ist fraglich. Ausserdem finden sich noch 20 dem Kohlenstoff nicht angehörige Linien, deren Identität nicht festgestellt werden konnte

λ	i	λ	i	λ	i
4554·23	6 Ba	3282·5	6+	3222·97	6
4267·10	1 10 AE, C	79·04	6 Ti	18·45	6
26·90	5 Ca	78·44	6	17·10	6 Ti
4074·75	6	74·07	5 Cu	02·65	6
73·8	6	72·18	6+	3191·00	6
72·8	6	71·80	6+	81·55	6+
3985·0	6+	61·67	6 Ti	79·43	4+ Ca
82·3	6+	54·30	6	68·64	6 Ti
68·63	1 Ca	53·00	6	68·03	5+
33·81	1 Ca	52·05	6	65·63	4+ C?
21·6	4+ 3 AE, C	48·63	6 Mn	62·68	6
3685·37	6 Ti	47·68	5 Cu	61·90	6 Ti
3451·40	2 Bo	42·10	6 Ti	61·35	6
3388·00	6	41·2	6+ Zr	59·2	5+
83·95	5	39·10	5	59·02	5 Ca
72·95	5	36·70	5	35·5	6+ br.
61·33	4 Ti	34·63	5	31·2	6+ Be?
49·60	6	32·40	6+	06·35	6 Ti
49·1	6	29·60	6+ Ti	05·25	6+
42·0	6+	29·35	6+	04·90	6
3296·5	6+ br. Zr?	28·80	6+	3089·52	6 Ti
87·80	6 Ti	24·40	6+	88·15	6

[1] H. Moissan, Le four éléctrique. Paris, 1897. Wir verdanken der besonderen Güte des Herrn Moissan einige Proben dieser Kohlenvarietät und erlauben uns auch an dieser Stelle ihm hiefür unseren besten Dank auszusprechen.

λ	i	λ	i	λ	i
3078·80	6 } Ti	2904·95	6	2747·2	5+ C
75·35	6 } Ti	03·2	6+ br.	39·60	6 Fe
73·10	6 } Ti	2884·10	6+	2641·3	6+ C
72·25	6 } Ti	79·10	6+	2512·16	3 C
66·48	6 d. } Ti	77·50	6+	09·18	3 C
58·22	6 } Ti	52·24	6 Mg	2497·80	4 } Bo
30·0	6+ Ti?	37·80	2+ C	96·88	4 } Bo
07·5	6+ br.	36·89	1+ C	78·67	1 C
2993·5	6+ 5 AE, C	02·78	6 Mg	2296·96	2 C
80·0	6+ 5 AE	2795·60	6 Mg		
68·0	6+ 3 AE, C	55·84	6 Fe		

Aus den vorstehenden Tabellen ergeben sich als dem Kohlenstoff angehörig nur die unten vorliegenden 13 Linien, wovon die bei $\lambda = 3165 \cdot 63$ AE jedoch fraglich ist. Es stimmen die Ergebnisse dieser Untersuchung mit den älteren Messungen recht gut überein, nur scheinen bei letzteren noch Linien, die Verunreinigungen angehören, dem Kohlenstoff zugeschrieben worden zu sein. So finden sich z. B. bei Hartley und Adeney eine Reihe hervortretender Cyanlinien als Kohlenstofflinien angeführt, bei Eder und Valenta die Linien 2498·0 und 2496·8, welche mit Borlinien übereinstimmen. Eine Reihe schwacher Kohlenstofflinien, welche Eder und Valenta angeben, konnten wir nicht sehen. Die Linie 3919·7, welche Deslandres anführt, dürfte eine Luftlinie sein (nach unseren Messungen $\lambda = 3919 \cdot 27$, $i = 4$); die ebenda mit der Wellenlänge 3168·3 AE als fragliche Kohlenstofflinie angegebene scheint dem Ti anzugehören.

Linien des reinen Kohlenstoffs.

λ	i	λ	i	λ	i
4267·10	1+ 3 AE	2837·80	2+	2509·18	3
3921·5	4+ 2 AE	36·89	1+	2478·67	1
3165·63	5+ br.?	2747·2	5+ 3 AE	2296·96	2
2993·5	6+ 2 AE	2641·3	6+ 2 AE		
68·0	6+ 3 AE	2512·16	3		

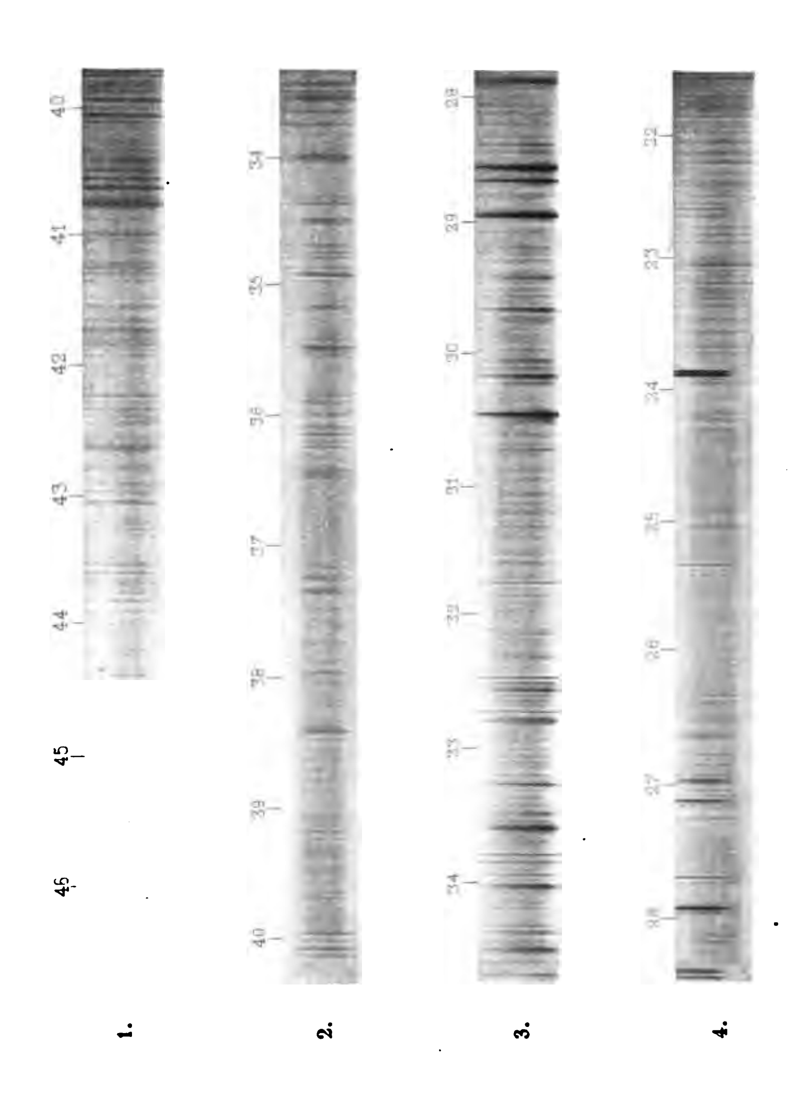
Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass im Funkenspectrum der Kohle, wenn dasselbe in freier Luft erzeugt wird, die Cyanbanden bei weitem nicht in der Ausdehnung auftreten, wie beim Bogenspectrum. Ob die Lage der hervortretenden Kanten in beiden Spectren die gleiche ist, muss dahingestellt bleiben. Eine vorläufige Vergleichung mit den Messungen von Kayser und Runge scheint eher dagegen zu sprechen.

In der folgenden kleinen Tabelle geben wir die Wellenlängen der hauptsächlichsten Kanten der ultravioletten Cyanbanden, indem wir uns zur Bezeichnung der letzteren der Numerirung von Kayser und Runge anschliessen.

Wellenlängen der Hauptkanten der Cyanbanden.

II.	III.	IV.
4216·10	3883·58	3590·52
4197·22	71·60	86·01
81·02	61·85	84·02
58·20		
52·45		

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

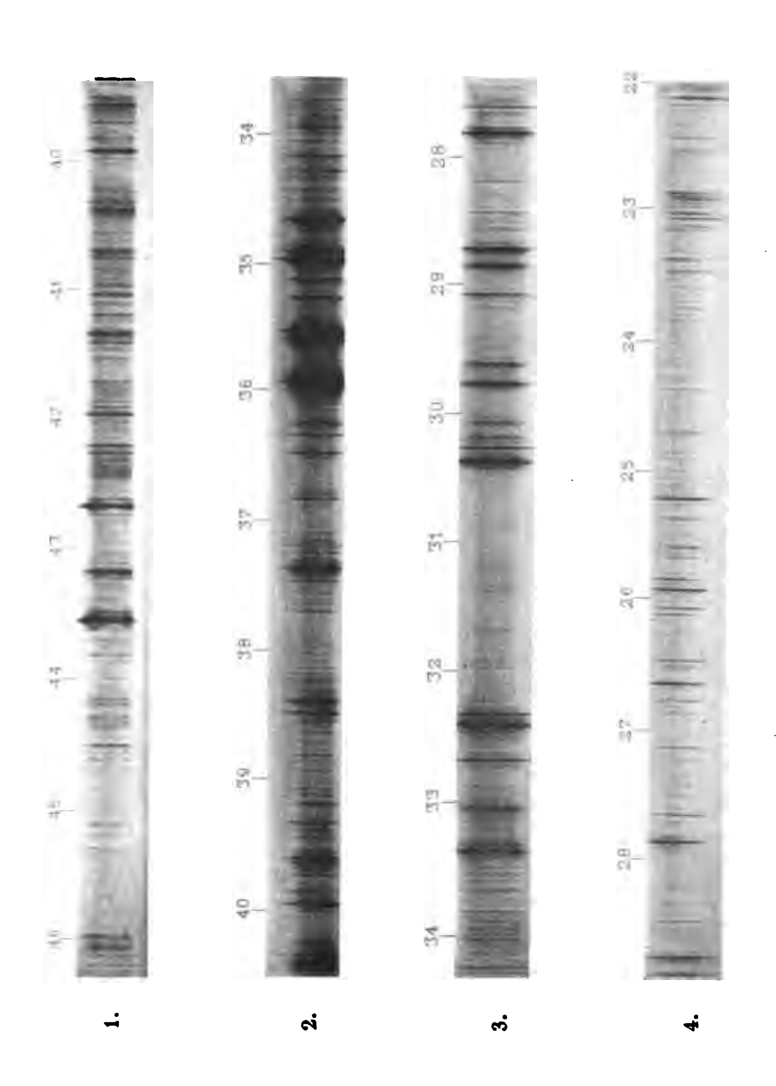


Tellur.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

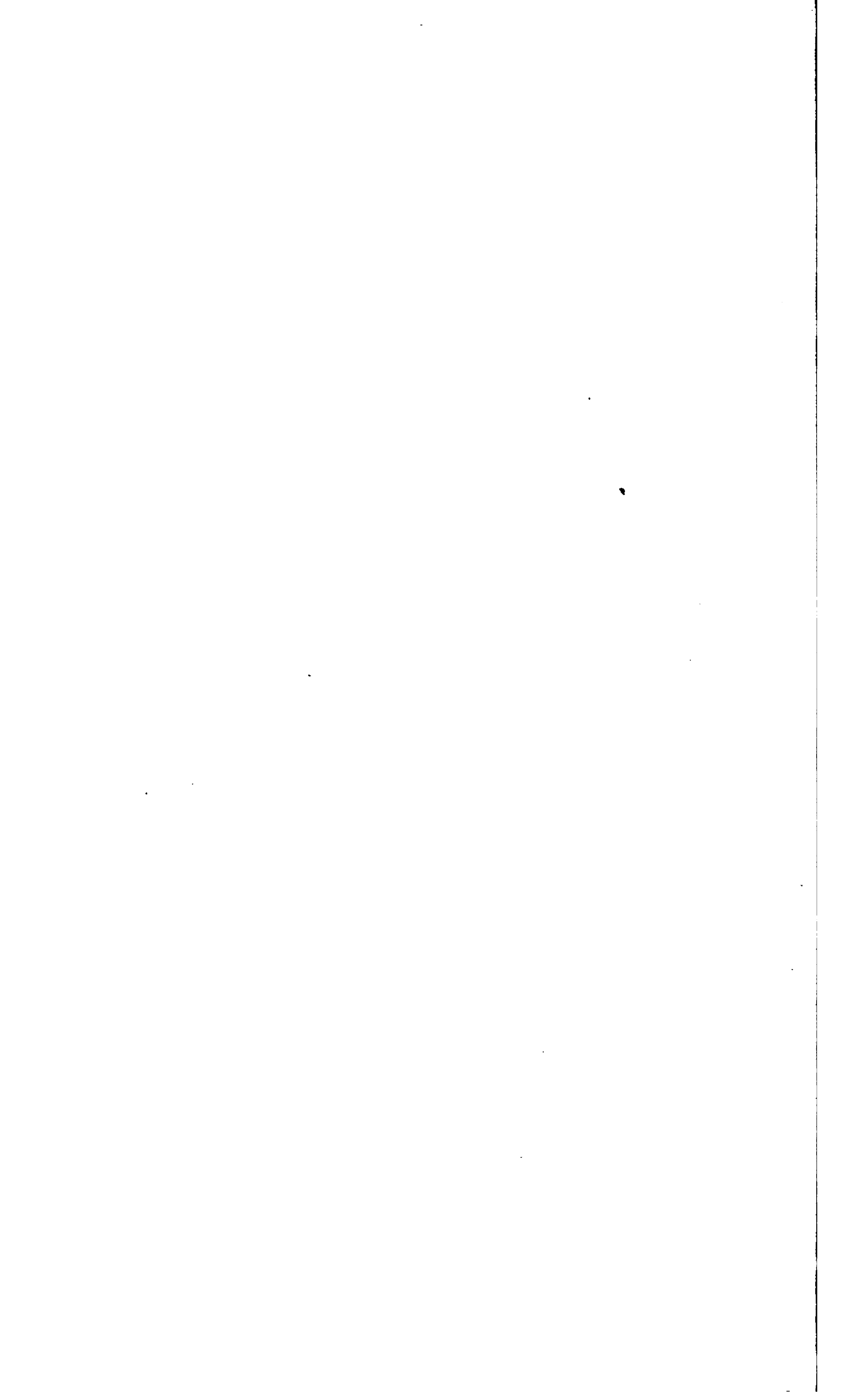


F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Antimon.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



XIV. SITZUNG VOM 20. MAI 1897.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Alfred Des Cloizeaux, Mitgliedes des Institut de France in Paris.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von Max Bamberger und Fritz Böck: »Über Nitroverbindungen des Anthragallols«.

Herr Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Druck«.

Herr V. Grünberg in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift: »Hypothese zur Thermodynamik«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über einen asymptotischen Ausdruck«.
2. »Über einen algebraischen Satz«.

Ferner überreicht Herr Regierungsrath Mertens eine Abhandlung von Dr. Konrad Zindler, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien: »Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner Ritter v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Dr. Árpád v. Degen in Budapest und Ignaz Dörfler in Wien, betitelt: »Beitrag zur Flora Albaniens und Macedoniens. Ergebnisse einer von J. Dörfler im Jahre 1893 unternommenen Reise.»

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: »Bericht über die von Dr. Escherich in der Umgebung von Angora gesammelten Fische und Reptilien«.

Hierauf begrüsst der Vorsitzende die anwesenden Mitglieder der ärztlichen Expedition nach Bombay, Doctoren F. Müller, H. Albrecht, A. Ghon und R. Pöch zu ihrer glücklichen Rückkehr und spricht denselben den Dank aus für die erfolgreiche Thätigkeit bei dieser schwierigen Mission.

Herr Dr. Albrecht dankt im Namen der Mitglieder der Expedition für die von der kaiserlichen Akademie aufgewendeten reichlichen Mittel, wodurch ihnen die Gelegenheit ermöglicht wurde, ihre Kräfte für eine so wichtige Arbeit einzusetzen, und erstattet einen vorläufigen Bericht über diese Expedition.

Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen

von

Konrad Zindler in Wien.

Die einzigen Werke über Integralrechnung, in denen ich den genannten Gegenstand behandelt finde, sind: Moigno-Lindelöf. »Leçons de calc. diff. et intégral«, T. IV (oder »Leçons de calc. des variations«), Art. 11 (1861); Kronecker, Vorl. über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale (1894), 15. Vorl. Die dortigen Entwicklungen legen die Vorstellung zu Grunde, dass die Vielfachheit des Integrals mit der Zahl der Veränderlichen übereinstimme, und sind deshalb nicht unmittelbar auf den Fall anwendbar, wo ein zweifaches Integral über eine durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen gegebene Oberfläche zu erstrecken ist,[1] besonders wenn man die Art, wie das Oberflächenelement $d\sigma$ durch zwei unabhängige Veränderliche ausgedrückt ist, nicht weiter fixirt, was für gewisse physikalische Anwendungen[2] weder nothwendig, noch zweckmässig wäre. Darauf bezieht sich die folgende

---

[1] Auch die Untersuchungen von Bierens de Haan »Note sur la diff. et intégr. d'une intégr. m.« (Verslagen en Mededeelingen d. kongl. Ak. van Wetensch. to Amsterdam (2), V, 1871) und Chiò «Théorème relatif à la diff. d'une intégr. etc.« (Atti della R. Acc. Torino, VI, 1871) bewegen sich in ganz anderer Richtung.

[2] Das Studium der Abhandlung von Stockes »On the theory of diffraction« (Cambridge transact. Vol. IX, 1851) veranlasste mich vor etwa sieben Jahren, die Gleichungen I) und II) aufzustellen. Stokes verwendet in der genannten Abhandlung Resultate, die durch solche Differentiationen erhalten sind, ohne den Weg näher anzugeben.

Formel I), während II) die Differentiation eines Volumintegrals für Polarcoordinaten so gibt, wie es für manche Zwecke der Physik am bequemsten sein dürfte. Endlich gibt III) die Differentiation eines $k-1$-fachen Integrals, das sich über ein Gebiet erstreckt, das in einer k-fachen ebenen Mannigfaltigkeit ausgebreitet ist, und dort, sowie der Integrand, von einem Parameter abhängt.

Es sei t ein Parameter, r, ϑ, ψ drei Raumcoordinaten eines Punktes P, unter denen r den Abstand des Punktes von einem festen Punkte C bedeuten, ϑ und ψ die Richtung von C nach P in beliebiger Weise bestimmen sollen. Es werde über die einfache, geschlossene Oberfläche

$$r = F(\vartheta, \psi, t) = F_t \qquad \ldots 1)$$

das Integral

$$I(t) = \iint_{F_t} f(r, \vartheta, \psi, t)\, d\sigma \qquad \ldots 2)$$

erstreckt, wobei wir C im Innern der Fläche F_t annehmen. Um $\frac{dI}{dt}$ zu bilden, denken wir uns die in derselben Richtung von C ausgehenden Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ der beiden Flächen F_t und $F_{t+\tau}$ einander zugeordnet. Dann tritt im neuen Integral $I(t+\tau)$, wenn wir in üblicher Weise nur diejenigen Glieder anschreiben, die beim späteren Grenzübergang eine Rolle spielen,

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\tau + \frac{\partial f}{\partial r}dr$$

an Stelle des früheren f, wobei

$$dr = \frac{\partial F}{\partial t}\tau.$$

Es hat sich aber auch die Grösse des Oberflächenelementes geändert, und zwar kann dabei die Änderung, die von der Stellungsänderung des Elementes im Raume herrührt, ausser Betracht bleiben, weil die Entwicklung für den Winkel ν, den die Elemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ bilden, als Function von τ im regulären

Falle, der solchen allgemeinen Betrachtungen allein zugänglich ist, mit der ersten Potenz von τ beginnen wird, und daher $\cos\nu$ mit $1-c\tau^2$. Man erhält also den vollständigen Coëfficienten von τ^1 in der Entwicklung von $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$, wenn man $d\sigma'$ als durch Parallelverschiebung hervorgegangen ansieht und bekommt in diesem Falle

$$d\sigma' = \left(1 + \frac{2}{r}\,dr\right)d\sigma = \left(1 + \frac{2}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\,\tau\right)d\sigma$$

und schliesslich

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} + 2\frac{f}{F}\right)\frac{\partial F}{\partial t}\right]d\sigma. \qquad \ldots\text{I)}$$

Ist jetzt $I(t)$ ein dreifaches Integral über einen von derselben Fläche 1) begrenzten Raum und dv das Volumelement, n die Richtung der äusseren Normalen von F_t, so ist

$$\frac{dI}{dt} = \iiint\limits_{F_t}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \iint\limits_{F_t} f\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\cos(n,r)\,d\sigma, \qquad \ldots\text{II)}$$

wie man sogleich einsieht, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial t}.\cos(n,r).\tau$$

das Differential der Dicke der zwischen den Flächen $F_{t+\tau}$ und F_t gelegenen Schicht ist, gemessen in der Richtung der Normalen.

An Stelle der Gleichung I) tritt die folgende I'), wenn man die Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ in der Richtung der Normalen von F einander zuordnet. Wird nämlich ein Hauptkrümmungshalbmesser von F positiv gezählt, wenn er auf der inneren Normalen, negativ, wenn er auf der äusseren liegt, und ist μ die mittlere Krümmung der Fläche F an der Stelle $d\sigma$, so ist bei obiger Zuordnung (s. z. B. Steiner, Ges. Werke, Bd. II, S. 176, »Über Parallelflächen«):

$$d\sigma' = (1+\mu)\,d\sigma.$$

Die Stellungsänderung der Elemente kann aus demselben Grunde wie früher unberücksichtigt bleiben. Also bekommt man:

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dt} + \mu f\right) d\sigma, \qquad \ldots \mathrm{I}')$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial n}$ die Ableitung von f nach der äusseren Normalen der Fläche F an der Stelle $d\sigma$ ist, $\frac{\partial n}{\partial t}$ die Geschwindigkeit, mit der sich das Element $d\sigma$ der beweglichen Fläche F in der Richtung der äusseren Normalen bewegt, wenn man den Parameter t als Zeitmaass betrachtet. Ist ein specielles Coordinatensystem gegeben, so sind μ und das mittlere Glied des Integranden in diesem System auszudrücken. An und für sich enthält jedoch die Gleichung I') nichts mehr, was sich auf irgend ein Coordinatensystem bezieht; sie kann auf eine beliebige Zahl von Veränderlichen verallgemeinert werden:

Wenn durch eine Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots x_k, t) < 0 \qquad \ldots 3)$$

aus der k-fachen Mannigfaltigkeit $x_1, \ldots x_k$ ein Gebiet G abgegrenzt ist, so lassen sich auf die Begrenzung $\mathfrak{G}$ dieses Gebietes die wesentlichen Begriffe der Flächentheorie übertragen. Namentlich gibt es an jeder regulären Stelle P von $\mathfrak{G}$ $k-1$ auf einander und auf der Normalen n von $\mathfrak{G}$ in P senkrecht stehende Richtungen PP_i, deren benachbarte Normalen die Normale n in den Punkten M_i schneiden (s. z. B. Kronecker, »Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln«, Monatsber. der Berliner Akad., 1869, S. 688). Die Abstände PM_i heissen die Hauptkrümmungshalbmesser ρ_i. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ kann also für Grenzbetrachtungen als aus lauter rechtwinkligen Parallelotopen zusammengesetzt betrachtet werden. Ein solches ist durch die k Punkte

$$P, P_i (i = 1, 2, \ldots k-1)$$

bestimmt. Beim Übergang zu einer Nachbarmannigfaltigkeit $F(t+\tau) = 0$ verschiebt sich jeder dieser Punkte auf seiner

Normalen um dn (abgesehen von Grössen, die beim Grenzübergang wegfallen), wobei die Kanten des Parallelotops in den Verhältnissen

$$1:\left(1+\frac{dn}{\rho_i}\right)$$

wachsen. Die Volumina dv und dv' der Parallelotope stehen also (bis auf Grössen erster Ordnung) im Verhältnisse

$$1:(1+\mu . dn),$$

wobei

$$\mu=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_i}$$

die mittlere Krümmung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ ist. Dabei sind die ρ_i positiv zu zählen, wenn sie im Inneren des Gebietes G liegen, dn dagegen dann positiv, wenn es aus dem Gebiet G herausführt. Die Grössen $\frac{1}{\rho_i}$ berechnet man auf folgende Weise: Wenn λ_i eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0\,, & \frac{\partial F}{\partial x_1}\,, & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}\,, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}-\lambda\,, & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_k}\,, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1}\,, & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ist, so ist[1]

$$\frac{1}{\rho_i}=\frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2}}\,.$$

---

[1] A. a. O. S. 693. Kronecker schreibt diese Determinante

$$|F_{gh}-\lambda . \delta_{gh}| \quad (g, h = 0, 1, 2, \ldots k),$$

wobei insoferne ein Versehen in der Bezeichnung unterlaufen ist, als er Anfangs ausdrücklich erklärt, er wolle unter F_{00} die ursprüngliche Function

Ist also I ein $k-1$-faches Integral über $\mathfrak{G}$:

$$I=\int_{\mathfrak{G}} f(x_1 x_2 \ldots x_k, t)\, dv,$$

so erhält man auch hier:

$$\frac{dI}{dt}=\int_{\mathfrak{G}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial n}\cdot\frac{dn}{dt}+\mu f\right) dv, \qquad \ldots \text{III)}$$

wobei $\frac{dn}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Parallelotop längs n bewegt.

Ist endlich I ein k-faches Integral über das Gebiet G mit dem Volumelement dw (der Fall, den Kronecker behandelt hat):

$$I=\int_G f\, dw,$$

so lehrt eine analoge Überlegung, wie bei II), dass ganz allgemein:

$$\frac{dI}{dt}=\int_G \frac{\partial f}{\partial t}\, dw+\int_{\mathfrak{G}} f \frac{dn}{dt}\, dv, \qquad \ldots \text{IV)}$$

wobei das erste Integral rechts ein k-faches, das zweite ein $k-1$-faches ist. Ist insbesondere das Gebiet G in der Form 3) gegeben, so ist

$$\frac{dn}{dt}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\left|\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}\right|}$$

zu setzen, und man erhält Kronecker's Gleichung (a. a. O. S. 260, Gleichung [2*]).

(hier F) verstehen; ferner ist nach seiner Schreibweise $\delta_{00}=1$. In der linken oberen Ecke muss aber statt $F-\lambda$ die Nulle stehen (s. für den Fall $k=3$ Baltzer, Determinanten, §. 13, 6).

Schiessversuche gegen plastischen Thon

von

A. v. Obermayer.

c. M. k. Akad.

(Mit 6 Textfiguren.)

Die Zerstörungen, welche die mit beträchtlichen Anfangsgeschwindigkeiten geschossenen Projectile am menschlichen und thierischen Organismus erzeugen, haben begreiflicherweise die Aufmerksamkeit der Kriegschirurgen auf sich gezogen, zu vielfachen Versuchen und zu mannigfachen Erklärungsweisen Veranlassung gegeben.

Von den verschiedenen Hypothesen, die beobachtete explosive Wirkung der Kleinkalibergeschosse insbesondere in weichen, von festen oder elastischen Hüllen umschlossenen Gebilden zu erklären, hat insbesondere die Melsen'sche Annahme eines grösseren mitgeführten Luftquantums dadurch an Wahrscheinlichkeit gewonnen, dass Melsens die von 16·7 *mm* Kugeln mitgeführte Luft direct aufgefangen hat.[1]

Die Kriegschirurgen welche sich mit der Untersuchung der Wirkung der Gewehrgeschosse der Neuzeit beschäftigten, schlossen sich den Anschauungen Melsens' nicht an und haben sich der von Busch und Kocher aufgestellten, von Reger[2] weiter entwickelten Theorie des hydraulischen Druckes zugewendet. Beim Einschlagen eines Projectiles in einen von

[1] Comptes-rendus, T. LXV, p. 564, 1864; T. LXIX, p. 1114, 1869, dann Comptes-rendus vom 19. September 1881: Note sur les plaies produites par les armes à feu. Extrait du Journal publié par la société royale des Sciences médicales et naturelles de Bruxelles, 1872.

[2] Reger, Die Gewehrschusswunden der Neuzeit. Strassburg 1884. S. 94.

einer Hülle eingeschlossenen flüssigen oder weichen Körper werden hiernach die getroffenen Theile zur Seite gedrängt und wegen der Unzusammendrückbarkeit Pressungen nach den Gesetzen der Hydrostatik erzeugt.

Diese letztere Ansicht wird auch von E. Mach [1] in etwas geänderter Fassung angenommen, nachdem derselbe bei den mit L. Mach und P. Salcher unternommenen Untersuchungen über die durch bewegte Projectile in der Luft erregten Vorgänge die von Melsens vermutheten Luftmengen nicht nachzuweisen vermochte.

Die Versuche, welche von L. Mach mit einem Interferenzialrefractor angestellt wurden und welche die Berechnung der Dichtenvertheilung der Luft um das Geschoss ermöglichen, geben für ein Stahlmantelgeschoss eine nur unbeträchtliche Vermehrung der Luftmenge.

Unter diesen Umständen bleibt es nicht aufgeklärt, wieso Melsens mit den kugelförmigen Geschossen das Volumen der Kugel vielfach übersteigende Luftmengen finden konnte, und was an seiner Versuchsanordnung zu diesem Ergebnisse beitrug. In der That ergeben sich beim Einschiessen in Scheiben von plastischem Thon, wie auch Melsens gezeigt hat, explosionsartige Erscheinungen, welche durch das Eindringen der vom Projectil mitgeführten Luft recht gut erklärt werden könnten, nach den Mach'schen Versuchen aber wohl anderen Ursachen zugeschrieben werden müssen.

Ich habe im Jahre 1868 [2] Versuche über das Eindringen verschieden gestalteter Körper, senkrecht zu den Trennungsflächen übereinandergeschichteten Thonplatten angestellt und im Jahre 1875 [3] ähnliche Versuche, aber mit parallel zu den Trennungsflächen eingetriebenen Körpern vorgenommen, wodurch ein anschauliches Bild des Abfliessens des Thones erhalten wurde. Es zeigte sich dabei auch, dass bei abgestumpften Körpern Theile der zuerst getroffenen Schichten eine längere Strecke mitgeführt werden, ja an den Grundflächen von Cylindern dürften die Spuren der zuerst getroffenen

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 98, Abth. II. a, S. 1321.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 58, Abth. II. a, 1868.

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. 72, 1875.

Schichte erst nach Zurücklegung eines beträchtlichen Weges verschwunden sein.

Ich habe es unternommen, mit plastischem Thon auch jene Vorgänge zu fixiren, die das Eindringen von Geschossen mit grossen Geschwindigkeiten begleiten und zu diesem Zwecke einige Versuche, insbesondere mit 8 *mm*-Stahlmantelgeschossen mit 620 *m*/sec. Geschwindigkeit angestellt.

Es zeigte sich dabei, dass zwischen dem langsamen Eintreiben eines Stempels, der das Material vor sich her und zur Seite schiebend verdrängt, und dem Eindringen eines rasch bewegten Geschosses ein wesentlicher Unterschied besteht und dass in dem letzteren Falle von einem Abfliessen des Mittels am Geschosse, von einer einfachen Verdrängung gar nicht die Rede sein könne, dass vielmehr das getroffene Materiale mit erheblicher Geschwindigkeit in das umgebende Materiale hineingeschleudert wird, so wie bei einer Explosion, und dass die Theilchen des Mittels nach jenen Richtungen hin ausweichen, nach denen sich der geringste Widerstand darbietet. Solche Explosionswirkungen sind an eine Umschliessung durch eine Hülle nicht gebunden.

Die ersten Schiessversuche gegen plastische Mittel habe ich im Jahre 1882 unternommen, wozu mir der damalige Hauptmann Baron Tunkler auf der Schiessstätte des k. und k. Artillerie-Arsenales Gelegenheit bot.

Ein Lehmblock von 60 *cm* Länge, 40 *cm* Höhe und 4 *cm* Dicke wurde mit einem 11 *mm* Werndlgeschosse, mit 438 *m*/sec. Anfangsgeschwindigkeit, auf circa 25 Schritte beschossen. Derselbe wurde gänzlich auseinandergeschleudert und die Lehmstücke flogen bis zum Schiessstand zurück.

Mit dem Armeerevolver und 11 *mm*-Geschossen von 200 *m*/sec. Anfangsgeschwindigkeit erzielte ich zwei brauchbare Versuchsstücke. Die conischen Öffnungen der Schusscanäle hatten 3·5 und 4·0 *cm* Durchmesser und beiderseits aufgeworfene Ränder.

Vor einigen Jahren erhielt ich von dem Herrn Regierungsrath Kick einen mit einem Mannlicher 8 *mm*-Stahlmantelprojectil und einer Anfangsgeschwindigkeit von 590 *m*/sec., aus einer Entfernung von 5 *m* durchschossenen Thonblock für

das physikalische Cabinet zum Geschenke. Dieser Block war während des Durchschiessens in einen Eisenreif gespannt gewesen, er hat einen Durchmesser von 21·6 *cm*, eine Dicke von 5·2 *cm*. Die Eintrittsöffnung des Geschosses hat 5 *cm*, die Austrittsöffnung 5·8 *cm* Durchmesser. Die Ränder der Öffnungen sind beiderseits aufgeworfen. Der plastische Thon hatte 19% Wassergehalt.

Im Jahre 1896 hatte ich zur Millenniums-Ausstellung der Technischen Militär-Akademie in Budapest solche durchschossene Thonblöcke vorbereitet und dadurch erneuert Veranlassung, mich mit dergleichen Versuchen zu beschäftigen.

Den Thon bezog ich in gemahlenem Zustande von den Thonwerken des Herrn Baron C. v. Popp in Hollenburg in Niederösterreich und liess denselben zur Herstellung der Thonblöcke mit Wasser mengen und gut durchkneten.

Für die Versuche im Jahre 1896 liess ich vier quadratische Thonblöcke von 25 *cm* Seitenlänge und 6 *cm* Dicke herstellen. Zwei derselben waren massiv, zwei jedoch aus drei Thonplatten geschlichtet, von denen die mittlere durch Engelroth gefärbt war. Die Flächen, mit denen die Platten aufeinandergelegt wurden, waren vorher mit Wasser stark angefeuchtet worden. Die vier Thonblöcke wurden in quadratische hölzerne Rahmen gelagert und durch dreieckige, aussen über die Ecken geschraubte Brettstücke festgehalten.

Das Durchschiessen der Blöcke geschah auf der Schiessstätte des k. und k. Artillerie-Arsenales durch den Official J. Juch, und ich danke dem Herrn Oberst F. Zejbek die entgegenkommendste Unterstützung.

Die Blöcke wurden auf 25 Schritte mit 8 *mm*-Mannlichergeschossen mit 620 *m*/sec. Anfangsgeschwindigkeit durchschossen, wobei die Holzrahmen frei auf einer Brettunterlage standen.

Die eingetrockneten Thonblöcke wurden aus den hölzernen Rahmen genommen. Die Seitenlänge derselben zog sich von 25 *cm* auf 23·1 *cm* und die Dicke von 6 *cm* auf 5·5 *cm*, d. i. um 6·8% der Länge zusammen.

Das Gewicht der Blöcke vermindert sich beim Austrocknen um circa 21%.

An den getrockneten massiven Blöcken waren die mittleren Werthe der Durchmesser der Öffnung an der Eintrittsstelle, die beim Blocke I etwas oval gerathen war, 7·2 *cm* vertical, 7·8 *cm* horizontal und an den Austrittsöffnungen 9 *cm* vertical und 8 *cm* horizontal gemessen. Im frischen Zustande daher beziehungsweise 7·7, 8·3, 9·7 und 8·6 *cm*. Die Ränder der Ein- und der Ausschussöffnung sind nach beiden Seiten aufgeworfen, so dass die Stellen des Ein- und des Austrittes kaum zu unterscheiden sind. Die mittleren äusseren Durchmesser dieser Ränder betragen im trockenen Zustande 11—11·5 und 13—14 *cm*, im frischen Zustande daher 11·9, 12·4, 14 und 15 *cm*.

Der massive Block II gibt eine Öffnung von 9·5 *cm* an der Eintrittsstelle, 11 *cm* an der Austrittsstelle und 16—17 *cm* an den aufgeworfenen Rändern.

In den aus drei Platten zusammengesetzten Blöcken hatten die Schüsse Öffnungen von ähnlichem Aussehen gemacht, wie in die massiven Blöcke. Die mittlere Schichte weist bei Block III eine Öffnung von 7—7·2 *cm*, bei Block IV eine solche von 6—7 und 7·2 *cm* auf und die Ränder der Thonplatte sind verdickt.

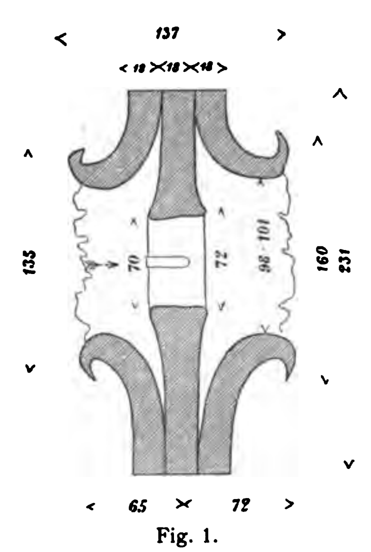


Fig. 1.

Die beiden weissen Thonplatten haben sich in der Öffnung von der mittleren rothen Platte nach beiden Seiten hin losgelöst und sind sehr stark nach auswärts aufgetrieben, so dass die rothe Platte frei in die Öffnung hineinragt (Fig. 1).

Für weitere Versuche am 12. Februar 1897 wurden zwei Blöcke, welche jeder aus zwei 3 *cm* dicken Schichten zusammengesetzt waren, vorbereitet. Nach dem Einlegen der ersten Platte wurde dieselbe an der oberen Seite stark befeuchtet und dann die zweite Platte aufgelegt und durch Auflegen eines Brettabschnittes und Schlagen mit einem Hammer

angepresst. Die nicht sofort zum Versuche gelangenden Blöcke wurden in nassen Tüchern eingeschlagen aufgehoben.

Bei diesen und allen folgenden Versuchen sind die bezüglichen Dimensionen in feuchtem Zustande bestimmt worden.

Bei den aus zwei Platten zusammengesetzten Blöcken wurden die Platten auseinandergerissen, wie in Fig. 2 dargestellt ist. Die kantigen inneren Ränder der nach auswärts getriebenen Schichtentheile sind 8·0 und 7·6 *cm* im Durchmesser. Die aufgeworfenen Ränder an der Stelle des Eintrittes 14, an jener des Austrittes 12·5 *cm* im Durchmesser. Die Öffnungen

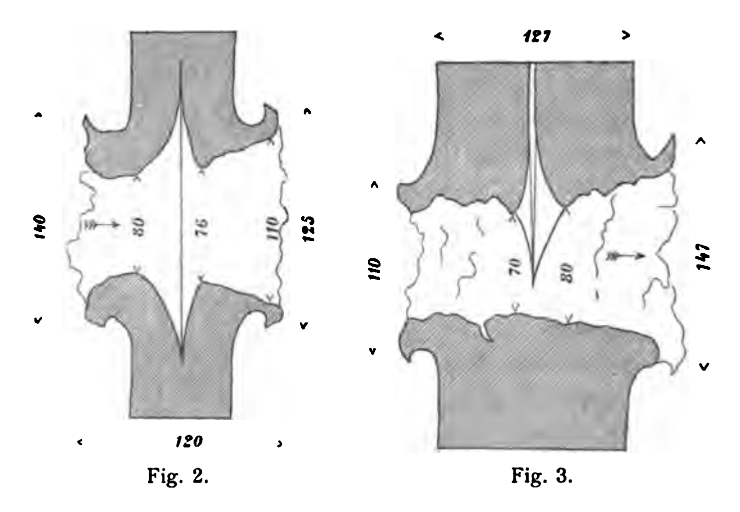


Fig. 2. Fig. 3.

enstehen daher nahezu in fast gleicher Grösse bei den verschiedenen Blöcken. Schliesslich wurden noch zwei massive, in ihre Rahmen gefasste Thonblöcke aneinander geklemmt und durchschossen. Die Öffnung ist ausgesprochen conisch. An der Eintrittsstelle 74 *mm*, an der Austrittsstelle 104 *mm* im Durchmesser, mit Rändern von 110 *mm* und 147 *mm* im Durchmesser (Fig. 3).

Die beiden Blöcke sind im Innern zum Theile auseinandergetrieben und zeigen nichts was aus den vorhergegangenen Versuchen nicht schon zu erwarten gewesen wäre. Die Länge des Schusscanals, welche jetzt doppelt so gross als in den früheren Versuchen ist, hat kaum eine wesentliche Verminderung des Durchmessers herbeigeführt.

Am 26. März wurde nochmals mit Mannlicher 8 *mm*-Geschossen mit 620 *m*/sec. Anfangsgeschwindigkeit gegen Thonblöcke geschossen, welche aus vier gleichgefärbten Platten in dem mehrfach erwähnten Holzrahmen zusammengestellt worden waren.

Bei diesen Versuchen zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen der Eintritts- und der Austrittsöffnung des Geschosses.

Die Fig. 4 stellt einen Schnitt durch einen derartigen Thonblock dar. Die zwei Schichten an der Eintrittsseite sind nach rückwärts getrieben und haben sich von einander getrennt. Die beiden Schichten an der Austrittsseite sind nahezu mit einander hinausgetrieben und haben sich längs der Berührungsfläche nur unmerklich getrennt.

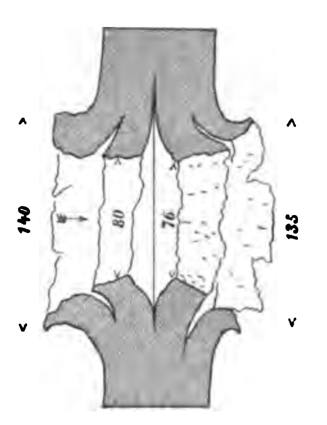


Fig. 4.

Am 26. März wurde auch ein 11 *mm*-Werndlprojectil, 480 *m*/sec. Anfangsgeschwindigkeit, gegen einen massiven Thonblock von 25 *cm* Quadratseite und 6 *cm* Dicke geschossen. Die Öffnung im Block hat einen Durchmesser von 12·5 *cm* und ist im Inneren weitaus unregelmässiger. Dieser Block fiel nach dem Schuss um, und zwar gegen diejenige Seite hin, von welcher geschossen wurde.

Der Durchmesser der Schussöffnung wächst etwas rascher als der Durchmesser des Geschosses. Ein strenger Vergleich ist aber wegen der Verschiedenheit der Anfangsgeschwindigkeit nicht gut möglich.

Die Werndlgeschosse sind aus Weichblei und deformiren sich beim Auftreffen auf ein Hinderniss. Es ist möglich, dass die Abplattung des Geschosses mit der Grösse der Öffnung in Beziehung steht.

Die Schüsse in die geschichteten Thonplatten zeigen, dass die explosionsartige Wirkung der Geschosse vollständig überwiegt und dass ein Vorherschieben des getroffenen Thones gar nicht stattfindet, es wird Alles seitlich weggeschleudert.

Es kann diese explosionsartige Wirkung nur in der lebendigen Kraft fortschreitender Bewegung des Geschosses, welche für ein 8 *mm*-Stahlmantelgeschoss mit 620 *m*/sec. circa 309 *kgm* beträgt, gesucht werden. Trotzdem das Stahlmantelgeschoss in der Secunde 2400 Umdrehungen macht, ist die lebendige Kraft der rotirenden Bewegung bloss 1·7 *kgm*. Diese dürfte also wenig beitragen. Die Rotation der Geschosse hat nur insoferne Einfluss, als einseitige, das Geschoss behindernde Widerstände sofort ein lebhaftes Pendeln, ja selbst die Querstellung der Geschosse herbeiführen.

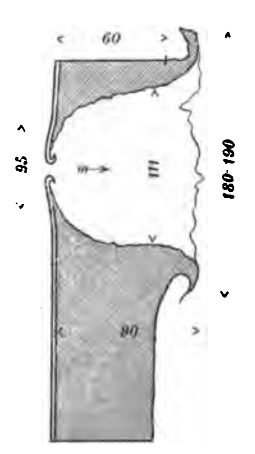


Fig. 5.

Es ist von E. Mach versucht worden, das Durchschiessen eines Kartenblattes mit einem Geschosse optisch zu untersuchen. Es zeigt sich dabei, dass die Kopfwelle vom Kartenblatte reflectirt werde und dass sich vor dem durchgedrungenen Geschoss eine neue Kopfwelle bilde.

Ich habe, um die Vorgänge bei einer derartigen Reflexion zu untersuchen, Thonplatten mit einer Zinkplatte bedeckt und dagegen auf 25 Schritte Entfernung mit einem 8 *mm*-Mannlichergewehr schiessen lassen.

Wurde zuerst die Zinkplatte getroffen und drang das Geschoss hinter derselben in den Thon, so war in dem Bleche eine Öffnung von 10 *mm* entstanden, deren Ränder nach der Seite des Thones etwa 1 *mm* breit umgebogen sind, aber hinter dieser Öffnung hatte sich ein Explosionstrichter von der Form Fig. 5 ausgebildet. Das Zinkblech war nach rückwärts aufgetrieben, eine dünne Thonschichte scharf an die innere Seite des Bleches angepresst und der übrige Thon von der Öffnung hinweggetrieben. Der Block fiel nach dem Schusse nach der Seite des Schützen um, während die Blöcke sonst während des Durchschiessens stehen blieben.

Der Explosionstrichter ist im Thon gegen das Blech hin kugelig ausgerundet und der Thon scharf an das Blech angepresst. Auf der Innenfläche des Trichters sind die kleinen

Stückchen des offenbar zertrümmerten Zinkbleches der Schussöffnung verstreut.

Wurde der Thon zuerst vom Geschosse getroffen und dann das Zinkblech erreicht, so nahm der Trichter die in Fig. 6 veranschaulichte Gestalt an. Die Öffnung des Trichters ist nahe an 85 *mm* gross, die umgebogenen Ränder 120 *mm* im Durchmesser. Die Höhlung des Trichters ist kugelförmig ausgehöhlt, an das unregelmässig zackig ausgerissene Zinkblech sich anschmiegend. Im Inneren des Thonblockes erweitert sich die Höhlung etwas, so dass der Durchmesser dortselbst etwa 9·5 *mm* ist. Die unregelmässige Öffnung des Zinkbleches ist 50 bis 70 *mm* weit. Die Enden der Zacken sind nach rückwärts umgebogen und lassen erkennen, dass das Geschoss durch das Blech ausgetreten ist, bevor dasselbe gerissen war. Der Riss hat die auswärtsgetriebenen Zinkränder vorgefunden und treibt das Zinkblech nach auswärts, und dabei rollen sich die Enden nach rückwärts.

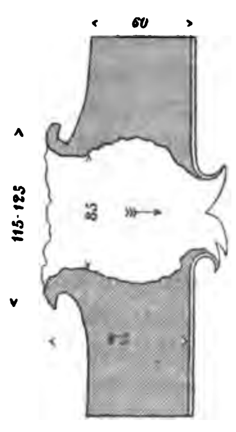


Fig. 6.

Hinter einem dieser an der Rückseite mit Zinkblech gedeckten Blöcke wurde im Abstande von etwa 50 *cm* ein zweiter Thonblock aufgestellt, dessen Flächen unbedeckt waren. Das Geschoss hatte zuerst den bedeckten Thonblock passirt und traf dann den unbedeckten. Die Öffnung in diesem Block war besonders gross, 145—150 *cm* im Durchmesser mit aufgeworfenen Rändern von 230 auf der einen und 220—180 *cm* auf der anderen Seite. Allerdings war dieser Thonblock etwas weicher als die übrigen. Das Geschoss hatte den ersten Block nicht ganz concentrisch getroffen, es scheint nach rechts abgelenkt worden zu sein und hat in dem rückwärtsstehenden Block auch eine seitlich gelegene Öffnung erzeugt, welche der Nähe der Wand wegen nicht kreisförmig, sondern oval ist.

Aus beiden Blöcken waren Thonstücke nach vor- und rückwärts geschleudert worden.

Der Versuch, die Kopfwelle des Geschosses durch ein Hinderniss abstreifen zu lassen und das Geschoss mit einer schwachen Kopfwelle auf ein zweites Hinderniss treffen zu lassen, ist eigentlich nicht so ausgefallen als erwartet wurde. Es gaben diese Versuche über die Rolle, welche die Luft bei den explosionsartigen Wirkungen spielen könnte, keine weiteren Aufschlüsse.

Die von verschiedenen Forschern zum Erweise der Wirkungen des sogenannten hydraulischen Druckes angestellten Schiessversuche wurden gewöhnlich mit cylindrischen Blechbüchsen angestellt, welche mit allerlei Mitteln gefüllt waren.

In einer von einem Atlas mit 40 Tafeln begleiteten Broschüre[1] bespricht Bircher die Theorie vom hydraulischen Drucke, fügt aber einige Modificationen hinzu, welche er aus Schiessversuchen gegen cylindrische Blechbüchsen, die mit Wasser oder Kleister gefüllt waren, ableitet.

Bircher findet, dass cylindrische, mit Wasser gefüllte Blechbüchsen durch den senkrecht zur Cylinderaxe auftreffenden Schuss zerrissen werden. Der sogenannte hydraulische Druck bewirkt dies erst, nachdem das Geschoss aus der Büchse ausgetreten ist.

Bei Büchsen, die mit Kleister gefüllt sind und nach der Cylinderaxe beschossen werden, wird der Deckel abgesprengt, aber auch erst nachdem das Geschoss denselben durchlöchert hat.

Bircher zeigt auch den Einfluss der Länge des Schusscanals, wodurch die Menge des verdrängten Materiales beeinflusst wird, und erweist denselben mittelst cylindrischer Blechbüchsen von 5, 10 und 15 *cm* Höhe, welche mit Kleister gefüllt und durch Deckel geschlossen sind. Wird gegen diese Büchsen nach der Richtung der Axe geschossen, so bringt das Geschoss eine explosive Wirkung hervor, welche bei der ersten Büchse den Deckel nur wenige Schritte gegen den Schützen und das Gefäss wenig nach vorwärts, bei der zweiten den Deckel 3 *m*

[1] Neue Untersuchungen über die Wirkung der Handfeuerwaffen, von Oberst H. Bircher, Corpsarzt des II. Armeecorps. Aarau. Sauerländer, 1896.

gegen den Schützen und das Gefäss 1·5 *m* in der Richtung des Geschosses, bei der dritten den Deckel 3 *m* gegen den Schützen und das Gefäss 6 *m* nach vorne wirft.

Um die Eigenschaften des plastischen Thones auch zu derlei Versuchen zu verwerthen, habe ich Schiessversuche gegen cylindrische Blechbüchsen nach der Richtung der Cylinderaxe unternommen.

Am 26. März wurden zwei cylindrische Büchsen aus Zinkblech von 25 *cm* Durchmesser und 6 *cm* Höhe verwendet, wovon eine mit Wasser, die andere mit plastischem Thon gefüllt war.

Die Deformation beider Büchsen nach dem Durchschiessen war nahezu gleich, bei der mit Wasser gefüllten eher etwas grösser. Die Eintrittsstelle des Geschosses war eine Öffnung von 10 *mm* Durchmesser mit nach einwärts gebogenen Rändern. Die Ausschussstelle war eine in vier grosse Zacken ausgerissene Öffnung, ganz ähnlich wie jene bei den rückseitig mit Blech bedeckten Thonplatten.

Beide Blechbüchsen waren bauchig aufgetrieben, so dass dieselben in der Mitte eine Höhe von 8 *cm* hatten. Während aber aus der mit Wasser gefüllten Büchse das Wasser nach dem Schusse ausrann, zeigte der plastische Thon was eigentlich vorgegangen war.

Es hatte sich daselbst eine Höhlung gebildet, die etwa mit einem unregelmässigen abgeplatteten Rotationsellipsoide verglichen werden kann, dessen kurzer Durchmesser von 8 *cm* in die Axe der Büchse, dessen grösserer äquatorialer Durchmesser, 9 *cm*, dazu senkrecht ist.

Hinter der Einschussöffnung war der Thon an das Blech in dünner Schichte, mit wenig rauher Oberfläche angedrückt und ebenso an die Blechzacken der Austrittsstelle. Diese letzteren sind zum Theil vollständig nach aussen umgeschlagen und zeigen rundlich ausgerissene Ränder, welche darauf hinweisen, dass das Geschoss zuerst das Blech durchdrang und dass dann der Riss erfolgte, wie es nach den Versuchen von Bircher zu erwarten war. Das Innere der Explosionshöhlung hatte dasselbe Ansehen wie bei den in Fig. 5 und 6 dargestellten Versuchsergebnissen.

Das angenähert gerechnete Volumen der Höhlung betrug 340 cm^3. Durch Anfüllen mit Körnern und Überfüllen in eine Mensur wurden nahe an 350 cm^3 gefunden.

Die Volumvergrösserung des Gefässes war aus den Dimensionen nur ganz roh zu ermitteln. Sie betrug bei der mit Wasser gefüllten Büchse über 400 cm^3, bei der mit Thon gefüllten circa 350 cm^3, so dass es den Anschein gewinnt, als ob nur wenig Thon aus der Büchse herausgeschleudert worden wäre.

Das Gewicht der Büchse war zu 6170 *g* gefunden worden, nachdem der Thon schon einige Zeit der Luft ausgesetzt gewesen war, also jedenfalls durch Verdampfung Wasser verloren hatte. Das Gewicht einer anderen gleichen, mit Thon gefüllten Büchse war 6400 *g*. Da nur 1100 *g* Wasser im Thon enthalten sind, so spricht auch der Gewichtsverlust dafür, dass nur geringe Thonmengen herausgeschleudert wurden.

Die Blechbüchse war auf der einen Seite noch mit Löchern von 5 *mm* Durchmesser versehen worden, die nach einer Spirale angeordnet gebohrt, durch aufgelöthete kleine Blechscheiben verstärkt und dann mit Stanniol überklebt waren. Nur bei dem innersten Loche zeigte sich der Thon gegen das Stanniol getrieben, in den weiter ausserhalb gelegenen war keine Veränderung eingetreten. Dieses Auftreiben des zuerst getroffenen Büchsendeckels erfolgt offenbar in so kurzer Zeit, dass der Thon gar nicht zum Eindringen in die Öffnungen kam. Verbleibt ja das Geschoss bloss durch 0·0001 Secunde innerhalb der Büchse.

Für die Versuche am 9. April 1897 wurden vier Zinkblechbüchsen, mit Thon gefüllt, vorbereitet.

I. hatte 25 *cm* Durchmesser, 6 *cm* Dicke und wog gefüllt 6400 *g*.

Nach dem Schusse hatte sich im Inneren eine Höhlung ausgebildet von derselben Form wie im vorigen Versuche. Das Volumen der Höhlung betrug 420 cm^3.

Das Gewicht der gefüllten Büchse war nach dem Schusse fast genau 6400 *g*. Es ist somit nur sehr wenig Thon durch das Geschoss aus der Austrittsöffnung geschleudert worden. In der That war auf der Papierwand hinter der Büchse nur

sehr wenig Thon wahrzunehmen. Das Auftreiben der Büchse erfolgte fast nur durch das seitliche Ausweichen des Thones.

II. Die Zinkbüchse hat einen Durchmesser von 16 *cm*, eine Dicke von 6 *cm* und mit Thon gefüllt ein Gewicht von 2450 *g*. Sie wurde beim Schusse nach rückwärts aufgetrieben, und der Thon trat theilweise aus der Büchse heraus. Die in der Schussrichtung gelegene Wand wurde vom Geschosse durchrissen und dann breit in vielen Zacken ausgerissen.

Nach dem Schusse betrug das Gewicht 2370 *g*. Es wurden circa 80 *g* Thon, d. i. nahezu 40 cm^3 herausgeschleudert.

Das Volumen dieser Büchse betrug 1206 cm^3, es war schon zu klein, um die durch den Schuss verdrängte Thonmenge aufzunehmen, in Folge dessen die grossen Zerstörungen.

III. Die Zinkbüchse hat einen Durchmesser von 11 *cm*, eine Dicke von 6 *cm* und mit Thon gefüllt ein Gewicht von 1170 *g*.

Diese Büchse wurde durch den Schuss gänzlich zerrissen. Die Löthung der Seitenwand ging auf, der Thon wurde herausgeschleudert. Die durchschossene Rückwand war gegen den Schützen herausgeworfen, die Löthung am ganzen Umfange gerissen. Die Vorderwand war ganz aus der Löthung gegangen und in Stücke gerissen, die fortgeschleudert wurden. An den Spitzen der Zacken waren Spuren des hindurchgedrungenen Geschosses wahrzunehmen.

Das Volumen dieser Büchse betrug nur 570 cm^3. Durch den Schuss werden in einer Platte von 6 *cm* Dicke an 350 cm^3 verdrängt, in Folge dessen die vollständige Zerreissung der Büchse.

IV. Eine Büchse von 25 *cm* Durchmesser und 26 *cm* Höhe sollte den Einfluss der Länge des Schusscanales erweisen. Dieselbe war mit 25 *kg* Thon gefüllt.

Das eindringende Geschoss trieb die Rückwand auf und trennte dieselbe theilweise in der Löthung; es zerriess der gelöthete Falz der Cylinderfläche der ganzen Länge nach. Durch die Vorderwand trat das Geschoss aus und die Wand zerriss in mehrere Zacken. Der Schusscanal war an der Eintrittsstelle so gestaltet wie etwa Fig. 5 zeigt, hatte 65 *mm* von der

Einschussöffnung 75 *mm*, hinter der Mitte circa 60 *mm*, vor der Ausschussöffnung 67 *mm* Durchmesser. Die Menge des verdrängten Thones betrug circa 900 cm^3, das Volumen der Büchse 13.273 cm^3. Durch das Auftreiben der Büchse wird für die verdrängte Thonmasse nicht genug Platz geschaffen, die Büchse zerreisst.

Zum Zwecke des verlässlichen Zielens waren auf die Deckel der Büchse mit schwarzer Farbe Kreisflächen aufgemalt worden. In der Farbe zeigt sich eine radiale Streifung, so als ob Theilchen nach auswärts geschleudert worden wären. Auf der vorbeschriebenen Büchse I zeigt sich um die Schussöffnung sogar ein radialer Hauch, wie feine Bestäubung anzusehen.

Diese Erscheinungen deuten zweifellos darauf hin, dass das Eindringen des Geschosses auch an der Aussenfläche des Zinkbleches mit dem Umherschleudern von Theilchen verbunden ist.

In einer Veröffentlichung der Versuche, welche Dr. Q. Majorana Calatabiano und Dr. H. Fontana[1] nach einer bereits von Boys[2] eingeschlagenen Methode zur Photographie bewegter Geschosse in der Weise angestellt haben, dass dieselben in dem Momente beleuchtet werden, wo sie vor einer photographischen Platte vorüberfliegen, ist auch das Durchschiessen einer Glasplatte in sieben verschiedenen Momenten dargestellt. Es wurde dies durch die verschiedene Stellung des vom Geschosse durchrissenen Drahtes, vor oder hinter der Glasplatte erreicht. Es zeigt sich dabei gleich beim Auftreffen des Geschosses auf die Platte die reflectirte Kopfwelle, eine vom Glase ausgehende Welle und ein Zurückschleudern von Theilchen des Glases (Tav. I *a*, Fig. 6 *a*).

Wenn das Geschoss die Glastafel schon halb durchdrungen hat, dann ist das Wegblasen der Glastheilchen sehr ausgesprochen, während der durchgedrungene Geschosskopf von einer

---

[1] Rivista d' artigleria e genio, 1896. Vol. I, p. 27. Fotografia di projetti in moto.

[2] V. Boys, Photography of flying bullets. The Journal and Transactions of the Photographic Society of Great Britain. New Series, Vol. XVI, No. 7. April 1892.

engen geschlossenen Hülle von Glasstaub umgeben erscheint (Tav. 2 *a*, Fig. 7 *a*). Erst wenn das Geschoss ganz durch die Platte hindurchgetreten ist und der nach rückwärts geschleuderte Staub sich ausgebreitet hat, verbreitet sich auch der Glasstaub vor dem Geschosse (Fig. 8 *a*) und wird vom Geschosse mitgeführt, ein deutliches radicales Wegschleudern zeigend (Fig. 9 *a*).

Die Mannlichergeschosse, welche zu dem Versuche vom 9. April mit den vier Blechbüchsen gedient hatten, wurden hinter der durchschossenen Büchse in einem mehrere Meter langen, mit Sägespänen gefüllten Kasten aufgefangen.

Die Geschosse zeigen sich an dem Mantel mehrfach fein geritzt. Eines derselben war an der Spitze ganz unversehrt, die drei anderen jedoch in verschieden starker, aber immerhin nicht beträchtlicher Weise abgeplattet. Der vorderste Theil der Geschossspitzen war rauh geworden.

Am 9. April wurde auch eine Kiste von 75 *cm* Länge und circa 30 *cm* im Quadrat, die mit plastischem, allerdings sehr wasserhaltigem und fast elastischem Thon gefüllt war, durchschossen. Ein Schuss durch einen, die eine Seite der Kiste schliessenden Pappendeckel erzeugte eine Schussöffnung mit trichterartiger Vertiefung nach der Schussrichtung und eine kleine Öffnung im Thon. Das Geschoss blieb im Thon stecken. Die Bretter der Kiste zersprangen.

Nachdem die Kiste nochmals mit dem zu weich gerathenen Thone gefüllt war, wurde ein zweiter Schuss abgegeben. Der Thon war nicht fest genug; er sank in den Schusscanal hinein. Es hatte den Anschein, als ob die Bahn des Geschosses spiralförmig gewunden gewesen wäre. Die eine Kistenwand wurde auch bei diesem Schusse gesprengt.

Am 9. April wurde durch den Official Juch auch versucht, den plastischen Thon mit Streifschüssen zu treffen. Zu diesem Ende wurde ein Thonblock von 6 *cm* Dicke in zwei Hälften geschnitten und dieselben in einem der quadratischen Rahmen von 25 *cm* Seitenlänge mit 2 *cm* Zwischenraum aufgestellt.

Der erste Schuss ging durch den Zwischenraum durch und streifte das eine Thonstück auf einer ganz kurzen Strecke. Dieselbe zeigt einen ganz geringfügigen Wulst innerhalb.

Es wurden hierauf die Blöcke auf 15 *mm* aneinandergeschoben und noch dreimal durchgeschossen. Zwei der Schüsse fassten etwas im Thon, die Schusstrichter fielen aber gar nicht gross aus und zeigen auch wulstartige Erhöhungen. Es scheint, dass die Geschosse pendelten, denn es steht dem Halbtrichter einerseits unveränderter Thon, oberhalb und unterhalb von Einrissen umsäumt, gegenüber.

Der vierte Schuss ging wieder durch die Spalte, beim Austritte einseitig streifend. Auch dieser wenige Millimeter tiefe Riss zeigte eine wulstförmige Erhöhung ungefähr in der Mitte seiner Erstreckung.

Ein frei aufgestellter Thonblock von circa 12 *cm* im Quadrat und 15 *cm* Höhe wurde mehreremale beschossen, ohne dass das Geschoss denselben streifte. Bei einem Schusse endlich dürfte das Geschoss circa 1 *cm* unter der oberen Begrenzung eingedrungen sein. Es zeigte sich eine mächtige explosive Wirkung, der Thonblock war oberhalb ganz breit gedrückt und auseinandergetrieben, mit rauher Oberfläche, allseits mit umgestülpten Rändern.

Es schiene mir sehr wünschenswerth, diese Versuchsreihe durch Schüsse mit rein cylindrischen, also vorne durch eine ebene Fläche begrenzten Geschossen zu ergänzen, um noch zu untersuchen, ob dies einen Unterschied in der Wirkung bedingt, so wie dieser bei Knochenschüssen nachgewiesen ist und als Keilwirkung[1] und einfaches Durchstanzen unterschieden wird.

Die beim Durchschiessen von Platten plastischen Thones auftretenden, nach beiden Seiten aufgeworfenen Ränder, die eigenthümliche Trennung der Schichten in den geschichteten Thonblöcken scheinen sehr für eine Wirkung mitgeführter Luft zu sprechen, und ich war auch dieser Ansicht zugeneigt.

Beim Schiessen in Thonblöcke, welche einseitig von Blechen bedeckt sind, müsste schon die Voraussetzung gemacht werden, dass in dem Falle das Blech zuerst getroffen wird, ein Theil der comprimirten Luft durch die Schussöffnung ein-

---

[1] Bircher, Neue Untersuchungen über die Wirkung der Handfeuerwaffen, S. 22.

dringt und dort noch in hinlänglicher Menge vorhanden ist, um den Explosionstrichter zu bilden.

Dasselbe würde gelten, wenn der Thon in Büchsen eingeschlossen ist. Hier stellt sich aber eine Schwierigkeit ein, wenn der Schusscanal sehr lang wird. Dasselbe Luftquantum müsste in diesem Falle eine weitaus beträchtlichere Materialmenge bei Seite drängen, als in dem Falle kurzer Schusscanäle, was doch nicht recht einleuchtend ist.

Da nun E. Mach, L. Mach und P. Salcher weitaus nicht jene Luftmenge vor den Geschossen optisch nachweisen können, die zur Erzeugung solcher Explosionswirkungen nothwendig ist, so muss eine Erklärungsweise aufgesucht werden, welche die Mitwirkung der Luft ausschliesst.

Die Theorie vom hydraulischen Druck oder von der dadurch bedingten Höhlenpressung, die sich ja hauptsächlich auf die Einschliessung flüssiger oder weicher Körper in Hüllen bezieht, kann bei den unbedeckt aufgestellten Platten plastischen Thones in diesem Sinne nicht angewendet werden. Es handelt sich hiebei nicht um ein statisches, sondern offenbar um ein rein dynamisches Phänomen, wie auch schon E. Mach hervorgehoben hat.[1] Es findet eine mit grosser Geschwindigkeit vor sich gehende Materialverschiebung statt, wie diese ja auch durch die vorerwähnten Versuche von Majorana Calatabiano und Fontana beim Durchschlagen von Geschossen durch Glasplatten nachgewiesen ist und auch von Bircher und anderen bei Beschreibung der Schüsse in das Gehirn und in die Leber beobachtet wurde.

Im Momente des Auftreffens beginnt das Geschoss, die Thontheilchen mit grosser Geschwindigkeit zur Seite zu schleudern, die zunächst getroffenen Theilchen sind bestrebt, in die umgebenden einzudringen und diese weichen nach jenen Richtungen aus, wo sich der geringste Widerstand ergibt, also nach seit- und rückwärts, selbst wenn der Thon durch Blech bedeckt ist. Die durch das Geschoss zunächst verdrängten Theilchen werden an den in Folge der Reaction der Trägheit widerstehenden, umgebenden Theilchen gewissermassen re-

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 98, Abth. II. a., S. 1321.

flectirt, und so kommen die nach rückwärts aufgeworfenen Ränder zu Stande.

In dem Momente, wo das Geschoss die Mitte des Blockes überschreitet, was bei den 6 *cm* dicken Blöcken schon nach $^1/_{20000}$ einer Secunde der Fall ist, beginnt das Material nach vorne auszuweichen, indem es den dagegen getriebenen Theilchen nicht mehr hinreichend Widerstand bieten kann; jetzt werden die nach der anderen Seite aufgeworfenen Ränder gebildet, indem das vordringende Geschoss noch immer Material zur Seite schleudert.

Die kleine Zeit, in welcher die Geschwindigkeit mitgetheilt werden soll, bewirkt, dass der Thon fast nur radial ausweicht.

Das Geschoss hat in der That den Block schon durchdrungen, während der Thon noch in seitlicher Bewegung ist. Die beiden axial durchschossenen cylindrischen Büchsen reissen erst, nachdem das Geschoss bereits hindurchgetreten ist, wie oben erwähnt und mehrfach beobachtet wurde.

Es scheint mir gar nicht ausgeschlossen, dass das Geschoss bei der Bildung dieser Höhlungen in dem blechbedeckten Thone sogar einen luftverdünnten Raum erzeugen könne, in welchen die Luft von aussen eindringt. Es würde dies meiner Erklärung nicht zuwiderlaufen.

Die Grösse der übermittelten Geschwindigkelt und die Grösse des Geschossdurchmessers bestimmen die Grösse der Öffnungen. Welchen Einfluss die Beschaffenheit der Spitze ausübt, konnte ich leider nicht nachweisen.

Die vorstehende Erklärung ist auch noch zutreffend, wenn die Thonblöcke einseitig mit Blech bedeckt oder in cylindrische Blechbüchsen eingeschlossen sind, welche nach der Richtung der Cylinderaxe durchschossen werden. In den Büchsen entstehen dann bei den 6 *cm* dicken Thonblöcken Höhlungen von nahezu der gleichen Grösse, die zumeist durch die seitliche Verdrängung des Thones bedingt sind. Bei den grösseren mit Thon gefüllten Büchsen wurde nur sehr wenig Thon aus der Büchse herausgeschleudert. Der auf dem Geschosswege liegende Thon wird mit solcher Mächtigkeit zur Seite geschleudert und reflectirt, dass die Blechwand der Eintrittsseite eine Auftreibung nach rückwärts erfährt.

Liegt der Thonblock frei auf, so nimmt, wie bei dem vorher angeführten, stärker greifenden Streifschuss, das getroffene Materiale eine solche Geschwindigkeit an, dass sich das obere Ende des Blockes abflacht und allseitig umstülpt. Es entspricht diese Erscheinung dem Zerspritzen von Leber oder Hirn, wenn dieselben freiliegend beschossen werden.

Die Zersprengungserscheinungen eingeschlossener, flüssiger oder weicher Gebilde treten überall dort auf, wo sich die umschliessende Hülle nicht so deformiren kann, um das durch das Geschoss im Schusscanal verschobene Materiale aufzunehmen, werden also dort am heftigsten sein, wo bei kleinem Cubikinhalt lange Schusscanäle auftreten. Die Zerstörung geht aber dann nicht durch einen Druck, sondern durch einen Stoss vor sich, welcher nicht einem einfachen Ausweichen des Mittels, sondern einem Auseinanderschleudern desselben entspringt, so dass ein das Geschossvolumen weitaus übersteigender Raum frei wird.

In der Eingangs citirten Broschüre von Reger ist auch auf die Versuche Kocher's[1] verwiesen, den die Erscheinungen bei Gewehrschüssen zur Annahme einer eigenen Sprengkraft für Glas, Bleiplatten, Sandstein und kieselgefüllte Gefässe, mit denen er experimentirte, veranlassten. Die von mir angeführten Versuche mit plastischem Thone sprechen entschieden zu Gunsten der Anschauungen Kocher's, des Vorhandenseins einer Sprengwirkung.

---

[1] Kocher, Über Schusswunden. Leipzig, 1880.

Über Verdunstung aus einem offenen kreisförmigen Becken

von

J. v. Pallich,

Assistent am physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz

(Mit 3 Textfiguren.)

Einleitung.

J. Stefan veröffentlichte im Jahre 1881[1] eine Abhandlung »Über Verdampfung aus einem kreisförmigen oder elliptisch begrenzten Becken«, in welcher er zu folgenden Resultaten kam:

1. Die in der Zeiteinheit durch irgend ein Element ω einer Niveaufläche diffundirende, von einer freien Flüssigkeitsoberfläche herstammende Dampfmenge ist durch die Gleichung

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dn}$$

gegeben, wo k bedeutet den Diffussionscoëfficienten des Dampfes gegen dasjenige Gas, in welchem die Verdampfung vor sich geht; p den Partialdruck des Dampfes in der Höhe x über der verdampfenden Oberfläche, und P den Gesammtdruck des Gases und Dampfes; $\frac{dp}{dn}$ ist der Differentialquotient des Partialdruckes p nach der Richtung der Normalen zur Niveaufläche.

Die Strömungslinien der Dampftheilchen sind Hyperbeln, deren Brennpunkte in der Peripherie des kreisförmigen Beckens liegen, während die Flächen gleicher Dampfspannung sich als

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 83, S. 943.

halbe Rotationsellipsoide zeigen, deren kleinen Axen, als Rotationsaxen, durch die Mitte des Beckens verlaufen; ein senkrechter Schnitt erzeugt Ellipsen, deren Brennpunkte ebenfalls in die Peripherie des Beckens fallen.

2. Die in der Zeiteinheit aus oben genanntem Becken verdunstende Dampfmenge V ist gegeben durch den Ausdruck

$$V = 4rk \log_n \frac{P-p_0}{P-p_1},$$

unter r den Radius des Beckens verstanden, unter p_0 und p_1 die Dampfspannung in der umgebenden Atmosphäre, beziehungsweise die constante Maximaldampfspannung an der Oberfläche der Flüssigkeit selbst.

3. Aus einer bestimmten Stelle in der Entfernung r vom Mittelpunkte einer solchen Oberfläche verdampft in der Zeiteinheit die Menge

$$v_1 = \frac{V}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}}$$

und aus einer beliebig grossen, kreisrunden Fläche vom Radius R in der Mitte derselben, die Menge

$$V_1 = V\left[1-\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}\right];$$

V hat den sub 2) angegebenen Werth; a bedeutet die lineare Excentricität eines von der Form der Strömungslinien näher bestimmten Rotationshyperboloides.

Das Resultat 1) gewann Stefan, ausgehend von dem Ergebnisse einer früheren Untersuchung[1] über Verdampfung in Röhren, wonach bei einem stationären Verdampfungsprocess innerhalb einer Röhre die in der Zeiteinheit und für die Einheit des Querschnittes entwickelte Dampfmenge

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dx}$$

beträgt.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 68, S. 22.

Um das Problem 2) zu lösen, ging er aus von der Analogie zwischen der Berechnung der Dampfmenge, die aus einer offen liegenden Flüssigkeitsoberfläche in die umgebende Atmosphäre diffundirt und zwischen der Bestimmung der Vertheilung einer im Gleichgewichtszustande sich befindlichen Elektricitätsmenge auf einer unendlich dünnen, leitenden Platte.

Ebenso gewann Stefan das Ergebniss 3) durch die Übereinstimmung einer Berechnung der Verdampfungsmenge v_1 in gegebener Entfernung vom Mittelpunkt einer Flüssigkeitsoberfläche mit der Dichte der Elektricität in derselben Entfernung vom Centrum eines an Form und Grösse gleichen Leiters, falls die Elektricität im Gleichgewichte sich befindet.

Diese theoretischen Resultate sind meines Wissens durch die Erfahrung noch nicht bestätigt worden; nur Winkelmann[1] stellte mit Äther einige vorläufige Versuche an, ohne jedoch mit der Theorie übereinstimmende Werthe erhalten zu können. Aber auch die hier mitgetheilten, unter sich befriedigend übereinstimmenden Versuche ergaben keine Bestätigung der Theorie; dieselbe scheint demnach noch nicht umfassend genug zu sein, um als Ausdruck der Thatsachen gelten zu können.

Erste Methode und deren Resultate.

Um die Vertheilung der Dampfspannung an verschiedenen Stellen im Raume über der verdampfenden Flüssigkeitsoberfläche (Wasser) zu finden, wurde nach einem Vorschlage von Prof. Pfaundler eine gemessene Menge Luft aus den zu untersuchenden Stellen durch Aufsaugen derselben mittelst eines Gasometers in Chlorcalciumröhrchen geleitet, wo der ganze Wassergehalt zurückblieb, so dass durch Wägung vor und nach dem Versuche die an jenen Stellen herrschende absolute Feuchtigkeit und somit die gesuchte Dampfspannung ermittelt werden konnte.

Quer über der Mitte eines mit Wasser gefüllten Messinggefässes — von 50·8 *mm* Halbmesser — wurde ein kurz vor jedem Versuche wieder entfernter, dünner Carton mit ver-

---

[1] Wiedemann's Ann., Bd. 35, S. 401.

schiedenen, nach der Theorie gezeichneten Ellipsen befestigt und knapp vor diesem hiengen, durch eine geeignete Vorrichtung getragen, sieben mit $CaCl_2$ gefüllte, in eine feine Spitze von 1 *mm*² Querschnitt ausgezogene, 16 *cm* lange Saugröhrchen aus Glas, welche durch Gummischläuche mit ebensovielen Gasometern in Verbindung standen. Letztere wurden alle schnell nacheinander geöffnet und das ausfliessende Wasser in je einem graduirten Gefässe aufgefangen.

Bei jedem Versuche wurden nur 3 *l* Luft durch jedes Röhrchen aufgesaugt, doch sehr langsam: nur 1 *l* in der Stunde, um ja nicht die regelmässige Verdampfung durch zu rasche Luftentziehung irgendwie zu stören.

Von den sieben Röhrchen stand das eine gerade in der Mitte, während die anderen zu je drei symmetrisch längs der vorgezeichneten Ellipsen vertheilt waren; die Versuche wurden in verschiedenen Höhen über der Oberfläche, von 1—102 *mm* ausgeführt. Dass dabei die eine Saugröhre auf die Thätigkeit der zunächstliegenden keinen störenden Einfluss ausübte, wurde früher durch einen besonderen Versuch festgestellt. Eine grosse, nach oben offene Kiste von 1·64 *m*³ Inhalt, in deren Mitte das Verdampfungsgefäss sich befand, erwies sich als unzureichend, um vor störenden Luftströmungen zu schützen, wesshalb in derselben noch ein nach allen Seiten abgeschlossener Glaskasten von 600 *l* Inhalt über dem Verdampfungsgefäss aufgestellt wurde, wobei alle nöthigen Zuleitungen durch den Holzboden von unten in den geschlossenen Raum hinaufragten; die darin herrschende Luftfeuchtigkeit wurde durch eine besondere Chlorcalciumröhre ermittelt; zugleich war durch mehrere, concentrirte Schwefelsäure enthaltende Schalen vorgesorgt, dass die sich immer neu entwickelnden Dämpfe selbstthätig wieder verschwanden.

Frühere Versuche mit durch einen elektrischen Strom warm gehaltener Verdampfungsflüssigkeit hatten keine constanten Werthe ergeben; deshalb verdunstete nun das Wasser bei der Zimmertemperatur (10—11° C.).

Ein Glühlämpchen und ein durch die Wand der Holzkiste gestecktes Fernrohr erlaubten die während eines — 3 Stunden dauernden — Versuches im Verdampfungsgefässe vorhandene

Temperatur, sowie den ganzen Vorgang im Inneren der Kiste zu überblicken.

Die erhaltenen Werthe sind durchgehends auf 1 *l* der aufgesaugten Luftmenge reducirt und in folgenden Tabellen zusammengestellt worden; sie zeigen direct die absolute Feuchtigkeit in Milligrammen an der untersuchten Stelle an. Die Reihenfolge von links nach rechts der wiedergegebenen Zahlen entspricht der Reihenfolge und Lage der betreffenden aufsaugenden Röhren.

Es bedeutet:

b = Abstand des mittleren höchsten Punktes der Spannungscurve von der Oberfläche der Flüssigkeit.
Q = Milligramm Wasser in 1 *l* aufgesaugter Luft.
t = Temperatur des verdampfenden Wassers.
f = Absolute Feuchtigkeit.
e = Dampfspannung.
M = Arithmetisches Mittel.
M' = Arithmetisches Mittel vom arithmetischen Mittel.
Δ = Differenz.
c = Excentricität der Ellipsen.
x und y = Rechtwinkelige Coordinaten der Saugspitzen, bezogen auf den Mittelpunkt des Gefässes als Ursprung.
B_0 = Auf 0° reducirter Barometerstand.

In Tabelle I liegt vor eine Reihe von 7 Versuchen in verschiedener Höhe über der Flüssigkeitsoberfläche; die Werthe sind in der Mitte durchgehends kleiner als gegen die Ränder, d. h. die theoretischen Ellipsen, längs derer die Saugspitzen gelagert standen, mussten zu stark gekrümmt sein; um die wahre, den Curven zukommende Excentricität zu ergründen, wurden mehrere Ellipsen mit verschiedener Excentricität, aber gleicher Höhe gezeichnet und nach diesen die Lage der Saugspitzen bestimmt, so zwar, dass sie immer längs derjenigen Strömungslinien verschoben wurden, welche an der Oberfläche des Wassers die Abstände 19·0, 31·5 und 40·0 *mm* vom Mittelpunkte hatten.

Tabelle I.

	III	II	I	0	$\dot{I}$	$\dot{II}$	$\dot{III}$	t	f	B_0		0	I	II	III
Q_1	8·72	8·59	8·44	8·00	8·33	8·55	8·72	9°8	5·1	735·7	x.....	0	20 0	33·3	46·7
											y.....	12·5	12·1	10·0	6·2
Q_2	7·72	7 37	7·15	7·00	7·40	7·45	7·95	10·0	5·1	34·1	x.....	0	21·2	36·3	49·8
											y.....	26·3	23 9	20 1	12·4
Q_3	6·70	6·75	6·37	6·33	6·41	6·52	6·70	10·2	4·8	33·5	x.....	0	23·9	40·2	55·4
											y.....	39·1	36·0	29·8	18·3
Q_4	6·08	6·00	5·95	5·94	5·93	5·99	6·04	9·9	5·1	26·4	x.....	0	29·0	47 5	66·0
											y.....	56 0	52·5	44·2	27·8
Q_5	5·62	5·55	5·52	5·33	5·44	5·60	5·60	9·8	5·1	30·2	x.....	0	33·5	55·1	77·4
											y.....	72·5	66·9	56·0	35·8
Q_6	5·55	5·51	5·47	5·28	5·34	5·48	5·55	10·2	5·1	28 1	x.....	0	38·5	63·0	88·0
											y.....	87·4	80·0	68·0	42·1
Q_7	5·36	5·33	5·06	5·08	5·08	5·07	5·33	10·0	5·0	33 0	x.....	0	43·0	70·5	99 5
											y.....	102·0	94·2	79·5	49·5
M.......	6·89	6·79	6·63	6·47	6·62	6·72	6·90								
M'......	6·89	6·75	6·62	6·47	6·62	6·75	6·89								
Δ	0·425	0·285	0·155	0·00	0·155	0·285	0·425								

Tabelle II.

c in mm	III	II	I	0	$\dot{I}$	$\dot{II}$	$\dot{III}$	0	Δ I	Δ II	III		0	I	II	III
51	7·72	7·37	7·15	7·00	7·40	7·45	7·95	0	0·27	0·41	0 83	x.....	0	21·2	36·3	49·8
												y.....	26·5	23·9	20·1	12·4
55	7·22	7·11	7·06	7·00	7·17	7·55	7·66	0	0·11	0·33	0·44	x.....	0	21·5	36·5	50·2
												y.....	26·5	24 0	20·2	12·4
64	7·77	7·72	7·44	7·43	7·50	7·77	7·72	0	0 04	0·31	0·31	x.....	0	21·7	36·7	51·4
												y.....	26 5	24·3	20·8	13·6
80	6·86	6·73	6·77	6·66	6·69	6·81	6·96	0	0·07	0·11	0·25	x.....	0	22·0	37·0	53·0
												y.....	26·5	24·7	21·9	16·6
90	6·73	6·60	6·73	6·60	6 60	6·63	6·70	0	0·06	0·01	0·11	x.....	0	22·5	38·0	55·0
												y.....	26·5	25·0	23·1	19 8
100	6·99	6·99	7·33	7·08	7·25	7·25	6·33	0	0·06	0·00	−0·22	x.....	0	22·5	38·0	55·0
												y.....	26·5	25·3	24·2	21·3

Mittleres $t = 10·3°$ C.
» $f = 5·1$.

Tabelle II zeigt, wie bei zunehmender Excentricität c die oben besprochene Differenz zwischen den einzelnen Werthen immer kleiner wird und dass die gesuchte Curve gleicher Dampfspannung bei einer Excentricität zwischen 90 und 100 *mm* liegen muss; graphisch sind die dabei erhaltenen Werthe in Fig. 1 eingetragen.

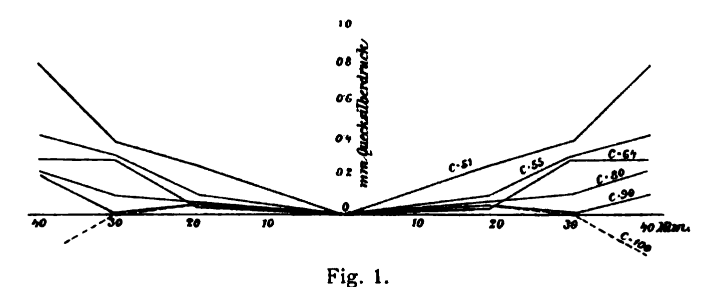


Fig. 1.

Nun folgt in Tabelle III eine Reihe von Versuchen mit der Excentricität 95 *mm*, und da zeigt sich endgiltig, dass letztere Excentricität die richtige sein dürfte, während die theoretische von nur 51 *mm* viel zu klein ausfällt. In Fig. 2 sind

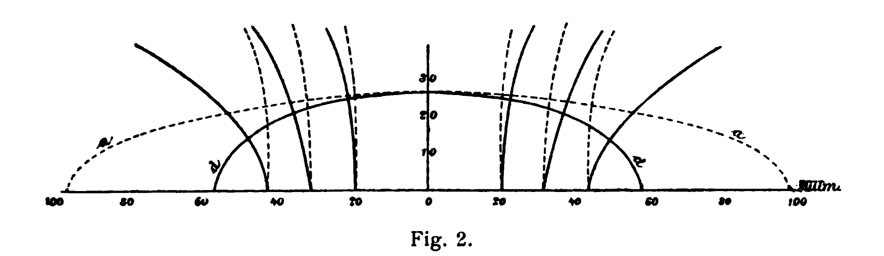


Fig. 2.

diese zwei Ellipsen aufgezeichnet, und zwar für die speciell oben untersuchte Höhe $b = 26 \cdot 5$ *mm*; die langgestreckte Curve a ist die gefundene, die stärker gekrümmte d die theoretisch gefolgerte Form der Ellipse; daraus folgt aber noch, dass auch die wirklichen (gestrichelten) Strömungslinien eine weniger gekrümmte Bahn haben, als die theoretisch berechneten (ganz ausgezogene Linien), so dass die Brennpunkte beider Arten von Curven weit ausserhalb des Randes des Beckens zu suchen sind.

Tabelle III.

	III	II	I	0	$\dot{I}$	$\dot{II}$	$\dot{III}$	$t°$	f	B_0		0	I	II	III
$c = 95$	8·12	8·49	8·22	8·37	8·56	8·37	8·59	9·6	5·1	736·2	x....	0	20	34	50
											y....	12·5	12·2	11·6	10·2
M....... ..	8·35	8·43	8·39	8·37											
Δ	0·02	0·06	0·02	0·00											
$c = 95$	6·58	6·62	6·56	6·50	6·56	6·47	6·50	11·1	5·0	32 6	x....	0	34	42	67
											y....	39·5	37·0	35·5	29·4
M.........	6·54	6·54	6·56	6·50											
Δ	0·04	0·04	0·06	0·00											
$c = 95$	5·90	6·02	5·83	5·80	5·87	5·83	5·78	10·0	5·3	26·5	x....	0	34	60	95
											y....	72·5	69·5	62·8	44·0
M.........	5·84	5·92	5·85	5·80											
Δ	0·04	0·12	0·05	0·00											
$c = 95$	5·13	5·31	5·37	5·31	5·11	5·24	5·25	10·2	5·1	26·6	x....	0	45	75	120
											y. ..	102·0	96·5	86·0	59·5
M.........	5·19	5·27	5 24	5·31											
Δ	−0·12	−0·04	−0·07	0·00											

Dasselbe Verhältniss zwischen diesen beiden Excentricitäten zeigte sich auch bei Versuchen über einem Gefässe von nur halb so grossem Durchmesser.

Die in der Secunde durch die Einheit der Niveauflächen diffundirten Dampfmengen wurden auf folgende Weise ermittelt. Durch Wägung wurde bestimmt, wie viel Milligramm Wasser aus dem ganzen Gefässe in der Zeiteinheit verdunstete; diese Dampfmenge vertheilte sich gleichmässig über die ganze Ausdehnung jeder Niveaufläche, so dass durch Berechnung der letzteren leicht die durch jede Flächeneinheit diffundirende Dampfmenge zu bestimmen war.

Aus dem Verdampfungsgefässe von 51 *mm* Radius entwickelte sich pro Sec. 0·05444 *mg* Dampf bei der Temperatur 10°2 C.

Die daraus berechneten Werthe für drei verschiedene Höhen b (kleine Ellipsenaxe) mit der theoretischen, als auch mit der wirklichen Excentricität c, enthält folgende Tabelle.

Höhe in Millimetern über der Mitte des Gefässes	Oberfläche des jeweiligen Ellipsoides in Quadratcentimetern für		Dampfmenge in Kubikcentimeter, diffundirt durch jedes Quadratcentimeter der Oberfläche in der Secunde für	
	$c = 51$ *mm*	$c = 95$ *mm*	$c = 51$ *mm*	$c = 95$ *mm*
$b_1 = 12·5$	98·3	302·0	0·000742	0·000242
$b_2 = 32·0$	165·5	381·7	0·000441	0·000191
$b_3 = 72·5$	432·7	670·2	0·000168	0 000108

Verdunstungsmenge V aus der ganzen Oberfläche in Kubikcentimeter pro Sec.:

0·07300

bei $t = 10°2$ C., $B_0 = 732$ *mm*.

Die nach dem von Stefan aufgestellten Ausdruck

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dn}$$

berechneten Mengen lauten:

Höhe in Millimetern über der Mitte des Gefässes	Berechnete Dampfmenge in Kubikcentimetern, diffundirt durch jedes Quadratcentimeter der Oberfläche in der Secunde
$b_1 = 12 \cdot 5$	0·000281
$b_2 = 32 \cdot 0$	0·000198
$b_3 = 72 \cdot 5$	0·000083

t und B_0 wie oben, $k = 0 \cdot 241$ (Guglielmo).[1]

Bei der Berechnung dieser letzteren Werthe ist die Änderung des Dampfdruckes für die Zunahme je 1 *cm* Höhe aus der

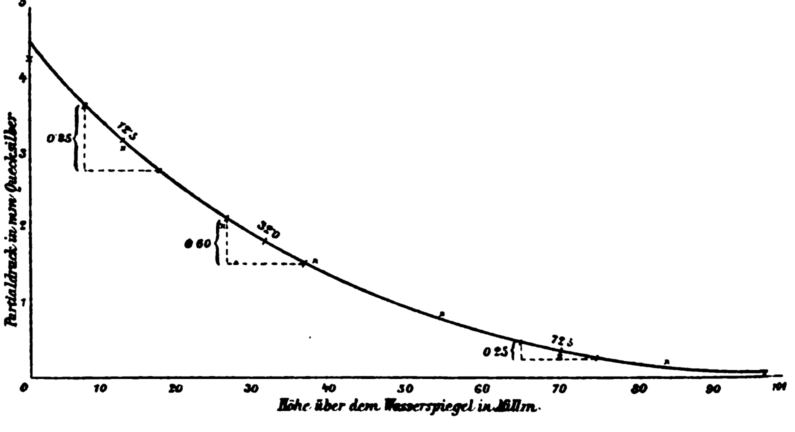


Fig. 3.

Curve Fig. 3 entnommen worden. Diese selbst ergab sich auf folgende Weise. Es wurde das arithmetische Mittel aus den drei mittleren Zahlen einer jeden Horizontalreihe in Tabelle I S.389, gebildet und daraus für jede Höhe die betreffende Dampfspannung für die mittlere Temperatur $= 10^\circ 2$ C. und mittleren Barometerstand $= 732$ *mm* berechnet; für die Oberfläche wurde der Maximalwerth der Spannung bei $10^\circ 2 = 9 \cdot 24$ *mm* gesetzt

[1] Das k wurde immer proportional dem Quadrate der absoluten Temperatur gesetzt.

Die so erhaltenen Werthe sind unter e in der folgenden Tabelle angeführt; die einzelnen Partialdrücke, mit denen die Curve Fig. 3 construirt worden ist, sind als Kreuzchen neben der als richtig anzunehmenden Curve eingetragen und ergaben sich als Differenz zwischen den Zahlen in e und jenen für die im Arbeitslocale während jedes Versuches schon vorhandenen Dampfspannungen in Rubrik e'.

b Senkrechter Abstand der Saugspitzen über der Mitte des Gefässes in Millimetern	e Daselbst herrschende Dampfspannung in Millimeter bei $t = 10{^\circ}2$ C. $B_0 = 732\,mm$	e' Dampfspannung im Arbeitslocale in Millimetern	p Partialdruck berechnet in Millimetern	p_0 Partialdruck nach der Curve in Millimetern
0·0	9·24	—	4·36	4·45
12·5	8·12	5·00	3·12	3·25
26·3	7·04	5·00	2·04	2·20
39·1	6·24	4·68	1·56	1·45
56·0	5·76	4·90	0·86	0·85
72·5	5·28	5·00	0·28	0·37
87·4	5·21	5·00	0·21	0·14
102·0	4·97	4·95	0·02	0 05

Den drei auf S. 394 berechneten Fällen entsprachen die Partialdrücke

$$p_{12\cdot5} = 3\cdot25\,mm, \qquad p_{32\cdot0} = 1\cdot85\,mm, \qquad p_{72\cdot5} = 0\cdot37\,mm$$

und die Änderung derselben für die Erhebung 1 *cm* in senkrechter Richtung über der Flüssigkeit, die Werthe

$$\frac{\Delta p_{12\cdot5}}{\Delta x} = 0\cdot85\,mm, \qquad \frac{\Delta p_{32\cdot0}}{\Delta x} = 0\cdot60\,mm$$

und

$$\frac{\Delta p_{72\cdot5}}{\Delta x} = 0\cdot25\,mm.$$

Aus den Werthen der Tabellen S. 393 und 394 ist deutlich zu ersehen, dass nur dann eine befriedigende Übereinstimmung

zwischen Theorie und Experiment zu erzielen ist, wenn den Niveaucurven gleicher Spannung die Excentricität 95 *mm* zu Grunde gelegt wird; dies stimmt aber mit den nach der Saugmethode erhaltenen Werthen gut überein und ebenso auch nach den später zu beschreibenden Versuchen mit Ringgefässen, so dass kein Zweifel mehr bestehen kann, dass die theoretische Excentricität ungefähr nur die Hälfte von der wirklich vorhandenen beträgt.

Zweite Methode und deren Resultate.

Die folgende[1] Methode, die aus verschieden weit von der Mitte liegenden Stellen und aus den mittleren Theilen einer Flüssigkeitsoberfläche in der Zeiteinheit verdunstenden Wassermengen zu untersuchen, bestand darin, dass mehrere concentrische Ringgefässe von gleicher Höhe, genau in einander passend, zusammengefügt wurden, so zwar, dass nach der Füllung die Summe aller wie ein einziges rundes Gefäss von continuirlicher Oberfläche aussah. An je drei kleinen Ösen wurde jedes dieser Gefässe durch drei dünne Drähte gehoben und an einem oberhalb desselben vorhandenen Wagearm befestigt, sodann vor und nach dem Versuche einzeln genau abgewogen. Die Differenz, dividirt durch die Zeit und Oberfläche, gab die verdunstete Flüssigkeitsmenge sowohl von einem Quadratcentimeter von bekannter mittlerer Entfernung von dem Mittelpunkte, als auch von einer mittleren Oberfläche gegebener Dimension an. Im Ganzen waren vier solche Ringgefässe ineinandergefügt, die alle zusammen eine Fläche von $79 \cdot 10\, cm^2$ bedeckten, also ebensoviel wie das Verdampfungsgefäss nach der früher besprochenen Saugmethode.

Die Resultate sind als Mittel von je zwei Versuchen in folgenden Tabellen mitgetheilt.

Die Ziffern II bis V bedeuten Ringgefässe, geordnet nach zunehmender Entfernung von dem mittleren mit I bezeichneten Gefässe, dann:

F = Flächeninhalt eines solchen Gefässes in Quadratcentimetern.

---

[1] Ebenfalls von Prof. Pfaundler vorgeschlagen.

r_a = Äusserer Radius in Centimetern.
G = Gewicht des Gefässes sammt Wasser in Gramm.
A = Verdunstete Menge aus jedem Ringgefässe pro Stunde in Milligramm.
v = Verhältniss der verdampften Flüssigkeit pro Quadratcentimeter in den verschiedenen Ringgefässen.
t = Lufttemperatur in Grad Celsius.
e = Spannung der Luftfeuchtigkeit im Locale.
D = Dauer eines Versuches in Stunden.
M = Verdunstete Menge aus einem Quadratcentimeter des betreffenden Ringgefässes in Milligramm pro Stunde.

Tabelle I.

	I	II	III	IV	I	II	III	IV
G	22·8	33·2	43·2	54·0	8·9	16·9	30·9	44·0
A	10·05	30·20	53·85	119·30	12·45	27·44	53·40	128·25
M	1·86	2·01	2·29	3·34	2·02	2·07	2·18	3·67
D	$21^h 15^m$	$21^h 6^m$	$20^h 58^m$	$20^h 44^m$	$22^h 25^m$	$22^h 22^m$	$22^h 28^m$	$22^h 17^m$
v	1·00 : 1·08 : 1·23 : 1·80				1·00 : 1·02 : 1·08 : 1·81			
$t = 11{^\circ}5$, $e = 5·1$, $B_0 = 725·0$					$t = 11{^\circ}2$, $e = 5·5$, $B_0 = 726·1$			

$F_1 = 5·4$	$F_1 = 6·15$
$F_2 = 15·0$	$F_2 = 13·51$
$F_3 = 23·52$	$F_3 = 24·49$
$F_4 = 35·71$	$F_4 = 34·95$
$r_{a_1} = 1·29$	$r_{a_1} = 1·40$
$r_{a_2} = 2·61$	$r_{a_2} = 25·60$
$r_{a_3} = 3·82$	$r_{a_3} = 38·41$
$r_{a_4} = 5·13$	$r_{a_4} = 51·20$

Tabelle I'.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$
G	8·8	25·2	56·8	99·4	8·9	25·3	57·0	99·8
A	17·12	59·88	142·2	336·5	18·24	61·06	149·8	349·7
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_1	F_2	F_3	F_4
M	2·79	3·17	3·37	5·55	2·98	3·17	3·62	5·71
D	12^h 32^m	12^h 26^m	12^h 18^m	12^h 13^m	11^h 47^m	11^h 42^m	11^h 36^m	11^h 31^m
v	1·00 : 1·13 : 1·21 : 1·99				1·00 : 1·07 : 1·21 : 1·92			
$t = 20°4$, $e = 10·9$, $B_0 = 731·2$					$t = 20°6$, $e = 10·9$, $B_0 = 731·8$			

Bei allen Tabellen, mit Ausnahme der unter I links, gelten für die Grösse der einzelnen Oberflächen die in Tabelle I rechts gegebenen Werthe.

Tabelle II.

	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
G..	8·5	16·5	31·0	42·5	52·0	8·5	16·5	31·0	42·5	52·0
A..	6·14	15·9	31·2	47·8	107·3	7·1	17·1	34·7	50·7	120·1
M..	1·00	1·17	1·27	1·37	2·46	1·14	1·27	1·42	1·45	2·77
D..	36^h 7^m	36^h 9^m	36^h 8^m	36^h 8^m	36^h 0^m	24^h 40^m	24^h 43^m	24^h 42^m	24^h 43^m	24^h 43^m
v...	1·00 : 1·17 : 1·27 : 1·37 : 2·46					1·00 : 1·11 : 1·25 : 1·27 : 2·43				
$t = 10°8$, $e — 5·7$, $B_0 = 728·2$						$t = 11°2$, $e = 5·7$, $B_0 = 724·2$				

$$\left.\begin{array}{l} F_5 = 43·72\,cm^2 \\ r_{a_5} = 64·0\,cm \end{array}\right\} \text{Summe aller 5 Gefässe} = 122·82\,cm^2.$$

Tabelle II′.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+..+F_3$	$F_1+...+F_4$	$F_1+....+F_5$	F_1	F_1+F_2	$F_1+..+F_3$	$F_1+...+F_4$	$F_1+....+F_5$
G ..	8·8	25·7	56·6	98·9	151·1	8·7	25·7	56·7	99·2	150·0
A ..	19·91	67·96	156·5	283·3	531·4	20·63	67·98	157·9	293·9	553·0
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
M ..	3·23	3·56	3·61	3·62	5·67	3·34	3·51	3·66	3·89	5·93
D ..	$12^h 52^m$	$12^h 47^m$	$12^h 42^m$	$12^h 36^m$	$12^h 31^m$	$11^h 44^m$	$11^h 40^m$	$11^h 35^m$	$11^h 29^m$	$11^h 25^m$
v ...	1·00 :	1·10 :	1·12 :	1·12 :	1·75	1·00 :	1·06 :	1·10 :	1·16 :	1·78
	$t = 20°9$, $e = 10·4$, $B_0 = 728·6$					$t = 21°3$, $e = 10·8$, $B_0 = 729·8$				

Der Übersichtlichkeit halber folgte hier gleich eine Zusammenstellung der bei fünf Ringgefässen erhaltenen Werthe; die vier ursprünglichen wurden nämlich noch mit einem fünften Ringgefäss umgeben, wodurch der Einfluss einer Vergrösserung der Oberfläche auf den allgemeinen Gang der Verdunstung beobachtet werden konnte.

Die Versuche I und II sind im Winter bei einer mittleren Temperatur von 11°2 C., jene I′ und II′ im darauffolgenden Sommer bei mittlerem t = 20°8 ausgeführt worden. Bei letzteren kam nicht jedes Gefäss für sich gesondert auf die Wage, sondern alle zusammen auf einmal und verblieben auch auf der Wagschale während der ganzen Dauer des Versuches. Beim Abwägen wurde dabei zuerst das äusserste Gefäss abgenommen und das Gewicht aller anderen ermittelt; darauf kamen auf gleiche Weise der Reihe nach die nächst folgenden weg und so bis zum letzten; es liess sich dies viel bequemer und sicherer ausführen, als nach der früheren Art der Einzelwägung.

Die gewonnenen Werthe zeigen keine gute Übereinstimmung mit den nach der Theorie erwarteten, letztere fallen

vielmehr überall zu klein aus, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich wird.

Bei vier Ringgefässen:

I.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$
1. V (experimentirt)	0·00414	0·01496	0·03500	0·08012
2. V (berechnet)	0·00107	0·00398	0·00977	0·02891
3. V (berechnet)	0·00223	0·00827	0·02060	0·06040
4. $V\,(\text{exp.})\times\left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$ ...	0·00296	0·01105	0·02782	0·08012

$t = 11^\circ 4$, $e = p_0 = 5\cdot 4\,mm$,
$p_1 = 10\cdot 0\,mm$, $B_0 = 725\cdot 3\,mm$.

I′.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$
1. V (experimentirt)	0·00681	0·02330	0·05638	0·13247
2. V (berechnet)	0·00169	0·00633	0·01547	0·04580
3. V (berechnet)	0·00352	0·01233	0·03139	0·09205
4. $V\,(\text{exp.})\times\left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$ ...	0·00507	0·01775	0·04470	0·13247

$t = 20^\circ 5$, $B_0 = 731\cdot 6\,mm$,
$e = p_0 = 10\cdot 9\,mm$, $K = 0\cdot 230$,
$p_1 = 17\cdot 9\,mm$, $K' = 0\cdot 2495$.

Bei fünf Ringgefässen:

II.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$	$F_1+...+F_5$
1. V (experimentirt)........	0·00246	0·00861	0·02090	0·03930	0·08180
2. V (berechnet)...........	0·00073	0·00275	0·01655	0·01310	0·03276
3. V (berechnet)...........	0·00159	0·00275	0·01402	0·02805	0·07012
4. $V(\text{exp.}) \times \left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$ ..	0·00186	0·00589	0·01636	0·03272	0·08180

$t = 11^\circ 0$, $B_0 = 726 \cdot 2\, mm$,

$p_0 = 5 \cdot 7\, mm$, $K = 0 \cdot 214$,

$p_1 = 9 \cdot 8\, mm$, $K' = 0 \cdot 2416$.

II'.

	F_1	F_1+F_2	$F_1+.+F_3$	$F_1+..+F_4$	$F_1+...+F_5$
1. V (experimentirt)........	0·00780	0·02614	0·06051	0·11222	0·21089
2. V (berechnet)...........	0·00133	0·00493	0·01176	0·02351	0·05876
3. V (berechnet)...........	0·00280	0·01036	0·02468	0·04937	0·12342
4. $V(\text{exp.}) \times \left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$ ..	0·00481	0·01771	0·04220	0·08440	0·21089

$t = 21^\circ 0$, $B_0 = 729 \cdot 2\, mm$,

$p_0 = 10 \cdot 6\, mm$, $K = 0 \cdot 231$,

$p_1 = 18 \cdot 6\, mm$, $K' = 0 \cdot 2499$.

Diese Tabellen enthalten die Verdampfungsmengen in Kubikcentimetern pro Secunde aus den ganzen inneren Ober-

flächen, theoretisch durch

$$V_1 = V\left[1-\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}\right]$$

gegeben, und zwar in der ersten Zeile die experimentell ermittelten Verdampfungsmengen[1] (in Kubikcentimetern pro Secunde) von dem mittleren kleinsten Gefässe angefangen bis zu der Summe von mittleren zwei, drei ... u. s. f. Die zweite Zeile enthält die nach obiger Formel berechneten Werthe für $a = 51$ *mm* und $R = 0\cdot215$ (Landolt), ebenso die darauffolgende dritte, aber für $a = 95$ *mm* (gefundene Excentricität nach der Saugmethode) und für das etwas grössere $R' = 0\cdot242$ (Guglielmo); in der vierten Zeile endlich ist das Product des aus der Summe aller Gefässe experimentell gefundenen Werthes V mit dem in eckigen Klammern geschlossenen Ausdruck angesetzt.

Diese Zusammenstellung zeigt, dass die von Stefan einer solchen Berechnung zu Grunde gelegte Excentricität (51 *mm*) absolut unmöglich ist (zweite Zeile); eine bedeutend bessere Übereinstimmung wird erst erzielt, wenn man in die Rechnung mit der oben besprochenen Excentricität (95 *mm*) eingeht (dritte Zeile), doch selbst dieser Werth für c ist noch zu klein.

Was die vierte Zeile anbelangt, so soll dieselbe direct den Beweis erbringen, dass der Factor $\left[1-\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}\right]$ für mittlere Oberflächentheile zu geringe Werthe angibt: Die Gesammtverdunstungsmenge V ist jedenfalls richtig, weil vom Experimente selbst entnommen; es kann somit die nicht unbeträchtliche Abweichung in den Zahlen der ersten und vierten Zeile nur von dem in Klammern befindlichen Ausdruck bedingt sein. Dadurch, dass in Folge dieses Factors die Verdampfungsmenge aus den inneren Flächen zu klein ausfällt, nimmt der Werth für dieselbe an den äussersten Randtheilen übermässig zu.

[1] Die in Milligramm angegebene Wassermenge ist in Dampfform (in Kubikcentimetern) nach dem Ausdruck

$$V = \text{Gewicht in Milligramm} \times 1\cdot244 \times (1+\alpha t)\frac{760}{B_0}$$

umgerechnet worden.

Somit kommen wir zu dem letzten hier besprochenen Thema, nämlich zu der Berechnung der Verdampfungsmengen aus einzelnen Stellen der Oberfläche.

Die in Kubikcentimetern in *d*.sec. verdunsteten Dampfmengen aus der ganzen Oberfläche der einzelnen Ringgefässe findet man in der ersten Zeile auf der linken Hälfte folgender Tabelle; in der zweiten Zeile sind die nach Stefan berechneten, durch Integration der Gleichung

$$v_1 = \frac{V}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

zwischen den Grenzen r und R gewonnenen Werthe

$$v = V\left[1 - \frac{r^2}{a^2} - \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}}\right]$$

angesetzt.

Horizontalreihe 3 und 4 haben eine ähnliche Bedeutung wie die entsprechenden Zeilen in den zuletzt besprochenen Tabellen.

Die rechte Seite der Tabellen enthält die auf 1 cm^2 reducirten Verdampfungsmengen der linken Seite, wobei die einzelnen Oberflächen, von der mittleren angefangen, die daselbst seitlich angeschriebenen Werthe besitzen.

Die mit einem Strich versehenen römischen Ziffern bedeuten wie früher die im Sommer erhaltenen Resultate.

Man sieht aus diesen Zahlen, dass auch hier die experimentellen Werthe mit den theoretischen sich nicht decken.

Die im Mittel für 1 cm^2 der aufeinanderfolgenden Oberflächen gefundenen Werthe verhalten sich

experimentirt wie . . . 1 : 1·03 : 1·14 : 1·84 bei 4 Ringgefässen
berechnet wie . . . . . . 1 : 1·12 : 1·27 : 2·94 » 4 »

und

exper. wie . . . . 1 : 1·03 : 1·12 : 1·21 : 1·98 bei 5 Ringgefässen
berechn. wie . . 1 : 1·17 : 1·23 : 1·53 : 3·55 » 5 »

In Wirklichkeit verdunstet demnach aus 1 cm^2 des äusseren Ringgefässes nicht einmal doppelt soviel als aus einer gleich grossen Fläche in der mittleren Gegend, während nach der Theorie eine dreifache Verdunstungsmenge zu erwarten wäre.

Bei vier Gefässen:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_1	F_2	F_3	F_4
I.								
1.	0·00414	0·01082	0·02004	0·04512	0·000708	0·000721	0·000789	0 001253
2.	0·00107	0·00291	0·00579	0·01914	0·000183	0·000194	0·000228	0·000532
3.	0·00223	0·00604	0·01233	0 03980	0 000382	0·000401	0 000485	0 001105
4.	0·00296	0·00809	0·01627	0·05280	0·000506	0·000538	0·000640	0·001466
I'.								
1.	0 00681	0·01648	0·03308	0·07609	0·001108	0 001148	0·001285	0·002113
2.	0·00169	0·00464	0·00914	0·03033	0 000275	0·000322	0·000355	0·000843
3.	0·00351	0·00882	0·01906	0·07299	0·000601	0·000588	0 000750	0·002027
4.	0·00507	0·01268	0·02695	0·08767	0·000824	0·000872	0·001047	0·002435

$F_1 = 5·84\ cm^2$, $F_2 = 15·05\ cm^2$, $F_3 = 25·41\ cm^2$, $F_4 = 36·00\ cm^2$.

Bei fünf Ringgefässen:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
					II.					
1.	0·00246	0·00615	0·01229	0·01840	0·04250	0·000400	0·000426	0·000477	0·000513	0·000917
2.	0·00073	0·00202	0·00380	0·00655	0·01966	0·000118	0·000140	0·000148	0·000182	0·000424
3.	0·00159	0 00430	0·00813	0·01403	0·04207	0·000258	0·000298	0·000316	0 000389	0·000908
4.	0·00186	0·00501	0·00949	0·01636	0 04908	0·000302	0·000347	0·000369	0 000454	0·001060
					II'.					
1.	0·00780	0·01834	0·03437	0·05171	0·09861	0·001268	0·001274	0·001335	0·001436	0·002129
2.	0·00133	0 00360	0 00683	0·01175	0 03525	0·000216	0·000249	0·000265	0·000326	0·000761
3.	0·00280	0·00756	0·01432	0·02469	0·07405	0·000455	0·000524	0·000556	0·000685	0·001599
4	0·00481	0·01290	0·02449	0 04220	0·12649	0 000782	0·000895	0·000944	0·001172	0·002731

$F_1 = 6 \cdot 15\, cm^2$, $F_2 = 14 \cdot 42\, cm^2$, $F_3 = 25 \cdot 74\, cm^2$, $F_4 = 36 \cdot 00\, cm^2$, $F_5 = 46 \cdot 31\, cm^2$.

Durch Einführung der grösseren Excentricität (95 *mm*) in die Rechnung erzielt man wohl besser übereinstimmende Werthe (dritte Zeile), doch deren fehlerhafte Vertheilung an den einzelnen Stellen bleibt nach wie vor bestehen (vierte Zeile), d. h. der Factor $\left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$ wächst mit zunehmendem r und constantem a viel rascher als es der Wirklichkeit entspricht.

Die Theorie verlangt für die Verthéilung der Dampfspannung eine Niveaucurve, die sich gegen die verdunstende Oberfläche zu stark herunterneigt; anderseits gibt sie aber für die äusseren Theile dieser Oberfläche zu grosse Verdunstungsmengen an: diese zwei Forderungen schliessen sich aber gegenseitig aus, und die theoretischen Werthe verlieren dadurch noch mehr an Zuverlässigkeit.

Was den Einfluss einer Vergrösserung der Gesammtoberfläche auf die Vertheilung der Verdunstungsmengen in den mittleren Theilen anbelangt, so sieht man, dass dadurch die Verdampfung nur der äusseren Stellen beträchtlich herabgedrückt wird; die mehr gegen die Mitte befindlichen Flächen werden von einer solchen Vergrösserung fast gar nicht benachtheiligt.

Aus obigen Tabellen geht auch noch hervor, dass der Unterschied zwischen den experimentellen und theoretischen Werthen der Verdampfungsmengen aus der Summe aller Ringgefässe mit zunehmender Temperatur grösser wird; dieser beträgt bei vier Gefässen und

11°4 C....... 0·08012—0·02891 = 0·05121 cm^3,
20°5 C....... 0·13247—0·04580 = 0·08667 cm^3,

bei fünf Gefässen und

11°0 C....... 0·08180—0·03276 = 0·05904 cm^3,
21°1 C....... 0·21089—0·05876 = 0·15213 cm^3

und bei einem einzigen Gefässe von gleicher Oberfläche, wie alle 4 Ringgefässe zusammengenommen

10°2 C...... 0·07333—0·02547 = 0·04786 cm^3,
20°5 C...... 0·14043—0·05180 = 0·08863 cm^3.

Es verhalten sich demnach die Unterschiede in den Verdampfungsmengen für 10° C. Temperaturdifferenz für ein Gefäss vom

Radius $r = 51\ mm$ wie..... 1 : 1·77
Radius $r = 64\ mm$ wie..... 1 : 2·57.

Es könnte immerhin eingeworfen werden, dass bei dieser Art der Versuche in Folge zu vieler Gefässwandungen der allgemeine Gang der Verdunstung beeinträchtigt worden sei; dem ist aber nicht so; denn mehrere Verdampfungsversuche mit einem Gefässe von beinahe gleicher Oberfläche wie die Summe aller vier obigen, also von rund $80\ cm^2$, ergaben eine befriedigende Übereinstimmung in den Verdampfungsmengen: es verdunsteten aus diesem Gefäss in der Secunde

$0·07333\ cm^3$ Dampf ($0·05444\ mg$)

bei

$t = 10°2,\ e = 4·9\ mm,\ B_0 = 727\ 4\ (k = 0·213),$

während früher, Seite 400

$0·08012\ cm^3$ Dampf ($0·05444\ mg$)

bei

$t = 11°4, \quad e = 5·4\ mm, \quad B_0 = 725·3$

und dann im Sommer ebenso

$0·14043\ cm^3$ Dampf ($0·09431\ mg$)

bei

$t = 20°5,\ e = 10·6\ mm,\ B_0 = 730·3\ (k = 0·230);$

früher

$0·13247\ cm^3$ Dampf ($0·09431\ mg$)

bei

$t = 20°5, \quad e = 10·9\ mm, \quad B_0 = 731·6.$

Die entsprechenden, nach der Theorie durch

$$V = 4ak \log_n \frac{P-p_0}{P-p_1}$$

berechneten Werthe lauten:

$0·02547\ cm^3$....jetzt ($k = 0·213$)
$0·02891\ cm^3$....früher

und

$$0 \cdot 05180\, cm^3 \ldots \text{jetzt } (k = 0 \cdot 230)$$
$$0 \cdot 04580\, cm^3 \ldots \text{früher.}$$

Die geringen Abweichungen erklären sich genügend aus den Temperatur- und Druckunterschieden.

Schlussfolgerungen.

Aus den oben mitgetheilten Versuchsergebnissen glaube ich folgende Schlüsse ziehen zu dürfen:

1. Die von J. Stefan auf deductivem Wege abgeleitete Ellipsenform der Curven gleicher Dampfspannung über einer verdunstenden Flüssigkeitsoberfläche besitzt, gegenüber der experimentell ermittelten, eine zu kleine Excentricität; die Erfahrung verlangt eine fast zweimal so grosse, und zwar speciell für den hier untersuchten Fall, ein $c = 95\, mm$ statt des theoretischen $c = 51\, mm$.

2. Der Ausdruck

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dn},$$

welcher nach Stefan die in der Secunde durch die Einheit des Querschnittes diffundirte, volumetrisch gemessene Dampfmenge wiedergeben soll, zeigt nur dann mit der Erfahrung übereinstimmende Werthe, wenn man der Berechnung der jeweiligen Niveauflächen eine beinahe doppelt so grosse Excentricität als die von ihm gefolgerte zu Grunde legt.

3. Dasselbe ist der Fall bei der Berechnung der Verdampfungsmenge V aus einem offenen, kreisförmigen Gefässe nach der Formel:

$$V = 4ak \log_n \frac{P-p_0}{P-p_1}.$$

4. Der Unterschied zwischen den Werthen der Theorie und der Erfahrung wächst mit zunehmender Temperatur.

5. Die Gleichung, welche von Stefan für die Berechnung der Verdampfungsmenge aus irgend einem inneren Theil einer verdunstenden Flüssigkeitsoberfläche aufgestellt wurde, nämlich

$$V_1 = V\left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right]$$

gibt, auch wenn die gesammte Verdampfungsmenge aus dem ganzen Gefässe mit der experimentell gefundenen übereinstimmt, für die inneren Oberflächentheile zu geringe Werthe an.

6. Die Verdampfungsmenge aus einer beliebig weit von der Mitte der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Stelle, berechnet nach

$$v_1 = \frac{V}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

fällt für mehr central gelegene Theile zu klein, für Randtheile jedoch zu gross aus.

Anmerkung.

Obwohl Stefan bei Verdampfungsversuchen die Verwendung von Benzol, Äther und dergleichen statt des zu langsam verdunstenden Wassers anempfohlen, ist hier doch letzteres verwendet worden, weil das specifische Gewicht des Wasserdampfes nicht soviel als jenes obiger flüchtigeren Substanzen von dem der umgebenden feuchten Luft abweicht. Dass dies von grosser Bedeutung wird bei Versuchen, wo es sich hauptsächlich um eine regelmässige Diffusion der verdunsteten Theilchen handelt, hat ja bereits Töpler[1] mit der von ihm zuerst angewandten Schlierenmethode gezeigt: er sah bekanntlich, dass aus einer freien Ätheroberfläche der Dampf nicht nach oben in die Luft diffundirte, sondern vielmehr zum grössten Theile wie eine Flüssigkeit über die Ränder des Gefässes nach unten fadenförmig sich ergoss. Eine solche, von der Schwerkraft herrührende Störung des Diffusionsvorganges musste hier nach Thunlichkeit vermieden werden.

Mit zu flüchtigen Substanzen liess sich auch wegen der Beschränktheit des Versuchsraumes, welcher in der kürzesten Zeit mit den betreffenden Dämpfen gesättigt worden wäre, nicht gut experimentiren, zumal die nöthigen Vorbereitungen vor dem Beginne des eigentlichen Versuches mit den Saugröhren ziemlich viel Zeit in Anspruch nahmen.

Überdies war noch ein anderer Umstand, der für diese Wahl sprach, nämlich die bei rascher Verdunstung auftretende

---

[1] A. Töpler, Poggend. Ann. B. 131, p. 54.

Abkühlung der Flüssigkeitsoberfläche, und zwar nicht so sehr eine allgemeine als vielmehr eine unregelmässig vertheilte; denn an den äusseren Theilen des mit einer flüchtigen Substanz gefüllten Versuchsgefässes tritt, in Folge der daselbst viel schneller vor sich gehenden Verdunstung als in der Mitte, eine immerhin starke Temperaturerniedrigung auf, welche die so nothwendig gleichmässige Vertheilung der Temperatur auf der Oberfläche stört, und in die gewonnenen Resultate einen constanten Fehler hineinbringt. Anders verhält sich dies aber bei der im Allgemeinen sehr trägen Verdunstung des Wassers: hier kann aus der Umgebung und aus den tiefer liegenden Schichten der Flüssigkeit fortwährend die bei dem Verdunstungsvorgange verhältnissmässig wenig verbrauchte Wärme rechtzeitig nachrücken, und es herrscht sodann auf der ganzen Oberfläche eine ziemlich constante und gleichmässig vertheilte Temperatur.

Ein Versuch dauerte drei Stunden; während dieser Zeit verdunsteten im Mittel 600 *mg* Wasser, welche in dem Raume von 0·6 cm^3 Inhalt die daselbst vorhandene absolute Luftfeuchtigkeit um 1 *mg* pro Liter zum Steigen gebracht hätten, d. h. von 5 auf 6 *mg*. Dies traf aber in Wirklichkeit nicht zu, weil die reichlich vorhandene Schwefelsäure die überschüssige Feuchtigkeit fortwährend an sich zog, was auch durch directe Saugversuche, welche einen höchstens um 0·2 *mg* grösseren Feuchtigkeitsgehalt im Inneren des Glaskastens als im Locale selbst angaben, bestätigt wurde. Eine so kleine Erhöhung der Feuchtigkeit konnte demnach keinen irgendwie störenden Einfluss auf die weitere Verdampfung üben. So erscheint denn die Bevorzugung und Anwendung von Wasser statt einer anderen flüchtigeren Flüssigkeit bei dieser Versuchsart von nicht geringem Vortheil und somit ganz gerechtfertigt.

Über einen asymptotischen Ausdruck

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

In den folgenden Zeilen soll die Aufgabe behandelt werden: Es ist eine positive binäre quadratische Form

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

von negativer Determinante

$$-\Delta = b^2 - ac$$

gegeben; es soll der asymptotische Ausdruck der über alle Paare ganzer Zahlen x, y ausser 0, 0, für welche

$$f(x, y) \leqq n$$

ausfällt, zu erstreckenden Summe

$$\Theta(n) = \Sigma \frac{1}{f}$$

für grosse Werthe von n ermittelt werden.

Es wird $n > 4a$ angenommen.

1.

Bezeichnet man mit Legendre die grösste in einer Grösse z enthaltene ganze Zahl mit $E(z)$ und setzt

$$E\left(\frac{na}{\Delta}\right) = \eta,$$

so kann y der Gleichung

$$af = (ax + by)^2 + \Delta y^2$$

zufolge nur einen der Werthe

$$-\eta, -\eta+1, -\eta+2, \ldots -1, 0, 1, \ldots \eta-1, \eta$$

haben, wenn $f \leqq n$ ausfallen soll. Fasst man daher alle Glieder von $\Theta(n)$, in welchen y einen und denselben Werth hat, in je eine Theilsumme zusammen und setzt zu diesem Ende für alle nicht negativen Werthe von y

$$x_1 = E\left(\frac{-by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a}\right)$$

$$x_2 = E\left(\frac{by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a}\right),$$

so wird

$$\Theta(n) = S(0)+S(1)+S(-1)+S(2)+S(-2)+\ldots+S(\eta)+S(-\eta)$$

und

$$S(y) = \sum_{-x_2}^{x_1} \frac{1}{f(x,y)}$$

$$S(-y) = \sum_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{f(x,-y)},$$

wo $y \geqq 0$ angenommen wird. Da aber

$$S(-y) = \sum_{-x_1}^{x_2} \frac{1}{f(-x,y)} = \sum_{x_1}^{-x_2} \frac{1}{f(x,y)}$$
$$= S(y)$$

ist, so wird einfacher

$$\Theta(n) = S(0)+2S(1)+2S(2)+\ldots+2S(\eta). \tag{1}$$

2.

Da

$$S(0) = \frac{2}{a}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{x_1^2}\right)$$
$$= \frac{2}{a}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots \text{in inf.}\right)$$
$$-\frac{2}{a}\left(\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_1+2)^2}+\ldots\right)$$

und

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_1+2)^2}+\cdots<\frac{2}{x_1+1}$$

$$x_1+1=1+E\left(\sqrt{\frac{n}{a}}\right)>\sqrt{\frac{n}{a}}$$

ist, so hat man

$$\left|S(0)-\frac{\pi^2}{3a}\right|<\frac{4}{\sqrt{an}}.$$

Wird daher eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kurz mit $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ bezeichnet, so ergibt sich

$$S(0)=\frac{\pi^2}{3a}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3.

Ist $y>0$, so sei

$$\sum_{x=-\infty}^{x=\infty}\frac{1}{f}=\varphi(y)$$

$$\sum_{1+x_1}^{\infty}\frac{1}{f}=\psi_1(y)$$

$$\sum_{1+x_2}^{\infty}\frac{1}{f(-x,y)}=\psi_2(y).$$

Es wird dann

$$S(y)=\varphi(y)-\psi_1(y)-\psi_2(y).$$

Setzt man

$$\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{a}=\alpha \qquad \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{a}=\beta,$$

so ist identisch

$$\frac{1}{f} = \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{\alpha y - x} + \frac{1}{\beta y + x} \right)$$

und daher

$$\varphi(y) = \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha y - x} + \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta y + x}.$$

Die hier auftretenden Reihen sind mittelst der Formel

$$\frac{2\pi}{e^{2\pi u} - 1} = -\pi + \frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2 + 1^2} + \frac{2u}{u^2 + 2^2} + \dots$$

$$= -\pi + i \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{iu + m}$$

summirbar. Es wird

$$i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha y - x} = \pi + 2\pi \frac{e^{2\pi i \alpha y}}{1 - e^{2\pi i \alpha y}}$$

$$i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta y + x} = \pi + 2\pi \frac{e^{2\pi i \beta y}}{1 - e^{2\pi i \beta y}}$$

und man hat demnach

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}} \frac{e^{2\pi i \alpha y}}{1 - e^{2\pi i \alpha y}} + \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}} \frac{e^{2\pi i \beta y}}{1 - e^{2\pi i \beta y}}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$x + \beta y = v \qquad x - \alpha y = w,$$

so ist für alle über x_1 liegenden Werthe von x

$$|v| = |w| = \sqrt{\frac{f}{a}} > 1$$

und daher

$$\log(1 + v) - \log v = \log\left(1 + \frac{1}{v}\right)$$

$$= \frac{1}{v} - \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{3v^3} - \dots$$

$$\log(1+w)-\log w = \log\left(1+\frac{1}{w}\right)$$

$$= \frac{1}{w} - \frac{1}{2w^2} + \frac{1}{3w^3} - \dots$$

Hienach wird

$$\frac{1}{f} = \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right)$$

$$= \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{1+v}{1+w}\right) - \log\frac{v}{w}\right) + U, \qquad (2)$$

wo

$$U = \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{w^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v^3} - \frac{1}{w^3}\right) + \dots\right).$$

U lässt sich in folgender Weise abschätzen. Es ist

$$\frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v^m} - \frac{1}{w^m}\right) =$$

$$= \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{v^{m-1}} + \frac{1}{v^{m-2}w} + \dots + \frac{1}{w^{m-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{f}\left(\frac{1}{v^{m-1}} + \frac{1}{v^{m-2}w} + \dots + \frac{1}{w^{m-1}}\right)$$

und daher

$$\left|\frac{i}{2my\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{v^m} - \frac{1}{w^m}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{mf}\left(\left|\frac{1}{v}\right|^{m-1} + \left|\frac{1}{v}\right|^{m-2}\left|\frac{1}{w}\right| + \dots + \left|\frac{1}{w}\right|^{m-1}\right)$$

$$< \frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{a}{f}}\right)^{m-1}.$$

Hieraus folgt

$$|U| < \frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{a}{f}} + \left(\sqrt{\frac{a}{f}}\right)^2 + \dots\right)$$

$$< \frac{\sqrt{a}}{f(\sqrt{f} - \sqrt{a})};$$

da aber $n > 4a$ angenommen wurde und hier nur über n liegende Werthe von f in Betracht kommen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{f}-\sqrt{a}} < \frac{2}{\sqrt{f}}$$

und es ergibt sich

$$|U| < \frac{2\sqrt{a}}{f^{3/2}}.$$

Weiter ist

$$\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}} =$$

$$= \frac{2\Delta y^2 \left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)}{\sqrt{f(x,y)}\sqrt{f(x+1,y)}\left((a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)}\right)}$$

$$(a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)} =$$
$$= \left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)\left(\sqrt{f(x,y)}+\sqrt{f(x+1,y)}\right)$$
$$-\frac{1}{2}a\left(\sqrt{f(x+1,y)}-\sqrt{f(x,y)}\right).$$

Für Werthe von x, welche über x_1 liegen, hat man aber

$$f(x+1,y)-f(x,y) = 2\left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)$$
$$> 0$$
$$3f(x,y)-f(x+1,y) = f(x,y)-2a+f(x-1,y)$$
$$> 0,$$

und es wird demzufolge

$$(a(x+1)+by)\sqrt{f(x,y)}+$$
$$+(ax+by)\sqrt{f(x+1,y)} < 2\left(ax+by+\frac{1}{2}a\right)\sqrt{f(x+1,y)}$$

oder

$$\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}} > \frac{\Delta y^2}{f(x+1,y)\sqrt{f(x,y)}}$$
$$> \frac{\Delta y^2}{3f^{3/2}}.$$

Hieraus folgt

$$|U| < \frac{6\sqrt{a}}{\Delta y^2}\left(\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}}\right) - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}}\Bigg)$$

und man hat nach (2)

$$\left|\frac{1}{f} - \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{1+x+\beta y}{1+x-\alpha y}\right) + \frac{i}{2y\sqrt{\Delta}}\log\frac{x+\beta y}{x-\alpha y}\right|$$
$$< \frac{6\sqrt{a}}{\Delta y^2}\left(\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} - \frac{ax+by}{\sqrt{f(x,y)}}\right).$$

Wird diese Ungleichung nach x von $x = 1+x_1$ bis $x = \infty$ summirt, so ergibt sich für $x = \infty$

$$\log\frac{1+x+\beta y}{1+x-\alpha y} = 0$$

$$\frac{a(x+1)+by}{\sqrt{f(x+1,y)}} = \sqrt{\frac{af(x+1,y)-\Delta y^2}{f(x+1,y)}} = \sqrt{a}$$

und man erhält

$$\left|\psi_1(y) - \frac{1}{2iy\sqrt{\Delta}}\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}\right| < \frac{6a}{\Delta y^2}\left(1 - \frac{a(x_1+1)+by}{\sqrt{af(x+1,y)}}\right).$$

Nun ist

$$1+x_1 = \frac{-by+\sqrt{an-\Delta y^2}}{a} + \varepsilon,$$

wo $0 < \varepsilon \leqq 1$, und daher

$$1+x_1+\beta y = \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{a} + \varepsilon$$
$$= \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{a}\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}(\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta})\right)$$

$$1+x_1-\alpha y = \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}{a} + \varepsilon$$
$$= \frac{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}{a}\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}(\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta})\right)$$

$$\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}=$$

$$=\log\frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}+\log\frac{1-\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}{1+\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}};$$

da aber

$$\log\frac{\sqrt{an-\Delta y^2}+iy\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}-iy\sqrt{\Delta}}=2i\operatorname{arctg}\frac{y\sqrt{\Delta}}{\sqrt{an-\Delta y^2}}$$

$$=2i\arcsin y\sqrt{\frac{\Delta}{an}}$$

$$\left|\log\frac{1-\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}{1+\dfrac{i\varepsilon y\sqrt{\Delta}}{n+\varepsilon\sqrt{an-\Delta y^2}}}\right|<\log\frac{1+\dfrac{y\sqrt{\Delta}}{n}}{1-\dfrac{y\sqrt{\Delta}}{n}}$$

$$<\frac{2y\sqrt{\Delta}}{n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\Delta y^2}{n^2}}$$

$$<\frac{2y\sqrt{\Delta}}{n-a}$$

ist, so folgt

$$\left|\frac{1}{2iy\sqrt{\Delta}}\log\frac{1+x_1+\beta y}{1+x_1-\alpha y}-\frac{1}{y\sqrt{\Delta}}\arcsin y\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right|<\frac{1}{n-a}.$$

Überdies ist

$$1-\frac{a(x_1+1)+by}{\sqrt{af(x_1+1,y)}}=1-\sqrt{\frac{f(x_1+1,y)-\dfrac{\Delta y^2}{a}}{f(x_1+1,y)}}$$

$$=\frac{\Delta y^2}{a}\,\frac{1}{\sqrt{f(x_1+1,y)}\left(\sqrt{f(x_1+1,y)}+\sqrt{f(x_1+1,y)-\dfrac{\Delta y^2}{a}}\right)}$$

$$<\frac{\Delta y^2}{af(x_1+1,y)}<\frac{\Delta y^2}{an}.$$

Man hat also

$$\left|\psi_1(y) - \frac{1}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right| < \frac{1}{n-a} + \frac{6}{n}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich

$$\left|\psi_2(y) - \frac{1}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right| < \frac{1}{n-a} + \frac{6}{n}.$$

Hienach wird

$$S(y) = \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi}{y\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i a y}}{1-e^{2\pi i a y}} + \frac{e^{2\pi i \beta y}}{1-e^{2\pi i \beta y}}\right)$$
$$- \frac{2}{y\sqrt{\Delta}} \arcsin y \sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \delta,$$

wo

$$\delta < \frac{12}{n} + \frac{2}{n-a}.$$

4.

Setzt man die gefundenen Werthe von $S(0)$ und $S(y)$ in (1) ein, so ergibt sich

$$\Theta(n) = \frac{\pi^2}{3a} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\eta}\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i a}}{1-e^{2\pi i a}} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i a}}{1-e^{4\pi i a}} + \ldots + \frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i a}}{1-e^{2\eta\pi i a}}\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i \beta}}{1-e^{2\pi i \beta}} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i \beta}}{1-e^{4\pi i \beta}} + \ldots + \frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i \beta}}{1-e^{2\eta\pi i \beta}}\right)$$
$$- \frac{4}{\sqrt{\Delta}}\left(\arcsin \sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \frac{1}{2} \arcsin 2\sqrt{\frac{\Delta}{an}} + \ldots + \frac{1}{\eta} \arcsin \eta \sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Nun ist bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\eta}$ oder $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\eta}=\log\eta+\mathfrak{C}$$

$$=\log\sqrt{\frac{an}{\Delta}}+\mathfrak{C}$$

$$\frac{e^{2\pi i\alpha}}{1-e^{2\pi i\alpha}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\alpha}}{1-e^{4\pi i\alpha}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\alpha}}{1-e^{2\eta\pi i\alpha}}=$$

$$=-\log\prod_{1}^{\infty}(1-e^{2m\pi i\alpha})$$

$$=\frac{\pi i\alpha}{12}-\log\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\frac{e^{2\pi i\beta}}{1-e^{2\pi i\beta}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{4\pi i\beta}}{1-e^{4\pi i\beta}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\,\frac{e^{2\eta\pi i\beta}}{1-e^{2\eta\pi i\beta}}=$$

$$=-\log\prod_{1}^{\infty}(1-e^{2m\pi i\beta})$$

$$=\frac{\pi i\beta}{12}-\log\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right),$$

wo $\mathfrak{C}$ die Euler'sche Constante bezeichnet und

$$\vartheta_1(x,\omega)=-i\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{(2m+1)^2 i\pi\omega+(2m+1)i\pi x}$$

ist. Ferner wird

$$\frac{1}{m}\arcsin m\sqrt{\frac{\Delta}{an}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\frac{1}{2}\,\frac{m^2}{3}\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{3/2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{m^4}{5}\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{5/2}+\ldots;$$

da aber

$$1+2^{2k}+3^{2k}+\ldots+\eta^{2k}=\frac{\eta^{2k+1}}{2k+1}+\gamma\eta^{2k}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{an}{\Delta}}-\gamma_1$$

ist, wo γ, γ_1 nicht negative echte Brüche bezeichnen, so folgt

$$(1+2^{2k}+\ldots+\eta^{2k})\left(\frac{\Delta}{an}\right)^{k+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\left(1-\gamma_1\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)^{2k+1}}{2k+1}+\gamma\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\left(1-\gamma_1\sqrt{\frac{\Delta}{an}}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\gamma'\sqrt{\frac{\Delta}{an}},$$

wo $|\gamma'|<1$ ist, und man hat bis auf eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\arcsin\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\frac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\frac{\Delta}{an}}+\ldots+\frac{1}{\eta}\arcsin\eta\sqrt{\frac{\Delta}{an}}=$$

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5^2}+\ldots\text{in inf.}$$

$$=\int_0^1 \arcsin x\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cot\varphi d\varphi$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\pi\log 2}{2}.$$

Hienach lautet der gewünschte asymptotische Ausdruck:

$$\Theta(n)=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log n+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\mathfrak{C}-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 4\Delta$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\alpha}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{2}{3},\frac{\beta}{3}\right)}{3\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Derselbe leistet in der Theorie der singulären Moduln ähnliche Dienste wie die Kronecker'sche Formel.[1]

---

[1] Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885 und 1889.

Über einen algebraischen Satz

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Es sei

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots \pm c_n = 0$$

eine gegebene algebraische Gleichung mit von Null verschiedener Discriminante D und den Wurzeln

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

und

$$G = [1, g, h, \ldots k]$$

eine gegebene Gruppe von Permutationen der Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$ von geringerer als der Ordnung $n!$. Vertheilt man in bekannter Weise alle möglichen $n!$ Permutationen der Elemente $1, 2, \ldots n$ mit Hilfe von passend gewählten Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ in die ρ Inbegriffe

$$Gq_0, Gq_1, \ldots Gq_{\rho-1},$$

wo $q_0 = 1$, so gibt es[1] ganze Functionen der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, welche bei allen — an den Stellenzeigern von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zu vollziehenden — Permutationen von G gleiche, bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ hingegen unter einander numerisch verschiedene Werthe annehmen.

In den folgenden Zeilen soll ein Beweis für die Existenz solcher Functionen mitgetheilt werden.

---

[1] Serret, Cours d'algèbre supérieure. — Kronecker's Festschrift, §. 12.

1.

Es seien

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

Unbestimmte,

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$$

ihre elementaren symmetrischen Functionen und

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu-1)}$$

alle Potenzproducte $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon$, in welchen die Exponenten den Bedingungen

$$\alpha \leqq n-1$$
$$\beta \leqq n-2$$
$$\gamma \leqq n-3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon = 0$$

genügen und deren Anzahl

$$\nu = n!$$

ist. Man bezeichne den Werth, welchen eine Function ω der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die an den Stellenzeigern der letzteren zu vollziehende Permutation s annimmt, allgemein mit ω_s und setze

$$\varphi^{(i)} = \mathfrak{P}_1^{(i)} + \mathfrak{P}_g^{(i)} + \mathfrak{P}_h^{(i)} + \ldots + \mathfrak{P}_k^{(i)}$$
$$\psi = u_0\varphi^{(0)} + u_1\varphi^{(1)} + \ldots + u_{\nu-1}\varphi^{(\nu-1)},$$

wo

$$u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$$

Unbestimmte bezeichnen. Sind dann

$$\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\rho-1}$$

die Werthe, welche ψ bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ annimmt, und setzt man

$$F(t) = (t-\psi_0)(t-\psi_1)\ldots(t-\psi_{\rho-1}),$$

so hat $F(t)$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_0, u_1, \ldots x_1, x_2, \ldots x_n$ zu Coëfficienten, welche in $x_1, x_2, \ldots x_n$ symmetrisch und daher als ganze ganzzahlige Functionen von $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ darstellbar sind.

Ist nun $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ die Discriminante von $F(t)$, so handelt es sich um den Nachweis, dass der Ausdruck $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_n)$ nicht identisch in den Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ verschwindet.

Ist dieser Nachweis geführt, so kann man in $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_n)$ für die Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ passend gewählte ganze Zahlen

$$a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$$

von der Art setzen, dass das Resultat nicht Null ist. Gehen dann

$$F(t), \varphi, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\nu-1)}$$

nach Ersetzung von

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \quad u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$$

durch

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \quad a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$$

in

$$F_0(t), \varphi_0, \varphi_0^{(1)}, \ldots \varphi_0^{(\nu-1)}$$

über, so ist der Ausdruck

$$\omega = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_0^{(1)} + a_2\varphi_0^{(2)} + \ldots + a_{\nu-1}\varphi_0^{(\nu-1)}$$

eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von der gewünschten Art. Denn ω wird durch keine Permutation von G geändert und nimmt bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ ρ Werthe an, welche mit den ρ Wurzeln der Gleichung

$$F_0(t) = 0$$

von nicht verschwindender Discriminante zusammenfallen und daher unter einander numerisch verschieden sind.

Sind also $U, U', \ldots$ die verschiedenen Potenzproducte der Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots$, welche in der Entwicklung von $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ vorkommen, und setzt man

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = SU + S'U' + \ldots,$$

so sind

$$S, S', \ldots$$

bekannte ganze ganzzahlige Functionen von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, von welchen zu zeigen ist, dass sie nicht alle für

$$\sigma_1 = c_1, \; \sigma_2 = c_2, \ldots \sigma \; = c_n$$

verschwinden können.

2.

Man hat

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = \Pi(\psi_\alpha - \psi_\beta)$$

wo α alle Werthe $0, 1, \ldots \rho-1$ und β für jeden besonderen Werth von α alle Zahlen $0, 1, \ldots \rho-1$ ausser α zu durchlaufen haben. Bezeichnen daher

$$\varphi_0^{(i)}, \varphi_1^{(i)}, \ldots \varphi_{\rho-1}^{(i)}$$

die Werthe, welche $\varphi^{(i)}$ bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ annimmt, so ist

$$\psi_\alpha = u_0\varphi_\alpha^{(0)} + u_1\varphi_\alpha^{(1)} + \ldots + u_{\nu-1}\varphi_\alpha^{(\nu-1)}$$
$$\psi_\beta = u_0\varphi_\beta^{(0)} + u_1\varphi_\beta^{(1)} + \ldots + u_{\nu-1}\varphi_\beta^{(\nu-1)}$$

und demgemäss

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) =$$
$$= \Pi[u_0(\varphi_\alpha^{(0)} - \varphi_\beta^{(0)}) + u_1(\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\beta^{(1)}) + \ldots + u_{\nu-1}(\varphi_\alpha^{(\nu-1)} - \varphi_\beta^{(\nu-1)})].$$

Ich habe an anderer Stelle[1] folgenden Satz bewiesen:

Sind Φ, Ψ ganze Functionen der Veränderlichen $x, y, \ldots$ mit unbestimmten Coëfficienten, A, B, C beziehungsweise Coëfficienten der Functionen $\Phi, \Psi, \Phi\Psi$, so gibt es immer Exponenten m von der Art, dass jedes Product $A^m B$ sich als Vielfachsumme von lauter Producten $P_{m-1}C$ darstellen lässt, wo allgemein P_λ ein Product von λ gleichen oder verschiedenen Coëfficienten von Φ bezeichnet. Sind daher

$$A_0, A_1, \ldots A_\lambda$$
$$B_0, B_1, \ldots B_\mu$$

die Coëfficienten von Φ und Ψ und

$$A_0', A_1', \ldots A_\lambda'$$
$$B_0', B_1', \ldots B_\lambda'$$

Unbestimmte, so lässt sich auch ein Exponent m von der Art angeben, dass der Ausdruck

$$(A_0A_0' + AA_1' + \ldots + A_\lambda A_\lambda')^m (B_0B_0' + B_1B_1' + \ldots + B_\mu B_\mu')$$

[1] Sitzungsberichte, 1892.

als Vielfachsumme von lauter Producten $P_{1m}-CQ$ darstellbar ist, wo Q ein Potenzproduct der Unbestimmten $A'_0, A'_1, \dots B'_0, B'_1, \dots$ bezeichnet.

Dieser Satz lässt sich leicht auf ein Product von mehr als zwei Factoren ausdehnen. Sind

$$\Phi, \Psi, \dots \Theta$$

irgend eine Anzahl von ganzen Functionen der Variablen $x, y, \dots$ mit unbestimmten Coëfficienten und sind

$$\begin{array}{l} A_0, A_1, \dots \\ B_0, B_1, \dots \\ \dots\dots\dots \\ E_0, E_1, \dots \end{array}$$

die Coëfficienten von $\Phi, \Psi, \dots \Theta$,

$$\begin{array}{l} A'_0, A'_1, \dots \\ B'_0, B'_1, \dots \\ \dots\dots\dots \\ E'_0, E'_1, \dots \end{array}$$

Unbestimmte, so gibt es Exponenten $a, b, \dots e$ von der Art, dass der Ausdruck

$$(A_0 A'_0 + A_1 A'_1 + \dots)^a (B_0 B'_0 + B_1 B'_1 + \dots)^b \dots (E_0 E'_0 + E_1 E'_1 + \dots)^e$$

als Vielfachsumme von lauter Producten $L\Lambda$ darstellbar ist, wo L ein Potenzproduct der Unbestimmten

$$A_0, A_1, \dots B_0, B_1, \dots, E_0, E_1, \dots A'_0, A'_1, \dots E'_0, E'_1, \dots$$

und Λ einen Coëfficienten des nach $x, y, \dots$ entwickelten Productes $\Phi\Psi \dots \Theta$ bezeichnen.

Sind daher, den einzelnen Zahlenpaaren $\alpha\beta$ entsprechend,

$$A^{(0)}_{\alpha\beta}, A^{(1)}_{\alpha\beta}, \dots A^{(\nu-1)}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

$\rho(\rho-1)$ Reihen von je ν Unbestimmten, so gibt es nach dem angeführten Satze Exponenten

$$m_{01}, m_{10}, m_{02}, m_{20}, \dots m_{\rho-2\,\rho-1}, m_{\rho-1\,\rho-2}$$

von der Art, dass das über alle oben beschriebenen Werthepaare $\alpha\beta$ erstreckte Product

$$W = \Pi(A^{(0)}_{\alpha\beta}(\varphi^{(0)}_{\alpha} - \varphi^{(0)}_{\beta}) + A^{(1)}_{\alpha\beta}(\varphi^{(1)}_{\alpha} - \varphi^{(1)}_{\beta}) + \ldots$$
$$\ldots + A^{(\nu-1)}_{\alpha\beta}(\varphi^{(\nu-1)}_{\alpha} - \varphi^{(\nu-1)}_{\beta}))^{m_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

als Vielfachsumme von Producten $L\Lambda$ darstellbar ist, wo L ein Potenzproduct von lauter Differenzen $\varphi^{(i)}_{\alpha} - \varphi^{(i)}_{\beta}$ und Unbestimmten (1), also eine ganze ganzzahlige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Unbestimmten (1) und Λ einen Coëfficienten der Potenzproducte $U, U', \ldots$ in $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ bezeichnen. Das Product W erscheint demnach in der Gestalt

$$W = ST + S'T' + \ldots, \quad (3)$$

wo $T, T', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Unbestimmten (1) bezeichnen.

3.

Sind

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

Unbestimmte, so treten in der Entwicklung des Productes

$$\begin{aligned} V = (y_1 - x_1)(y_2 - x_1) & \ldots (y_{n-1} - x_1) \quad (4) \\ (y_2 - x_2) & \ldots (y_{n-1} - x_2) \\ & \ldots \\ & (y_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

nach den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur die Potenzproducte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots$ auf und man kann daher

$$V = \mathfrak{P}Q + \mathfrak{P}^{(1)}Q^{(1)} + \ldots \mathfrak{P}^{(\nu-1)}Q^{(\nu-1)}$$

setzen, wo $Q, Q^{(1)}, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnen. Geht $Q^{(i)}$ für

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \ldots y_{n-1} = x_n$$

in $X^{(i)}$ über und sind

$$r = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{e} \\ 1\,2 \ldots n \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}' \ldots \mathfrak{e}' \\ 1\,2 \ldots n \end{pmatrix}$$

irgend zwei Permutationen der Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$,

$$P = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)$$
$$(x_3-x_2)\dots(x_n-x_2)$$
$$\dots$$
$$(x_n-x_{n-1})$$

das Differenzenproduct der Unbestimmten $x_1, x_2, \dots x_n$, so hat die Summe

$$\sum_i \mathfrak{P}_r^{(i)} X_s^{(i)} = \mathfrak{P}_r Q_s + \mathfrak{P}_r^{(1)} Q_s^{(1)} + \dots + \mathfrak{P}_r^{(\nu-1)} Q_s^{(\nu-1)}$$

den Werth $\pm P$ oder 0, je nachdem die Permutationen r und s identisch oder verschieden sind. Denn die Identität (4) geht zunächst durch Ausführung der Permutation r an den Stellenzeigern von $x_1, x_2, \dots x_n$ in

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} Q^{(i)} = (y_1-x_\mathfrak{a})(y_2-x_\mathfrak{a})\dots(y_{n-1}-x_\mathfrak{a})$$
$$(y_2-x_\mathfrak{b})\dots(y_{n-1}-x_\mathfrak{b})$$
$$\dots$$
$$(y_{n-1}-x_\mathfrak{e})$$

über und man erhält hierauf, wenn

$$y_1 = x_{\mathfrak{b}'}, \qquad y_2 = x_{\mathfrak{c}'}, \dots y_{n-1} = x_{\mathfrak{e}'}$$

gesetzt wird, wodurch $Q^{(i)}$ in $X_s^{(i)}$ übergeht,

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} X_s^{(i)} = (x_{\mathfrak{b}'}-x_\mathfrak{a})(x_{\mathfrak{c}'}-x_\mathfrak{a})\dots(x_{\mathfrak{e}'}-x_\mathfrak{a})$$
$$(x_{\mathfrak{c}'}-x_\mathfrak{b})\dots(x_{\mathfrak{e}'}-x_\mathfrak{b})$$
$$\dots$$
$$(x_{\mathfrak{e}'}-x_\mathfrak{d}).$$

Dieses Product ist nur dann von Null verschieden, wenn $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \dots \mathfrak{e}'$ verschieden ist also mit $\mathfrak{a}'$ zusammenfällt, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{c}', \dots \mathfrak{e}'$ verschieden ist also mit $\mathfrak{b}'$ zusammenfällt u. s. f., wenn also r und s identisch sind. Sind aber r, s identisch, so wird

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} Q_r^{(i)} = (x_\mathfrak{b}-x_\mathfrak{a})(x_\mathfrak{c}-x_\mathfrak{a})\dots(x_\mathfrak{e}-x_\mathfrak{a})$$
$$(x_\mathfrak{c}-x_\mathfrak{b})\dots(x_\mathfrak{e}-x_\mathfrak{b})$$
$$\dots$$
$$(x_\mathfrak{e}-x_\mathfrak{d})$$
$$= \pm P.$$

4.

Ersetzt man in dem Ausdrucke W die Unbestimmten

$$A_{\alpha\beta}^{(0)},\ A_{\alpha\beta}^{(1)},\ldots A_{\alpha\beta}^{(\nu-1)}$$

für jedes β durch

$$X_{q\alpha}^{(0)},\ X_{q\alpha}^{(1)},\ldots X_{q\alpha}^{(\nu-1)},$$

so wird

$$\begin{aligned}
&X_{q\alpha}^{(0)}(\varphi_\alpha^{(0)}-\varphi_\beta^{(0)})+X_{q\alpha}^{(1)}(\varphi_\alpha^{(1)}-\varphi_\beta^{(1)})+\ldots\\
&\quad=\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{q\alpha}^{(i)}+\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{gq\alpha}^{(i)}+\ldots+\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{kq\alpha}\\
&\quad-\sum X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{q\beta}^{(i)}-\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{gq\beta}^{(i)}-\ldots-\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{kq\beta}\\
&\quad=\pm P
\end{aligned}$$

und demzufolge

$$W=\pm P^\lambda.$$

Aus (4) ergibt sich dann eine Identität von der Form

$$\pm P^\lambda=SH+S'H'+\ldots,$$

wo $H, H',\ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2,\ldots x_n$ bezeichnen. Man darf λ gerade annehmen, da man im Gegenfalle nur beide Seiten der Identität mit P zu multipliciren braucht. Ist daher R die Discriminante der Function

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

so hat man eine Identität von der Form

$$R^\mu=KS+K'S'+\ldots,$$

wo $K, K',\ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2,\ldots x_n$ bezeichnen.

Permutirt man in derselben die Unbestimmten $x_1, x_2,\ldots x_n$ auf alle möglichen Weisen und addirt die Resultate, so ergibt sich nach Division mit $n!$

$$R^\mu=S\frac{1}{n!}\Sigma K+S'\frac{1}{n!}\Sigma K'+\ldots,$$

wo ΣK, $\Sigma K', \ldots$ die Summe der Werthe bezeichnen, welche aus $K, K', \ldots$ durch alle Permutationen von $x_1, x_2, \ldots$ hervorgehen. Da diese Summen in $x_1, x_2, \ldots$ symmetrisch sind, so sind $\frac{1}{n!}\Sigma K$, $\frac{1}{n!}\Sigma K', \ldots$ bekannte ganze rationalzahlige Functionen $G, G', \ldots$ von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ und man hat

$$R^\mu = GS + G'S' + \ldots$$

Gehen nun $G, S, G', S', \ldots$ nach Ersetzung von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ durch $c_1, c_2, \ldots c_n$ in $G_0, S_0, G_0', S_0', \ldots$ über, so hat man

$$D^\mu = G_0 S_0 + G_0' S_0' + \ldots$$

und es erhellt, dass $S_0, S_0', \ldots$ nicht alle verschwinden können

Über die innere Reibung des Broms und deren Änderung mit der Temperatur

von

Leopold Kann.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

Der Apparat musste zum Zwecke der vorliegenden Untersuchung vollständig aus Glas und zugeschmolzen sein; seine Einrichtung war daher so getroffen, dass er — ohne erst wieder geöffnet zu werden — zu wiederholten Messungen verwendet werden konnte, dass ferner das Brom auf constanter Temperatur erhalten und dieselbe verlässlich abgelesen werden konnte.

Es kamen bei den Versuchen zwei hiezu construirte Typen zur Anwendung, welche den genannten Anforderungen vollständig entsprachen (Fig. 1 und 2).

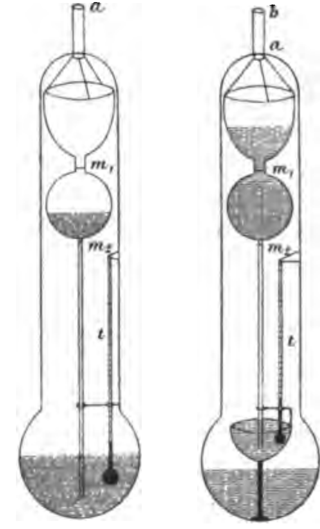


Fig. 1. Fig. 2.

Die Wirkungsweise ist aus der Figur ersichtlich: Der Apparat wird mit Brom gefüllt und dann die Röhre *(a)* oben zugeschmolzen. Um die Ausflusszeit zu bestimmen, wird der ganze Apparat umgestürzt und dann rasch wieder aufgerichtet. Hiebei fängt sich eine Quantität Brom im Trichter und füllt die

Kugel; es wird dann mittelst Chronometers die Zeit gemessen, welche die Brommenge zwischen den zwei Marken (m_1, m_2) oberhalb und unterhalb der Kugel zum Ausfliessen braucht. Der ganze Apparat kann in ein Wasserbad gebracht, die Temperatur des Broms an dem miteingeschmolzenen Thermometer *(t)* verlässlich abgelesen werden.

Der Becher unten (in Fig. 2) hat den Zweck, das untere Niveau constant zu erhalten, denn es füllt sich aus dem Überschusse des Trichters zuerst der Becher, und das dann noch nachfliessende Brom rinnt über seinen Rand ab.

Wie schon die Apparate anzeigen, war die Methode die von Poiseuille, bei welcher die Ausflusszeit aus Capillaren gemessen wird.

Es ist

$$\eta = \frac{\pi . H . r^4 . s}{8 v L}, \quad \left(\frac{gr}{cm . \mathrm{sec}}\right)$$

worin s das specifische Gewicht (Dichte $\times$ 980·84), H die Druckhöhe in Centimetern der Flüssigkeit, L die Länge der Capillare in Centimetern, r ihr Radius in Centimetern und v die Ausflussmenge in der Secunde in Cubikcentimetern ist.

Dann ist η_t für die Temperatur $t°$ C.:

$$\eta_t = \frac{\pi H_t r_t^4 s_t}{8 v_t L_t} = \frac{\pi . H_0(1+\alpha t) r_0^4 (1+\alpha t)^4 . 980 \cdot 84 . s_t . T}{8 V_0 (1+\alpha t)^3 L_0 (1+\alpha t)},$$

worin T die Ausflusszeit und V_0 das Volumen der Kugel zwischen den Marken bei 0° C. bedeutet; da ferner

$$s_t = \frac{s_0}{1 + at + bt^2 + ct^3},$$

so ist

$$\eta_t = \left[\frac{\pi H_0 r_0^4 G\, 80 \cdot 84}{8 V_0 L_0}\right] . \frac{s_0(1+\alpha t) T}{1 + at + bt^2 + ct^3}$$

und schliesslich

$$\eta_t = \frac{C . T . (1+\alpha t) s_0}{1 + at + bt^2 + ct^3},$$

worin α der Ausdehnungscoëfficient des Glases, C eine Constante des Apparates und a, b, c Ausdehnungscoëfficienten der zu untersuchenden Flüssigkeit sind.

Es wären nur noch ein paar Worte über den Druck, unter dem die Flüssigkeit ausfliesst, zu sagen: Da der Ausfluss unter dem eigenen Druck der Flüssigkeit erfolgte, so war derselbe variabel; führt man aber die mittlere Druckhöhe (bei der ersten Type den Verticalabstand des Mittelpunktes der Ausflusskugel vom mittleren unteren Niveau, bei der zweiten den dieses Mittelpunktes vom Becherrande) ein, so ist der Fehler, der hiedurch entsteht — wie Dr. v. Schweidler[1] gezeigt hat — zu vernachlässigen.

Kugel und Capillare wurden vor dem Einschmelzen in den Apparat calibrirt, um die Constante C zu bestimmen. Der fertige Apparat (nur am oberen Ende der Einfüllröhre *(a)* offen) wurde mit einem bestimmten Quantum destillirten Wassers gefüllt und das η des Wassers für eine bestimmte Temperatur nach der Formel

$$\eta_t = C(1+\alpha t).T.s_t$$

bestimmt, um das Resultat der Calibrirung zu prüfen. Der erhaltene Werth[2] stimmte sehr gut mit dem schon bekannten überein. (Natürlich hätte auch ohne Calibrirung die Bestimmung des C aus dem Wasserwerth genügt.)

Hernach wurde der Apparat entleert, getrocknet, mit demselben Quantum Brom gefüllt und dann die Röhre oben zugeschmolzen (bei *b*, Fig. 2).

Schliesslich wurden die Reibungscoëfficienten für verschiedene Temperaturen bestimmt nach der Formel

$$\eta_t = \frac{C.T(1+\alpha t)s_0}{1+at+bt^2+ct^3} = \frac{D.T(1+\alpha t)}{1+at+bt^2+ct^3},$$

---

[1] Dr. Eg. v. Schweidler, Über die innere Reibung und elektrische Leitungsfähigkeit von Quecksilber und Amalgamen (diese Sitzungsber. Bd. CIV, Abth. II. a, April 1895).

[2] Es war $\eta_{13} = 0\cdot01215$ statt $0\cdot012117$.

worin

$$\alpha = 0 \cdot 0000085,$$
$$a = 0 \cdot 00103819,$$
$$b = 0 \cdot 00000171138,$$
$$c = 0 \cdot 0000000054471,$$

T die Ausflusszeit in Secunden und D die Constante — für den benützten Apparat (da s_0 für Brom $= d^0/_4 = 3 \cdot 18659$) $D = Cs_0 = 0 \cdot 0001065775$ — ist.

In der folgenden Tabelle finden sich die Ausflusszeiten[1] *(T)*, die absoluten (η) und in der letzten Colonne die relativen *z)* Reibungscoëfficienten (letztere auf Wasser bezogen, dessen Reibungscoëfficient für 0° gleich 100 gesetzt) für die Temperaturen *(t)* von 0° bis 50° C.

t^0	T''	η	z
0°	133·875	0·014268	78·9
5	128·12	0·013584	75·1
10	122·83	0·012955	71·6
15	117·835	0·012363	68·3
20	113·36	0·011829	65·4
25	109·14	0·011327	62·6
30	105·35	0·010874	60·1
35	102·00	0·010469	57·9
40	99·10	0·010114	55·9
45	96·50	0·009793	54·1
50	94·06	0·009489	52·5

Die Werthe der letzten Colonne sind in Fig. 3 graphisch dargestellt (Curve I). Zum Vergleich ist die Curve der Z für Wasser auch eingezeichnet (II).

---

[1] Diese sind Mittelwerthe aus durchschnittlich 3—4 Beobachtungen, z. B. bei 25° 109·0, 109·1 und 109·32(5).

Wo nicht genau für die betreffende Temperatur beobachtet wurde, wurden die Werthe durch lineare Interpolation aus den Nachbarwerthen gewonnen.

Fig. 4 enthält die absoluten Werthe des Brom (Curve I) und des Wassers[1] (Curve II).

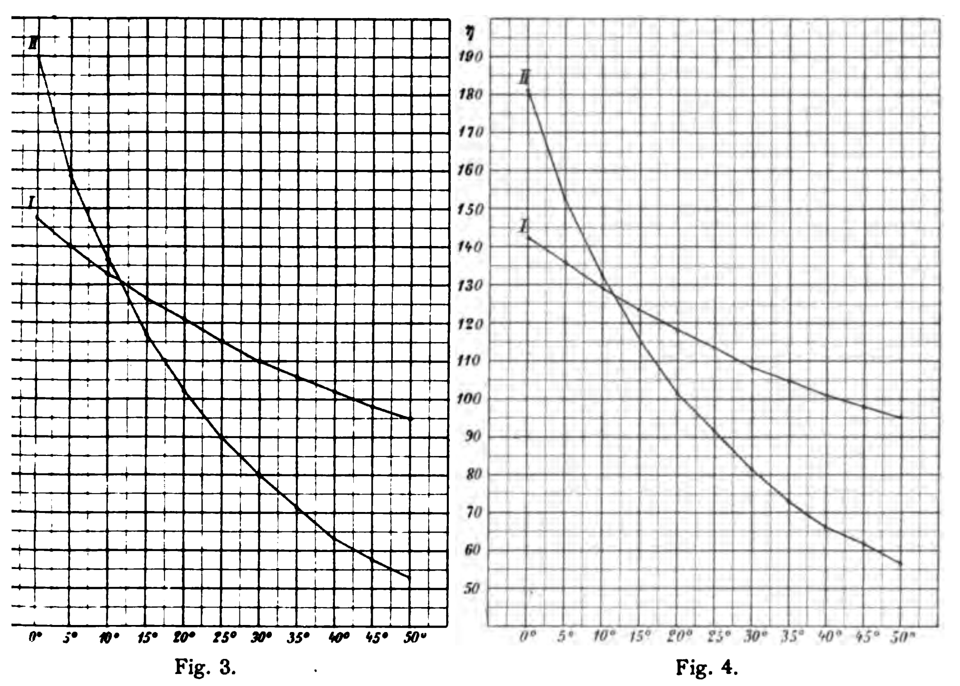


Fig. 3. Fig. 4.

Zum Schlusse drängt es mich, Herrn Prof. Fr. Exner für seine liebenswürdige Unterstützung bei meiner Arbeit meinen innigsten Dank auszusprechen.

[1] Die Werthe (sowohl η, als z) für Wasser sind den Tabellen von Landolt und Börnstein entnommen; sie seien noch hier angeführt:

t	η	z
0°	0·018086	100·0
5	0·015301	84·6
10	0·013257	73·3
15	0·011503	63·6
20	0·010164	56·2
25	0·009240	49·9
30	0·008121	44·9
35	0·007361	40·7
40	0 006638	36·7
45	0·006131	33·9
50	0·005697	31·5



SITZUNGSBERICHTE

DER

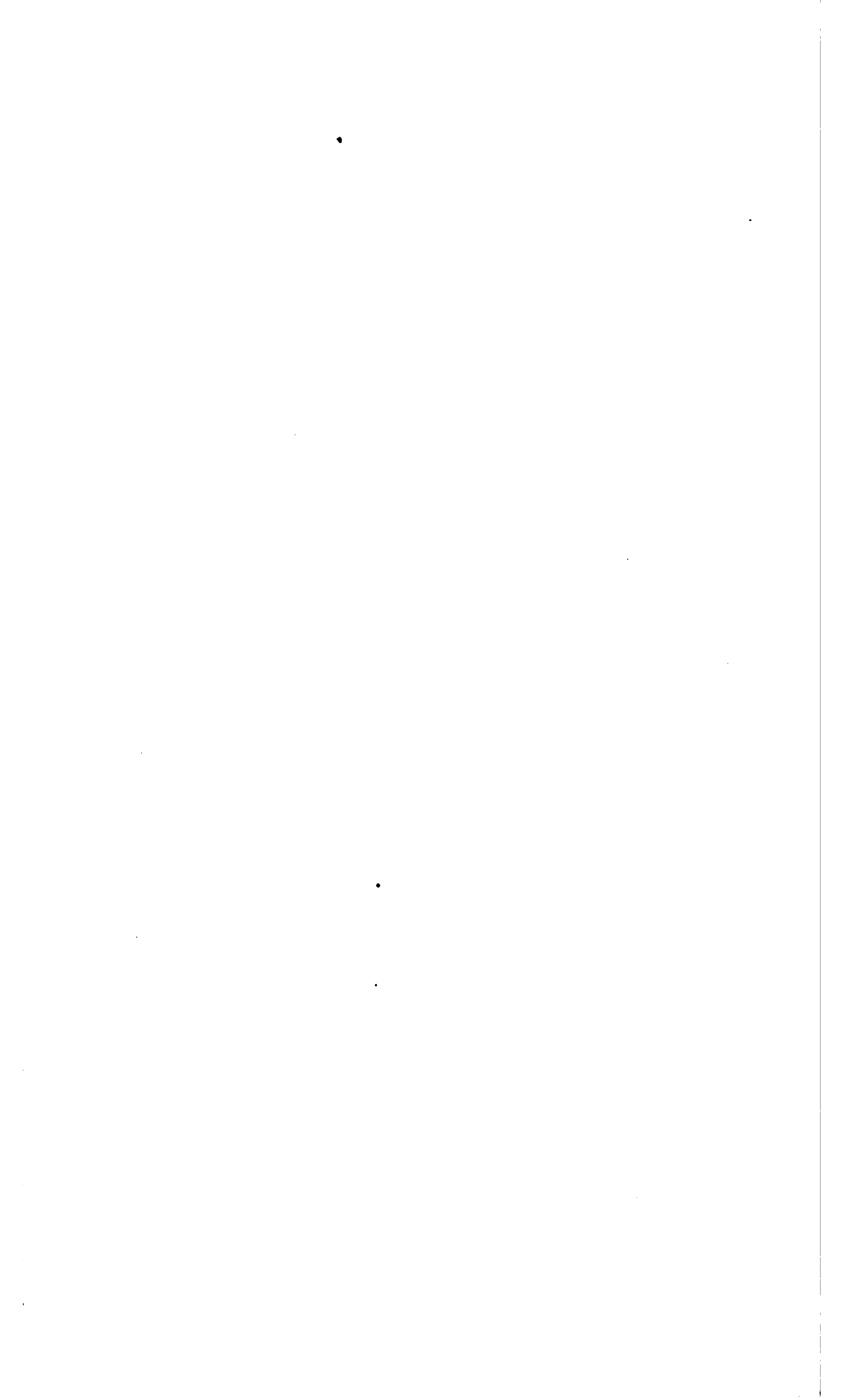
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XV. SITZUNG VOM 3. JUNI 1897.

Der Secretär verliest die aus Anlass der fünfzigjährigen Jubelfeier der Akademie eingelaufenen schriftlichen Glückwünsche und Telegramme des Präsidiums der Böhmischen Kaiser Franz Josef-Akademie der Wissenschaften und Kunst, des Marine-Commandanten und Chefs der Marine-Section des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums Admiral Freiherrn Daublebsky v. Sterneck, des Directors der k. k. Geologischen Reichsanstalt Hofrathes Dr. Stache, des Präsidenten der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, ferner des Commandanten S. M. Schiffes »Pola« k. u. k. Linienschiffs-Capitäns v. Pott und des Mitgliedes des wissenschaftlichen Stabes für oceanographische Forschungen k. k. Regierungsrathes Prof. Luksch in Fiume.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht setzt die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Kenntniss, dass dieselbe laut einer diesem Ministerium im Wege des k. und k. Ministeriums des Äussern zugekommenen Mittheilung der kaiserl. russischen Botschaft zur Theilnahme an dem in der zweiten Hälfte August d. J. in St. Petersburg stattfindenden internationalen Geologen-Congress eingeladen wird.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von Dr. L. Réthi vor, die im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführt wurde und den Titel trägt: »Die Stimmbandspannung, experimentell geprüft«.

XVI. SITZUNG VOM 18. JUNI 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a., Heft I—II (Jänner bis Februar 1897); Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft IV (April 1897).

Das c. M. Herr Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über räumliche Poncelet'sche Polygone« und
2. »Bemerkungen über symmetrische Correspondenzen ungeraden Grades«, beide Arbeiten von Prof. Dr. Gustav Kohn in Wien.
3. »Arbeiten zur Elektrodynamik. I. Zusammenhang der elektrischen Kräfte und Wellen«, von Dr. Ign. Schütz in Nürnberg.

Ferner legt der Secretär ein von Herrn Béla Vilmos, Techniker in Zürich, eingesendetes versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, welches die Aufschrift führt: »Neue Motorentheorie und praktische Durchführung derselben«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung der Herren Prof. Dr. R. Přibram und C. Glücksmann in Czernowitz: »Über den Zusammenhang zwischen Volumänderung und dem specifischen Drehungsvermögen activer Lösungen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

1. »Über den Austausch von Brom gegen Chlor in aromatischen Verbindungen«, von Dr. Rud. Wegscheider.
2. »Zur Kenntniss der Nitrosoproducte des Phloroglucindiäthyläthers«, von H. Weidel und J. Pollak.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Bemerkungen zu den in der Sammlung G. H. Verall befindlichen Originalexemplaren Bigot's und Macquart's aus der Abtheilung der *Muscaria schizometopa* und Beschreibung von zwei *Hypoderma*-Arten«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Tuma, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Ein Phasenmessinstrument für Wechselströme«.

Ein Phasenmessinstrument für Wechselströme

von

Dr. **Josef Tuma,**

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Ausgeführt im physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

Unter verschiedenen Methoden, welche eine physikalische Grösse zu messen gestatten, ist immer jene die beste, welche die gesuchte Bestimmung am directesten liefert. Eine oft gebrauchte Grösse, bezüglich welcher man von einer directen Messung noch recht weit entfernt ist, ist die Phasendifferenz zwischen zwei Wechselströmen von gleicher Periode. Bis in die letzte Zeit benöthigte man drei Ablesungen zu ihrer Bestimmung, und erst jetzt ist es gelungen, sie mit einer Einstellung und nachheriger Ablesung zu finden.

Um nur einige Methoden, welche bisher zur Anwendung kamen, in dieser Hinsicht zu betrachten, sei hervorgehoben, dass nach der alten Drei Voltmeter-Methode durch Messung dreier Spannungen, nach einer neueren, sehr schönen, von Puluj[1] vorgeschlagenen Methode durch Ausmessung von Lissajon'schen Figuren, die von unter dem Einflusse der zwei Wechselströme schwingenden Spiegeln erzeugt werden, die Phasenverschiebung bestimmt werden kann.

Ebenso sind drei Ablesungen und noch eine Berechnung bei Anwendung einer kürzlich von Lord Rayleigh[2]

---

[1] Diese Sitzungsber., 1893, S. 801.

[2] Philosophical Magazine, 1897, No. 264.

angegebenen Methode erforderlich. Dolivo Dobrowolsky[1] publicirte ein sogenanntes Phasenmeter, doch misst dasselbe gar nicht die Phasenverschiebung zweier Wechselströme, sondern nur das Product $J \sin \varphi$, wobei φ die Phasenverschiebung speciell zwischen Stromstärke und Spannung ist. Die Phasenverschiebung wird direct bestimmt mittelst eines von Hartmann und Braun[2] patentirten Apparates, welcher insoferne eine Vervollkommnung darstellt, als behufs der Messung nur eine Einstellung und hierauf die Ablesung des Verschiebungswinkels erforderlich ist. Jedoch scheint mir der Apparat so complicirt — es ist ein Wechselstrommotor dabei — dass eine einfachere Anordnung wohl wünschenswerth sein dürfte.

Eine solche will ich im Folgenden beschreiben. Dabei ist zur Messung eine Abgleichung zweier Ströme erforderlich, was einer Einstellung gleichkommt, und dann kann die Phasenverschiebung als Winkel direct oder der Cosinus derselben abgelesen werden.[3]

Theorie.

Zwei kreisförmige Spulen A und B bilden mit einander einen rechten Winkel. Jede ist von einem der Wechselströme, deren Phasenverschiebung φ gemessen werden soll, durchflossen. Es sei der eine $J_1 \sin \alpha t$, der andere $J_2 \sin(\alpha t + \varphi)$. Der erste erzeuge ein magnetisches Feld $c_1 J_1 \sin \alpha t$, der zweite $c_2 J_2 \sin(\alpha t + \varphi)$. Ausserdem werde vorläufig noch das Vorhandensein der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H berücksichtigt und nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Spule A, in welcher der Strom $J_1 \sin \alpha t$ fliesst, senkrecht zum magnetischen Meridian stehe. Ferner befinde sich in dem

[1] E. T. Z. 1894, Heft 25.

[2] D. R. P. Kl. 21, H. 18287.

[3] Gerade als ich diese Abhandlung der Akademie überreichen wollte, wurde mir ein Buch von Rossi: »Sulla misura delle differenze di fase« übermittelt, einer von der lombardischen Akademie preisgekrönten Arbeit, welche eine sehr dankenswerthe Zusammenstellung aller Methoden zur Bestimmung von Phasendifferenzen enthält. Der Verfasser gibt auch einen neuen von ihm construirten Apparat an, der thatsächlich einen Fortschritt bedeutet. Doch halte ich meine hier angegebene Vorrichtung für einfacher.

Centrum der beiden Spulen eine kleine Nadel n aus weichem Eisen, an einem Coconfaden aufgehangen. Diese Nadel schliesse mit der zur Spule A Normalen einen Winkel ψ ein. Es ist dann die Stärke des Feldes in der Richtung der Nadel

$$(c_1 J_1 \sin \alpha t + H) \cos \psi + c_2 J_2 \sin (\alpha t + \varphi) \sin \psi$$

und das inducirte magnetische Moment der Nadel

$$M = \mu[(c_1 J_1 \sin \alpha t + H) \cos \psi + c_2 J_2 \sin (\alpha t + \varphi) \sin \psi).$$

Bezeichnen wir mit D_1, D_2 und D_R das von der Spule A und B herrührende und das resultirende Drehmoment, so dass $D_R = D_1 + D_2$ ist, und bestimmen wir

$$\bar{D}_R = \frac{1}{T}\int_0^T (D_1 + D_2) . dt,$$

also

$$\bar{D}_R = \bar{D}_1 + \bar{D}_2.$$

Da

$$D_1 = (c_1 J_1 \sin \alpha t + H) \mu[(c_1 J_1 \sin \alpha t + H) \cos \psi + \\ + c_2 J_2 \sin (\alpha t + \varphi) \sin \psi]$$

$$D_2 = c_2 J_2 \sin (\alpha t + \varphi) \mu[(c_1 J_1 \sin \alpha t + H) \cos \psi + \\ + c_2 J_2 \sin (\alpha t + \varphi) \sin \psi],$$

findet man

$$\bar{D}_1 = \frac{\mu}{2}[(c_1^2 J_1^2 + 2H^2) \sin \psi \cos \psi + c_1 c_2 J_1 J_2 \sin^2 \psi \cos \varphi]$$

$$\bar{D}_2 = -\frac{\mu}{2}[c_1 c_2 J_1 J_2 \cos \varphi \cos^2 \psi + c_2^2 J_2^2 \sin \psi \cos \psi]$$

Also:

$$\bar{D}_R = \mu[(c_1^2 J_1^2 - c_2^2 J_2^2 + 2H^2) \sin 2\psi - 2 c_1 c_2 J_1 J_2 \cos \varphi \cos 2\psi].$$

Ist die Nadel stark gedämpft — ich habe eine Öldämpfung angewandt —, so stellt sie sich in die Richtung ein, für welche $D_R = 0$ ist.

Man findet also für diese Richtung:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 c_1 c_2 J_1 J_2 \cos \varphi}{c_1^2 J_1^2 - c_2^2 J_2^2 + 2H^2}.$$

Machen wir noch $J_1 = J_2$, so wird

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\frac{c_1}{c_2}\cos\varphi}{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1 + \frac{2H^2}{c_2^2 J^2}},$$

woraus sich ergibt, dass, wenn $\frac{2H^2}{c_2^2 J^2}$ verhältnissmässig klein gegen $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1$ gemacht wird, man mit genügender Annäherung erhält:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\frac{c_1}{c_2}\cos\varphi}{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1}.$$

Diese Bedingung wird leicht erfüllt, wenn man die Spulen so wickelt, dass

$$\frac{2\frac{c_1}{c_2}}{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1} = 1$$

ist.

Es ist dann $\frac{c_1}{c_2} = 2 \cdot 4142$, und es wird

$$\cos\varphi = \operatorname{tg} 2\psi.$$

Versuchsanordnung.

Zwei Spulen A und B (Fig. 1) von circa 15·5 *cm* und 18 *cm* mittlerem Durchmesser und 3 *cm* Breite wurden auf einem mit drei Stellschrauben horizontal zu stellenden Brette derart befestigt, dass die weitere Spule vollkommen fixirt wurde, die engere aber um eine verticale Axe, welche in der Mittelebene der ersteren lag, um einen kleinen Winkel drehbar und durch entsprechende Schrauben fixirbar war. Die Spulen wurden beide mit einem 1 *mm* dicken, doppelt umsponnenen Kupferdrahte bewickelt, wobei das Verhältniss der Windungen so gewählt wurde, dass die Rechnung für gleiche Stromstärken in beiden Spulen magnetische Felder im Verhältniss 2·4142 erwarten liess.

Um diese zu vergleichen, wurde hierauf eine kleine Nadel aus weichstem, gut ausgeglühtem Eisendraht an einem Coconfaden in der Mitte der Spulen aufgehangen und bei verschiedenen Stromstärken die Schwingungsdauer bestimmt. Es ergab sich, dass die Schwingungszeiten der Theorie ent-

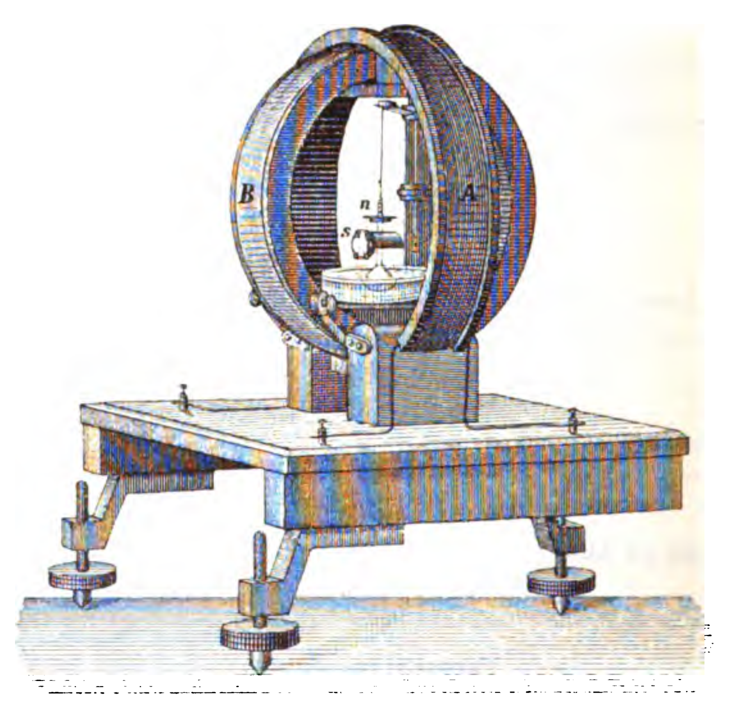


Fig. 1.

sprechend der ersten Potenz der Stromstärken vollkommen proportional waren, und wurde das gesuchte Verhältniss $\frac{C_1}{C_2}$ gleich 2·412, also um nur 0·08% von dem geforderten Werthe verschieden gefunden. Nachdem diese Bestimmung gemacht war, wurden die magnetischen Axen der Spulen auf einander senkrecht gestellt, indem der ganze Apparat auf ein Stativ gebracht wurde, das ein um eine genau vertical stellbare Axe drehbares Brett trug. Mit Hilfe eines ebenfalls auf das Stativ gestellten, rechtwinkeligen Prismas, in dessen Kathetenflächen

die Spiegelbilder einer Lichtquelle beobachtet wurden, konnte eine Drehung des Stativs um genau 90° bewerkstelligt werden. Im Centrum der Spulen befand sich eine mit Spiegel versehene, permanent magnetisirte Stahlnadel. Es wurde zuerst das Stativ so gedreht, dass bei Stromdurchgang in entsprechender Richtung durch die fixe Spule eine Ablenkung mittelst Ablesefernrohr nicht wahrnehmbar war, also die magnetische Axe dieser Spule die Richtung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus hatte. Dann wurde das Stativ um 90° gedreht und der Strom durch die bewegliche Spule geschickt. Diese wurde nun so lange verstellt, bis abermals keine Ablenkung der Nadel wahrgenommen wurde. Nachdem hierauf die Stahlnadel abermals durch eine weiche Eisennadel mit Spiegel und in Vaselinöl tauchender Dämpfung versehen worden war, war der Phasenmesser gebrauchsfertig.

Es erübrigte nun nur noch, eine Anordnung zu treffen, mittelst welcher die Intensitäten zweier in der Phase verschiedener Wechselströme gleichgemacht werden konnten. Aus allgemeinen Principien ist unmittelbar klar, dass dazu nur Anordnungen verwendbar sind, bei denen die beiden Ströme zwei Systeme durchfliessen, die sich gegenseitig weder elektrisch, noch magnetisch beeinflussen. Eine derartige Anordnung wäre z. B. durch zwei über einander befindliche Ampèremeter von gleicher Empfindlichkeit gegeben, welche die Gleichheit der Stromstärken durch gegenseitige Deckung zweier Zeiger angeben würden. Der grösseren Empfindlichkeit halber habe ich aber eine bolometrische Methode vorgezogen.

Die beiden Ströme wurden durch zwei primäre Spulen von circa 50 Windungen eines 3 *mm* dicken Drahtes ohne Eisenkerne p_1 und p_2 (Fig. 2) geschickt. Die secundären Bewicklungen s_1 und s_2 bestanden aus circa 360 Windungen eines 1·5 *mm* starken Drahtes und wurden zunächst bifilar aufgewickelt. Dann wurden die Drähte an dem Anfange dieser bifilaren Bewicklung durchschnitten und die Enden in der Weise mit einander verbunden, dass die secundäre Bewicklung zwei im selben Sinne geschaltete Abtheilungen darstellte, zwischen denen bei a und b Abzweigungsstellen vorhanden waren. Dass die Punkte a und b wirklich die Mitten der secundären

Bewicklungen darstellten, wurde mit Hilfe eines empfindlichen Bellati'schen Elektrodynamometers constatirt, indem bei Gegeneinanderschaltung je zweier Spulenhälften und Einschaltung derselben in das Dynamometer letzteres bei Hindurchgang eines Wechselstromes durch die primären Windungen keinen Strom anzeigte. Auf dieselbe Weise wurde auch untersucht,

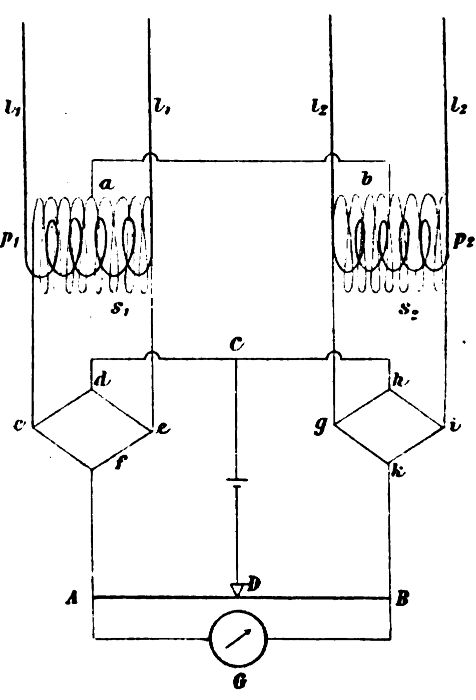


Fig. 2.

ob die in den secundären Windungen s_1 und s_2 bei Hintereinanderschaltung ihrer zwei Abtheilungen durch denselben p_1 und p_2 hintereinander durchfliessenden Wechselstrom inducirten elektromotorischen Kräfte genau gleich sind.

Weiters wurden acht genau gleiche Widerstände *cd*, *de*, *ef*, *fc*, *gh*, *hi*, *ik*, *kg* aus Pt-Draht von $^1/_{20}$ *mm* Stärke und circa 3 *cm* Länge hergestellt. Da die Abgleichung dieser Widerstände wegen der Kürze der Drähte mit freier Hand nicht erreichbar war, wurde eine sehr feine Mikrometerschraube zu

Hilfe genommen. Es wurde zuerst eine Länge gewählt und der Draht in Einschnitte, welche in dicke Kupferdrähte gemacht wurden, eingelöthet. Dieser diente an einer Wheatstone'schen Brücke als Vergleichswiderstand. Ein zweiter Draht wurde dann einseitig ebenso in den Einschnitt eines Kupferdrahtes eingelöthet und damit an die Mikrometerschraube befestigt, während das andere Ende des noch bedeutend länger gelassenen Pt-Drahtes durch einen Einschnitt eines festgeklemmten Kupferdrahtes hindurchging und durch ein Gewicht beschwert wurde. Mittelst der Mikrometerschraube konnten nun an der Wheatstone'schen Brücke die Pt-Drähte genau abgeglichen werden, worauf sie auch an den zweiten Kupferdrähten festgelöthet wurden. Dann wurden sie zu je vier mit der in der Figur ersichtlichen Schaltung in Pappeschachteln befestigt. Durch diese Anordnung wurde erreicht, dass in jedem Moment in a, d, f und in b, h, k gleiche Potentiale zu Stande kamen, und da in Folge der Verbindung a und b diese beiden Punkte dasselbe Potential haben mussten, mussten auch die Potentiale d, f, h und k untereinander gleich sein.

Es konnten jetzt die zwei Systeme von je vier Pt-Drähten in die Wheatstone'sche Brücke geschaltet werden. Zwischen C und D befand sich ein galvanisches Element, zwischen A und B ein D'Arsonval'sches Galvanometer mit objectiver Ablesung. Waren bei dieser Anordnung die primären Ströme gleich, so wurden auch gleiche secundäre Ströme inducirt und die Pt-Drähte gleich stark erwärmt. Die Widerstände der zwei Pt-Drahtsysteme blieben gleich. Das Gegentheil war der Fall, wenn die primären Ströme ungleich waren.

Um mich von der Empfindlichkeit der Methode zu überzeugen, verzweigte ich einen Wechselstrom und sandte die zwei Theile durch die primären Wickelungen p_1 und p_2, sowie durch gleiche inductionslose Widerstände hindurch. Eine an geeigneter Stelle vorgenommene Überbrückung beider Zweige durch das Bellati'sche Instrument liess die Gleichheit der beiden Ströme, welche diesmal von gleicher Phase waren, erkennen. Schätzungsweise war von circa 2 Ampère an die Abgleichung auf $0 \cdot 1^0/_0$ genau möglich.

Messungen.

Zur Illustration der Anwendbarkeit des von mir construirten Phasenmessers beschloss ich die Phasenverschiebung zwischen primärer Stromstärke und elektromotorischer Kraft an einem Transformator bei verschiedenen Belastungen desselben zu messen. Leider musste ich den Transformator seiner Bestimmung, herabzutransformiren, entsprechend verkehrt einschalten, da mir nicht die nöthigen Vorschaltwiderstände für die Überbrückung der hochgespannten (circa 1900 Volt) primären Leitung zur Verfügung standen. Ich verwandte also zwei Transformatoren. Der eine war für 1000, der andere für 2500 Watt bestimmt und wurden mir dieselben, sowie ein noch zu erwähnendes Wattmeter von der Internationalen Elektricitätsgesellschaft in Wien in gütigster Weise zur Verfügung gestellt.

In die 100voltige Wechselstromleitung des Laboratoriums wurde die dicke Bewicklung des grösseren der Transformatoren T_1 (Fig. 3) eingeschaltet. Die dünne Bewicklung wurde mit der dünnen Bewicklung des zweiten Transformators T_2 verbunden und in den secundären Stromkreis des letzteren ein Rheostat R eingeschaltet. Mittelst dieses Rheostaten konnte die Belastung des zweiten Transformators und dadurch auch die des ersten variirt werden. Ausserdem waren in L noch ein Ampèremeter *Am*, die dickdrähtige Spule eines Wattmeters *Wm* und ein genau regulirbarer inductionsloser Widerstand W eingeschaltet. Eine Überbrückung der Leitungen L wurde durch das Voltmeter V, durch eine in der Figur nicht angedeutete, zum Wattmeter geführte Leitung und endlich durch die durch einen Widerstand W' die oben erwähnte primäre Spule p_2 der Vorrichtung für die Stromabgleichung und die eine der Spulen des Phasenmessers B führende Leitung l_2 vorgenommen. Der Widerstand W diente als Abzweigewiderstand für eine Leitung l_1, welche durch die andere Spule p_1 der Vorrichtung für die Stromabgleichung und die zweite Spule des Phasenmessers A führte.

Die Ablesung am Phasenmesser erfolgte mittelst Fernrohres und musste wegen der grossen Ablenkungen die Scala

sehr nahe, das Fernrohr aber weit aufgestellt werden. Indem die Scala auf die Verbindungslinie von Fernrohr und Spiegel

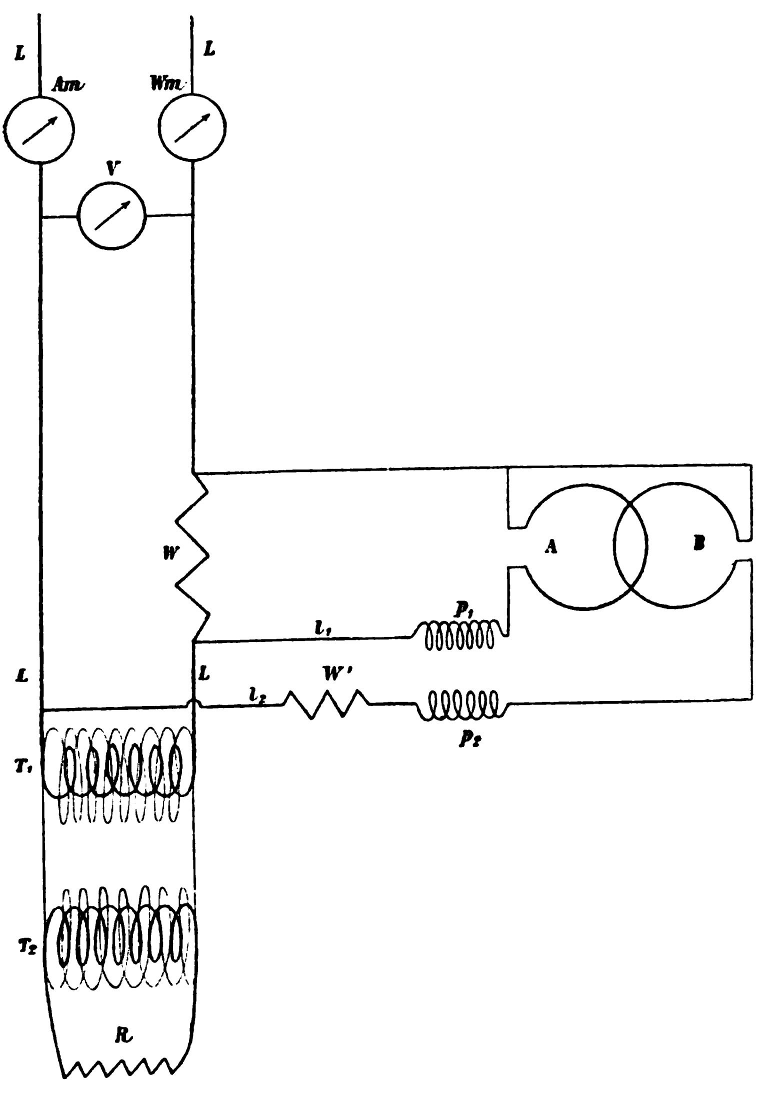


Fig. 3.

genau senkrecht gestellt wurde, stellten die Ablesungen das Product $d . \operatorname{tg} 2\psi$ dar, wobei d die Entfernung der Scala von der

Drehungsaxe des Spiegels bedeutet. Vermittelst einer Anordnung von Quecksilbercontacten konnte der die Leitung l_2 durchfliessende Strom durch beide Spulen *A* und *B* hinter einander geschickt und so die Ablenkung für die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ bestimmt werden. Diese Ablenkung stellte, da in dem Falle $2\psi = 45°$ war, auch die Entfernung der Scala vom Spiegel dar. Wurde dieser Strom nur durch *B* allein hindurchgeschickt, so erhielt man die Null-Lage der Nadel. Die Ablesung für $2\psi = 45°$ war 33·7 *cm*.

In der folgenden Tabelle sind vier Bestimmungen für die möglich gewesenen Belastungen des Transformators T_1 ausgeführt. Aus einer Voltmeter-, Ampèremeter- und Wattmeterablesung wurden $\cos\varphi$ berechnet und sind ebenfalls angegeben. Die Constante des Wattmeters (Ganz és Társa) war 5·694 für 1° Torsionswinkel bei 500 Ω Vorschaltwiderstand. Diese Controlmessungen sind allerdings nicht sehr genau, da das mir zur Verfügung stehende Ampère- und Voltmeter keine grosse Genauigkeit zuliessen.

Ablesung am Phasenmesser	cos φ beob.	φ	Ampère	Volt	Wattmeter-Ables.	Watt	cos φ ber.
18·1 *cm*	0·5371	57°30'	6·7	101	60°	341·64	0·5048
29·4	0·872	29 20	12·5	98	194	1104·64	0·9017
32·0	0·949	18 20	13·3	96·3	207	1178·66	0·9203
33·70	1·000	0 0	17·4	89·5	285	1622·79	1·0420

Wenn auch, wie aus dem Bisherigen ersichtlich ist, einstweilen der Phasenmesser nur in provisorischer Ausführung vorliegt, so scheint mir doch, dass sich diese Anordnung leicht in einen compendiösen Apparat vereinigen lassen wird. Allerdings wird es nöthig sein, noch ein besonderes Galvanoskop für die Wheatstone'sche Brücke aufzustellen. Dagegen wird es sich vielfach empfehlen, die Spiegelablesung am Phasenmesser durch eine Zeigerablesung zu ersetzen.

Ich behalte mir vor, solche Verbesserungen auszuführen und werde in allernächster Zeit darüber Bericht erstatten.

Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist

von

O. Stolz,

c. M. k. Akad.

Das obere Integral lässt sich als besonderer Fall der nachstehenden Grenzwerthe betrachten, die wir, um eine bestimmte Annahme vor uns zu haben, für die Punkte einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erklären wollen.

1. Erster Grenzwerth. »In jedem Punkte xy des im Endlichen gelegenen Systems $\mathfrak{f}$ (dessen Punkte also sämmtlich innerhalb eines bestimmten Rechtecks liegen, dessen Seiten zu den Coordinatenaxen parallel sind) sei eine reelle Function $f(x,y)$ eindeutig definirt, und zwar sei sie endlich, d. h. es gibt zwei Zahlen A und B derart, dass, mag xy was immer für ein Punkt des Systems $\mathfrak{f}$ sein,

$$A < f(x,y) < B \tag{1}$$

ist. Über das Punktsystem $\mathfrak{f}$ wird eine Schaar oder ein Netz von einfachen geradlinig-begrenzten Vielecken mit den Zahlen $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ in der Weise ausgebreitet, dass zu jedem von ihnen Punkte von $\mathfrak{f}$ gehören und umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{f}$ mindestens in einem vorkommt. Diese τ_r sind entweder sämmtlich positiv oder negativ. Beschränkt man den Punkt xy auf alle zum Vielecke τ_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ gehörigen Systempunkte, so sei g_r die obere Grenze von $f(x,y)$.

Dann hat die Summe

$$\sum_{1}^{n} {}_r\, g_r \tau_r \tag{2}$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme eines jeden Vielecks τ_r nach den beiden Dimensionen der Ebene einen endlichen Grenzwerth G, d. h. jeder positiven Zahl $\varkappa$ entspricht eine andere λ so, dass

$$\left|\sum_{1}^{n} r\, g_r \tau_r - G\right| < \varkappa \tag{3}$$

ist, wenn nur der Durchmesser[1] (D_r) eines jeden der Vielecke τ_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ kleiner als λ ist.« Diese Beziehung wird kurz durch die Formel

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n} r\, g_r = G \tag{I}$$

angedeutet.[2]

Beweis. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. $f(x, y)$ nimmt für die Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ negative Werthe nicht an; es ist also dafür $f(x, y) \geqq 0$, somit $g_r \geqq 0$ und

$$\sum_{1}^{n} r\, g_r \tau_r \geqq 0. \tag{4}$$

Auch ist jetzt $B > 0$.

Zunächst betrachten wir nur eine unbegrenzte Reihe $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_m \ldots$ solcher Schaaren von Vielecken in der xy-Ebene, dass der Durchmesser eines jeden zur Schaar $\mathfrak{T}_m$ gehörigen Vielecks $\tau_{m,\varkappa}$ kleiner als eine beliebige vorgegebene Zahl λ ausfällt, wenn nur m gross genug ist und dabei keines von ihnen in zwei benachbarten, dem System $\mathfrak{T}_{m-1}$ zugehörigen Vielecken liegt. Von den Vielecken der Schaar $\mathfrak{T}_m$ kommen zunächst alle jene in Betracht, zu denen mindestens je ein Punkt von $\mathfrak{f}$ gehört. Diese seien

$$\tau_{m,1}\, \tau_{m,2} \ldots \tau_{m,n_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

---

[1] Unter Durchmesser eines einfachen Vielecks wird der grösste Abstand irgend zweier Punkte seines Umfanges verstanden.

[2] Für das Punktsystem auf einer Geraden lässt sich der Satz genau nach dem Verfahren zeigen, welches der Verfasser in seinen »Grundzügen der Differential- und Integralrechnung«, I, S. 353 eingeschlagen hat, um die Existenz des oberen Integrals einer Function einer Veränderlichen nachzuweisen.

Wir bezeichnen ferner die obere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ zu den dem System $\mathfrak{f}$ angehörigen Punkten von $\tau_{m,u}$ mit $g_{m,u}$ und setzen

$$\sum_{1}^{n_m}{}_u\, g_{m,u}\tau_{m,u} = \Sigma_m. \tag{6}$$

Beim Übergange von der Schaar $\mathfrak{T}_m$ zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ zerfällt jedes Vieleck $\tau_{m,u}$ in mehrere Theile, von denen jene, zu welchen keine Punkte von $\mathfrak{f}$ gehören, in die Schaar $\mathfrak{T}_{m+1}$ nicht aufzunehmen sind. Da $g_{m,u} \geqq 0$ ist, so wird Σ_m bei Weglassung der diesen Theilen $\tau'_{m+1,u}$ der $\tau_{m,u}$ entsprechenden Producte $g_{m,u}\tau'_{m+1,u}$ nicht vergrössert. Der Rest von Σ_m ist, wie leicht zu sehen, nicht kleiner als Σ_{m+1}. Wir gelangen demnach zur Beziehung

$$\Sigma_m \geqq \Sigma_{m+1}. \tag{7}$$

Σ_m nimmt also mit wachsendem m nicht zu und hat daher bei $\lim m = +\infty$ einen Grenzwerth, und zwar, weil Σ_m nach (4) nicht negativ ist, einen nicht negativen endlichen, den wir mit G bezeichnen. Dabei ist

$$\Sigma_m \geqq G(= \lim_{m=+\infty} \Sigma_m). \tag{8}$$

Somit lässt sich jedem $\varkappa > 0$ ein $\mu > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $m > \mu$ ist,

$$0 \leqq \Sigma_m - G < {}^1/_2\varkappa \quad \text{oder} \quad \Sigma_m < G + {}^1/_2\varkappa \tag{9}$$

ist.

Wir können ferner zeigen, dass wie immer auch die Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gewählt werden mögen,

$$(S =) \sum_{1}^{n}{}_r\, g_r\tau_r \geqq G \tag{10}$$

ist. Zufolge der Beziehungen (9) und (10) ist also G die untere Grenze für alle Werthe, welche die Summe (2) überhaupt annehmen kann. Um die Ungleichung (10) zu erweisen, bemerken wir, dass nach (8)

$$G - S \leqq \Sigma_m - S \tag{11}$$

ist, und zeigen, dass sich jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen m so zuordnen lassen, dass

$$\Sigma_m - S < \varepsilon \tag{12}$$

ist. Dann hat man nach (11) $G - S < \varepsilon$, also in der That $G \leqq S$.

Umständlicher ist der Beweis der Formel (12). Wir denken uns in der xy-Ebene die gegebenen Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gezeichnet und darüber die Schaar $\mathfrak{T}_m$ von Vielecken $\tau_{m,u}$, wobei m zunächst nur so gross sein soll, dass jedes $\tau_{m,u}$ kleiner ist als das kleinste unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$. Es kann also kein τ_r ganz in einem $\tau_{m,u}$ liegen. Unter den in Σ_m erscheinenden Vielecken $\tau_{m,u}$, d. i. den Vielecken (5), gibt es keines, das nicht mindestens mit einem τ_r wenigstens einen Punkt gemein hätte, weil sonst nicht jeder Punkt von $\mathfrak{f}$ zu einem oder mehreren der Vielecke τ_r gehören würde. Daher zerfallen diese Vielecke (5) in zwei Classen, und zwar 1) solche, welche innerhalb je eines τ_r liegen oder wenigstens über je ein τ_r nicht hinausragen, 2) solche, welche mit dem Rande eines oder mehrerer τ_r mindestens je einen Punkt gemein haben, ohne ganz in einem von ihnen zu liegen. Die Summen der den τ_{mu} dieser beiden Classen entsprechenden Glieder von Σ_m seien beziehungsweise mit Σ'_m, Σ''_m bezeichnet, so dass

$$\Sigma_m = \Sigma'_m + \Sigma''_m \tag{13}$$

ist. Da nach (1) $g_{m,u} \leqq B$ ist, so hat man

$$\Sigma''_m \leqq B \Sigma'' \tau_{m,u}, \tag{14}$$

wo die Summe Σ'' sich eben auf alle Vielecke der 2. Classe erstreckt. Fassen wir zunächst alle jene unter ihnen, welche mit dem Umfange (P_r) eines und desselben τ_r mindestens je einen Punkt gemein haben, ins Auge. Man kann eine solche Länge K_r angeben,[1] dass wenn der grösste unter den Durch-

---

[1] Wenn man zu jeder Seite eines Vielecks $M_1 M_2 \ldots M_k$, dessen Umfang P sich selbst nicht schneidet, sowohl ausserhalb, als auch innerhalb des Vielecks im nämlichen Abstande H eine Parallele zieht, so bilden die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender äusserer Parallelen, sowie die je zweier aufeinanderfolgender innerer Parallelen ein neues Vieleck und der von den Umfängen dieser beiden Vielecke eingeschlossene Ring hat den Inhalt $2HP$. Nur darf, damit keiner von ihnen sich selbst schneide, H nicht grösser sein als der

messern der soeben bezeichneten Vielecke $\tau_{m,u}$ — er sei $\Delta_{m,r}$ — K_r nicht überschreitet, alsdann ihre Summe nicht grösser als $2\Delta_{m,r} P_r$ ist. Wenn dann der grösste unter den Durchmessern aller der Schaar $\mathfrak{T}_m$ angehörigen Vielecke $\tau_{m,u}$ überhaupt, Δ_m, höchstens die kleinste unter den Längen $K_1 K_2 \ldots K_n$ erreicht, so geht die soeben erwähnte Summe nicht über $2\Delta_m P_r$ hinaus. Lassen wir hier r nacheinander die Werthe $1 \ldots n$ durchlaufen und addiren die bezüglichen Ungleichungen, so finden wir, dass sicherlich

$$\Sigma'' \tau_{m,u} \leqq 2\Delta_m \sum_1^n {}_r P_r \tag{15}$$

ist. Mithin haben wir

$$\Sigma''_m \leqq 2B\Delta_m \sum_1^n {}_r P_r. \tag{16}$$

Aus den Formeln (14) und (16) ergibt sich dann, dass

$$\Sigma_m \leqq \Sigma'_m + 2B\Delta_m \sum_1^n {}_r P_r \tag{17}$$

ist.

In der Summe S ersetzen wir jedes τ_r durch die Summe der Theile, in welche es durch die Einzeichnung der $\tau_{m,u}$ in die mit den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ bereits bedeckte Ebene zerfällt, und lösen die Producte $g_r \tau_r$ auf. Die so aus S erhaltenen Glieder theilen wir ebenfalls in zwei Gruppen; die erste bestehe aus jenen, deren zweiter Factor der Inhalt eines $\tau_{m,u}$ der ersten unter den obigen beiden Classen ist, also eines solchen, das ganz innerhalb eines τ_r liegt, die zweite wird von allen übrigen

---

Abstand des Punktes O_r, wo die Halbirungslinien der Winkel M_r und M_{r+1} des vorgelegten Vielecks sich treffen, von der Seite $M_r M_{r+1}$, und zwar bei jeder der Nummern $r = 1, 2, \ldots k$. Wendet man diese Bemerkung auf das Vieleck τ_r i. T. an und denkt sich den Durchmesser sämmtlicher $\tau_{m,u}$, welche mit τ_r mindestens einen Punkt gemein haben, nicht grösser als den kleinsten der soeben erwähnten Abstände im Vielecke τ_r, K_r, so kann keines von ihnen über die ringförmige Fläche, deren äusserer und innerer Rand vom Umfange von τ_r überall den Abstand K_r hat, hinausragen und somit ihre Summe die Zahl $2K_r P_r$ nicht überschreiten.

Gliedern gebildet. Bezeichnen wir die Summen der in die erste Gruppe eingereihten Glieder mit S', die der zur zweiten gehörigen mit S'', so ist

$$S = S' + S''. \tag{18}$$

Da hier $g_r \geqq 0$, also $S'' \geqq 0$ ist, so finden wir nach (18)

$$S \geqq S'. \tag{19}$$

Aus (17) und (19) folgt dann, dass

$$\Sigma_m - S \leqq (\Sigma'_m - S') + 2B\Delta_m \sum_1^n {}_r P_r \tag{20}$$

ist. $\Sigma'_m - S'$ kann, da für die einander entsprechenden Glieder von Σ'_m und S' $g_{m,n} \leqq g_r$ ist, nicht positiv sein, d. h. es ist

$$\Sigma'_m - S' \leqq 0. \tag{21}$$

Wir gewinnen demnach aus (20) die Formel

$$\Sigma_m - S \leqq 2B\Delta_m \sum_1^n {}_r P_r. \tag{22}$$

Da es nun freisteht, m noch so weit zu vergrössern, dass

$$\Delta_m < \varepsilon : 2B \sum_1^n {}_r P_r$$

ist, so ergibt sich aus (22) unmittelbar die Beziehung (12).

Die Ungleichung (22) reicht übrigens zum Beweise der Formel (I), d. i. der Beziehung (3) auf S. 454 in dem in Rede stehenden Falle aus. Wir setzen

$$\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - G = (\Sigma_m - G) + \left(\sum_1^n {}_r g_r \tau_r - \Sigma_m \right) \tag{23}$$

und geben m einen so grossen Werth, dass für die Differenz $\Sigma_m - G$ die Ungleichung (9) besteht. Um für

$$\sum^n {}_r g_r \tau_r - \Sigma_m$$

eine obere Grenze zu erhalten, brauchen wir bloss im Vorstehenden das System der Vielecke (5) auf S. 454 mit dem System $\tau_1 \ldots \tau_n$ zu vertauschen. Bedeutet D den grössten unter den Durchmessern der Vielecke τ_r, welcher von vorneherein nicht grösser als alle wie die K_r zu bestimmenden Längen $K_{m,1} \ldots K_{m,n_m}$ anzunehmen ist, und $P_{m,\varkappa}$ den Umfang des Vielecks $\tau_{m\,\varkappa}$, so folgt aus (22), dass

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - \Sigma \leqq 2\,BD \sum_1^{n_m} {}_\varkappa\, P_{m,\varkappa} \tag{24}$$

ist. Lassen wir nun

$$D < \varkappa : 4B \sum_1^{n_m} {}_\varkappa\, P_{m,\varkappa} \tag{25}$$

sein, so ist nach (24)

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - \Sigma_m < \varkappa : 2.$$

Mithin haben wir nach (23) zufolge der Beziehungen (9) und (10)

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - G < \varkappa,$$

wenn nur D kleiner als die rechte Seite der Ungleichung (25) ist. Damit ist unser Satz im ersten Falle bewiesen.

Wir wenden zunächst dieses Ergebniss auf die Function $f(x, y) = 1$ an. Alsdann finden wir, dass

$$\sum_1^n {}_r\, \tau_r,$$

wenn wir den Durchmesser D_r eines jeden τ_r zur Null convergiren lassen, einen nicht negativen endlichen Grenzwerth hat, den wir mit A bezeichnen. Es ist also

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}_r\, \tau_r = \mathrm{A} \tag{26}$$

und dabei nach (10)

$$\sum_{1}^{n} {}_{r}\tau_r \gtreqq \mathrm{A}. \tag{27}$$

Zweiter Fall. $f(x, y)$ nimmt in den Punkten des Systems $\mathfrak{f}$ entgegengesetzt bezeichnete Werthe an. Bezeichnet alsdann k die endliche untere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für alle diese Punkte, so ist $f(x, y) - k \gtreqq 0$. Für die Function $f(x, y) - k$ ist die obere Grenze in den dem Vielecke τ_r angehörigen Systempunkten $g_r - k$; also hat

$$\sum_{1}^{n} {}_{r}(g_r - k)\tau_r$$

nach dem beim ersten Falle Bemerkten bei $\lim \tau_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth G_0. Wir haben aber

$$\sum_{1}^{n} {}_{r} g_r \tau_r = \sum_{1}^{n} {}_{r}(g_r - k)\tau_r + k \sum_{1}^{n} {}_{r}\tau_r,$$

mithin mit Rücksicht auf (26)

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n} {}_{r} g_r \tau_r = G_0 + k\mathrm{A}.$$

Es ist also unser Satz auch im zweiten Falle bewiesen.

2. Zweiter Grenzwerth. »Bedeuten $\tau'_1 \tau'_2 \ldots \tau'_{n'}$ unter den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ diejenigen, deren Punkte sämmtlich Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ sind, und g'_r $(r = 1 \ldots n')$ die obere Grenze von (fx, y) für die Punkte von τ'_r, so hat auch die Summe

$$\sum_{1}^{n'} {}_{r} g'_r \tau'_r \tag{28}$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der Durchmesser aller Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ einen endlichen Grenzwerth G', d. h. jedem $\varkappa > 0$ entspricht ein $\lambda < 0$ so, dass

$$\left| G' - \sum_1^{n'} {}_r g'_r \tau'_r \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur der Durchmesser (D_r) eines jeden der Vielecke τ_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ kleiner als λ ist.« Wir schreiben also auch hier

$$G' = \lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n'} {}_r g'_r \tau'_r. \tag{II}$$

»Gibt es unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$ gar keine von der soeben erwähnten Beschaffenheit, so setze man $G' = 0$.«

Die Existenz des Grenzwerthes P' wird ganz ähnlich wie die des Grenzwerthes G in Nr. 1 gezeigt. Nur tritt in den Beziehungen (7) und (10) an Stelle von $\geqq$ $\leqq$, so dass es jetzt heisst

$$\sum_1^{n'} {}_r g'_r \tau'_r \leqq G'. \tag{29}$$

Wenn $f(x, y)$ für die Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ negative Werthe nicht annimmt, so ist die Summe (28) nicht grösser als die Summe (2), somit ist auch $G' \leqq G$.

3. Die äussere und innere Flächenzahl. Die Formel (26) habe zuerst ich für ein beliebiges Punktsystem in der Ebene aufgestellt und auf ähnliche Art, wie die allgemeine (I), bewiesen.[1] Später hat sie C. Jordan gebracht,[2] aber zugleich mit der Formel, welche aus (II) bei der Annahme $f(x, y) = 1$ hervorgeht, d. i. wenn wir den ihr entsprechenden Grenzwerth mit A' bezeichnen,

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n'} {}_r \tau'_r = \mathrm{A}'. \tag{30}$$

Dabei ist $0 \leqq \mathrm{A}' \leqq \mathrm{A}$. Wenn $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ ist, so heisst ihr gemeinsamer Werth die Zahl oder der Inhalt des Punkt-

[1] Math. Annal., Bd. 23 (1884), S. 152 f.

[2] Vergl. Journal de Mathém. 1892, p. 76. Cours d'Analyse, 2. éd. I, No. 36.

systems $\mathfrak{f}$. Sollte aber $A > A'$ sein, so wird A die äussere, A' die innere Flächenzahl dieses Punktsystems genannt. Die Unterscheidung dieser beiden Zahlen, somit die völlige Einsicht in die Natur der Flächenzahl verdankt man indess G. Peano.[1] Er erklärt die erstere als die untere Grenze aller Summen

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, g_r \tau_r$$

[vergl. Formel (10)], die letztere als die obere Grenze aller Summen

$$\sum_{1}^{n'}{}_{r}\, g'_r \tau'_r$$

[vergl. (29)].

Wenn $A = 0$ ist, so ist auch $A' = 0$. Das endliche Punktsystem $\mathfrak{f}$ hat dann den Inhalt Null und wird nach Harnack als discret bezeichnet.[2]

Es mögen nun noch einige Beispiele von Flächenzahlen Erwähnung finden, wobei indess nur vollständige Punktsysteme, d. h. solche, zu denen auch ihre Grenzpunkte gehören,[3] berücksichtigt werden. Um solche Punktsysteme in der Ebene zu bilden, denken wir uns auf der Abscissenaxe ein vollständiges endliches Punktsystem gegeben und in jedem dazu gehörigen Punkte auf der positiven Seite dieser Axe ein Loth von der Länge 1 errichtet. Unser System möge dann aus allen Punkten eines jeden dieser Lothe bestehen. Als solches hat es zu Flächenzahlen die Längenzahlen des auf der x-Axe gegebenen Systems, so dass nur diese zu ermittelt werden brauchen.

1. Ein vollständiges endliches Punktsystem auf der x-Axe, dessen äussere und innere Länge von einander verschieden

---

[1] Vergl. dessen Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887, p. 152.

[2] Math. Annal., Bd. 19, S. 238.

[3] Nach C. Jordan's »parfait«, das von G. Cantor, welcher Punktmengen, die mit ihrer Ableitung identisch sind, perfect nennt (Math. Ann., Bd. 21, S. 575), entlehnt ist.

sind, bilden die Gesammtheit aller endlichen echten Decimalbrüche mit ungeradem Zähler nebst den Zahlen 0 und 1 und die Gesammtheit aller unendlichen echten Decimalbrüche, rational oder irrational, welche nicht von einer bestimmten Stelle an lauter gerade Ziffern (0, 2, 4, 6, 8) besitzen. Da dieses System in der Umgebung gar keines Punktes der Strecke (0, 1) stetig ist, so ist seine innere Länge $A' = 0$. Seine äussere Länge A ist aber 1.

2. Das System der Punkte

$$x = 0 \quad x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots, \text{ d. i. jeder natürlichen Zahl}) \qquad (31)$$

ist vollständig und discret.[1]

3. Fügt man zu den Punkten (31) alle Punkte x:

$$0 > x \geqq -1,$$

so hat man ein unstetiges System, dessen äussere und innere Länge 1 ist.

4. Fügt man aber die nämlichen Punkte zu dem unter 1. beschriebenen System, so erhält man eines, wofür die äussere Länge $A = 2$, die innere $A' = 1$ ist.

Unter welcher Bedingung stetige Punktsysteme in der Ebene die nämliche äussere und innere Flächenzahl besitzen, werden wir sogleich erfahren.

5. Über die Gleichheit der Grenzwerthe (I) und (II). Das obere Doppelintegral.

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die äussere und innere Flächenzahl des Systems $\mathfrak{f}$ zusammenfallen, alsdann auch die Grenzwerthe (I) und (II) einander gleich sind. — Bezeichnet man nämlich mit $\tau_1'' \ldots \tau_{n''}''$ unter

---

[1] Ein anderes Beispiel ist das von G. Cantor (a. a. O. S. 590) angegebene System aller Zahlen

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_n}{3^n} + \ldots,$$

wo die Coëfficienten c_n nach Belieben die Werthe 0 oder 2 haben dürfen und die Reihe endlich oder unendlich sein kann. Das System ist zugleich perfect.

den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ diejenigen, zu welchen sowohl Punkte des Systems $\mathfrak{f}$, als auch solche, die nicht in $\mathfrak{f}$ vorkommen, gehören, und mit g_r'' die obere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für die in τ_r'' vorhandenen Punkte von $\mathfrak{f}$, so hat man natürlich

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - \sum_1^{n'} {}_r\, g_r' \tau_r' = \sum_1^{n''} {}_r\, g_r'' \tau_r''. \qquad (32)$$

Nun ist der Betrag der rechten Seite von (32) nicht grösser als

$$C \sum_1^{n''} {}_r\, \tau_r'',$$

wenn wir unter C die grössere von den Zahlen $|A|$ und B aus (1) verstehen. Ist

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}_r\, \tau_r'' = 0, \qquad (33)$$

d. h. fallen äussere und innere Flächenzahl des Systems $\mathfrak{f}$ zusammen, so hat also auch die linke Seite der Gleichung (32) bei $\lim \tau_r$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ den Grenzwerth Null, d. i. es besteht die Gleichung

$$G - G' = 0.$$

Die Gleichung (33), d. i. $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ gilt für jedes stetige[1] Punktsystem, welches geometrisch in der xy-Ebene durch eine

[1] Analytisch wird ein stetiges Punktsystem von zwei Dimensionen nach Weierstrass auf folgende Art erklärt: 1. Die zu sämmtlichen Punkten des Systems gehörigen Werthe von x und y liegen zwischen zwei endlichen Grenzen. 2. Das System ist vollständig. 3. Unter den Systempunkten soll es Innenpunkte (S. 466) geben. 4. Bedeuten $A \equiv (a, b)$ und $A' \equiv (a', b')$ irgend zwei Punkte des Systems und ist ε eine beliebige gegebene positive Zahl, so lässt sich zwischen A und A' eine aus Innenpunkten des Systems in endlicher Anzahl $A_1 \ldots A_m$ gebildete Kette in der Art einschalten, dass A_1 zur Umgebung ε von A, A_2 zur Umgebung ε von $A_1 \ldots A_m$ zur Umgebung ε von A_{m-1} und endlich A' zur Umgebung ε von A_m gehört. Dabei wird unter Umgebung ε eines Punktes $x_0 y_0$ die Gesammtheit aller Punkte xy verstanden, wofür x irgend einen Werth zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$, y irgend einen zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$ bedeutet. Natürlich darf man als Umgebung ε

von einer endlichen Anzahl gewöhnlicher Ränder begrenzte Fläche $\mathfrak{f}$ dargestellt wird. Dabei wird unter einer gewöhnlichen Curve eine solche verstanden, welche sowohl mit jeder Parallelen zur x-Axe, als auch mit jeder Parallelen zur y-Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat.[1] Da wir bereits wissen, dass für jedes ebene Punktsystem

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n''} {}_r \tau_r'' = \mathrm{A} - \mathrm{A}'$$

ist, so können wir $\mathrm{A}-\mathrm{A}'$ schon dadurch ermitteln, dass wir nur eine unbegrenzte Reihe von Schaaren solcher Vielecke, deren Durchmesser sämmtlich kleiner als irgend eine gegebene Zahl werden können, berücksichtigen. Wir wählen als solche die Quadrate von der Seite δ, welche in der xy-Ebene auftreten, wenn ein System von Parallelen zur x-Axe, wovon je zwei aufeinanderfolgende den Abstand δ haben, und das ähnliche System von Parallelen zur y-Axe construirt werden. Dann lassen wir δ zur Null convergiren. Nun ist die Summe aller solcher Quadrate, welche mit einem und demselben Rande von $\mathfrak{f}$ mindestens einen Punkt gemein haben, kleiner als[2]

$$\{2p(b'-b)+4q(a'-a)\}\delta, \tag{34}$$

worin $2p$ die grösste Anzahl der Punkte, welche dieser Rand mit einer Parallelen zur x-Axe, $2q$ die grösste Anzahl der Punkte, welche er mit einer Parallelen zur y-Axe gemein hat, bedeutet und a die kleinste, a' die grösste unter den Abscissen der Punkte ebendesselben Randes, b die kleinste, b' die grösste unter ihren Ordinaten bedeutet. Der Ausdruck (34) ist nun kleiner als irgend eine gegebene Zahl, wenn nur δ hinlänglich klein gewählt wird. Wiederholt man diesen Schluss an jedem

---

von $x_0 y_0$ mit C. Jordan (Cours d'Anal. 2. ęd., I., Nr. 31) auch die Gesammtheit aller die Ungleichung (35) i. T. erfüllenden Punkte xy betrachten. Sie bilden ein Quadrat, dessen Mittelpunkt der Punkt $x_0 y_0$ und dessen Diagonalen von der Länge 2ε in den Coordinatenaxen liegen.

[1] In diese Anzahl sind im Falle, dass die Curve und eine solche Gerade eine Strecke gemein haben, bloss die beiden Endpunkte derselben aufzunehmen.

[2] Vergl. auch E. Picard, Traité d'Analyse, I, p. 96.

der Ränder von $\mathfrak{f}$, so erkennt man, dass die Summe aller jener unter den in Rede stehenden Quadraten, welche mit der Begrenzung von $\mathfrak{f}$ mindestens einen Punkt gemein haben, zugleich mit δ zur Null convergirt. Somit ist für jede Fläche $\mathfrak{f}$ von der oben angegebenen Beschaffenheit $A-A'=0$.

Der soeben bewiesene Satz lässt sich unmittelbar ausdehnen auf ein Punktsystem, das aus den Punkten einer endlichen Anzahl von stetigen Flächen der gerade beschriebenen Art besteht.

C. Jordan[1] nennt Domäne ein vollständiges Punktsystem, zu dem auch Innenpunkte gehören. Innenpunkt heisst ein Punkt $x_0 y_0$ des Systems, dem eine positive Zahl ε sich so zuordnen lässt, dass alle Punkte xy, wofür

$$|x-x_0|+|y-y_0|<\varepsilon \tag{35}$$

ist, dem System angehören. Fallen für eine Domäne die äussere und innere Flächenzahl zusammen, so besteht dafür auch die Gleichung $G=G'$. Der gemeinsame Werth von G und G' heisst nach C. Jordan[2] das obere Doppelintegral (intégrale par excès) der Function $f(x, y)$ über diese Domäne. Es ist indess nicht einzusehen, was die Ausdehnung des Integralbegriffes auf ein Punktsystem, wie das auf S. 463 unter 3. beschriebene, für einen Zweck haben soll. Bleiben wir daher dabei, die von Volterra und Pasch eingeführte Bezeichnung »oberes Integral« für den gemeinsamen Werth von G und G' nur dann zu gebrauchen, wenn das Punktsystem $\mathfrak{f}$ ein stetiges ist oder aus einer endlichen Anzahl stetiger Systeme besteht.

5. Selbstverständlich entsprechen auch dem unteren Doppelintegral zwei Grenzwerthe. Wir erhalten sie, indem wir in der Formel (I) an Stelle der oberen Grenze g_r $(r=1,2,\ldots n)$ die untere Grenze k_r der Werthe von $f(x, y)$ für die im Vielecke τ_r vorhandenen Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ und in (II) an Stelle von g'_r $(r=1, 2,\ldots n')$ die untere Grenze k'_r der Werthe von $f(x, y)$ für die im Vielecke τ'_r vorhandenen Punkte dieses Systems setzen.

---

[1] Cours d'Analyse, 2. éd., I, Nr. 24.

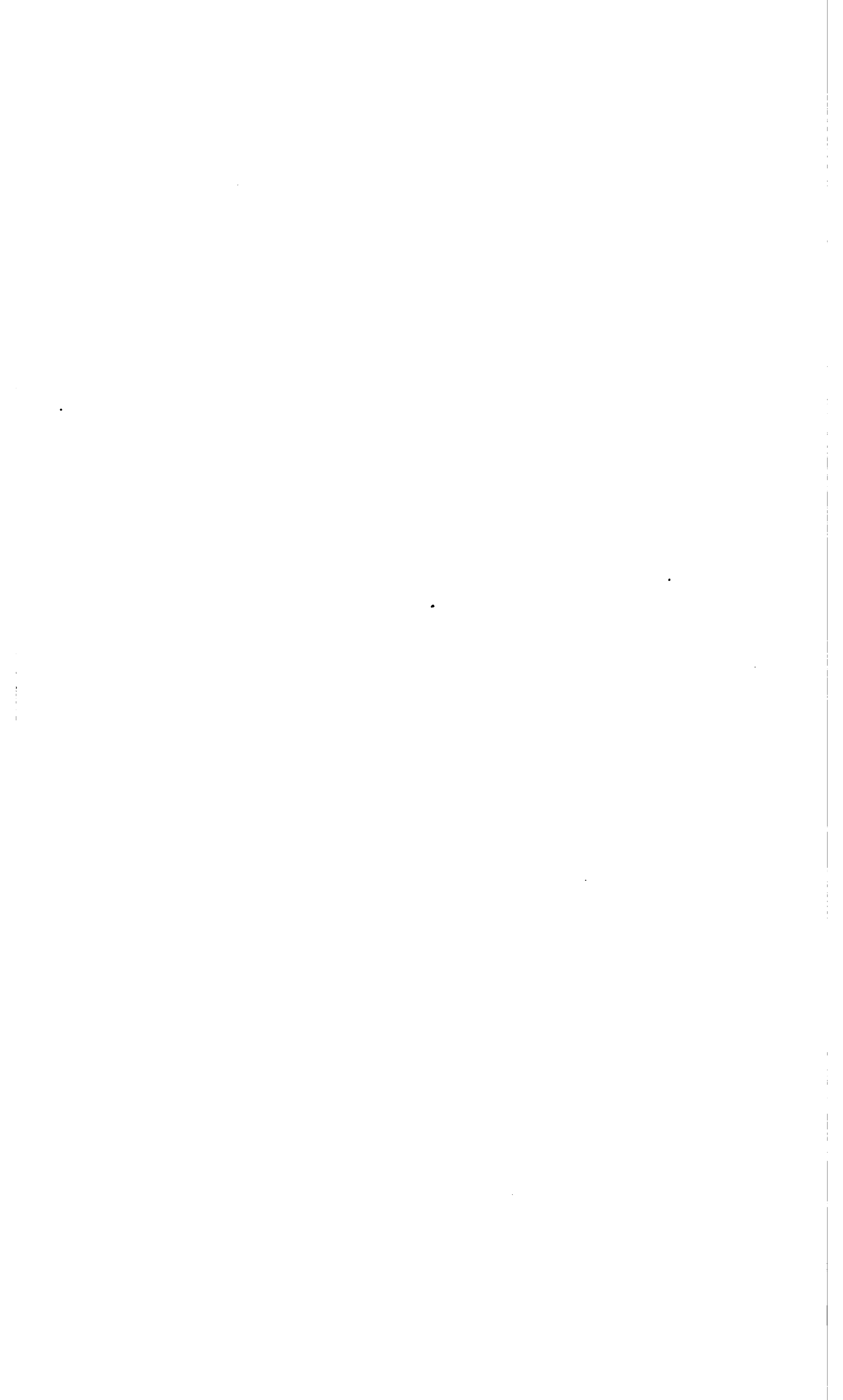
[2] Journal de Mathém. 1892, p. 84. Cours d'Analyse, II, p. 34.

6. Die in Nr. 1, 2 und 5 vorgeführten Sätze lassen sich ohne Schwierigkeit auf Punktsysteme im Raume von drei und mehr Dimensionen ausdehnen.

Was den Euklid'schen Raum von drei Dimensionen anlangt, so brauchen wir, da schon das Volum des Tetraëders bloss als Grenzwerth (beziehungsweise als obere oder untere Grenze) einer Prismensumme erklärt werden kann, uns unter $\tau_1 \ldots \tau_n$ lediglich Prismen vorzustellen. Dann tritt an Stelle des in der Note auf S. 456 erwähnten Satzes die Formel für den Inhalt des Körpers der von zwei Prismen-Oberflächen begrenzt wird, welche die eines gegebenen Prismas von aussen und von innen umgeben und davon überall den nämlichen Abstand haben. Aus dem Ausdrucke (34) leitet man ferner unmittelbar den analogen für die Summe aller jener Prismen her, welche mindestens je einen Punkt mit der Begrenzung eines stetigen Punktsystems von drei Dimensionen gemein haben.

Ähnliches gilt für die Punktsysteme in einem Raume von mehr als drei, etwa n Dimensionen. Nur kann man sich darauf beschränken, die τ_r Körper sein zu lassen vom Typus: Gesammtheit aller Punkte $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren jede Coordinate x_k alle Werthe eines gegebenen Intervalles $(a_k, a_k + da_k)$ annehmen darf, wobei diesem Körper als Zahl zunächst das Product $da_1 \ldots da_n$ zugeordnet wird.[1] Als erste Anwendung der in Rede stehenden Sätze mögen dann die Inhalte der übrigen Polyeder ermittelt werden, namentlich des von $n+1$ n-dimensionalen Ebenen gebildeten Körpers.

[1] Anstatt des Satzes in der Note auf S. 456 braucht man dann bloss die Entwicklung der Differenz $(da_1 + 2H) \ldots (da_n + 2H) - (da_1 - 2H) \ldots (da_n - 2H)$ nach Potenzen von H.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. VII. HEFT.

JAHRGANG 1897. — JULI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 64 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

INHALT

des 7. Heftes Juli 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

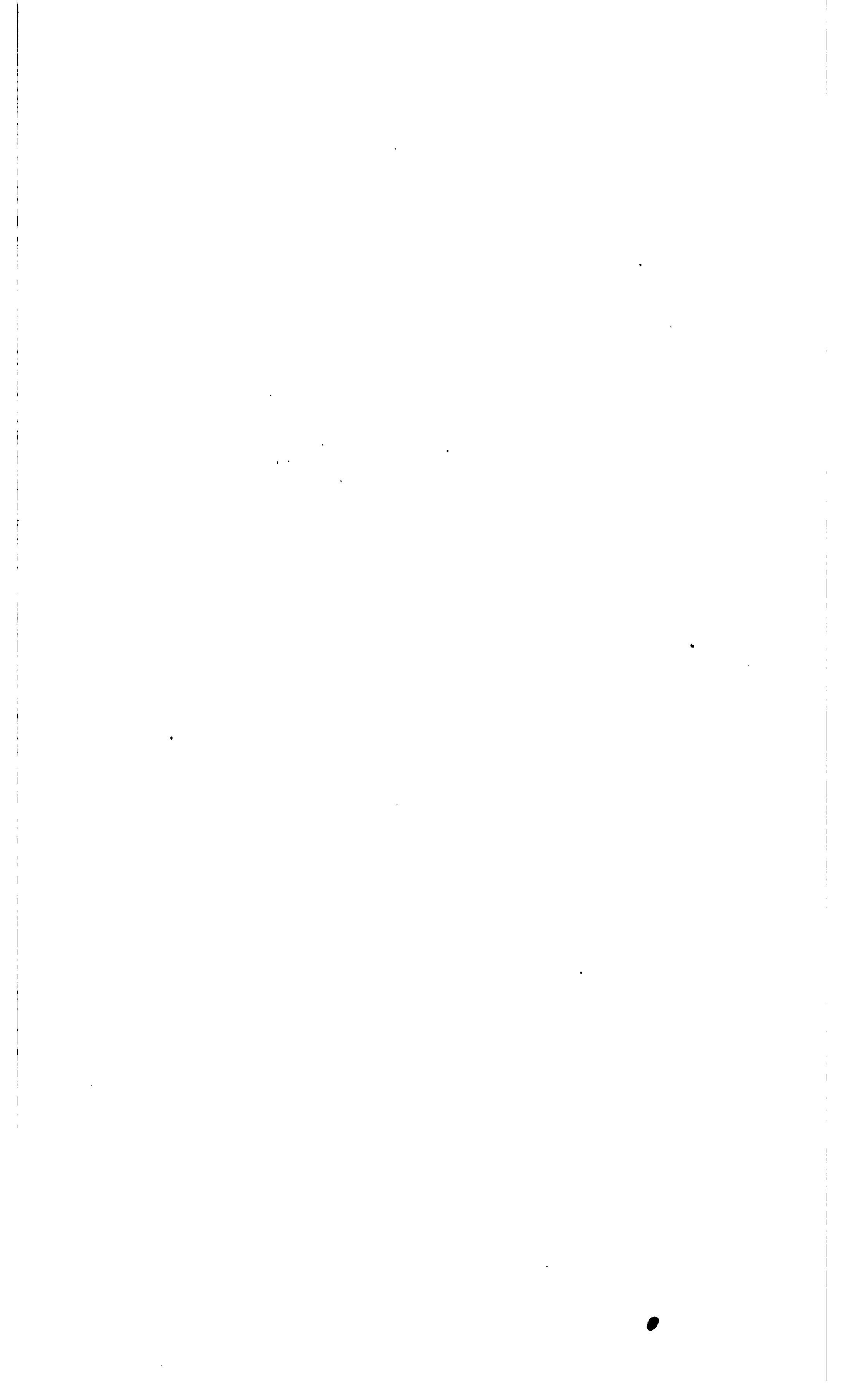
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XVII. SITZUNG VOM 1. JULI 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte: 106. Bd., Abth. I, Heft I—III (Jänner bis März 1897) und Abth. III, Heft I—IV (Jänner—April 1896).

Herr Dr. A. Pelikan in Wien dankt für die ihm zum Abschlusse seiner Studien über die Schalsteine bewilligte Subvention.

Herr Dr. K. Brunner v. Wattenwyl, k. k. Ministerialrath i. P. in Wien, übermittelt die Pflichtexemplare seines mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften (aus dem Legate Wedl) herausgegebenen Werkes, betitelt: »Betrachtungen über die Farbenpracht der Insecten«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von Max Bamberger und Anton Landsiedl: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (III. Abhandlung).

Ferner übersendet Herr Hofrath Bauer eine Arbeit aus dem Laboratorium für analytische Chemie an dieser Hochschule von Dr. Hans Meyer, betitelt: »Über das Cantharidin«.

Herr Julius Kammer in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie«.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Custos-Adjuncten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Das Kopfskelet der Schildkröten«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

1. »Weitere Bestimmungen des Alkyls am Stickstoff«, von J. Herzig und H. Meyer.
2. »Über Nitrosoproducte der Monoäther des Brenzcatechins«, von A. Pfob.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Arbeit aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Prof. Dr. G. Jaumann: »Über die Interferenz und die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen«.

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Lang eine Abhandlung von Dr. Josef Tuma, Privatdocent und Assistent an der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Eine Quecksilberluftpumpe«.

Eine Quecksilberluftpumpe

von

Dr. **Josef Tuma,**

Privatdocent und Assistent an der k. k. Universität in Wien.

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

Das allgemeine Interesse, welches sich gelegentlich der grossen Entdeckung Röntgen's den Lichterscheinungen in evacuirten Röhren zuwandte, brachte gleichzeitig auch erhöhtes Interesse für die Instrumente mit sich, mittelst welcher die erforderlichen hohen Vacua erzeugt werden können. Da der Preis der Quecksilberluftpumpe im Allgemeinen hoch ist, beschäftigte ich mich mit dem Probleme der Vereinfachung der Construction und behielt dabei folgende Ziele als Erfordernisse einer für Laboratorien geeigneten Pumpe vor Augen.

1. Möglichst einfache Construction.

2. Beständige Gebrauchsfertigkeit, ohne dass einzelne Theile durch die Zeit leiden, was besonders durch Weglassung jeglichen Kautschukes erreicht wird.

3. Eine derartige Anordnung, dass auch der in Glasbläserarbeiten weniger Geübte bei eintretendem Bruche leicht Reparaturen vornehmen kann.

Die Pumpe ist aus Thüringer Glas hergestellt und sind alle Theile durch Schmelzstellen verbunden. Das System ist das der Sprengel-Pumpe mit mehreren Fallröhren und wird so wie bei der schönen, aber viel complicirteren Construction Neesen's und den in Glühlampenfabriken allgemein angewandten Pumpen dieses Systems die Fallhöhe dadurch verringert, dass auch am unteren Ende der Fallröhren durch eine

Wasserstrahlpumpe Luft abgesaugt wird. In Fig. 1 ist dieser Theil der Pumpe ersichtlich. Er besteht aus einem etwa 4 *mm*

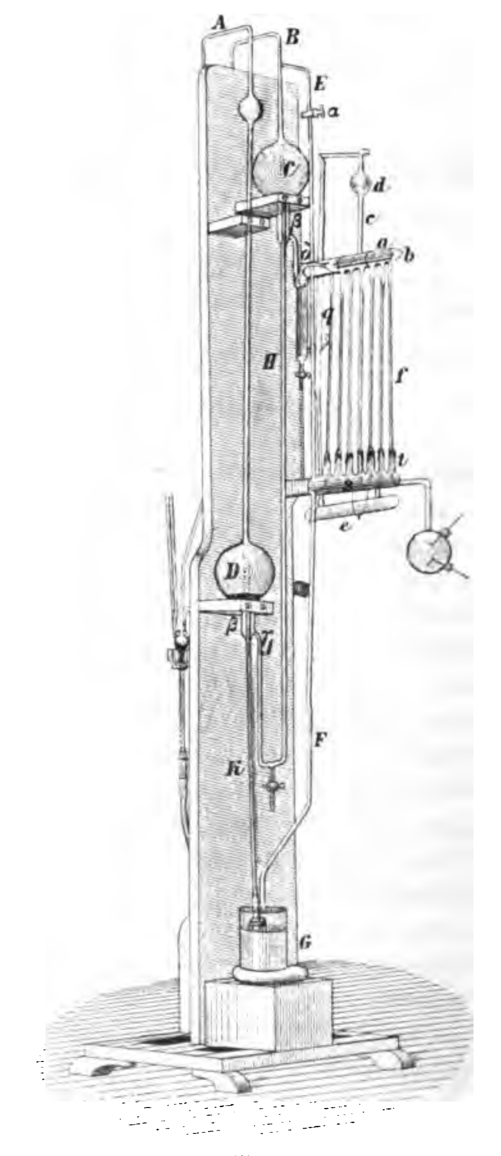


Fig. 1.

weiten, am Ende geschlossenen Rohre *a* mit seitlichen, nach unten gekehrten Löchern das in ein circa 20 *mm* weites Rohr *b*

eingeschmolzen ist. Letzteres besitzt den Löchern in *a* gegenüber Ansätze, an welche die Fallröhren *F* angeschmolzen sind. Diese münden durch die Tuben *t* mittelst Korkstöpseln, welche behufs der Dichtung mit einem Kitt aus Kolophonium und Wachs überzogen werden, nahe am Boden eines 20 *mm* weiten Sammelrohres *s*. An das obere Rohr *b* ist eine engere Abzweigung *c* angesetzt, die durch den Quecksilberfang *d* und eine Phosphorsäurevorlage *e* zu dem zu evacuirenden Raume führt. Die bisher beschriebene Anordnung ist schon bei anderen Pumpen in Anwendung. Neu ist hier die Methode der Quecksilberförderung.

In Fig. 1 sind zwei Rohre *A* und *B* zu sehen, welche auf die andere Seite des Pumpenbrettes führen und in später zu erörternder Weise mit zwei Wasserstrahlpumpen in Verbindung stehen. *A* führt durch einen Quecksilberfang zu einem Glasballon *D*. *B* hat eine Abzweigung *E*, welche einen Zweiweghahn *α* enthält und zum Sammelrohre *s* führt. Von da führt das Rohr *F* weiter bis auf den Boden eines mit Quecksilber gefüllten Gefässes *G*. Anderseits steht *B* mit dem Ballon *C* in Verbindung. Beide Ballons *C* und *D* endigen nach unten in kurze, weite Rohre β, in deren unteres Ende die engen Steigrohre *H* und *K* eingeschmolzen sind. Diese letzteren reichen bis nahezu an das obere Ende der Ballons und sind daselbst nach oben geschlossen und mit zwei seitlichen Ausflussöffnungen versehen.

Ausserdem besitzen die Rohre β seitliche Abzweigungen γ und δ. Die Abzweigung γ ist mit dem unten U-förmig gebogenen Rohre *H* verbunden, δ mit einer Quecksilberdichtung *q*, die aus einem weiten und einem eingeschmolzenen engen, bis nahe an das untere Ende des ersteren reichenden Rohre besteht. Dieses in das Innere der Quecksilberdichtung führende enge Rohr steht mit dem oben erwähnten Rohre *a* der Sprengel'schen Pumpe in Verbindung.

Es erübrigt nur noch, das Rohr *K* zu erwähnen, welches ebenfalls in das Gefäss *G* reicht (Fig. 3 und 4). In diesem Gefässe befindet sich ein gläserner Schwimmer, dessen oberer verjüngter Theil über das Rohr *K* geschoben ist und als Führung dient. Seitwärts bei *o* ist eine Öffnung angebracht. Durch ein

Gewicht P ist der Schwimmer derart beschwert, dass der Auftrieb des Glases in dem Quecksilber, welches sich in dem Gefässe G befindet, überwunden wird, sobald der Schwimmer mit Quecksilber gefüllt ist, dass aber letzterer schwimmt, wenn er leer ist.

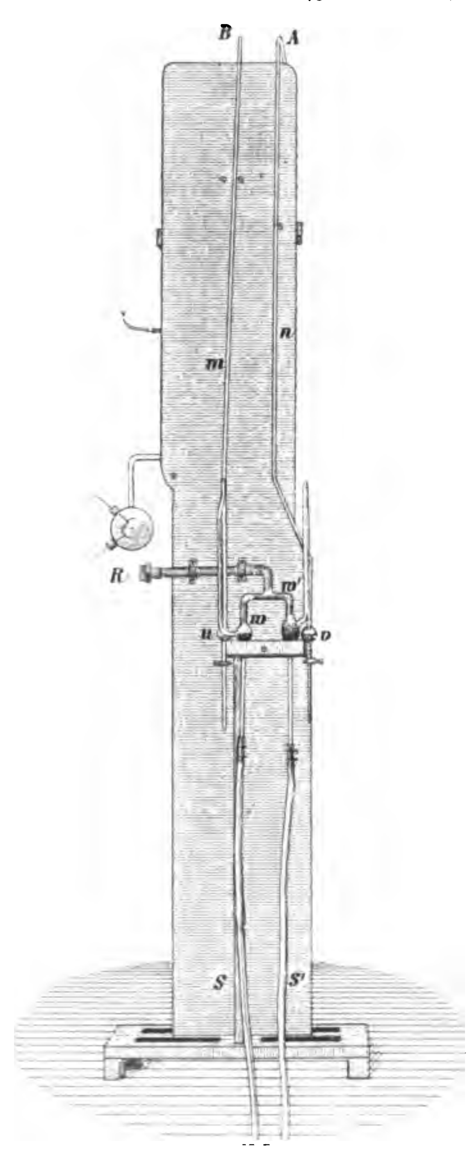


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt die Rückseite der Pumpe. A und B sind die von der Vorderseite herüberführenden zwei Rohre. Sie stehen mit engen, etwa nur 1 *mm* im Lumen betragenden, über Barometerhöhe langen Rohren *m* und *n* in Verbindung. Letzere reichen in kleine, mit Quecksilber halb gefüllte Ballons *u* und *v*, so dass sie 2—3 *mm* unter dem Niveau endigen. Weitere, verkehrt U-förmig gebogene Rohre — um das Übergehen von Quecksilber in die Pumpen zu vermeiden — verbinden die Ballons mit den zwei Wasserstrahlpumpen *w* und *w'*, die von einem gegabelten Rohre R einen gemeinsamen Wasserzufluss erhalten. Der Ablauf des Wassers erfolgt durch die beiden Schläuche S und S'. Der Zweck der Ballons *u*

und *v* ist der, das Zurückschlagen des Wassers in die Quecksilberpumpe zu verhüten. Sinkt nämlich der Wasserdruck z. B. beim Abstellen der Pumpe und Absperren des Wassers, so dringt letzteres in die Ballons ein und treibt das Quecksilber in den Rohren *m* und *n* auf Barometerhöhe. Ausser einer Sicherung gewinnt man dadurch auch die Möglichkeit, die Pumpe rasch, nur durch Schliessung des Wasserhahnes, ausser Betrieb setzen zu können, wobei das entstandene Vacuum erhalten bleibt.

Wirkungsweise der Pumpe.

Bei Beginn der Thätigkeit der Pumpe ist zunächst noch fast alles Quecksilber im Gefäss *G* enthalten. Der Schwimmer ist gefüllt und untergesunken, wie es Fig. 3 zeigt. Es steigt das Quecksilber in den beiden Röhren *K* und *F*. In letzterem erreicht es einen maximalen Stand, der bis in das Sammelrohr *s* (Fig. 1) reicht. In *K* steigt es bis an dessen Ende und strömt durch die zwei Ausflussöffnungen in den Ballon *D*. Gleichzeitig sinkt das Niveau in *G*, bis der untere Rand der Öffnung *o* im Schwimmer erreicht ist. Es wird nun noch das in letzterem befindliche Quecksilber emporgesaugt, wobei gleichzeitig der erleichterte Schwimmer in die Höhe steigt, bis endlich Luft nachströmt, indem die in Fig. 4 gekennzeichnete Stellung eintritt.

Mittlerweile ist auch im Ballon *C* und in der Sprengelpumpe der Druck auf wenige Centimeter gesunken (der Hahn *α* muss so gestellt sein, dass das Continuum der Rohrleitung *E* besteht). Es wird also die durch *K* eintretende Luft das in *D* angesammelte Quecksilber durch *H* weiter hinauf bis in den Ballon *C* treiben, und zwar solange, bis die Höhe der Öffnungen am oberen Ende des Rohres *H* über dem Niveau in *D* oder im linken Schenkel des U-Rohres nahezu Barometerhöhe beträgt. Aus *C* fliesst das Quecksilber. durch die Dichtung *q* und das Vertheilungsrohr *a* in die Fallröhren *f*, sammelt sich im Rohre *s* und fliesst von da durch *F* in das Gefäss *G* zurück. Hier steigt das Niveau wieder, erreicht schliesslich die Seitenöffnung *o* im Schwimmer, füllt ihn, so dass er untersinkt, und das Spiel beginnt von vorne.

Soll die Pumpe abgestellt werden, so genügt es, den Wasserhahn abzudrehen, und man kann so auf eine mehrere Tage dauernde Zeit das Pumpen unterbrechen, ohne dass das Vacuum leidet, indem auf der einen Seite die Sprengel-Pumpe durch die Quecksilberdichtung q, auf der anderen durch das Quecksilber, das sich im Sammelrohre s befindet, abgedichtet ist.

Will man Luft in die Pumpe einlassen, so schliesst man ebenfalls den Wasserhahn, wartet, bis alles Quecksilber aus C

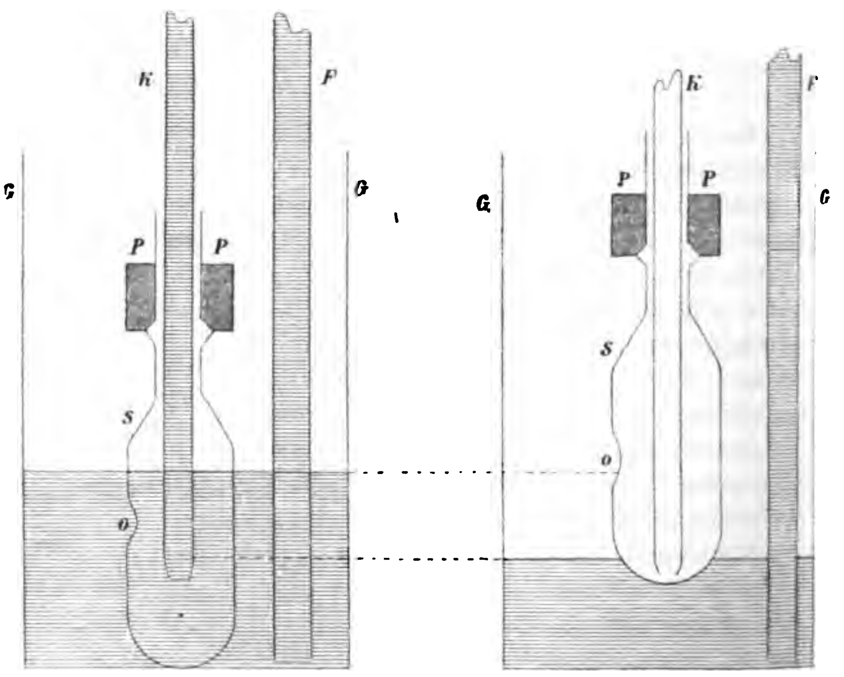


Fig. 3. Fig. 4.

abgeflossen ist und dreht dann langsam und vorsichtig den Zweiweghahn α, dessen eine Bohrung nach aussen führt, so, dass er E nach oben abschliesst.

Diese Stellung des Hahnes α ist auch erforderlich, wenn man einen Gegenstand an die Pumpe ansetzen will. Man befestigt dann einen dünnen Schlauch an α, so dass man auf diesem Wege das beim Anschmelzen einfallende Glas wieder aufblasen kann. Bei allen derartigen Arbeiten an der Pumpe

thut man gut, sich einer Gebläseflamme zu bedienen, die man wie einen Löthkolben in der Hand hält und führt.

Wie bei allen Sprengel-Pumpen, geschieht es auch hier, dass mitunter die Fallröhren springen. In diesem Falle geschieht die Entfernung einer solchen Röhre so, dass man sie zunächst mit einer Stichflamme in circa $^1/_3$ ihrer Höhe erhitzt und, wenn sie nicht von selbst zerspringt, sie etwas befeuchtet. Dann schneidet man sie mit einer Feile oder einem Glasmesser oben ab, wobei gerathen ist, darauf zu achten, dass der weitere Ansatz am Rohre *b* nicht zu kurz werde, weil sonst beim neuerlichen Anschmelzen dieses selbst leicht springen kann. Dann wird der Rest des alten Rohres vorsichtig aus dem Tubus des Sammelrohres *s* entfernt. Man nimmt nun ein neues Rohr, gibt es zunächst ohne Kork in den unteren Tubus und misst genau die erforderliche Länge ab. Zur Dichtung verwende man einen weichen, nicht allzu strenge passenden Kork, schiebt ihn über das Rohr und führt das Ganze in den Tubus ein. Indem man dann zuerst mit nur wenig Luft in der Gebläseflamme vorwärmt, später das Glas mit schärferer und schliesslich mit der Stichflamme erhitzt, gelingt es leicht, die Verbindung zu bewerkstelligen. Endlich wird mit Kitt die vollständige Dichtung erreicht.

Soll die Pumpe gereinigt werden, so entfernt man mit Hilfe der kleinen, zu diesem Zwecke angebrachten Hähne die letzten Reste des Quecksilbers aus der Pumpe. Will man besonders vorsichtig sein, so nimmt man die Phosphorvorlage ab und verschliesst das abgeschnittene Rohr. Der Hahn α wird schief gestellt, so dass er die Rohrleitung *E* unterbricht und die Communication mit der äusseren Luft noch nicht herstellt. Man verschliesst auch *F* an seinem unteren Ende und lässt circa 100 cm^3 concentrirter Salpetersäure durch *K* aufsteigen. Kommt diese bis *C*, so stellt man die Wasserstrahlpumpe ab, worauf die Salpetersäure die Wege des Quecksilbers nimmt und nach Öffnung des Rohres *F* aus diesem ausfliesst. Man stellt dann das leere Gefäss *G* an seine Stelle, füllt es mit Wasser und saugt dieses in reichlicher Menge durch. Dann wird Alkohol nachgesaugt und endlich mit einem Luftstrom getrocknet. Kleine Feuchtigkeitsreste scheinen nicht zu stören. Sie verschwinden sehr rasch beim Pumpen.

Was die Resultate anlangt, die ich mit der beschriebenen Pumpe erzielt habe, so ergab sich, dass ein Raum von $^1/_8$ *l* Inhalt in circa 30 Minuten bis zum Crooke'schen Vacuum luftleer gemacht werden kann. Bei Erwärmung und längerem Evacuiren kommt man bis zu den höchsten, bisher erreichbaren Verdünnungsgraden. Als Beispiel will ich erwähnen, dass es mit ihrer Hilfe gelingt, Neef'sche Hämmer im Vacuum nach Farlan Moore herzustellen, bei welchen das Vacuum den Unterbrechungsfunken auslöscht. Einen solchen, mit dieser Pumpe evacuirten Unterbrecher habe ich im Vorjahre am Naturforscher-Congresse in Frankfurt gezeigt.

Die Ausführung solcher Pumpen wurde der Glühlampenfabrik »Watt« in Wien, welche mich bei Anstellung meiner Versuche in dankenswerther Weise unterstützte, überlassen und stellt sich der Preis auf circa 60 Gulden.

Über räumliche Poncelet'sche Polygone

von

Gustav Kohn in Wien.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juni 1897.**)

Seitdem Poncelet seinen Hauptsatz über die einem Kegelschnitt eingeschriebenen und gleichzeitig einem zweiten umschriebenen Polygone gegeben hat, ist sein Ergebniss von den verschiedensten Seiten weiter verfolgt und nach den verschiedensten Richtungen hin erweitert und vertieft worden: allein die Existenz völlig analoger räumlicher Polygone scheint, so nahe sie liegt, bisher nicht bemerkt worden zu sein.

In der vorliegenden Note wird die Existenz von einfachen räumlichen n-Ecken dargethan, deren Ecken auf einer kubischen Raumcurve liegen und deren Seitenflächen eine zweite kubische Raumcurve osculiren und es wird gezeigt, dass, sobald $n > 6$ ist, das Vorhandensein eines solchen n-Eckes das Vorhandensein unendlich vieler zu denselben beiden kubischen Raumcurven in der nämlichen Beziehung stehender n-Ecke nach sich zieht.

---

1. Wir schicken unseren Entwicklungen eine kurze Darstellung des bekannten Zusammenhanges voraus, der zwischen der Theorie der Poncelet'schen Polygone und der Theorie gewisser symmetrischer (2, 2)-Correspondenzen besteht.

Eine symmetrische (2, 2)-Correspondenz zwischen den Punkten eines Kegelschnittes C_2 hat als Erzeugniss einen Kegelschnitt Γ^2, der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllt wird; umgekehrt wird der Kegelschnitt C_2 von den Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes seiner Ebene in den Paaren entsprechender Punkte einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz getroffen.

Sind die beiden Kegelschnitte C_2 und Γ^2 in der besonderen Lagenbeziehung, dass es unendlich viele dem ersten eingeschrieben und gleichzeitig dem zweiten umschriebene einfache n-Ecke gibt, so hat die symmetrische (2, 2)-Correspondenz auf C_2 den besonderen Charakter, dass sie die Elemente dieses Trägers in Cyclen ordnet, so zwar, dass je zwei Nachbarelemente eines Cyclus einander vermöge der (2, 2)-Correspondenz entsprechen. Eine solche symmetrische (2, 2)-Correspondenz soll in der Folge als cyclisch von der n^{ten} Ordnung bezeichnet werden. Da die Existenz eines dem Kegelschnitt C_2 eingeschriebenen und dabei dem Kegelschnitt Γ^2 umschriebenen Polygons nach dem Poncelet'schen Hauptsatze die Existenz von unendlich vielen solchen Polygonen nach sich zieht, so können wir sagen: Eine symmetrische (2, 2)-Correspondenz ist cyclisch von der n^{ten} Ordnung, sobald es einen Cyclus von n verschiedenen Elementen auf dem Träger gibt, in welchem je zwei Nachbarelemente einander entsprechen. Einen solchen Cyclus von Elementen wollen wir einen Poncelet'schen Cyclus nennen.

Wird von einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz, die cyclisch von der n^{ten} Ordnung ist, ein Cyclus gegeben, so ist die Correspondenz bestimmt, so wie $n > 4$ ist. Denn es gibt gewiss nicht mehr als einen Kegelschnitt Γ^2, der die Seiten eines dem Kegelschnitt C_2 eingeschriebenen Polygons berührt, sobald die Anzahl der Seiten grösser als 4 ist.

Wenn die Seitenanzahl grösser als 5 ist, so können die Ecken des Polygons auf C_2 nicht mehr beliebig gewählt werden, wenn es möglich sein soll, dem Polygon einen Kegelschnitt Γ^2 einzuschreiben, d. h.: Die Aussage, dass n Elemente eines unicursalen Trägers einen Poncelet'schen Cyclus bilden, besagt die Existenz einer gewissen Relation zwischen den Elementen, sobald ihre Anzahl grösser als 5 ist.

2. Ein einfaches n-Eck, dessen Ecken auf einer kubischen Raumcurve C_3 liegen und auf ihr einen Poncelet'schen Cyclus bilden, soll ein räumliches Poncelet'sches Polygon heissen. Seine Seiten sind die Verbindungslinien von je zwei aufein-

anderfolgenden Punkten, seine Seitenflächen die Verbindungsebenen von je drei aufeinanderfolgenden Punkten des Cyclus.

Ein räumliches Poncelet'sches Polygon hat die folgenden Eigenschaften: Seine Ecken liegen auf einer kubischen Raumcurve, seine Seitenflächen sind Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumcurve und seine Seiten gehören einem linearen Complexe (Strahlengewinde) an.

Der Beweis für diese Eigenschaften, soweit sie nicht durch die Definition gegeben sind, liegt in einem Satze von Cayley,[1] welcher besagt, dass die Regelfläche (4. Odg., mit kubischer Doppelcurve), welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf einer kubischen Raumcurve gebildet wird, in einem linearen Complexe enthalten ist. Denn die Ecken eines räumlichen Poncelet'schen Polygons bilden der Definition zufolge einen Cyclus einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf der kubischen Raumcurve C_3, auf der sie liegen, so dass der Cayley'sche Satz direct aussagt, dass die Seiten des Polygons einem linearen Complex angehören.

Es wird nun aber ferner in dem durch diesen Complex bestimmten Nullsystem jedem Eckpunkte des Polygons die Ebene als Nullebene zugewiesen sein, welche ihn mit den beiden Nachbarecken verbindet, weil die Verbindungslinien mit diesen Ecken Nullstrahlen sind. Da die Ecken des Polygons auf einer kubischen Raumcurve C_3 liegen, so werden die Seitenflächen, als Nullebenen der Eckpunkte, sich der kubischen Raumcurve Γ^3 anschmiegen, welche im Nullsystem der Curve C_3 entspricht.

3. Um jenen Satz über die räumlichen Poncelet'schen Polygone zu beweisen, welcher die Analogie mit den ebenen Poncelet'schen Polygonen zu einer vollständigen macht, benöthigen wir einer Hilfsbetrachtung über zwei kubische Raumcurven C_3 und Γ^3 in solcher Lage, dass es unendlich viele gerade Linien gibt, welche Doppelsecanten für die eine und zugleich Doppelaxen für die zweite sind.

[1] Siehe Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes. 3. Aufl., II. Th., S. 436 f.

W. Franz Meyer hat den Satz ausgesprochen,[1] dass zwei solche Raumcurven sich in der bekannten Hurwitz'schen Lagenbeziehung befinden. Dies ist indessen nur einer von den drei Fällen, welche man hier zu unterscheiden hat. Betrachtet man nämlich die symmetrische Correspondenz, welche zwischen zwei Punkten der Curve C_3 besteht, deren Verbindungslinie eine Doppelaxe von Γ^3 ist, so erweist sie sich entweder als (1,1)- oder als (2, 2)- oder als (3, 3)-Correspondenz, je nachdem die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt von C_3 gehenden Doppelsecanten dieser Curve, die Doppelaxen für Γ^3 sind, 1 oder 2 oder 3 beträgt. Jeder von diesen drei Fällen kann, wie wir jetzt zeigen wollen, thatsächlich eintreten.

Im ersten Falle werden die Geraden, welche zu gleicher Zeit Doppelsecanten von C_3 und Doppelaxen von Γ_3 sind, als Verbindungslinien der Paare einer quadratischen Punktinvolution auf C_3 eine Regelschaar zweiter Ordnung bilden. Bei vorgelegter Regelschaar zweiter Ordnung gibt es aber bekanntlich ein ganzes System von kubischen Raumcurven, welche die Geraden der Schaar zu Doppelsecanten haben, und ebenso reciprok ein ganzes System von kubischen Raumcurven, welche diese Geraden zu Doppelaxen haben. Es tritt also der erste Fall thatsächlich ein für zwei Curven C_3 und Γ^3, von denen die erste aus dem ersten, die zweite aus dem zweiten System genommen ist.

Bei der Discussion des zweiten Falles hat man sich gegenwärtig zu halten, dass jede Ebene, welche zwei Doppelaxen einer kubischen Raumcurve enthält, Schmiegungsebene derselben ist. Dies ist aus dem Umstande deutlich, dass die drei durch einen Punkt gehenden Doppelaxen die Schnittlinien von je zwei der drei vom Punkte ausgehenden Schmiegungsebenen sind. Liegt der zweite Fall vor, in welchem durch einen beliebigen Punkt von C_3 zwei Doppelaxen von Γ^3 hindurchgehen, die ihn mit den zwei ihm in einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf C_3 entsprechenden Punkten verbinden, so wird die Ebene dieser drei Punkte eine Schmiegungsebene von Γ^3 sein.

---

[1] Apolarität und rationale Curven, S. 315.

Aus dem obcitirten Cayley'schen Satze folgt aber leicht, dass umgekehrt, wenn auf der kubischen Raumcurve C_3 eine symmetrische (2, 2)-Correspondenz beliebig angenommen wird, die Ebenen, welche einen variablen Curvenpunkt mit den beiden ihm entsprechenden Punkten verbinden, Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumcurve Γ^3 sind, und in solchen zwei Curven C_3 und Γ^3 ist der zweite Fall realisirt.

Wir nehmen endlich an, es liege der dritte Fall vor, wo alle drei Schnittlinien, welche die von einem beliebigen Punkte von C_3 ausgehenden Schmiegungsebenen der Curve Γ^3 paarweise bestimmen, die Curve C_3 nochmals treffen. Ist jetzt die Verbindungslinie der beiden Punkte P und P' von C_3 Schnittlinie von zwei Schmiegungsebenen von Γ^3, von denen die eine auf C_3 noch den dritten Punkt Q, die andere den dritten Punkt Q' ausschneidet, dann wird die dritte Schmiegungsebene, welche neben den Schmiegungsebenen $PP'Q$ und $PP'Q'$ noch vom Punkte P, beziehungsweise P' aus an die Curve Γ^3 geht, die Ebene PQQ', beziehungsweise $P'QQ'$ sein, weil sie sowohl auf der Ebene $PP'Q$, als auch auf der Ebene $PP'Q'$ eine Doppelsecante von C_3 ausschneiden muss. Es gibt hier unendlich viele der Curve C_3 eingeschriebene und der Curve Γ^3 umschriebene Tetraëder, wie $PP'QQ'$ eines ist, und die beiden Curven stehen daher in der Hurwitz'schen Lagenbeziehung.

4. Wir wenden uns zu dem Nachweis, dass jedes Polygon mit mehr als sechs Ecken, das einer kubischen Raumcurve C_3 eingeschrieben und einer zweiten Γ^3 umschrieben ist, ein räumliches Poncelet'sches Polygon ist.

Nehmen wir ein solches Polygon an, so sind seine Seiten als Verbindungslinien aufeinanderfolgender Ecken und als Schnittlinien aufeinanderfolgender Seitenflächen Doppelsecanten der Curve C_3 und Doppelaxen der Curve Γ^3. Für zwei kubische Raumcurven in allgemeiner Lage gibt es bekanntlich 6 Gerade, die Doppelsecanten der einen und zugleich Doppelaxen der anderen sind. Unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass das Polygon mehr als 6 Seiten hat, gibt es mehr als 6, also gibt es unendlich viele solche Geraden und wir haben

zwei Curven C_3 und Γ^3 in der im letzten Artikel behandelten Lagenbeziehung vor uns.

Es fragt sich nun, welcher von den drei dort unterschiedenen Fällen vorliegt.

Der erste nicht, weil in diesem Falle durch jeden Punkt von C_3 nur eine Gerade geht, die Doppelsecante dieser Curve und zugleich Doppelaxe von Γ^3 ist, in unserem Falle aber durch jeden Polygoneckpunkt zwei solche Gerade gehen. Auch der dritte Fall kann nicht vorliegen. Denn hier sind die Geraden, welche Doppelsecanten von C_3 und zugleich Doppelaxen von Γ^3 sind, die Kanten der unendlich vielen Tetraëder, welche der ersten von diesen zwei Raumcurven dritter Ordnung eingeschrieben und zugleich der zweiten umschrieben sind. Da nun jeder Punkt von C_3 Eckpunkt für ein einziges von diesen Tetraëdern ist, so kann ein der Curve C_3 eingeschriebenes Polygon, dessen Seiten Doppelaxen von Γ^3 sind, nicht mehr als vier Ecken haben.

Es liegt also der zweite Fall vor, d. h. es gibt unendlich viele Gerade, welche Sehnen von C_3 und zugleich Doppelaxen von Γ^3 sind, und diese Geraden ergeben sich als Verbindungslinien entsprechender Punkte einer gewissen symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf der Curve C_3. Diese Correspondenz ist cyclisch von der n^{ten} Ordnung, denn in den n Ecken des von uns vorausgesetzen Polygons haben wir einen Cyclus der Correspondenz. Durch diese cyclische Correspondenz werden nun die Punkte der Curve C_3 in Cyclen von n Punkten angeordnet und jeder solche Cyclus stellt die Ecken eines Poncelet'schen Polygons dar, dessen Seitenflächen Schmiegungsebenen der Curve Γ^3 sind, da jede derselben einen Punkt von C_3 mit den beiden ihm vermöge der symmetrischen (2, 2)-Correspondenz entsprechenden Punkten verbindet.

Wir finden:

Stehen zwei kubische Raumcurven in einer solchen Lagenbeziehung, dass es ein einfaches Polygon mit mehr als sechs Ecken gibt, das der einen Curve eingeschrieben und zugleich der zweiten umschrieben ist, so gibt es unendlich viele solche Polygone.

Diesen Satz könnten wir noch dahin ergänzen, dass die Seiten aller dieser Polygone einem linearen Complexe angehören und dass sie eine Regelfläche vierter Ordnung bilden, welche die erste von den beiden kubischen Raumcurven zur Doppelcurve und die Developpable der zweiten zur doppelt umschriebenen Developpablen hat.

Diese Ergänzung ergibt sich aus dem obcitirten Cayley'schen Satze.

Bemerkung über symmetrische Correspondenzen ungeraden Grades

von

Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juni 1897.)

Die vorliegenden Zeilen sind dem Beweise des folgenden Satzes gewidmet:

Die Gruppen von je $n+1$ Elementen, welche gebildet werden von je einem Element eines rationalen Trägers und den n ihm vermöge einer symmetrischen (n, n)-Correspondenz entsprechenden Elementen, gehören einer und derselben Involution n^{ter} Stufe an, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Die Gleichung der Correspondenz

$$\sum_{i,k} a_{ik}\lambda^i\mu^k = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2\ldots n), \; a_{ik} = a_{ki} \tag{1}$$

liefert als Wurzeln in λ die Parameter der Elemente, welche dem Elemente mit dem Parameter μ entsprechen. Es wird also die Gleichung in λ

$$(\lambda-\mu)\sum_{i,k} a_{ik}\lambda^i.\mu^k = 0 \qquad (i, k = 0, 1,\ldots n) \tag{2}$$

für die verschiedenen Werthe von μ die Gruppen von $n+1$ Elementen liefern, über welche der zu beweisende Satz aussagt, dass nicht mehr als n von diesen Gruppen linear unabhängig sind.

Die linke Seite von (2) hat nun die Eigenschaft, lediglich das Vorzeichen zu wechseln, wenn λ und μ untereinander vertauscht werden, so dass, wenn mit b_{ik} der Coefficient von $\lambda^i\mu^k$

dieser linken Seite bezeichnet wird,

$$b_{ik} = -b_{ki} \quad (i, k = 0, 1, 2 \ldots n+1).$$

Diese Relationen zwischen den Coëfficienten von (2) lassen aber die Richtigkeit unseres Satzes erkennen. Denn sie zeigen, dass zwischen den ganzen Functionen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in λ, welche als Coëfficienten der verschiedenen μ-Potenzen in (2) auftreten, eine lineare Relation besteht.

Der Coëfficient von μ^k lautet nämlich

$$b_{0k} + b_{1k}\lambda + b_{2k}\lambda^2 + \ldots + b_{n+1,k}\lambda^{n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots n+1)$$

und die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Stattfinden einer linearen Relation zwischen diesen $n+2$ ganzen Functionen in λ besteht in dem Verschwinden der Determinante der Coëfficienten $|b_{ik}|$. Diese Determinante ist schief-symmetrisch und vom Grade $n+2$; sie verschwindet also thatsächlich, wenn n eine ungerade Zahl ist.

XVIII. SITZUNG VOM 8. JULI 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte: 106. Bd., Abth. II. a, Heft III—IV (März und April 1897).

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über einen Erdbebenregistrator mit elektrisch-photographischer Aufzeichnung des Zeitmomentes des Stosses«.

Das w. M. Prof. Zdenko Hans Skraup in Graz übersendet eine Experimentaluntersuchung: »Über Umlagerungen des Cinchonins«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet folgende sechs Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Condensationen mit Phenylaceton«, von G. Goldschmiedt und G. Knöpfer.
2. »Über Indolinone« (III. Abhandlung), von Prof. K. Brunner.
3. »Über β-Benzoylisonicotinsäure«, von Moriz Freund.
4. »Über β-Toluylpicolinsäure und β-Tolylpyridylketon«, von Dr. A. Just.
5. »Zur Kenntniss der Hemipinsäure und der isomeren Estersäuren der Papaverinsäure«, von Dr. Alfred Kirpal.
6. »Zur Kenntniss des Pinacolins«, von Dr. C. Pomeranz.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Privatdocenten Dr. A.

Nestler, unter dem Titel: »Die Ausscheidung von Wassertropfen an den Blättern der Malvaceen und anderer Pflanzen«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet eine Arbeit aus dem III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Herrn Ludwig Haber, betitelt: »Beitrag zur Kenntniss einiger seltener Erden«.

Herr Prof. J. Mauthner in Wien übersendet eine im chemischen Laboratorium der allgemeinen Poliklinik in Wien ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Richard Burián, welche betitelt ist: »Über Sitosterin. (Ein Beitrag zur Kenntniss der Phytosterine.)«

Herr k. u. k. Linienschiffs-Fähnrich Theodor Scheimpflug übersendet eine Abhandlung: »Über ein optisches Verfahren zur photogrammetrischen Reconstruction von Karten und Plänen«.

Herr Dr. J. Ritter Lorenz v. Liburnau, k. k. Sectionschef i. R. in Wien, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Flysch-Algen«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung von Dr. Adolf Steuer, betitelt: »Vorläufiger Bericht über die pelagische Thierwelt des Rothen Meeres«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung des cand. med. Friedrich Schenk vor, betitelt: »Studien über die Entwicklung des knöchernen Unterkiefers der Vögel«.

Ferner überreicht das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner eine Arbeit aus dem Embryologischen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Corti'schen Membran«, von Dr. Hugo Ignaz Czinner und Dr. Victor Hammerschlag.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführte Arbeit: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente«. (IX. Mittheilung.)

Ferner überreicht Herr Prof. Franz Exner eine von Dr. E. Haschek in seinem Institute ausgeführte Arbeit: »Über die galvanische Polarisation in alkoholischen Lösungen«.

Schliesslich überreicht derselbe eine gleichfalls in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn H. Mache, betitelt: »Bestimmung der specifischen Wärme einiger schwer schmelzbarer Metalle«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. S. Fränkel: »Über Spaltungsproducte des Eiweisses bei der Verdauung. I. Über eine neue Methode der Darstellung der Deuteroalbumose«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine von Czernowitz eingesandte Abhandlung der Herren Prof. R. Přibram und C. Glücksman: »Über den Zusammenhang zwischen Volumänderung und dem specifischen Drehungsvermögen activer Lösungen«. (II. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende vier Abhandlungen:

1. und 2. »Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Abhängigkeit von der Temperatur« (1. und 2. Mittheilung), von Prof. Dr. Gustav Jäger und Dr. Stefan Meyer.
3. »Beobachtungen an geschlossenen Clark'schen Normalelementen«, von Theodor Wulf, Assistent am physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.
4. »Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde«, von Dr. Egon Rit. v. Schweidler.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Mittheilung aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Über die Bildung von Estersäuren aus Säureanhydriden«, von Dr. Rud. Wegscheider.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien von Dr. Josef Tuma, betitelt: »Ein Phasenmessapparat für Wechselströme«. (Fortsetzung.)

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(IX. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von K, Na, Ba, Bo, Fe)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

Während bei den bisherigen Aufnahmen ausschliesslich Elemente als Elektroden verwendet wurden, mussten wir bei K, Na, Ba und Bo aus naheliegenden Gründen von dieser Regel abweichen und Verbindungen dieser Elemente verwenden. — Es waren dies respective Kaliumcarbonat, Natriumcarbonat, Baryumhydroxyd und Borsäure, welche auf Elektroden von Gaskohle aufgeschmolzen und so in die Funkenstrecke eingeführt wurden. Es mag dabei allerdings vorkommen, dass schwache Linien durch Linien der Gaskohle oder der Cyanbanden verdeckt werden, oder dass die aufgeschmolzene Verbindung zu wenig Dampf entwickelt, um alle Linien ihres Spectrums zu zeigen. Übrigens haben Vergleichsaufnahmen des Natriumspectrums mit metallischem Natrium keine anderen als die aus der Verbindung gemessenen Linien ergeben. Von einer Reproduction der Spectren der oben genannten vier Elemente müssen wir wegen des übergelagerten Spectrums der Gaskohle absehen; übrigens enthalten dieselben nur wenige Linien.

XXV. Kalium.

Das Bogenspectrum des Kaliums wurde von Liveing und Dewar,[1] sowie von Kayser und Runge,[2] das Funkenspectrum von Eder und Valenta[3] gemessen. Funken- und Bogenspectrum zeigen wesentliche Differenzen. Die Zahl der von uns gemessenen Kaliumlinien beträgt 59.

λ	i	λ	i	λ	i
4505·55	6+ [4]	3955·40	5 [4]	3381·03	5+ br.
4388·17	5	3897·97	2	74·02	5+
43·5	6+ [4]	17·92	6	64·8	4+ br.
40·2	6+ [4]	00·1	6+ br.	63·30	3+
09·30	5	3783·23	6	45·80	4+
05·2	6+	67·4	6+	22·45	6+
4263·35	3	16 9	6+ br.	12·9	6+
25·85	6+	12·98	5 (L)	3221·0	6+ br.
23·03	5	3681·62	5	17·8	6+
4186·49	1 v.	18·9	6+ [4]	17·3	6+
49·25	5	09·6	6+ 2 AE.	09·4	6+
34·77	5	3530·98	3	02·0	6+
15·1	5	3481·5	6+ br.	3190·9	6+
4047·34	1 r.	77·3	6+ br.	29·7	6+
44·32	1 r.	47·60	6+	3062·40	5+ Fe?
18·4	6+ 2 AE.	46·58	6+	23·5	6+
12·05	6+	40·6	6+	2992·47	6+
01·35	5	33·95	6+	2852·6	5+ br.
3972·7	6+	04·9	6+ br.	2549·6	6
67·2	6 [4]	3385·3	5+ br.		

XXVI. Natrium.

Das Bogenspectrum des Natriums wurde von Kayser und Runge,[5] das Funkenspectrum von Eder und Valenta[6]

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).
[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1890).
[3] Eder und Valenta, Denkschr. der k. Akad. 61 (1894).
[4] Vielleicht nicht Kalium.
[5] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1890).
[6] Eder und Valenta, Denkschr. der k. Akad. 61 (1894).

gemessen. Das Natriumspectrum gehört zu den linienärmsten. Wir konnten nur 5 Linien constatiren, darunter eine charakteristische starke Doppellinie. Die Lichtstärke während der Exposition war trotz eines Spaltes von nur 0·012 *mm* Breite so bedeutend, dass beide Componenten der D-Linie auf einem Schirm deutlich umgekehrt erschienen.

λ	*i*
3303·13	1 u.
02·50	1 u.
2951·25	6+
2852·90	4+
2680·3	6+ 2 AE.

XXVII. Baryum.

Das Bogenspectrum des Baryums wurde von Liveing und Dewar,[1] sowie von Kayser und Runge[2] bestimmt; das Funkenspectrum wurde bisher nicht gemessen. Wir haben zwischen $\lambda = 4726·64$ und 2255·0 AE. 168 Linien gemessen. Funken- und Bogenspectrum differiren wesentlich, nicht nur was die Zahl der Linien anlangt, sondern auch in Bezug auf die Intensitätsverhältnisse der gemeinsamen Linien. Zu bemerken wäre noch, dass von den Baryumlinien, die im Funkenspectrum auftreten, nicht aber im Bogen, der bei weitem grössere Theil sich als unbezeichnete Linien in der Rowland'schen Tabelle des Sonnenspectrums findet. Das Gleiche gilt auch von den Linien des Kaliums, so dass es scheint, dass durch das Studium der im Allgemeinen viel linienreicheren Funkenspectren sich noch ein grosser Theil der bisher unbekannten Sonnenlinien wird identificiren lassen. Die Linie 4554·22, welche 8 AE. breit ist, wurde nicht im Baryum selbst gemessen.

Bezüglich solcher für eine genaue Messung zu breiter Linien befolgen wir den Vorgang, sie in den Spectren anderer

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

Substanzen, in denen sie in Folge Verunreinigung und daher schwach und scharf auftreten, zu messen.

λ	i	λ	i	λ	i
4726·64	5	4239·82	6+	3599·62	6
00·75	6	24·10	5	93·5	6+
4691·76	4	4180·98	6	88·3	6+
73·68	6+ br.	80·6	6	86·6	6+ br.
28·5	6+ br.	79·50	6	79·95	5+
20·15	6+ br.	66·22	1 r.	77·80	6
07·48	6	30·88	1 8 AE.	76·20	6
05·1	6+ br.	4087·8	6+ br.	67·0	6+
4599·98	5	80·8	6+ br.	62·2	6+
91·9	6+	53·75	6+	48·1	6+ br.
89·9	6+	3995·92	5	45·02	5+
79·82	3	93·61	2	41·82	5+
74·10	4	38·03	5	30·3	6+
54·22	1 u. 8 AE.	35·91	4	29·8	6+
25·16	1 r. 3 AE.	26·92	4	25·35	5+ br.
23·50	5+	17·50	6+	01·23	2
06·11	3	10·08	3 r.	3420·6	6+ 2 AE.
4493·7	5+	06·11	6	3394·80	6
89·1	5+ br.	3892·00	1 5 AE.	93·6	6+
82·0	6+ 2 AE.	89·50	5	93·0	6+
67·28	5	62·0	5+ 2 AE.	69·88	4
32·06	2	3794·8	6+ br.	68·32	2
13·93	6+	08·00	6	57·2	6+ 2 AE.
07·08	6+	01·7	6+ br.	53·57	6
02·71	2	3689·0	6+ 2 AE.	32·2	6+ br.
4373·0	6+ 2 AE.	82·3	6+	15·7	6+ 3 AE.
59·7	6+ br.	73·8	6+	06·5	6+ 2 AE.
50·52	3	70·35	6+	3287·00	4
43·8	5+ br.	64·75	6+	81·75	4
36·7	6+ br.	62·60	6	69·83	5
33·0	6+ br.	55·82	6	68·62	6
25·38	6	49·30	5	67·10	5
23·1	6+ br.	37·5	6+ 2 AE.	59·3	6+ br.
4291·30	5	30·83	5	35·10	5
83·26	2	13·00	6+	12·90	6
64·50	6+	11·22	6+	07·2	6+
42·88	5+	02·22	6+	3198·55	6

λ	i	λ	i	λ	i
3195·35	4	2884·1	6+	2575·3	6+
63·50	5	77·05	6	70·8	6+ br.
52·82	3	50·0	6+ br.	59·69	4
26·60	5	32·07	6	47·0	6+ br.
19·32	3	31·75	5[1]	31·1	6+
04·03	3	13·68	5	28·8	4+ 2 AE.
3080·00	5	2785·37	6+ [1]	23·97	5
79·22	4	71·69	2+ r. 2 AE.	20·15	6
71·71	3	65·1	6+ br.	10·3	6+ br.
48·18	6	62·5	6+ br.	05·15	5
43·50	4	46·0	5+ br.	2483·35	6 (Fe?)
14·33	4	36·2	6+ br.	76·95	5
07·0	6+ Ca?	31·48	5	18·10	6
2987·82	6	02·8	6+	2373·10	6
76·10	6	2688·1	6+	47·59	4+
62·58	4	81·97	4	35·30	4 u.
60·19	5	77·0	6+	31·23	6
39·10	5	47·4	4+ r. 2 AE.	23·63	6
08·1	6+	41·5	5+ r. 2 AE.	04·32	5 u.
2898·6	6+ br.	35·0	2+ 2 AE.	2255·0	6+ br.

XXVIII. Bor.

Das Bogenspectrum des Bors ist bis auf einzelne Linien, welche Rowland in seinen Tabellen anführt, unbekannt; das Funkenspectrum wurde schon vor längerer Zeit, jedoch in ganz ungenügender Weise von Hartley[2] gemessen und später noch von Eder und Valenta.[3] Unsere Messungen ergaben im ganzen Ultraviolett nur 8 Linien.

λ	i	λ	i	λ	i
3451·40	1 r.	2688·2	6+	2496·88	1
3246·7	6+	87·3	6+	2267·03	6+
2831·77	5 [4]	2497·80	1	66·47	6

[1] Nicht Ba, denn diese Linie tritt im Vergleichs-Eisen stärker auf, obwohl im letzteren die starke Ba-Linie 2771·69 gänzlich fehlt.

[2] Hartley, Proc. Roy. Soc. (1883).

[3] Eder und Valenta, Denkschr. der k. Akad. 60 (1893).

[4] Nicht Bor, vergl. dieselbe Linie im Baryum.

XXIX. Eisen.

(Taf. I und II.)

Wir haben zu den bisherigen Messungen ein älteres Rowland'sches Gitter von 1·52 *m* Radius verwendet. Die folgenden Messungen wurden mit Hilfe eines grossen Gitters ausgeführt, das mit Rowland's neuer Maschine getheilt ist und bei einem Krümmungsradius von 4·56 *m* 20.000 Linien auf den englischen Zoll enthält. Das Gitter zeigt eine vorzügliche Definition und nur bei den allerstärksten Linien eben noch wahrnehmbare Spuren von Geistern, so dass z. B. im ganzen Eisenspectrum bei stärkster Exposition nur 3 Linien im Blau solche zeigen, obwohl auch hier sich das Vorhandensein der Geister nicht mit Bestimmtheit erkennen liess. Wir benützen das erste Spectrum, wodurch gegenüber unseren früheren Aufnahmen noch etwas mehr als die doppelte Dispersion erreicht wird. Der verwendete Spalt hat eine Breite von 0·007 *mm*. Bezüglich der Reproductionen sei bemerkt, dass dieselben so wie früher direct von den gemessenen Platten in Originalgrösse gegeben werden.

Um eine grössere Conformität mit den übrigen Autoren auf dem Gebiete der Spectralanalyse zu erzielen, haben wir die Anordnung unserer Tabellen im Folgenden dahin abgeändert, dass wir dieselben mit den kürzesten Wellenlängen beginnen; desgleichen haben wir an Stelle der bisher verwendeten sechsgradigen die jetzt üblichere zehngradige Intensitätsscala angenommen, bei welcher die stärksten Linien mit 10, die schwächsten mit 1 bezeichnet sind, während, worauf wir nochmals aufmerksam machen, bei unserer bisherigen Scala die stärksten Linien mit 1 bezeichnet waren. Übrigens wollen wir nach dem Vorgange Rowland's solche Linien, welche mit ganz abnormer Intensität auftreten, noch mit 50, 100 u. s. w. bis 1000 bezeichnen. Die Erklärung der den Zahlen beigesetzten Zeichen bleibt dieselbe wie bisher:

+ = verwaschen;
br. = breit;
+2 AE. = verwaschen und 2 AE. breit;
d. = doppelt;
r., v. = verwaschen nach roth, respective violett.

Von Messungen des Eisenspectrums liegen, abgesehen von einigen älteren Messungen, vor: Die des Funken- und Bogenspectrums von Liveing und Dewar[1] und des Bogenspectrums allein von Kayser und Runge;[2] ausserdem noch eine grosse Zahl von Rowland[3] im Bogen gemessener und in seiner Standard-Tabelle aufgeführter Linien. Die Messungen von Liveing und Dewar sind jedoch nur mehr in qualitativer Hinsicht brauchbar. Nach unseren Messungen zeigen Funken- und Bogenspectrum, namentlich im äussersten Ultraviolett, grosse Unterschiede, wie schon eine flüchtige Vergleichung unserer Tafeln mit jenen von Kayser und Runge lehrt. Da das Spectrum des Eisens in Folge seiner überaus zahlreichen, fast ausnahmslos scharfen und ziemlich gleichmässig vertheilten Linien sich sehr gut zu einem Standard-Spectrum eignet, so war es uns darum zu thun, mit möglichst reinem Eisen zu operiren, umsomehr, als sich die Messungen von Kayser und Runge auf gewöhnliches Schmiedeeisen beziehen. Herr Prof. H. Weidel hatte die Güte, uns möglichst reines Eisen darzustellen; da dasselbe nur pulverförmig zu erhalten ist und ein Schmelzprocess wegen etwaiger Verunreinigungen vermieden werden musste, die Substanz aber zur Erzeugung der Funkenstrecke doch in eine feste Form zu bringen war, so comprimirten wir das Eisenpulver in einer eigens zu diesem Zwecke construirten Stahlpresse und bei einem Druck von über 1000 Atmosphären, wodurch das Pulver sich zu festen Eisenstücken zusammenschweisste. Die spectralanalytische Untersuchung ergab einen hohen Grad von Reinheit. Während Kayser und Runge in ihrem Eisenspectrum viele hundert Linien haben, welche Verunreinigungen, namentlich Ni, Co, Cr, Mn, angehören,[4] konnten wir in unserem nur 14 fremde Linien constatiren, welche sich auf Spuren von Ca, Mg, Ba, Mn, Cu und Si vertheilen. Die Zahl der von uns im ultravioletten Theil des Eisenspectrums gemessenen Linien beträgt 2270. Jene Linien in der

---

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans., 174 (1883).

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1888).

[3] Rowland, vergl. Watts, Index of Spectra, App. G.

[4] Vergl. Hasselberg's Untersuchungen über die Spectren der Metalle. Königl. schwed. Akad. der Wiss. Bd. 26 und 28.

folgenden Tabelle, die wir als Standard-Linien benützten und deren Wellenlänge wir von Rowland übernahmen, sind mit R. bezeichnet.

λ	i	λ	i	λ	i
2068·25	1+	2192·30	1	2238·33	1+
79·00	1	96·14	1	38·71	1
87·54	1	98·86	1+	39·18	2
97·48	1	2200·44	1	39·70	1
97·60	1	00·81	1	40·63	1
2136·00	1	01·72	1+	41·56	2
36·50	1	06·30	2+	41·90	1
46·06	1	06·68	1	42·40	1
47·74	1	08·54	2	42·68	1
50·67	1	09·18	2	43·23	1+ br.
51·15	1	09·78	1	44·38	2+
51·9	1+	11·19	1	45·64	2+
52·42	1	13·74	3	47·00	2
61·18	1	14·20	1+	47·80	2+
62·08	2	15·22	1+	49·20	2
64·40	1	15·88	1+	50·24	1
66·81	2	17·15	1	51·03	2
67·50	1	18·90	2	51·62	1
67·90	1	19·97	2	51·97	2
73·07	1	20·48	3	53·18	2
74·77	1	21·25	2	54·14	1
74·95	1	22·53	1	54·25	1
75·54	2	23·56	2	54·42	1
76·68	1	24·58	1	55·24	1
77·10	1	27·23	1	55·82	3
78·15	1	27·45	1	56·49	1
80·55	1	27·55	1	57·00	1+
83·85	1	27·68	1	57·90	2
86·56	1	28·88	2	59·62	1
86·92	1	31·64	2	60·13	2
87·28	1	32·19	2	60·20	1+
87·40	1	34·00	3	60·92	2
87·82	1	35·58	1	62·36	1
89·12	1	35·93	1	62·75	2
91·94	1	37·66	2	63·30	2
92·08	1	37·96	2	64·42	1

λ	i	λ	i	λ	i
2264·65	2	2300·48	1+	2331·18	1
66·05	1	01·20	1+	31·41	7
66·32	1	01·50	1	32·62	1
66·77	1	01·74	1	32·88	8
67·14	1	03·42	2	33·84	1
67·64	3	03·63	1	34·5	1+ br.
68·20	1	03·87	1	35·25	1
68·58	1	04·78	2	35·55	2+
68·91	1	06·06	1	36·97	2+
70·40	1	06·45	1	37·65	1
71·87	1	07·37	3	38·09	8
72·13	1	07·75	1	39·05	1
74·13	1	08·80	2	39·50	3
76·07	2	09·04	2	40·55	2+
79·98	4	10·17	1	41·04	1
83·37	1	11·33	3	41·33	1
83·74	1	12·10	2	42·07	1
84·10	3	13·17	1	42·36	1
87·31	1	13·38	1	43·58	9
87·65	1+	14·05	1	44·05	3
88·8	1+ br.	14·90	1+ br.	44·40	5
90·60	1	15·9	1+ br.	45·43	6
91·21	1	17·40	2+	46·0	1+
91·69	1	18·41	1	46·37	1+
92·57	1	18·62	2	46·80	1+
92·90	1	20·44	2	48·23	7
93·20	1	21·76	2	48·40	7
93·89	2	22·43	1	49·45	1+
94·48	1	23·2	1+ br.	50·33	1+
94·68	2	24·60	1+	50·72	1+
95·8	1+ br.	25·38	2	51·31	6
96·3	1+ br.	25·65	2	51·84	1 d.
96·72	1	25·80	1+ br.	52·12	1
96·87	1	26·43	2	52·50	2+
96·96	1	26·95	1+	53·75	2+ br.
97·76	1	27·49	6	54·59	5
98·25	2 R.	28·03	2	55·00	5
98·68	1	29·44	2	55·29	2
99·27	1	30·17	1+	55·50	2+ br.
2300·19	1	30·60	1+	56·55	1

λ	i	λ	i	λ	i
2357·10	3	2387·51	3	2411·15	7
58·43	1	88·28	2	11·72	1
59·23	7	88·46	2	11·95	1+
59·68	2	88·71	7	12·57	1+
60·08	5	89·51	1	13·36	8
60·42	5	90·04	1+	14·16	2
61·83	3	90·31	1+	15·12	3
62·23	4	90·92	1+	15·49	1
63·68	1+	91·10	1+	15·85	1+
64·00	3+	91·59	4	16·54	3
64·90	7 R.	92·27	1+	16·75	3
65·92	2+	92·75	1+	17·91	5
66·69	3	93·13	1	18·6	2+
67·00	1	93·35	1+ br.	18·7	2+
68·69	8	94·20	1+ br.	19·42	1
69·33	1	94·98	3	20·1	2+ br.
70·17	5+	95·51	4	21·0	1+ br.
70·60	3	95·73	7	21·82	1+
71·07	1+	96·80	3	21·98	1
71·52	1	98·05	1+	22·75	5
71·90	1+ br.	98·77	2+	23·00	1
72·50	1+	99·31	8	23·28	5
72·73	4	2400·40	4	24·18	7
73·82	8	01·45	2+	24·49	2
74·61	1	02·14	2	24·70	4
75·30	6	02·37	1	25·41	2
76·60	6+	02·70	3	25·73	3
77·63	1	03·92	1	25·97	2
78·57	2	04·49	4	26·67	1+
79·05	1	04·98	7	27·32	3+ br.
79·36	7	05·82	1	28·41	6
80·35	1	05·89	1	28·80	2
80·86	5	06·18	1	29·08	2
82·13	9	06·73	6	29·45	3
83·00	2	07·08	2	29·95	1
83·17	2	08·00	2	30·18	7
83·40	4	08·80	2+	30·90	1
84·49	5	09·43	1	31·02	1
85·10	2	09·78	1	31·35	1+ br.
86·53	2+ br.	10·59	8	32·30	6

λ	i	λ	i	λ	i
2432·92	6	2453·85	2	2475·70	2+
33·55	5	54·2	2+ br.	76·31	2
34·3	3+ br.	54·63	4	76·74	2
34·70	5	55 98	2+ br.	77·40	3
34·98	5	56·18	2	78·20	2
35·84	1	56·40	2	78·62	4
36·24	2	57·64	2 r.	79·29	1
36·70	3	58·80	6	79·53	1
37·22	3	58·98	3	79·83	3
37·75	1	59·50	1	80·22	5
38 22	1	60·60	5+	81·11	3
39·35	6	61·36	5	81·66	2
39·79	2	61·90	5 d.	82·18	4
40·16	1	62·24	1	82·38	2
40·48	4	62·73	2	82·78	4
41·23	1	63·36	4	83·33	4+
41·62	1	63·79	2	83·83	2
42·18	1	64·10	4	84·30	3
42·62	3	64·95	4	84·63	2
43·90	2	65·28	4	85·15	1
44·57	6	66·00	4	86·39	5
45·21	2	66·73	4	86·76	1
45·67	4	66·87	4	87·12	1
45·88	2	67·80	1	87·43	1
46·15	3	68·34	3	88·23	2+
46·50	4	68·67	1	88·40	1+
47·31	4 d.	68·95	2	89·00	1
47·79	4 R.	69·53	4	89·52	3
48·80	1	69·92	1	89·92	5
49·28	1	70·44	3	90·75	3
49·37	1	70·73	4	90·91	3
49·87	1	71·40	1	91·22	2
50·00	3	71·72	1	91·47	4
50·28	3	72·14	2	92·05	1
51·20	1	72·45	3	92·41	3
51·29	2	72·68	1+	93·31	8
51·40	1+	73·00	2+	94·12	2+
52·98	1	73·41	3	95·91	3
53·28	1+	74·82	3	96·61	2
53·56	1	75·25	1+	97·07	1

λ	i	λ	i	λ	i
2497·36	1	2519·49	1	2542·24	3
97·88	5	19·70	2	43·49	5
98·46	1	20·45	1+	44·02	3
98·95	7 r	20·76	2	44·82	1
99·98	1	21·22	5	45·05	3 Cu
2500·47	1+	21·60	2	45·32	3
01·00	3	21·93	4	45·60	2+
01·25	2	22·31	2	46·06	2
01·55	1	22·96	6	46·80	5
01·79	1	23·76	3	47·43	4
02·49	4	24·41	3	48·42	3
03·39	4	25·22	3+	48·73	3
03·67	3	25·50	7	48·89	3
03·97	5	25·95	1	49·20	3
05·05	1+	26·16	2	49·60	4
05·30	2	26·40	6	50·20	5
06·15	4	27·16	3	50·87	5
06·53	1 Cu	27·51	3	51·32	4
06·95	1+	27·80	3	52·06	1+
07·11	1	28·58	1	52·68	1
07·73	1+	29·24	2+	52·93	1
07·98	2	29·36	2+	53·30	2
08·40	2	29·69	6	53·85	2
08·82	1	30·77	2	54·52	1
09·18	3	31·16	1	55·12	3
10·00	1+	32·2	1+ br.	55·54	3
10·93	3 R.	33·71	7	56·40	1
11·46	1	34·50	6	57·18	1
11·85	7	35·59	5	57·60	3
12·60	3	36·84	3	58·70	1
13·40	2+	36·95	5	59·35	2
14·49	6	37·3	3+ br.	59·84	3
14·95	2	38·25	4	60·01	3
15·21	2	38·65	2	60·39	4
16·19	2	38·95	5	61·02	1
16·68	1	39·10	4	61·70	1+
17·21	5	39·91	1	62·16	3
17·75	1	40·72	5	62·59	6
18·19	4	41·20	5	63·54	5
19·14	5	41·91	5	63·95	2

λ	i	λ	i	λ	i
2565·1	1+	2595·75	1+	2628·40	8
66·31	3	96·87	1+	29·67	5
66·49	2	98·43	9	30·16	3
66·71	2	99·50	10 u.	31·14	4
67·01	4	2600·55	1	31·46	4
68·48	4	01·25	1	31·79	3
68·96	2	02·08	1+	32·35	1
69·86	3	04·13	1	32·70	1
70·14	2	04·52	1	33·31	2
70·94	4	04·80	1+	33·75	1
71·65	1	05·10	4	34·00	1
72·3	1+ br.	05·44	5	35·07	1+
73·06	2	06·03	1	35·50	2
73·32	2	06·60	4	35·91	2
73·85	1	07·17	9 r.	36·68	1+
74·46	5	08·92	1	36·82	1+
75·83	1	09·20	2	37·72	4
76·18	1 Mn	09·57	1	39·66	3
76·89	5	09·96	2	41·23	1+
77·50	1	11·16	3	41·77	1+
77·98	5	11·95	9	42·13	3
79·22	2+	13·91	9	44·12	2
79·48	2+	14·60	1+	45·26	2
80·6	1	15·00	1	45·49	2
80·82	1	15·50	1	46·36	1
81·22	2	16·49	1	47·70	1+
82·62	7	17·70	7	49·59	3
83·15	1	18·16	1	50·70	2+ br.
83·43	1	19·16	4	51·82	1
84·63	3 R.	20·27	2+	52·68	1
85·96	8 r.	20·54	3	53·8	1+ br.
88·05	5 r.	20·81	3	54·8	1+ br.
88·87	2	21·78	6	56·0	1+ br.
90·65	3	23·26	2	56·26	1+
91·65	6	23·65	2	58·05	1
92·87	6	23·88	2	58·38	3
93·80	4	24·35	1	60·50	1+ br.
94·17	1+	25·67	5	62·13	1+
95·06	1	25·80	7	62·8	1+
95·37	1	26·60	3	64·34	2

λ	i	λ	i	λ	i
2664·78	7	2706·68	3 R.	2737·05	5
65·77	1+	07·23	3	37·43	2
66·75	7	08·69	1	37·74	1
67·45	1+	09·14	3	39·67	10
69·3	1+ br.	09·51	1	41·46	2
69·60	1	10·0	1+ br.	42·36	1
70·05	1	10·66	1	42·51	2
70·52	1	11·94	4	43·34	8
71·6	1+ br.	12·48	2	44·15	1
72·3	1+ br.	14·51	7	44·60	1
72·7	1+ br.	16·30	4	44·98	1
77·00	1	16·77	1+	46·58	7
79·15	2 R.	18·2	1+ br.	47·08	7
80·55	1+	18·54	1	49·40	10
80·77	1+	18·73	1	50·24	1 R.
80·98	1+	19·13	2	51·26	2
81·16	1+	19·40	2	52·3	1+ br.
82·63	2	20·30	1	53·32	7
83·10	1	21·00	3	53·83	1
84·84	6	21·94	1	54·19	1
86·2	1+	22·18	2	54·55	1
86·5	1+	22·86	2	55·82	10
89·26	3	23·69	2	56·45	2
89·93	1	24·99	4	56·65	1
90·17	1	26·15	1	57·16	2
91·83	1	26·34	1	57·45	2
92·68	6	26·62	1	58·02	1+
92·92	2	27·59	8	58·60	1+
93·96	1	28·10	1	59·45	1+
94·5	1+ br.	28·99	2	59·95	1
95·4	1+ br.	29·70	1+	61·00	1
96·1	1+	30·85	4	61·88	3
96·35	1	32·15	1	62·19	2
97·52	2 d.	32·59	1	62·60	1
99·22	1 d.	33·06	1	63·25	1
2701·4	1+ br.	33·69	2	64·05	1
01·8	1+ br.	34·12	1	64·50	1
04·10	5	34·38	1	64·93	1
04·66	1	34·92	1	65·6	1+ br.
06·14	1	35·57	2	66·3	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2767·06	1	2797·92	1	2839·85	2+ br.
67·62	7 r.	98·06	1	40·46	2
68·50	1	98·40	1 Mn	40·82	3
69·03	3	99·42	2	41·47	1
69·49	4	99·83	1	42·20	1
70·64	2	2800·9	1+	42·85	1+
71·34	1	01 18	1+ Mn	43·43	1+
71·70	1	02·82	2 Mg?	43·58	1
72·23	2	03·72	1+	43·75	1
72·6	1+	04·13	1+	44·08	2
73·38	1	04·64	2	45·51	1+
74·82	3	05·02	1	45·72	1
75·5	1+	05·44	1+	45·8	2+ br.
76·31	1	05·91	1	47·34	1
77·15	1+ br.	07·60	2	48·15	2
78·01	2	10·0	1+ br.	48·52	2+ br.
78·34	2	11·36	1	49·02	1
78·96	1	12·2	1+	49·70	2
79·40	5	13·40	2	51·90	2 R.
80·07	1	13·74	1	52·24	1 Mg
80·19	1	17·25	1+	53·02	1+
80·9	1+ br.	17·60	1+	53·33	1+
81·96	1	19·45	1	53·85	1+
83·81	7	23·41	3	55·77	3
84·43	1	25·66	2	56·25	1
85·46	3+	25·85	1	56·52	1+
87·5	1+ br.	26·16	1	57·07	1+
88·23	3+	27·55	2	57·28	2
89·97	1	28·02	1	57·53	1
90·70	1	28·75	3	58·40	5
91·20	1	31·15	1	58·95	1+
91·65	1	31·67	5	61·26	1
91·94	1	32·57	2	63 53	1
92·55	1	33·3	1+ br.	63·95	1
93·40	1	35·58	1	64·4	1+ br.
94·02	3	35·82	4	65·05	1
94·9	1+	36·31	1	66·82	1
95·65	3 Mg?	36·63	1	68·52	1
96·9	1+ br.	37·43	1	68·96	1
97·5	1+ br.	38·23	1 R.	69·28	1

λ	i	λ	i	λ	i
2869·40	1	2923·99	1	2984·97	6
70·70	1	25·52	1	85·70	4
71·19	2	26·71	3	87·41	1
72·47	3	29·13	2	90·51	1
73·49	4	31·75	1+	94·56	3
74·27	1	37·02	2 R.	97·45	1
75·44	2	39·62	1	99·65	2
76·86	2	41·46	1	3000·20	1+
77·38	1	44·55	4	00·57	1
79·35	1	47·78	3	01·08	2
80·89	3	48·00	2	02·80	3
81·69	1 Si	48·52	1	03·19	1
83·80	3	49·30	2	07·42	1
84·9	1+ br.	50·35	1+	08·26	2
86·02	1	53·88	3	09·70	2
86·32	1	54·06	2	11·60	1
87·4	1+	57·49	1 R.	16·05	1+
87·95	1	59·70	1	16·30	1
88·20	1	60·11	1	17·73	1
92·95	1	61·40	1	19·11	1
94·65	1	64·25	1	20·60	2
94·90	2	64·76	1	20·79	2
95·17	1	65·17	2	21·18	2
95·35	2	65·39	1	24·14	1
97·37	2	67·03	2	25·75	1
99·50	1	69·53	1	25·96	2
2901·52	1	69·63	1	26·57	1
02·03	1+	70·05	1	30·25	1
02·57	1+	70·25	2	31·34	1
06·25	1	70·64	2	31·75	1
07·60	1	73·28	2	37·50	3
07·98	1	73·39	2	40·55	1
10·9	1+ br.	76·05	1	41·80	1
12·27	1	76·70	1	41·88	1
17·20	1+	79·48	1	42·12	1
17·65	1+	80·70	1+	42·77	1
18·14	1	81·12	1+	45·1	1+ br.
20·82	1	81·59	1	47·72	3 R.
22·16	1	82·20	1	53·17	1
23·43	1	83·71	2	55·40	1

λ	i	λ	i	λ	i
3056·95	1+	3157·97	1+	3210·56	3
57·56	3	59·0	1+ br.	10·94	1
59·20	3	60·74	1	11·82	1
62·33	2	62·05	1	12·13	3
65·50	1+	62·90	1	13·45	5
67·35	3	65·95	1+	14·13	3
68·27	1+	66·52	1	14·49	1
75·84	2	67·96	4	16·04	2
77·30	2	70·47	1	17·47	2
78·9	1+ br.	71·43	1	19·67	2
83·85	2	75·54	1	19·93	2
89·5	1+	77·64	3	22·19	4
91·70	2	78·09	1	25·90	5
96·45	2	79·07	1	27·92	6
98·30	1	79·61	2	28·36	1
3100·05	2	80·32	2	29·03	1
00·44	2	80·85	1+	29·27	1
00·76	2	81·67	1	30·00	1+
05·25	1+	83·24	1	30·14	1
05·65	1+	84·98	1	30·36	1
06·65	1+	85·43	1+	31·12	2
14·40	1	86·87	3	31·85	1
16·70	1	87·40	1	32·94	1
19·60	1	88·70	1+	33·19	2
20·50	1	88·92	1	34·11	1
25·77	1	90·95	1+	34·72	1
26·25	1+	91·77	1	36·33	1
33·17	1+	92·15	1+	36·70	1+
34·20	1	93·05	2	37·53	1
35·49	2	93·39	2	37·95	2
40·00	1+	93·95	3	39·55	3
40·48	1+	96·21	3	43·85	2
42·52	1+	97·06	3	44·31	2
42·95	1	99·63	1	46·12	1
44·08	1	3200·58	2	46·60	1+
44·88	1	02·75	1	47·10	1
51·45	1	05·50	2	47·32	3
53·33	1+	08·6	1+	47·66	3 Cu
54·32	5 R.	09·45	1	48·31	1
57·12	1	10·35	1	49·35	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3249·81	1	3298·04	1	3355·35	2
50·80	1+	98·26	1	56·49	1
51·40	1	3301·3	1+ br.	58·4	1+ br.
53·06	1	02·0	1+ br.	60·2	1+ br.
53·75	1	03·00	1+	61·31	1
54·50	2 R.	03·65	1+	66·92	2
56·01	2	06·10	6	69·69	3
57·73	1	06·49	6	70·92	4
58·90	3	07·85	1	72·18	1
59·20	3	10·48	1	72·90	1
60·11	1	10·57	1	78·76	2
60·40	1	14·87	2	79·11	2
62·45	1	16·21	1	80·25	3
64·64	1	18·7	1+ br.	81·15	1+
65·16	1	19·40	1	82·52	1
65·76	3	22·65	1+	83·00	1
67·06	1	23·21	2	83·84	1
67·13	1	23·83	2	84·11	2
68·34	1	23·87	1	87·50	1
68·67	1+	24·65	1	89·85	1
71·16	3	25·56	1	92·13	1
73·70	1+	28·95	2	92·43	2
74·11	3 Cu	31·70	1	92·80	3
76·75	1+	34·32	1	94·72	1
77·48	3	35·36	1	95·46	1+
78·87	1+	36·33	1	96·1	1+ br.
79·8	1+ br.	37·86	1	97·10	1
80·42	2	38·65	1+ br.	97·75	1+
81·44	2	39·28	1	98·45	1+
83·02	1	40·65	1	99·49	5 R.
84·72	1	41·99	1	3401·68	1
85·65	1	42·37	1	02·42	2
86·90	5	47·00	1	04·50	3
89·49	2	48·01	1 R.	06·62	1+
91·15	1	49·11	1	06·96	2
92·16	2	49·48	1	07·62	6
92·74	2	51·63	1	10·30	1
95·35	1+	51·83	1	11·50	1
95·95	1	51·89	1	13·31	5
97·00	1	54·14	1	15·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
3417·99	3	3478·00	1+	3538 06	1
18·66	3	78·80	1+	40·27	1 R.
22·68	1	83·15	1	40·90	1+
22·82	2	85·49	2	41·23	4
24·45	3	89·82	1	42·21	5
25·17	1	90·73	6	43·60	1+
26·53	2	93·63	2	43·82	1
26·81	2	94·9	1+	44·75	1
27·29	5	95·44	2	45·76	2
28·35	2	97·26	3	47·33	1
31·98	1	98·00	5	48·17	1
33·72	1	3500·71	1	49·98	1
36·25	1+	04·99	1	52·28	1
38·19	1	05·20	1	53·01	1
38·42	1	06·64	1	53·91	2
40·02	1	08·63	1	54·32	1
40·77	7	10·0	1+	54·7	1+
41·16	6	10·55	1	55·09	5
42·51	1	13·17	1+	57·02	3
42·82	1	13·96	5	58·68	6
44·03	5 R.	16·53	1	59·65	1
45·30	4	19·00	1+	60·83	1
47·43	2	21·41	6	62·0	1+ br.
50·47	2	21·99	1	64·67	1
51·80	1+	22·43	1	65·54	8 r.
52·16	2	23·47	1	66·25	1+
52·41	2	24·22	1	66·75	1+
53·13	1	24·38	2	67·20	1
57·05	1+	26·15	4	68·55	1
58·44	1	26·31	4	69·00	1
60·04	1	26·60	3	69·12	1
66·01	7	26·83	2	70·18	8
68·80	1	27·94	2	70·42	8
68·94	1	29·97	2	71·38	1
69·13	1+	30·55	1	72·13	2
69·97	1	33·12	2	72·75	1+
71·46	2	33·36	3	73·55	1
74·59	1	36·59	4	74·04	2
75·61	7	37·68	1	75·52	1
76·85	5	37·88	1	76·17	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3576·90	1	3613·6	1+	3645·65	1
77·8	1+	14·27	1+	45·93	2
78·53	1	14·8	1+ br.	47·56	1
78·78	1	15·30	1+	48·00	9 R.
81·36	10 u.	16·68	1	49·41	1
82·35	2	17·44	1	49·62	4
83·48	1	17·90	4	50·13	1
84·81	4	18·50	2	50·40	2
85·10	3	18·92	10	51·60	4
85·49	5	19·7	1+	53·71	1
85·85	4	20·65	1+	55·57	1
86·25	4	21·60	4	55·70	1+
87·10	5	21·7	1+ br.	56·33	1
87·56	1	22·15	3	57·25	1
87·87	1	23·31	2	58·07	1+
88·75	1	23·58	1	59·63	2
89·05	1	23·92	1	62·98	1+
89·24	1	24·5	1+	63·56	1+
89·58	1	25·00	1+	64·71	1+
94·78	2	25·27	1	66·38	1+
95·4	1+	28·0	1+	67·38	1
96·3	1+	30·50	1	68·11	1+
97·20	1+	31·23	2	69·26	1
99·30	1	31·64	10	69·63	3
99·77	1	32·15	2	70·19	2
3602·64	1	32·65	1	70·92	1
03·35	3	33·12	1	74·6	1+
03·96	1	33·97	1+	74·88	1
05·40	1+	34·45	1+	76·42	2
05·60	5	34·8	1+ br.	77·42	2
06·85	6	35·3	1+	77·71	4
07·30	1	36·32	1	78·97	1
09·02	9	36·77	1	80·06	5
09·51	1	37·11	1	80·88	1+ br.
10·30	4	37·40	1	82·35	4
10·82	1	37·98	1	83·19	3
12·24	1	38·42	4	84·25	4
12·6	1+	40·53	5	86·13	3
13·1	1+	43·80	1+	86·38	1
13·3	1+	45·20	1	87·24	1

λ	i	λ	i	λ	i
3687·55	6 } [1]	3727·78	7	3759·35	1+ br.
87·70	3 }	28·78	1	59·62	1+ br.
88·64	1+	30·51	2	60·19	3
89·57	3	31·05	1	60·68	2
90·60	1	31·50	1	61·50	1+
90·87	2	32·50	4	62·2	1+ br.
93·20	1	33·46	6	63·1	1+ br.
94·13	4	35·01	10	63·91	7
95·20	3 R.	35·44	3	65·70	5
97·58	2	37·27	8	66·20	1
98·75	1	38·40	3	66·78	1
3701·20	4	39·65	1	67·32	7
02·17	1	40·18	1	68·14	1
02·60	1	40·39	1	70·13	1
03·67	1	40·9	1+	70·44	1
03·81	1	41·95	1+	71·10	1+
03·95	1	42·73	1	73·83	1
04·59	3	43·51	7	74·95	1
05·73	6	44·20	1	76·67	1
07·16	2	44·60	1	77·22	1
07·65	1+	44·70	1	77·56	1
08·01	2	45·71	7	78·64	1
08·06	5	46·04	7	79·59	1
09·40	6	46·55	1	81·31	1
11·33	1	47·02	2	82·07	1+
11·52	1	48·41	7	86·06	3
16·01	1	49·05	2	86·30	2
16·54	3	49·64	10	86·82	2
18·53	1	52·2	1+ br.	87·30	1
20·10	8	52·56	1	88·02	5
21·35	1	53·4	1+	89·31	1
21·68	1+	53·74	3	90·23	3
22·06	1	54·62	1+	90·92	1
22·73	6	56·21	1 R.	92·29	1
24·49	3	57·08	2	93·60	1+
25·60	1	57·60	1	94·00	1
27·02	2	58·39	8	94·48	2
27·23	2	58·92	1	95·15	6

[1] Rowland gibt eine umgekehrte Linie bei 3687·61.

λ	i	λ	i	λ	i
3797·64	4	3834·38	8	3883·44	2
98·68	6	34·82	1	84·49	2
99·70	7	36·44	2	85·30	1
3801·80	1	37·25	1	85·63	3
01·87	1+	38·2	1+ br.	86·41	8
02·40	1	39·40	4	87·18	5 d.?
04·15	1	39·87	2	88·65	6
05·48	5	40·61	8	88·95	2+
06·34	1	41·21	8	90·96	1
06·81	4	43·41	4 R.	92·05	2
07·65	2	44·45	1+	93·50	3
08·85	1	45·30	1	94·10	1
09·70	1	45·82	1	95·78	5
10·87	1	46·18	1	97·58	1
12·04	1+	46·54	2	98·05	4
13·12	5	46·91	3	99·12	1
13·77	1	48·47	1	99·84	6
14·01	1	50·15	6	3900·63	1
14·65	2	50·69	1	03·09	7
14·90	1	50·99	3	03·65	1
15·99	9	52·71	2	04·00	2
16·46	1	53·6	1+ br.	06·2	1+
17·77	1+	54·52	1+	06·59	5
19·80	1+	55·45	1+	06·87	1+
20·57	9	56·51	8	07·60	1
21·30	4	57·03	1	08·06	1
21·96	2	59·36	4	09·95	1+
24·58	7	60·07	9	10·95	1
25·10	1	61·46	1	13·74	1
26·04	9	63·86	1	14·39	1
26·96	1	65·67	6	16·84	3
27·98	9	67·33	3	17·28	3
29·25	1	68·03	1	18·47	3+
29·56	1	69·69	2	18·75	3
29·85	1	71·88	3	19·17	2
30·53	1+	72·65	6	20·40	5
30·96	1	73·89	4	23·05	6
31·77	1	76·15	1	25·33	1+
32·4	1+ br.	78·15	7	25·76	1
33·44	3	78·71	8	26·06	2

λ	i	λ	i	λ	i
3928·09	7	3968·10	1	4013·96	1
29·26	1	68·58	8 Ca	14·70	4
29·82	1	69·40	8	16·57	1
30·43	6	70·51	1	17·29	3
31·22	1	71·47	2	18·42	1
31·96	1	72·55	1+	22·05	4
32·75	2	73·75	2+	24·26	1
33·05	1	76·72	1	24·94	3
33·80	8 Ca	76·97	1	25·99	1
34·18	1	77·89	4	29·80	2
35·41	1	81·90	2	30·37	1
35·90	2	82·35	1+ br.	30·69	2
37·42	1	84·09	3	30·89	2+
37·67	1	85·48	1	32·14	2
39·06	1+	86·29	1	32·80	2
40·99	2	90·00	1	33·24	1
41·40	1+	90·50	1	33·82	1
42·55	2	94·22	1	34·65	1
43·45	1	96·11	1	38·95	1+
45·00	1+	97·10	1	40·86	2
45·22	1+	97·52	4	42·00	2
47·10	1	98·16	3	44·08	2
47·64	2	4000 35	1	44·79	2
48·31	3	00·60	1	45·98	10
48 88	4	01·37	1	47·46	1
50·10	3 R.	01·49	1	49·03	1+
51·30	3	01·80	2	49·50	1
52·74	2	02·20	1	50·02	2
53·25	1	02·75	1	50·86	1+
55·50	1+	03·91	1	51·52	1+
56·58	3	05·05	1+	52·12	1+
56·82	4	05·40	8	52·6	1+
57·15	1+	05·94	1	52·8	1+
60·40	1+	06·47	1	53·37	1+
61·30	1+	06·79	1	54 00	1+
63·25	1	07·41	2	54·95	1+
64·66	1	08·95	1+	55·12	1+
66·20	3	09·37	1	55·58	1
66·75	3	09·86	3 R.	57·55	1
67·58	3	11·50	1	58·40	1

λ	i	λ	i	λ	i
4058·93	1	4092·5	1+	4143·54	5
59·75	1	96·16	2	44·06	7
59·89	1	96·85	2+	44·62	1
61·3	1+ br.	98·37	2	45·45	1+
62·13	1+	4100·37	1+	45·68	1+
62·60	3 R.	00·92	1	47·79	2
63·75	10	01·45	1	49·49	2
64·35	1	01·73	1	50·40	1
64·61	1	04·32	1	52·32	1
65·57	1	06·40	1	54·10	3+
66·77	1	06·60	1	54·61	4
67·12	3	07·65	4	54·92	3
67·45	2	09·23	1	56·93	4
67·77	1	09·99	4	57·95	2 R.
68·15	3	13·14	1	58·94	2
70·96	2	14·61	3	61·2	1+
71·92	10	15·1	1+	61·63	1+
73·97	2	18·72	5	63·8	1+
74·97	3	20·37	2	65·57	1+
76·81	3	21·99	2	68·07	1
77·85	1	22·69	2	71·05	3
78·52	2	23·90	1	71·80	1
80·02	2	25·78	1	72·29	3
80·40	1	26·05	1	72·88	2
81·02	1	26·35	2	73·59	2
81·47	1	27·74	3	74·10	1
82·28	1+	27·92	1+	75·06	1
82·60	1+	28·89	1	75·77	4
83·72	1+	32·24	8 R.	76·70	2
83·96	1+	33·05	4	77·74	1
84·60	3	33·73	1+	78·16	1
85·16	3	34·03	1+	79·01	2
85·50	3	34·54	1	81·94	7
87·26	1	34·83	5	82·54	2
88·15	1+	36·31	1	85·03	4
88·73	1	36·68	1	87·22	7
89·40	1	37·12	4	88·00	7
90·2	1+	39·85	1	91·61	4
91·2	1+	40·02	1	91·80	3+
91·76	1	42·01	1	95·50	3

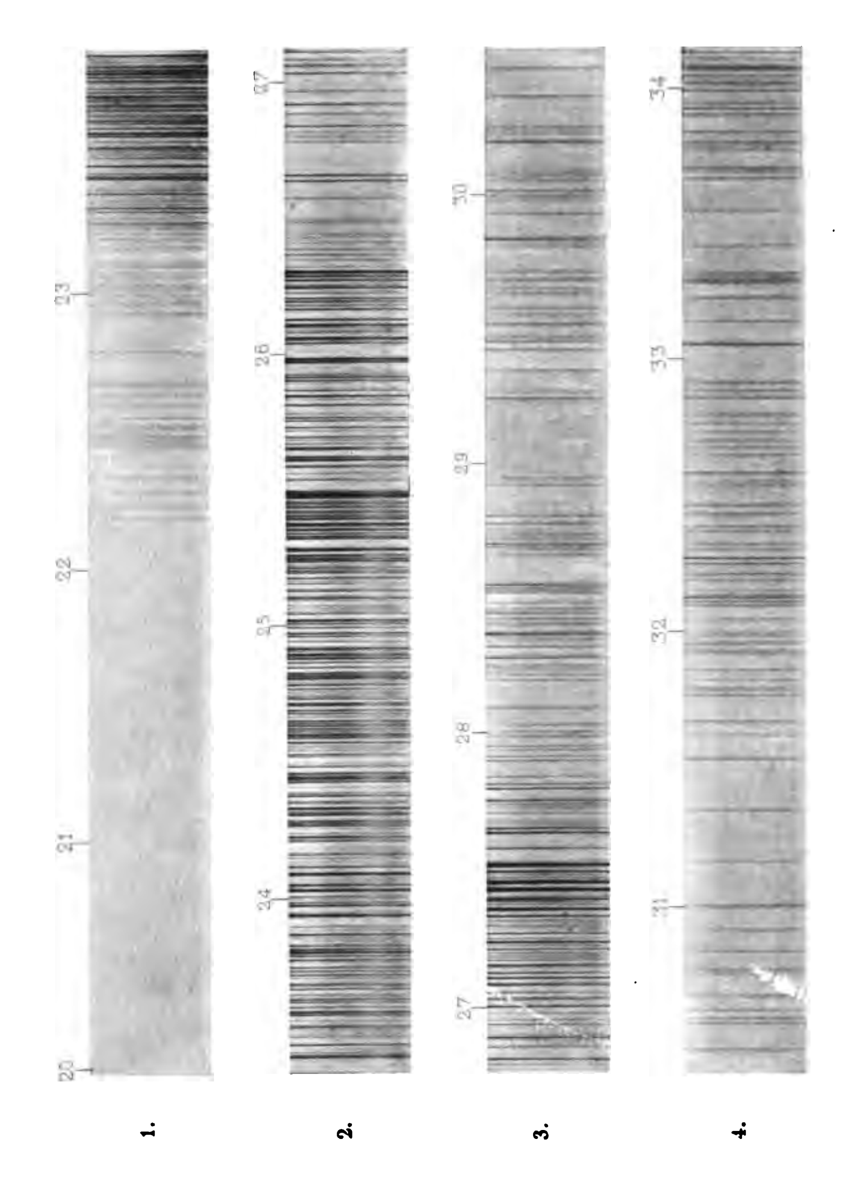
λ	i	λ	i	λ	i
4195·75	1+	4239·88	3	4279·65	1
96·46	2	40·46	1	80·00	1
98·50	6	42·82	1	82·60	6
98·86	1	43·45	1	83·13	1
99·27	8	45·32	3	85·56	2
4200·13	1	46·14	2	86·55	1
01·07	2	47·58	4+	87·10	1+
02·20	9	48·27	1	88·27	1
02·86	1	50·30	7 R.	89·0	1+
04·10	4	50·95	8	89·47	1+
05·69	1+	51·55	1	90·08	1+
06·33	1	54·45	1	90·55	1
06·84	1	55·06	1	91·05	1
07·26	2	55·25	1	91·62	1
08·73	2	55·61	1	92·4	1+ br.
10·52	5	56·40	1+	94·32	6
13·77	2	58·40	1+	95·12	1+
15·56	1	58·76	1	96·73	1
16·29	2	59·07	1	98·17	1
17·67	2	60·64	10	99·43	7 r.
19·51	6	64·34	1	4300·94	1
20·46	2	64·85	1+	02·32	1
22·35	4	65·35	1+	02·67	1 Ca
23·30	1	67·08	1	03·32	2
24·26	3	67·56	1	04·76	1
24·63	1	67·68	1	05·59	2
25·57	3	67·95	2	08·06	10
26·06	1	68·86	1	08·70	1
26·53	1	69·78	1	09·16	2
26·88	5 Ca	69·90	1	09·51	3
27·60	7	71·32	7	12·31	1
29·58	1	71·93	10	12·48	1
29·83	1	72·53	1	12·88	1
31·9	1+ br.	73·42	1	14·46	1
33·26	4	74·02	1	15·26	5
33·74	6	76·11	1	18·75	1
36·09	8	76·27	1	20·92	1
37·22	1	76·80	1	21·55	1
38·10	2	77·6	1+ br.	21·67	1
38·90	4	78·33	1+	21·93	1

λ	i	λ	i	λ	i
4325·94	10	4400·55	1+	4462·15	1+
26·50	1	01·50	1	64·91	1
26·87	1	01·60	1	66·70	5
27·22	2	04·94	10	69·54	2
28·02	1	05·65	1	76·19	5
30·15	1+	07·89	2	79·76	1
30·35	1+	08·59	2	80·31	1
34·55	1	09·34	1	82·40	4 d.
37·22	5	09·44	1	82·94	1
38·39	1	10·9	1+ br.	84·40	2
38·89	1	13·70	1	85·82	1
43·37	1	15·29	8	88·3	1+ br.
43·80	1	15·98	1	89 34	1+
46·63	1	19·70	1	89·88	1
51·89	2	19·93	1	90·24	1
52·90	3 R.	22·74	3	90·93	1+
57·73	1+	24·6	1+ br.	91·58	1
58·68	1	27·49	3	94·74	5
61·0	1+	30·35	1	4508·42	2
61·5	1+	30·79	2	14·31	1
66·13	1+	32·73	1	15·49	1
67·75	2	33·39	2	17·68	1.
68·11	1	33·97	1	20·41	1
69 96	3	35·20	1	22·80	2
70·52	1	35·31	1	25·31	2
73·74	1	37·06	1	28·80	6 R.
74·67	1	38·50	1	29·80	1+
76·10	4	40·05	1	31·32	2
76·96	1+	42·51	4	41·68	1
79·40	1+	43·00	1	48·00	2
82·96	1	43·35	3	49·65	3
83·71	10	47·90	3 R.	52·72	1+
84·39	2	50·46	1	54·20	1 Ba
85·55	1	51·70	1+	56·04	1
88·07	2	54·53	2	56·25	1
88·61	2	54 89	1	76·48	1
89·4	1+	56·46	1	84·01	4
91·15	1	58·22	1+	92·83	1
92·50	1+	59·28	4	95·56	1
96·88	1+	61·80	3	98·31	1

λ	i	λ	i	λ	i
4603·11	2	4633·06	1	4669·4	1+
07·73	1+	35·50	1+	73·4	1+
11·45	1	37·70	1	79·02	1
13·45	1+	38·20	1	91·60	1
19·45	1	47·62	1	4707·50	1
25·22	1	67·62	1+	10·45	1
29·51	1	68·30	1	36·96	1 R.

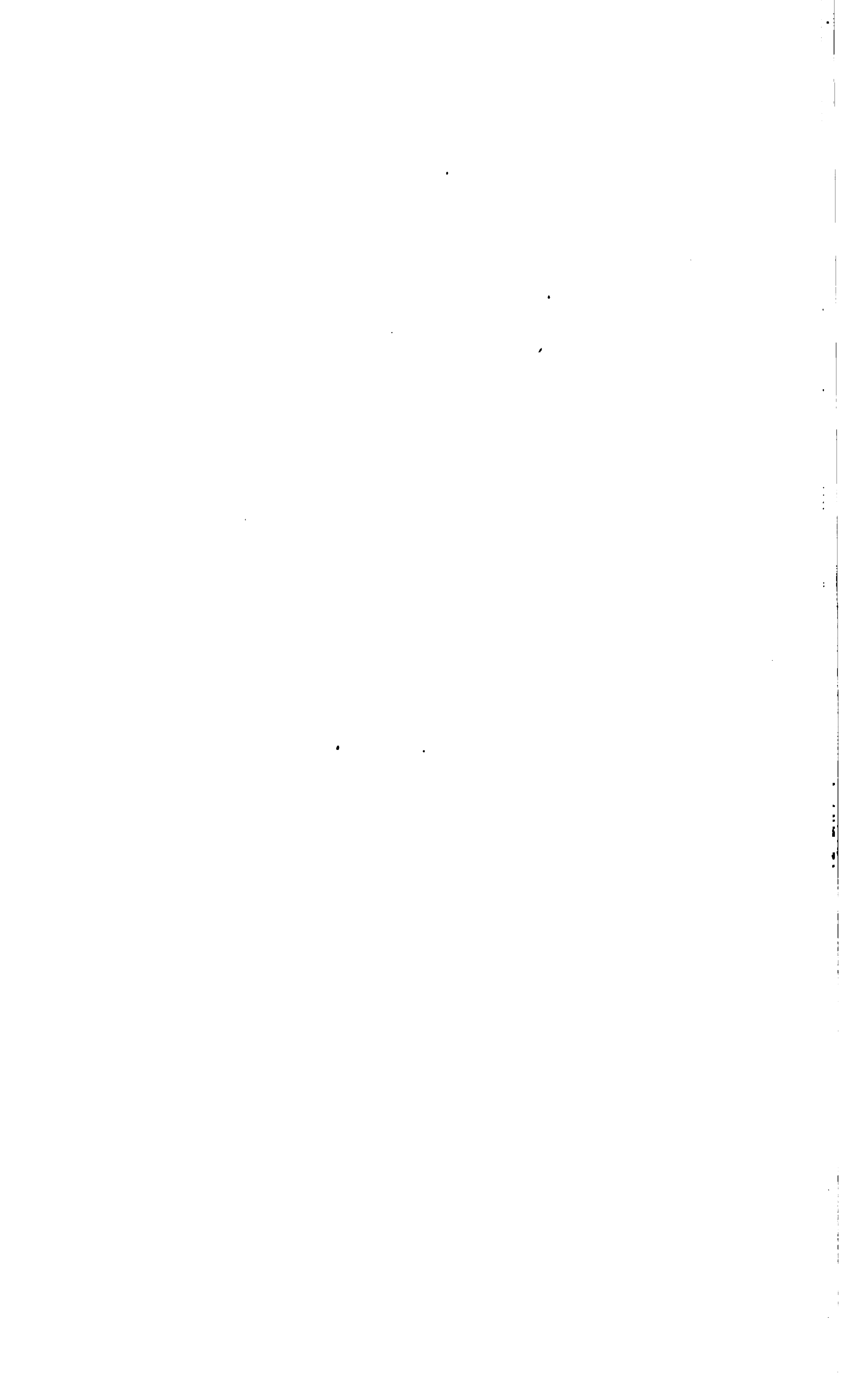
Taf. I.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

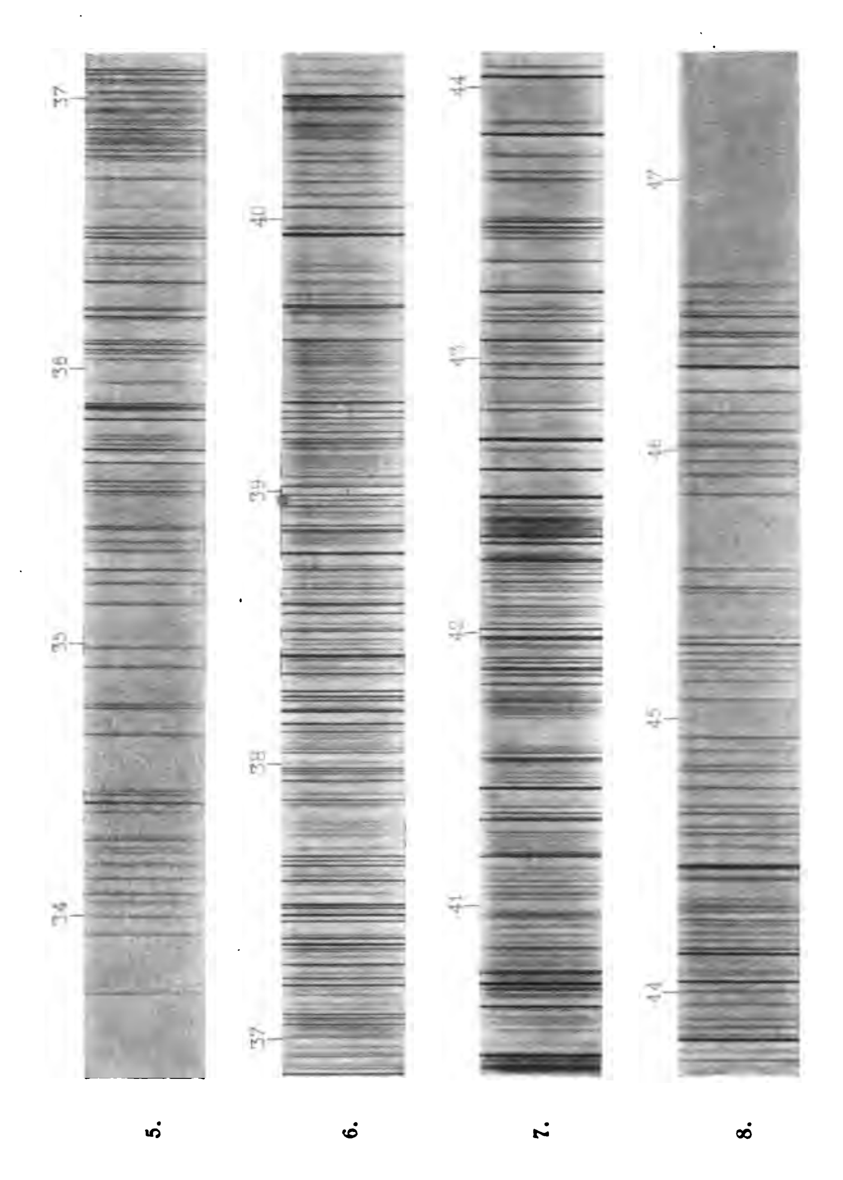


Eisen.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Eisen.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Ein Phasenmessapparat für Wechselströme

(Fortsetzung)

von

Dr. Josef Tuma,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien.

Das Bestreben, den, in einer der kaiserlichen Akademie vor Kurzem überreichten Publication beschriebenen Phasenindicator[1] in eine für den praktischen Gebrauch geignete Form zu bringen, führte mich zu einer Abänderung der damals beschriebenen Construction, durch welche nunmehr wirklich die so lange gesuchte Lösung des Problemes, einen Apparat zu construiren, der die Phasendifferenzen zweier Wechselströme von gleicher Periode einzig durch e i n e Ablesung a l s W i n k e l zu messen gestattet, gefunden ist.

Es seien A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 in Fig. 1 die beiden Zuleitungen der Wechselströme, deren Phasendifferenz zu bestimmen ist. Beide Ströme werden verzweigt und es wird der eine Stromtheil durch einen inductionsfreien Widerstand w_1 beziehungsweise w_2, der andere durch eine hohe Selbstinduction l_1 beziehungsweise l_2 geschickt. Hierauf durchfliessen die Ströme zwei Spulenkreuze S_1 und S_2 beziehungsweise s_1 und s_2 derart, dass zwei Drehfelder mit gleicher Drehrichtung entstehen. w_1 und l_1 sind so gewählt, dass das von dem in A_1 und

---

[1] Diese Sitzungsber. 1897.

Fig. 1.

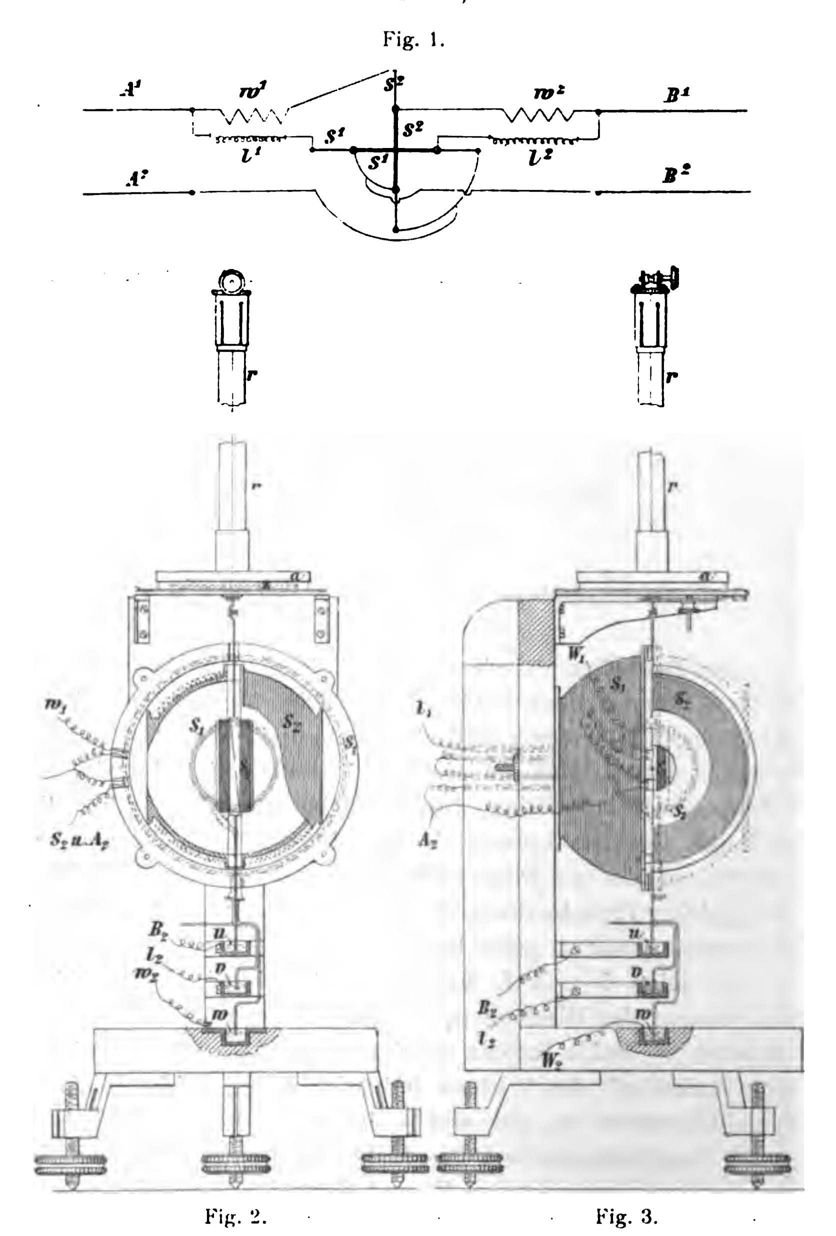


Fig. 2. Fig. 3.

A_2 zugeleiteten Strome hervorgerufene Drehfeld ein kreisförmiges ist, d. h. seine Intensität nicht ändert, was man daraus erkennt, dass in einer Probespule, welche man in das Feld bringt

und die man mit einem empfindlichen Dynamometer verbindet, bei jeder Orientirung rings um eine verticale Achse genau dieselbe E. K. inducirt wird. Damit das so erzeugte Drehfeld immer möglichst homogen sei, habe ich, wie Fig. 2 und 3 zeigen, den Spulen S_1 und S_2 Kugelform gegeben, und zwar wurden auf einseitig aufgeschnittene Halbkugeln aus Messingblech je 400 Windungen von einem 1 *mm* starken Draht gewickelt.

Das zweite Spulenkreuz s_1 und s_2 (Fig. 1, 2 und 3) wurde sehr leicht gemacht, indem jede Spule aus Zeichenpapier hergestellt und mit 100 Windungen eines 0·1 *mm* dicken Drahtes bewickelt wurde. Es wurde ferner w_2 so gewählt, dass der Widerstand der Spule s_2 mehr dem Widerstande w_2 gleich dem scheinbaren Widerstande der grossen Selbstinduction l_2 und der Spule s_1 wurde, so dass in s_1 und s_2 gleich starke Ströme flossen. Zur Stromabgleichung wurde die in der früheren Abhandlung angegebene Methode verwendet. Dieses Spulenkreuz war, wie Fig. 3 zeigt, an einem Zeiger, in der Dose a, befestigt und an einem Coconfaden, in der Röhre r, aufgehängt. Die Länge des Fadens betrug circa 40 *cm*, um die Wirkung der Torsion möglichst zu vermeiden. Die Zuleitungen zu diesem Spulenkreuze wurden durch drei Quecksilbernäpfe u, v, w (Fig. 2 und 3) vermittelt.

Die Wirkungsweise des Apparates beruht einfach darauf, dass bei der in Fig. 1 gekennzeichneten Parallelstellung beide Spulenkreuze Drehfelder erzeugen, welche einander in einem Winkelabstand gleich dem Phasenverschiebungswinkel folgen. Es wird sich also das bewegliche Spulenkreuz so lange drehen, bis sich die Felder decken. Es wird eine Stellung einnehmen, die mit der gezeichneten Parallelstellung den Verschiebungswinkel einschliesst, den man an der Theilung in der Dose a abliest.

Die bei dieser Construction nothwendige Rücksichtnahme auf die scheinbaren Widerstände der Drosselspulen l_1 und l_2 bewirkt, dass theoretisch der Apparat nur für eine ganz bestimmte Periodendauer des Wechselstromes eingerichtet sein kann. Für praktische Zwecke liegen jedoch die Grenzen der Brauchbarkeit ziemlich weit. Übrigens kann man leicht die Widerstände durch Stöpselung änderbar machen, so dass für

die gewöhnlich vorkommenden Periodendauern eine Einstellung möglich ist. Zur Beurtheilung der Wirkung, welche die Änderung in der Frequenz des Stromes bewirkt, sei noch Folgendes hinzugefügt.

Es seien die Wirkungen der feststehenden Spulen proportional $A_1 \sin \alpha t$ und $A_2 \cos \alpha t$. Diejenigen der um einen Winkel ψ gedrehten, beweglichen Spulen seien $a_1 \sin (\alpha t + \varphi)$ und $a_2 \cos (\alpha t + \varphi)$.

Das Drehungsmoment, welches das feststehende Spulenkreuz auf das bewegliche ausübt, ist:

$$D = \{A_1 a_2 \sin \alpha t \cos (\alpha t + \varphi) - A_2 a_1 \cos \alpha t \sin (\alpha t + \varphi)\} \cos \varphi - \\ - \{A_1 a_1 \sin \alpha t \sin (\alpha t + \varphi) + A_2 a_2 \cos \alpha t \cos (\alpha t + \varphi)\} \sin \psi.$$

Das mittlere Drehungsmoment wird:

$$D = -\frac{1}{2}(A_1 a_2 + A_2 a_1) \sin \varphi \cos \psi - \\ \frac{1}{2}(A_1 a_1 + A_2 a_2) \cos \varphi \sin \psi.$$

Dieses wird Null, wenn

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\frac{A_1}{A_2} + \frac{a_1}{a_2}}{1 + \frac{A_1}{A_2}\frac{a_1}{a_2}} \operatorname{tg} \varphi.$$

Nun sind A_1 nahezu proportional $\frac{E}{\alpha l_1}$, A_2 proportional $\frac{E}{w_1}$. a_2 nahezu proportional $\frac{e}{\alpha l_2}$ und a_2 proportional $\frac{e}{w_2}$. Somit kann man setzen:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{w_1}{\alpha l_1} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{w_2}{\alpha l_2},$$

woraus

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{1}{\alpha} \frac{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}}{1 + \frac{w_1 w_2}{\alpha^2 l_1 l_2}} \operatorname{tg} \varphi.$$

Der Nenner dieses Bruches $\alpha + \frac{w_1 w_2}{\alpha l_1 l_2}$ erreicht ein Minimum, wenn $\frac{w_1 w_2}{\alpha^2 l_1 l_2} = 1$ ist. Dies ist aber gerade dann der Fall, wenn dem Instrument Strom von der passenden Frequenz zugeführt wird. In diesem Falle wird $\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{tg} \varphi$. Sonst fällt φ zu klein aus. Da sich jedoch ψ in der Nähe eines Maximums befindet, sind die Änderungen nicht bedeutend.

Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde

von

Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

In der Abhandlung: »Über die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche bewegter Leiter« behandelt H. Hertz[1] auch den Fall, dass eine leitende Kugel im elektrischen Felde um einen zur Feldrichtung senkrechten Durchmesser gleichförmig rotirt. Die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche ist eine derartige, dass im Innern der Kugel stationäre Leitungsströme erzeugt werden, die durch Convectionsströme in der Oberfläche geschlossen werden; entsprechend der dabei erzeugten Joule'schen Wärme tritt ein der Rotation entgegenwirkendes Drehungsmoment auf.

Hertz hat auch gezeigt, dass diese Dämpfung bei den praktisch erreichbaren Rotationsgeschwindigkeiten nur an ziemlich schlechten Leitern (Glas, Petroleum etc.) merklich werden kann.

Herr Heydweiller[2] macht nun darauf aufmerksam, dass dieses Problem sich auch verallgemeinern, respective umkehren lasse; ist nämlich eine rotirende nichtleitende Kugel von einer leitenden Flüssigkeit umgeben, die in Folge des künstlich aufrecht erhaltenen Feldes stationär durchströmt wird, so müssen an der Kugeloberfläche ebenfalls Belegungen auftreten, die durch die Rotation mitgeführt werden; nur haben in diesem Falle die Belegungen das umgekehrte Vorzeichen, und das Drehungsmonument der elektrischen Kräfte wirkt im Sinne der Rotation.

---

[1] H. Hertz, Wied. Ann. 13, S. 266 (1881), auch Ges. Werke, Bd. I, Nr. 3.

[2] A. Heydweiller, Verh. der phys. Ges. zu Berlin, Jahrg. 16, Heft 3.

Die qualitative Übereinstimmung dieses Falles mit den von Herrn Quincke[1] beschriebenen Erscheinungen führt Herrn Heydweiller zur Ansicht, dass wenigstens ein grosser Theil der Quincke'schen Versuche durch das Auftreten derartiger Drehungsmomente zu erklären sei.

Zur Untersuchung der Frage, ob diese Auffassung auch in quantitativer Beziehung ausreicht, soll im Folgenden ein möglichst einfacher Fall genauer behandelt und die Grössenordnung der zu erwartenden ponderomotorischen Kräfte numerisch berechnet werden.

Eine Kugel vom Radius R befinde sich im Ursprung eines fixen Coordinatensystemes und rotire um die Z-Axe im Sinne des Uhrzeigers mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{\tau}$; die Kugel habe die Leitungsfähigkeit λ_i und sei umgeben von einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit von der Leitungsfähigkeit λ_a.

λ_i, λ_a sowie alle weiterhin vorkommenden elektrischen Grössen sollen im elektrostatischen Maasssysteme gemessen werden.

Es seien nun ferner elektrostatische Kräfte gegeben, die bei Abwesenheit der rotirenden Kugel in der Flüssigkeit ein elektrisches Feld erzeugen würden, dessen Potential Φ in der Zeit constant sei.

Durch die rotirende Kugel wird das Feld gestört; es stellt sich ein stationärer Zustand her, bei dem das Potential $\psi = \Phi + \varphi$ sei; φ bedeutet also das Potential, welches von den auf der Kugel inducirten Ladungen herrührt.

Bei Benützung von Polarcoordination ρ, ω, ϑ, wobei

$$x = \rho \cos \omega \sin \vartheta$$
$$y = \rho \sin \omega \sin \vartheta$$
$$z = \rho \cos \vartheta,$$

ergeben sich für das Potential ψ folgende Bedingungsgleichungen:

---

[1] G. Quincke, Wied. Ann. 59, S. 417 (1896).

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{1}$$

für alle Punkte innerhalb und ausserhalb der Kugeloberfläche.

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} + \lambda_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \rho} \tag{2}$$

für die Oberfläche ($\rho = R$).

Hiebei bedeuten ψ_i und ψ_a die analytischen Ausdrücke für das Potential innerhalb, respective ausserhalb, h die Oberflächendichte, $\frac{dh}{dt}$ deren zeitliche Änderung an einem bestimmten Elemente der Kugeloberfläche, so dass also:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Bezüglich der Ableitung der beiden Bedingungsgleichungen verweise ich auf die ganz analoge Betrachtung von H. Hertz in der oben citirten Abhandlung.

Mit Berücksichtigung, dass

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right),$$

ferner dass in unserem speciellen Falle

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{\partial h}{\partial \omega},$$

endlich dass $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, weil ein stationärer Zustand abgewartet wird, erhält die Gleichung (2) die Form:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho}\right] = \lambda_a \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho}\right] - \lambda_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right]. \tag{2a}$$

Es werde nun vorausgesetzt, dass

$$\Phi = C + \frac{A_1}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta,$$

d. h. das ursprüngliche Feld sei ein homogenes, dessen Feldintensität in die Richtung der negativen X-Axe falle und die Grösse $\frac{A_1}{R}$ habe.

Setzt man nun

$$\varphi_i = \frac{\rho}{R} (A \cos \omega + B \sin \omega) \sin \vartheta$$

$$\varphi_a = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 (A \cos \omega + B \sin \omega) \sin \vartheta,$$

so genügt φ der Bedingung (1) und auch der Gleichung ($2a$), wenn

$$-A \sin \omega + B \cos \omega = \frac{2\tau}{3} \lambda_a [A_1 \cos \omega - 2A \cos \omega - 2B \sin \omega] -$$
$$- \frac{2\tau}{3} \lambda_i [A_1 \cos \omega + A \cos \omega + B \sin \omega].$$

Da diese Beziehung für jedes ω bestehen muss, bestimmen sich die Constanten A und B zu:

$$A = \frac{4\tau^2}{9} \cdot \frac{(\lambda_a - \lambda_i)(2\lambda_a + \lambda_i)}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a + \lambda_i)^2} \cdot A_1$$

$$B = \frac{2\tau}{3} \cdot \frac{(\lambda_a - \lambda_i)}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a - \lambda_i)^2} \cdot A_1.$$

Das Potential φ und somit auch ψ ist dadurch bis auf eine Constante bestimmt. In der Kugel finden Strömungen statt, und zwar in parallelen Geraden senkrecht zur Z-Axe; die Stromdichte ist in allen Punkten der Kugel dieselbe. Setzt man $\lambda_a = 0$, so erhält man als Specialfall den von Hertz behandelten.

Für das Drehungsmoment, welches von den elektrischen Kräften auf die Oberflächenbelegung im Sinne der Rotation ausgeübt wird, ergibt sich:

$$D = -\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega\, h \left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right)_{\rho = R} R^2 \sin \vartheta$$
$$= -\frac{3R}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega\, [AB \cos^2 \omega - B(A_1 + A) \sin^2 \omega +$$
$$+ (B^2 - A\{A_1 + A\}) \sin \omega \cos \omega]$$
$$= RA_1 B = RA_1^2 \frac{2\tau}{3} \cdot \frac{\lambda_a - \lambda_i}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a - \lambda_i)^2}$$

oder wenn die Feldintensität $\frac{A_1}{R} = F$ gesetzt wird

$$D = R^3 F^2 \frac{\lambda_a - \lambda_i}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a + \lambda_i)^2} \cdot \frac{2\tau}{3}.$$

Das Drehungsmoment ist positiv (im Sinne der Rotation), wenn $\lambda_a > \lambda_i$; negativ (hemmend), wenn $\lambda_i > \lambda_a$, und in complicirter Weise von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig. Wird diese Kugel aus einem nichtleitenden Material genommen, also $\lambda_i = 0$ gesetzt, so ist

$$D = R^3 F^2 \frac{6\tau\lambda_a}{9 + 16\tau^2\lambda_a^2}$$

$$D = \frac{1}{4} R^3 F^2 = \text{Maximum für } \tau\lambda_a = \frac{3}{4}.$$

Das Drehungsmoment kann also leicht auf eine Grössenordnung von 10 Dyn.-*cm* gebracht werden, wenn man die der Leitfähigkeit der Flüssigkeit entsprechende günstigste Rotationsgeschwindigkeit erreichen kann.

Eine Zusammenstellung von λ und τ für den Maximaleffect gibt in runden Zahlen folgende Tabelle.

Quecksilber	$\lambda = 10^{16}\ \text{sec}^{-1}$	$\tau = 10^{-16}$ sec
$5\,\%$ H_2SO_4	2.10^{11}	5.10^{-12}
Alkohol, Äthyläther	5.10^{5}	2.10^{-6}
Schwefelkohlenstoff	3	0·3
Benzol	5.10^{-2}	20
Petroleumäther, Vaselinöl	5.10^{-3}	200

Man erkennt hieraus, dass die von Herrn Heydweiller vermutheten Bewegungsursachen bei den Quincke'schen Erscheinungen nicht nur im richtigen Sinne wirken, sondern in günstigen Fällen auch die vorausgesetzte Grössenordnung erreichen können. Eine directe Anwendung obiger Formel auf das von Quincke angegebene Zahlenmaterial ist nicht möglich.

da hier eine gleichförmige Rotation vorausgesetzt ist, thatsächlich aber die Kugeln Torsionssschwingungen ausführten, bei denen neben der periodisch wechselnden Fadentorsion auch noch der Einfluss der Flüssigkeitsreibung ins Spiel kommt. Die Differentialgleichung der Kugelbewegung wäre dann nach den hier entwickelten Anschauungen von der Form:

$$K\frac{d^2\omega}{dt^2}+a^2\omega+b\frac{d\omega}{dt}-\frac{c_1\frac{d\omega}{dt}}{1+c_2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}=0.$$

Ohne diese Gleichung zu integriren, was kaum ausführbar sein dürfte, kann man durch blosse Überlegung erkennen, dass die Bewegung vor und nach der Umkehr der Rotation asymmetrisch ist.

Hat nämlich die Rotation das Zeichen gewechselt, so wird die Winkelgeschwindigkeit rasch zunehmen, da das Torsionsmoment des stark (oft um $100\,\pi$) gedrillten Fadens und das durch die Rotation erweckte elektrische Drehungsmoment zusammenwirken gegen die Reibung; ist aber die Ruhelage überschritten, so wirken Torsionsmoment und Reibung hemmend, die elektrischen Kräfte noch im Sinne der Rotation. Die Winkelgeschwindigkeit wird also in der ersten Hälfte der Bewegung rascher zunehmen, in der zweiten Hälfte langsamer abnehmen, als bei Abwesenheit des elektrischen Feldes.

Hiemit scheint eine Bemerkung Herrn Quincke's (l. c. S. 429) zu stimmen: »Die Drehungen erfolgen gleich nach der Umkehr rasch, werden dann allmälig langsamer, hören auf und wechseln die Richtung, wenn die Torsionskraft .... des Fadens dem Drehungsmoment der elektrischen Kräfte das Gleichgewicht hält.«

Ich habe es auch versucht, in einzelnen von Herrn Quincke mitgetheilten Fällen das Drehungsmoment zu berechnen unter der Annahme, dass die Bewegung längere Zeit mit der angegebenen mittleren Winkelgeschwindigkeit u erfolgt sei. Für Rotationen in Äther ergeben sich numerische Werthe, die gegenüber der Fadentorsion und der Flüssigkeitsreibung sehr klein sind; in anderen Fällen (z. B. Crownglaskugel in Benzol

oder grosse Quarzkugel in Schwefelkohlenstoff) sind die Werthe von der gleichen Grössenordnung.

Ich bin weit entfernt davon, hiemit eine Theorie der Quincke'schen Versuche geben zu wollen; doch zeigt die hier durchgeführte Rechnung, wie ich glaube, dass die hier behandelten Kraftwirkungen in vielen Fällen den Bewegungsvorgang merklich beeinflussen können.

Vorliegende Arbeit ist entstanden im Anschluss an ein Referat, das ich im physikalischen Seminare übernommen hatte, und ich bin dem Leiter desselben, Herrn Hofrath Boltzmann, für seine Anregung und Unterstützung bei der Ausarbeitung zu wärmstem Danke verpflichtet.

Über die Interferenz und die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen

von

G. Jaumann.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 8 Textfiguren.)

Die Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt[1] sowohl, als Herr D. F. Tollenaar[2] theilen mit, dass es ihnen nicht gelungen ist, mein Experiment über die Interferenz des blauen Kathodenlichtes[3] zu wiederholen. Dies veranlasste mich zur sofortigen Wiederaufnahme dieses Experimentes, wobei es mir gelungen ist, dasselbe wesentlich weiterzuführen.

Zwei parallele Aluminiumplatten K_1K_2 (Fig. 1) von 10 *cm* Länge, 4 *cm* Breite und 2 *cm* Abstand wurden in einem grossen Recipienten untergebracht und (aussen) durch eine 250 *cm* lange Schlinge eines 0·8 *mm* dicken Messingdrahtes mit einander verbunden. Diese Verbindung muss durchaus ohne Contactfehler hergestellt werden.[4] Die Anode ist ein weit von den Kathodenplatten entfernter Stift.

Die Drahtschlinge K_1K_2S wurde mittelst des Klemmschraubencontactes S mit dem negativen Pol einer Influenz-

[1] E. Wiedemann und G. C. Schmidt, Wied. Ann. 60, S. 510.

[2] D. F. Tollenaar, Kon. Akad. Amsterdam, 1897, p. 310.

[3] G. Jaumann, Mitth. der deutschen mathem. Gesellsch. Prag, 1892, S. 146; Wied. Ann. 57, S. 152.

[4] Nietungen von Aluminium auf Aluminium sind unzulässig. Auch das Einschmelzen von Platin in Aluminium gibt einen unsicheren Contact.

maschine (einplattig, ohne Leydnerflaschen) verbunden und in diese Leitung ein Funkenmikrometer *F* eingeschaltet.

Die Interferenzfläche des blauen Kathodenlichtes ist eine circa 0·5 *mm* dicke, hellblaue, ebene Schichte, welche sich inmitten eines matt wasserblauen, 2 *mm* dicken Hofes deutlich abhebt. Der übrige Raum zwischen den Kathoden ist nahezu dunkel. Nur dann, wenn diese Interferenzfläche vollkommen klar ausgebildet ist, zeigt sie sich gegen Verschiebungen des Schleifcontactes *S* empfindlich.

Damit dies erreicht wird, muss man den Funken *F* variiren. Nur in einem gewissen, von der übrigen Versuchsanordnung abhängigen Intervall der Funkenlänge gelingt das Experiment.[1]

K_1 K_2 *S* *F*

Fig. 1.

[1] Der Funke ändert bei Veränderung seiner Länge seinen Charakter und damit den Charakter der von ihm angeregten Strahlung, von deren Beschaffenheit begreiflicherweise der Ausfall eines Interferenzexperimentes wesentlich abhängen muss. Zeichen, dass die Aufstellung nicht die richtige ist, sind es, wenn die Interferenzfläche röthlich und von ihrem Hof nicht unterscheidbar ist und wenn ein breiter, hellleuchtender, blauer Querstrich die Interferenzfläche senkrecht schneidet und die Kathodenplatten verbindet. Dieser blaue Querstrich ist eine Art Funken, welcher zwischen den Kathoden übergeht, und deutet auf einen Contactfehler im Schliessungskreise. Er erscheint bei hohen Verdünnungen als grüner Querstrich im Fluorescenzbilde auf der Glaswand.

Die Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt geben an, sie hätten zwei blaue Kathodenhüllen, welche sie als dritte Goldstein'sche Schichten bezeichnen, zum Zusammenfliessen gebracht. Dann ist es freilich nicht anders zu erwarten, als dass die so entstandene helle Fläche gegen Verschiebungen des Schleifcontactes unempfindlich ist. Das blaue Kathodenlicht, welches die empfindliche Interferenzfläche bildet, ist nämlich nicht mit der dritten, sondern mit der zweiten Kathodenschichte Goldstein's, d. h. mit den Kathodenstrahlen verwandt. Die dritte Schichte Goldstein's ist nichts Anderes als das negative Ende der Entladung, sie zeigt keine geradlinige Fortpflanzung, wirft keine Schatten, erregt keine Fluorescenz, zeigt nach Goldstein (Wied. Ann. 51, S. 633) keine Deflexion; kein Wunder, dass sie auch keine Anzeichen von Interferenz gibt.

Bei meinen früheren Experimenten bestand die Wirkung einer Verschiebung des Schleifcontactes S aus der Mitte der Schlinge nur in einer Verbreiterung der Interferenzfläche. Bei starken Verschiebungen des Contactes erfüllte sich der ganze Raum zwischen den Kathoden mit Licht, dessen Vertheilung erst bei sehr starken Verschiebungen des Contactes unsymmetrisch wurde. Ich habe damals nur als Vermuthung aussprechen können, dass diese symmetrische Verbreiterung sich auf einseitige Verschiebungen der unverbreiterten Interferenzfläche zurückführen liesse, falls man annimmt, dass es ein Complex von Kathodenstrahlen sehr verschiedener Art[1] ist, welche die Interferenzfläche erzeugen.

Gegenwärtig kenne ich den Einfluss, welchen die geringsten Änderungen im Aussehen der Kathodenstrahlen und des blauen Kathodenlichtes auf sein Verhalten haben, besser und habe bei sorgfältiger Variation der Versuchsbedingungen diese einseitige Verschiebung der Interferenzfläche thatsächlich erhalten.

Bei Verschiebung des Schleifcontactes S aus der Mitte der Schlinge verschiebt sich die Interferenzfläche aus der mittleren Lage nach seitwärts, wobei sie nur wenig breiter (circa 1 *mm* breit) wird. Die Grösse und Richtung ihrer Verschiebung entspricht der Grösse und Richtung der Verschiebung des Schleifcontactes derart, dass wenn dieser die ganze Schlinge durchläuft, sich die Interferenzfläche von einer Kathode bis zur anderen verschiebt.

Hiebei schlagen sich die Ränder der Interferenzfläche nach aussen über die nähere Kathodenplatte zurück. In Fig. 2 zeigt $J_1 J_1$ die Gestalt der unverschobenen, $J_2 J_2$ die Gestalt der verschobenen Interferenzfläche.[2]

---

[1] Z. B. verschiedener Wellenlänge.

[2] Herr Tollenaar hat fünf helle coexistente Flächen (J_1 bis J_5 Fig. 3) zwischen den Kathodenplatten erhalten. Da aber wahrscheinlich die Stiele der Kathoden mit den Kathodenplatten nur durch eine Nietung verbunden waren, erhielt er, wie man auf den von ihm mitgetheilten Photographien deutlich sieht, den blauen Querstrich (vergl. die Anmerkung w. s.) und konnte er keine Empfindlichkeit der fünf Flächen gegen Verschiebungen des Schleifcontactes constatiren. Herr Tollenaar selbst deutet seine Photographien allerdings ganz anders.

Das Anlegen von Capacitäten an die Drahtschlinge hat ebenfalls entsprechende Wirkungen auf die Interferenzfläche.

Ich werde demnächst dieses Experiment zur Grundlage einer eingehenden Untersuchung machen.

II.

Die Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt sind der Ansicht, dass weder eine Interferenz, noch eine elektrostatische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen existirt, sondern dass diese Erscheinungen sich auf die Goldstein'sche Deflexion

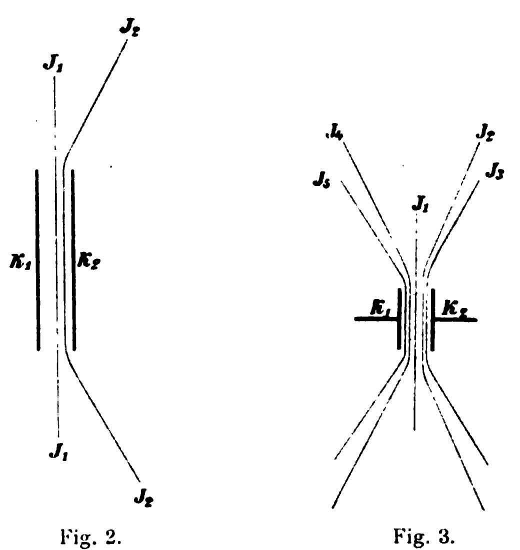


Fig. 2. Fig. 3.

der Kathodenstrahlen zurückführen lassen. Eine derartige Erklärung meiner Versuche halte ich nicht für möglich, wohl aber den umgekehrten Erklärungsversuch.

Ich bin der Meinung, dass die von Goldstein angenommene specifische deflectorische Wirkung der Kathoden auf den Kathodenstrahl, welche eine elektrische Fernwirkung neuer Natur sein soll, nicht existirt, und dass sich die von Goldstein entdeckten Erscheinungen theils auf die Interferenz, theils auf die elektrostatische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen zurückführen lassen.

Goldstein hat seine Versuche mit jenen starken, sehr gestreckten Kathodenstrahlen angestellt, welche auftreten, wenn

man einen activen Funken vorschaltet. Diese Strahlen verhalten sich wesentlich anders als die sehr zur Krummlinigkeit geneigten schwachen Kathodenstrahlen, welche ich untersucht habe. Wenn auch das Verhalten letzterer Strahlen eine wie ich glaube grössere theoretische Wichtigkeit hat, so waren die starken Strahlen doch von jeher deshalb für den Experimentator interessant, weil sich ihre Eigenschaften mehr denen der bekannten Strahlen (Licht und Schall) nähern und deshalb verständlicher sind. In welcher Weise interferiren nun diese starken Strahlen?

Der Fluorescenzfleck, welchen die von complicirter gestalteten Kathoden ausgehenden starken Strahlen auf der Glaswand entwerfen, hat die mannigfaltigsten, aber immer sehr regelmässige Formen. Goldstein beschreibt viele davon. Er sieht in dem complicirten Querschnitte dieser Strahlenbündel nur die Zeichen, dass die Strahlen nicht auf der Kathode normale Gerade sind, sondern der Deflexion unterliegen.

Die mehr oder weniger flächenartig ausgebreiteten Gebiete, in welchen die Strahlung stärker ist und deren Schnitt mit der Glaswand die grünen Striche gibt, aus welchen sich das Fluorescenzbild zusammensetzt, bezeichnen nicht den Gang einfacher Kathodenstrahlen, sondern sind Interferenzflächen. Sie haben, soweit dies elektrostatische Einflüsse auf den Gang der einfachen Strahlen zulassen, symmetrische Lage gegen die entsprechenden Theile der Kathode, oft ganz dieselbe Lage wie die Interferenzflächen in dem blauen Kathodenlicht. Besonders auffallend ist es, dass die grünen Striche, in welchen diese Flächen die Glaswand schneiden, häufig doppelt oder an den Enden gegabelt sind.

Die einfachen Interferenzflächen, welche durch schwache Kathodenstrahlen gebildet werden, spalten sich, wenn man die Strahlen verstärkt.

Am einfachsten zeigt sich dies an einer Kathode, welche aus zwei unter einem einspringenden stumpfen Winkel zusammenstossenden Platten gebildet wird.[1] *kk* (Fig. 4) stellt die

---

[1] Crookes hat ähnliche Strahlungsformen beschrieben, aber unrichtig gedeutet (vergl. G. Wiedemann, Galvanismus, Bd. IV A, S. 424).

Projection derselben dar. Bei 0·2 *mm* Druck sieht man die einfache Interferenzfläche *i* in dem blauen Kathodenlicht *bb*.

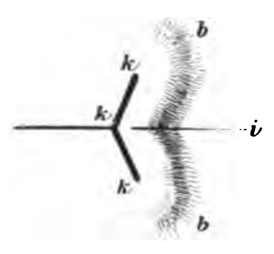


Fig. 4.

Bei 0·005 *mm* Druck sieht man, wenn man keinen Funken vorschaltet, so dass die Strahlen recht schwach sind, die Erscheinung Fig. 5. Die Strahlen entwerfen einen grossen, gleichmässig mattgrünen Fluorescenzfleck *G* an der Glaswand. In dem bläulichen Licht, welches ihren Weg bezeichnet, unterscheidet man die einfache Interferenzfläche *i*.

Schaltet man nun einen activen Funken vor oder verbindet man die Kathode mit dem negativen Pol einer grossen Funkenstrecke, lässt jedoch die Anode ganz isolirt, so erhält man eine

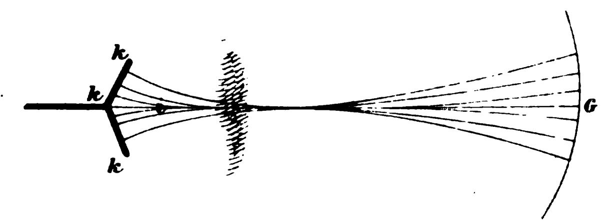


Fig. 5.

hellgrüne Fluorescenz von folgender Form. Längs des Schnittes der durch die etwas gekrümmten Linien kg_1 und kg_2 (Fig. 6) gelegten, auf der Zeichnungsebene senkrechten Cylinder mit der Glaswand leuchtet diese in zwei circa 3 *mm* breiten Streifen.

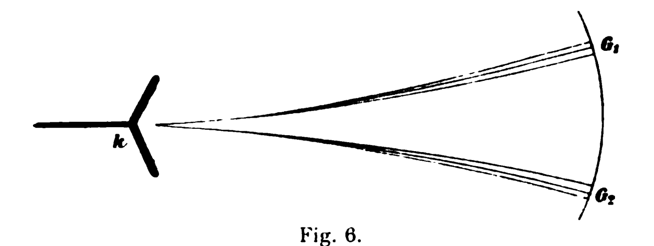


Fig. 6.

Viel schwächer fluorescirt sie in dem Winkel zwischen diesen Streifen, noch schwächer fluorescirt sie ausserhalb.

Ausserdem sieht man einen in der Zeichnungsebene liegenden hellen grünen Streifen, welcher die bereits erwähnten

zwei Streifen in den Punkten $g_1 g_2$ senkrecht schneidet und sich ausserhalb gabelt. Die Fluorescenzfiguren, welche ausserdem aber in mehr als 90° Abstand von der Symmetrieebene auftreten, sollen hier nicht beschrieben werden.

Ähnlichen Ausfall haben alle Versuche mit Kathoden, welche die Form eines Cylinders mit verschieden gestalteter Leitlinie haben.

Es scheint mir wichtig, diese Gabelung der Interferenzfläche starker Kathodenstrahlen hervorzuheben, weil sie mit der von E. Mach (diese Sitzungsberichte, Bd. 72—80, 1875 bis 1879) nachgewiesenen Gabelung der Interferenzflächen von Schallwellen grosser Amplitude in Beziehung gebracht werden kann.

III.

Von grossem Interesse ist die Beobachtung der Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt, dass die Ansatzstelle der Kathodenstrahlen auf der Kathode bei der elektrostatischen Ablenkung der Strahlen verschoben wird. Ihrer Angabe jedoch, dass bei dieser Ablenkung der Strahlen nur ihr Ansatzpunkt sich verschiebe, die Kathodenstrahlen selbst aber nicht abgelenkt wurden (l. c. p. 515, Zeile 20), sondern geradlinig in der Normale des neuen Ansatzpunktes verlaufen (p. 517, Zeile 17), kann ich nicht zustimmen.

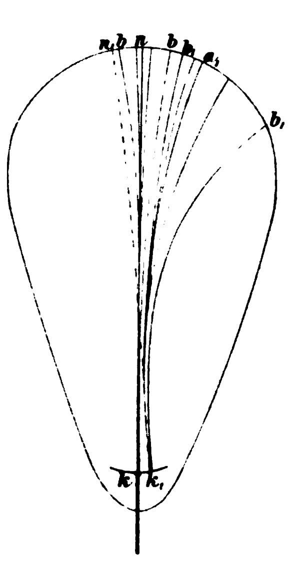


Fig. 7.

Die Kathodenstrahlen werden durch elektrostatische Kräfte gekrümmt.

Bei einer concaven Kathode (*k*, Fig. 7) von 10 *cm* Krümmungsradius und eingenietetem Stiel von 2 *mm* Durchmesser, mit welcher ich meine früheren Versuche gemacht habe, bilden mittelstarke Kathodenstrahlen ein bläuliches Büschel *kn* von geradliniger Axe. Die seitlichen Strahlen (*kb*) krümmen sich nach auswärts,

das Büschel sitzt mit einem schmalen Stiel auf der Kathodenmitte. Durch elektrostatische Wirkungen wird der Strahl vorübergehend gebogen. Er nimmt hiebei die Form $k_1 a_1$ an. Der Ansatzpunkt k verschiebt sich um $kk_1 = 3\,mm$ auf der Kathode. Der Fluorescenzfleck n verschiebt sich im selben Sinne um den zehnfachen Betrag $na_1 = 30\,mm$. Die Strahlen verlaufen also nach der Ablenkung keineswegs in der Normale $k_1 n_1$ des neuen Ansatzpunktes k_1, sondern weichen in ihrem ganzen Verlaufe aus derselben ab, und zwar im Sinne einer $\left\{\begin{matrix}\text{Anziehung}\\\text{Abstossung}\end{matrix}\right.$ durch einen $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right.$ geladenen Körper, in welchem Sinne auch der Ansatzpunkt der Strahlen verschoben wird.

Übrigens kann ich mittheilen, dass nicht nur diese Verschiebung des Ansatzpunktes in guter Übereinstimmung mit meiner Theorie [1] steht, sondern auch die Ablenkung des Fluorescenzfleckes, deren paradoxen Sinn ich in meiner I. Mittheilung unerklärt lassen musste, durch folgende Betrachtung verständlich wird.

Da die Ansatzstelle der Kathodenstrahlen nicht ein (durch andere als elektrostatische Ursachen) bestimmter Punkt der Kathode (z. B. der Eintrittspunkt des Zuleitungsdrahtes) ist, sondern durch elektrostatische Kräfte verschoben werden kann, muss man fragen, durch welche elektrostatischen Merkmale sich die neue Ansatzstelle auszeichnet, so dass von ihr aus die Strahlung stärker ist, als von den anderen Punkten der Kathode.

Ich habe nun a. O.[2] gezeigt, dass die Fortpflanzung reiner Longitudinalstrahlen in einem allgemeinen elektrostatischen Felde nur in den Linien maximaler und minimaler elektrostatischer Kraft möglich ist. Da die Kraftschwingungen an der Kathode, welche durch die zufliessenden elektrischen Drahtwellen bewirkt werden, eine nahezu rein longitudinale Anregung bieten, so werden die von der Kathode ausgesendeten Strahlen die Linien maximaler und minimaler Kraftintensität bevorzugen.

---

[1] Jaumann, diese Sitzungsber., Bd. 104, S. 747, Juli 1895; Wied. Ann., Bd. 57, S. 147.

[2] Compt. rend. 1896, t. CXXII, p. 518.

Es wird nicht überflüssig sein, die Ursache, warum die Strahlen meiner Theorie diese Maximal- und Minimallinien bevorzugen, anschaulicher darzustellen.

Es sei $\varphi_1(x, y, z) = 0$ die Wellenfläche eines Longitudinalstrahles zur Zeit t und $\varphi_1 + d\varphi_1$ dieselbe Wellenfläche zur Zeit $t + dt$. Von diesen beiden Wellenflächen wird aus jeder Kraftlinie ein Stück herausgeschnitten, welches der totalen Kraft $(X_0 Y_0 Z_0)$ an dieser Stelle proportional ist.[1] Die Wellenfläche verschiebt sich also parallel zu sich selbst nur in den Linien maximaler und minimaler Kraft. In allen anderen Theilen des Feldes ändert die Wellenfläche während ihrer Fortpflanzung fortwährend den Winkel, welchen sie mit der elektrostatischen Kraft einschliesst.

Nun sind rein longitudinale Strahlen nach meiner Theorie nur in zwei Fällen möglich: 1. Es ist keine ablenkende magnetische Kraft vorhanden und die Wellenfläche steht auf der elektrostatischen Kraft immer senkrecht, und 2. Es ist eine magnetische Kraft vorhanden und die Wellenfläche schliesst mit der elektrostatischen Kraft einen gewissen, von der Grösse der magnetischen Kraft abhängenden Winkel ein.[2]

In allen anderen Fällen muss der Strahl ausser der Longitudinalcomponente noch Transversalcomponenten haben, und zwar eine elektrische Transversalschwingung, welche die gleiche Projection auf die Wellenfläche hat wie die elektrostatische Kraftlinie und eine magnetische Transversalschwingung, welche auf der Ebene der beiden elektrischen Schwingungscomponenten und der elektrostatischen Kraft senkrecht steht. Die Grösse dieser Transversalcomponenten bestimmt sich 1. durch den Winkel, welchen die Wellenfläche mit der elektrostatischen Kraft einschliesst, und 2. durch die Grösse und Richtung der ablenkenden magnetischen Kraft. Diese Abhängigkeit lässt sich leicht[3] in allgemein giltige Formeln bringen.

[1] Vergl. Gleichung 2) l. c. p. 516.

$$k = X_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}.$$

[2] Vergl. Wied. Ann., Bd. 57, S. 175.

[3] Wied. Ann., Bd. 57, S. 171, Zeile 10 und 11.

Es ist also im Allgemeinen unmöglich, dass sich eine Welle fortpflanzt, ohne während des Fortschreitens fortwährend ihre Transversalcomponenten zu verändern, denn im Allgemeinen ändert sich auf ihrem Wege fortwährend der Winkel, welchen ihre Wellenfläche mit der elektrostatischen Kraft einschliesst. Von allen Punkten der Kathode gehen nahezu rein longitudinale Strahlen aus, aber dieselben müssen im Allgemeinen während ihres Fortschreitens immer mehr ihren longitudinalen Charakter einbüssen und auf Kosten ihrer Longitudinalcomponente Transversalcomponenten annehmen.

Ausgenommen sind hievon nur gewisse Linien des Feldes, in welchen die Strahlung ihren longitudinalen Charakter bewahrt. Es sind dies 1. bei Abwesenheit einer ablenkenden magnetischen Kraft die Linien maximaler und minimaler Kraftintensität, denn längs dieser bewahren die Wellenflächen ihre Neigung gegen die elektrostatische Kraft, und 2. bei Vorhandensein einer ablenkenden magnetischen Kraft nicht diese, sondern andere Linien des Feldes, längs welcher die Wellenflächen die den magnetischen Kräften entsprechenden Neigungen gegen die elektrostatische Kraft haben.

Diese unter 1., respective 2. bezeichneten Linien bilden die Axe des zur Beobachtung gelangenden Kathodenstrahles. In diesen Linien und in deren nächster Umgebung pflanzt sich eine wohldefinirte longitudinale Strahlung fort. Ausserhalb dieser Röhren ist die Strahlung je weiter von der Kathode, desto weniger longitudinal, und ich glaube sogar, dass aus meiner Theorie folgt, dass die Strahlung ausserhalb dieser Röhren diffus ist.

Die Kathodenstrahlen folgen also nach meiner Theorie 1. den Linien maximaler und minimaler elektrostatischer Kraft, wenn keine ablenkende magnetische Kraft vorhanden ist, sie werden aber 2. durch eine magnetische Kraft aus diesen Linien abgelenkt. Von dem Sinne und der Grösse dieser Ablenkung gibt die Theorie befriedigende Rechenschaft. Ich hoffe, dass die hier vorgebrachte neue Art der Ableitung der Strahlrichtung aus der Theorie nun auch die Zustimmung von Herrn H. Poincaré finden wird.

Wenden wir uns zu der elektrostatischen Ablenkung der Kathodenstrahlen. In welcher Weise werden die Maximal-, respective Minimallinien durch eine hinzugefügte elektrostatische Kraft abgelenkt?

Es soll nur eine kleine Verschiebung dieser Linien betrachtet werden. Das Coordinatensystem werde so in einen Punkt dieser Linien gelegt, dass die +Richtung der Y-Axe in die +Richtung der maximalen, respective minimalen Kraft fällt, die $+X$-Axe falle in die +Richtung der hinzugefügten ablenkenden elektrostatischen Kraft Ξ. Die Potentialniveaufläche berührt die yz-Ebene im Nullpunkt und habe dort den Krümmungsradius ρ. Bezeichne E die totale elektrostatische Kraft mit den Componenten X, Y, Z und E_0 ihren Maximal-, respective Minimalwerth im Nullpunkte.

Dann wird in der Nähe des Nullpunktes und für $y = 0$, $z = 0$ gelten:

$$X = \Xi + \frac{E_0}{\rho} x$$

$$Y = E_0 + n x^2$$

$$Z = 0.$$

Für den Coëfficienten n erhält man durch zweimalige Differentiation von $E^2 = X^2 + Y^2$ den Werth:

$$n = \frac{\eta_0}{4 E_0} - \frac{E_0}{\rho^2}.$$

Hierin bedeutet η_0 den Werth von $\frac{\partial^2 E^2}{\partial x^2}$ im Nullpunkte. η_0 soll die Schärfe des Maximums, respective Minimums genannt werden.

Die Verschiebung x_1 der Maximal-, respective Minimallinie aus dem Nullpunkte ergibt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial E^2}{\partial x}\right)_{x = x_1} = 0$$

zu

$$x_1 = -\Xi \cdot \frac{E_0}{\rho \eta_0}. \qquad 1)$$

Die Ablenkung x_1 der Maximal-, respective Minimallinie, welcher die Kathodenstrahlen folgen, ist also, falls die ablenkende Kraft Ξ klein ist:

1. Dieser ablenkenden Kraft proportional.

2. Desto grösser, je weniger scharf das Maximum, respective Minimum ist (je kleiner η_0 ist). Maximallinien (für welche η_0 negativ ist) werden cet. par. in entgegengesetzter Richtung abgelenkt wie Minimallinien (für welche η_0 positiv ist).

3. Ist die Grösse der Ablenkung dem Krümmungsradius ρ der Potentialniveauflächen verkehrt proportional. Die Maximallinien werden in einem Felde, in welchem die Krümmungsradien der Potentialniveauflächen in die Richtung der negativen Kraft fallen, wie dies in der Nähe einer concaven Kathode der Fall ist, von einem seitlich genäherten $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right.$ geladenen Körper $\left\{\begin{matrix}\text{abgestossen}\\ \text{angezogen}\end{matrix}\right.$. Thatsächlich wird die Ansatzstelle der Kathodenstrahlen in diesem Sinne abgelenkt.

In grösserer Entfernung von der Kathode, wo die Krümmungsradien der Potentialniveauflächen schon der Kathode zugewendet sind, wird die Maximallinie, welcher die Strahlen folgen, nach Gleichung 1) von einem seitlich genäherten $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right.$ Körper $\left\{\begin{matrix}\text{angezogen}\\ \text{abgestossen}\end{matrix}\right.$. Und thatsächlich wird der Fluorescenzfleck der von einer stark concaven Kathode (2 *cm* Krümmungsradius) ausgehenden Strahlen in entgegengesetzter Richtung abgelenkt, als die Ansatzstelle der Strahlen. Dies haben auch die Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt beobachtet, nur kann ich auch hier ihrer Angabe, dass der Strahl in der Normale seines neuen Ansatzpunktes verlaufe, nicht zustimmen. Er weicht weit von dieser Normale im Sinne einer Näherung an die Symmetrieaxe des Entladungsrohres ab.

In meiner I. Mittheilung[1] habe ich auf die Schwierigkeit der Erklärung des paradoxen Sinnes der Ablenkung des

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105; Wied. Ann., Bd. 59, S. 263.

Fluorescenzfleckes der Strahlen, welche von einer schwach concaven Kathode ausgehen und welche ich auch hier w. o. Fig. 7 beschrieben habe, hingewiesen. Diese Schwierigkeit dürfte nun überwunden sein.

Der Fluorescenzfleck wird in diesem Falle (Fig. 7) von einem +Körper abgestossen, von einem negativen Körper angezogen. Dies ist durch Gleichung 1) erklärt, wenn man annehmen darf, dass die Potentialniveauflächen in dem Recipienten Fig. 7 auch noch in der Nähe des Fluorescenzfleckes gegen die Kathode hin convex sind. Und thatsächlich wäre das Gegentheil nicht wahrscheinlich, da die Glaswand in der Gegend des Fluorescenzfleckes kräftig positiv geladen ist.

Der Fluorescenzfleck wird ferner in diesem Falle zehnmal stärker abgelenkt als die Ansatzstelle der Strahlen. Dies ist durch Gleichung 1) erklärt durch die geringere Schärfe η_0 des Maximums in grösserer Entfernung von der Kathode. Dass η_0 in grösserer Entfernung von der Kathode numerisch kleiner ist, ist schon durch elektrostatische Gründe wahrscheinlich, und ferner stimmt damit überein, dass das Strahlenbüschel in grösserer Entfernung von der Kathode viel breiter ist als an der Ansatzstelle.

Es erklärt dieses Gesetz Gleichung 1) der Ablenkung der Maximal- und Minimallinien mir nun den Sinn und die Grösse mancher elektrostatischen Ablenkungen von Kathodenstrahlen, welche ich bei verschiedenen Formen der Kathode und der Glaswand beobachtet habe und welche mir früher paradox oder gesetzlos erschien, doch ist eine gründlichere Untersuchung dieser Sache noch nothwendig.

Endlich entspricht die Folgerung der Theorie, dass die Kathodenstrahlen die Minimallinien des Feldes ebenso sehr bevorzugen wie die Maximallinien, den Thatsachen. Es dürfte allen Beobachtern bekannt sein, dass das blaue Kathodenlicht die engsten, verstecktesten Winkel der Kathode, in welchen die elektrostatische Kraft ein Minimum ist, bevorzugt, ja häufig dort zuerst auftritt. Das Gleiche gilt von den starken Kathodenstrahlen. Dieselben entspringen mit Vorliebe der Symmetrieaxe eines sehr engen einspringenden Winkels der Kathode oder der Axe eines röhrenförmigen Theiles der Kathode, vermeiden

also keineswegs die Stellen minimaler Kraft an der Kathodenoberfläche.

IV.

Die Herren E. Wiedemann und G. C. Schmidt geben nicht zu, dass die von mir beschriebene elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen[1] eine directe Wirkung der Änderung der ablenkenden elektrostatischen Kraft auf die Kathodenstrahlen ist, sondern nehmen das Vorhandensein einer Zwischenwirkung an. Es soll zufolge der Änderung der elektrostatischen Kraft eine »Veränderung des Feldes« eintreten, welche entweder eine veränderte Lage der Eintrittsstelle des Stromes in die Kathode, respective eine Verschiebung der positiven Lichtsäule oder aber die Ausbildung von secundären Kathoden bewirkt, welche deflectorisch auf die bereits vorhandenen Kathodenstrahlen einwirken.

Die Anordnung der beiden Experimente, welche sie beschreiben, ist von den Versuchsanordnungen, welche ich verwendet habe, nicht principiell verschieden. Das Gleiche gilt von dem Ausfall derselben, auch von dem des Experimentes 2 (S. 516, Zeile 1). Leider geben die beiden Herren keinen Fingerzeig, durch welche Schlüsse man aus ihren Experimenten etwas über das Vorhandensein einer Zwischenwirkung folgern könne

Das blosse Vorhandensein einer Verschiebung der Ansatzstelle ist doch keineswegs ein Anzeichen des Vorhandenseins einer Zwischenwirkung, abgesehen davon, dass es, wie w. o. gezeigt wurde, aus der Theorie folgt. Herr E. Wiedemann selbst hat ja die Verschiebung der Ansatzstelle der Kathodenstrahlen bei der magnetischen Ablenkung derselben constatirt, und Niemand nimmt deshalb an, dass diese Verschiebung der Ansatzstelle ein Anzeichen ist, dass die Wirkung der ablenkenden magnetischen Kraft auf den Kathodenstrahl keine directe, sondern eine durch eine Zwischenwirkung vermittelte sei.

Herr H. Poincaré[2] bezeichnet die in meiner I. Mittheilung nachgewiesene Selbststreckung der Kathodenstrahlen als

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105; Wied. Ann., Bd. 59, S. 252.

[2] H. Poincaré, L'Éclairage électrique, 1896, t. IX, p. 291.

einen sonderbaren Mechanismus. Das Gesetz, nach welchem sich die Glaswand des durchstrahlten Recipienten ladet und welches die Ursache des gestreckten Verlaufes der Kathodenstrahlen und der kurzen Dauer der elektrostatischen Ablenkungen ist, ist nicht ganz fremdartig. Die Selbststreckung der Kathodenstrahlen ist eine Erscheinung, welche mit der Entladung verwandt ist, wie ich dies schon a. a. O. hervorgehoben habe.[1]

Nähert man dem Recipienten einen geladenen Körper A, so werden die Kraftlinien im Vacuum abgelenkt. In kurzer Zeit jedoch haben die abgelenkten Kathodenstrahlen zu der schon vorhandenen Ladung der Glaswand eine solche Vertheilung B freier Ladung hinzugefügt, dass die Kraftlinien trotz der Nähe des Körpers A ihren früheren Verlauf wieder annehmen. Thatsächlich machen die Strahlen nur während der Näherung des Körpers A einen circa 0·2 Secunden dauernden Ausschlag und verlaufen dann trotz der Nähe des Körpers A wie früher.

Dass die Vertheilung B freier Ladung auf der Glaswand wirklich vorhanden ist, erkennt man schon daraus, dass während der Entfernung des Körpers A die Strahlen den entgegengesetzten Ausschlag machen, aber hiebei die freie Ladung B vernichten und zufolge dessen binnen 0·2 Secunden wieder ihren normalen Verlauf annehmen.

Wie ist nun die freie Ladung B auf der Oberfläche der Glaswand vertheilt? Dies ist leicht zu beantworten. Sie muss die Wirkung des genäherten Körpers A auf das Innere des Recipienten gerade aufheben, sie ist also so vertheilt, als wäre das durchstrahlte Vacuum ein Leiter und als wäre sie an der Oberfläche dieses Leiters durch die Influenzwirkung des Körpers A hervorgerufen.

Auch das Verhalten der Strahlen gegen die Anode, welche bei meinen Versuchen nicht in das Vacuum, sondern in das den Recipienten umgebende Öl tauchte, hat ganz denselben Charakter, wenn auch hier die Ablenkung der Strahlen und die Ladung B der Glaswand eine dauernde, stationäre

---

[1] Vergl. Wied. Ann., Bd. 59, S. 266.

ist, da die Glaswand in halbleitender Verbindung mit der Anode steht.

Die ladende Kraft der Strahlung bewirkt einfach den Ausgleich aller durch einen ausserhalb des Vacuums befindlichen ablenkenden Körper innerhalb des Vacuums bewirkten Potentialdifferenzen. Die ladende Kraft der Strahlung, welche die Selbststreckung der Kathodenstrahlen bewirkt, ist also zweifellos verwandt mit den entladenden Wirkungen, welche Strahlen jeder Art ausüben. Das Ziel des Ausgleiches, der Gleichgewichtszustand, ist jedoch merkwürdigerweise hier nicht dadurch bestimmt, dass alle Potentialdifferenzen innerhalb des Vacuums aufgehoben sind, sondern dadurch, dass eine von der Kathode ausgehende Kraftlinie möglichst gestreckt verläuft. Die Kathodenstrahlen schaffen sich dasjenige elektrostatische Feld selbst, in welchem sie am besten fortkommen. Während nämlich von der Kathode dauernd starke Kräfte ausgehen, vernichtet die Strahlung nicht nur die Kräfte, welche von ausserhalb des Vacuums befindlichen Körpern herrühren, sondern sie vernichtet auch die Kräfte einer Anode, welche in das Vacuum taucht, wie eine solche gewöhnlich vorhanden ist. Der geringe Einfluss einer solchen Anode auf den Verlauf der Strahlen bedarf vor Allem der experimentellen Untersuchung.

Um die Kathodenstrahlen zu veranlassen, zur Anode hinzugehen, um also Anodenstrahlen herzustellen, muss man die Ladung der Glaswand modificiren. Es ist dies in sehr verschiedener Weise möglich, z. B. durch Bestrahlung der Glaswand mit verschiedenen Strahlenarten (Kathodenstrahlen, Licht, Röntgenstrahlen) oder durch Bedecken der Innenseite der Glaswand mit entsprechend geladenen Drahtnetzflächen. Meine Versuche in diesen Richtungen versprechen Erfolg.

Hier will ich nur ein äusserst einfaches Experiment beschreiben, welches diesen Zweck allerdings auf einem ganz speciellen Wege erreicht, welches aber doch sehr anschaulich zeigt, dass die Kathodenstrahlen den negativen elektrischen Kraftlinien folgen.

Am schmalen Ende eines birnförmigen, auf 0·05 *mm* evacuirten Recipienten ist die concave Anode A (Fig. 8) eingesetzt, die obere Seite derselben ist mit einer dünnen Schichte

einer fluorescirenden Substanz bestrichen.[1] Diese Anode ist unter Zwischenschaltung der 5 *mm* langen Funkenstrecke *F* zur Erde abgeleitet. Die Kathode *K* ist ein Drahtstift, welcher an dem Ende eines längeren Zuleitungsrohres eingesetzt ist, welches bei *m* in ein Stativ gespannt werden kann. Die Kathode *K* sendet helle Kathodenstrahlen aus, die jedoch in dem Glasrohre nicht weit kommen. In dem oberen Theile *AG* des Recipienten jedoch sind, so lange kein Funke bei *F* springt, keine nennenswerthen Potentialunterschiede möglich. Die ganze Glaswand und auch die Anode ladet sich ziemlich gleichmässig negativ. In dem Augenblicke aber, wo ein Funke bei *F* übergeht, wird die Anode *A* auf das Potential Null gebracht, während die ganze Glaswand über *A* noch negativ elektrisch ist. Wenn also jetzt Kathodenstrahlen auftreten, und hiezu sind die Verhältnisse zufolge des lebhaften Funkenstromes bei *F* sehr günstig, so bleibt diesen Strahlen nichts Anderes übrig, als von der Glaswand auszugehen, denn diese allein ist negativ. Thatsächlich geben kräftige Kathodenstrahlen von der ganzen Glaskuppe *G* aus. Dieselben gehen aber nicht geradlinig in der Normale ihres Ausgangspunktes auf der Glaswand fort, sondern sie bilden das in Fig. 8 dargestellte, aus krummlinigen Strahlen bestehende Büschel, welches mit einem schmalen Stiel auf der Anode endet. Diese Strahlen folgen also zweifellos den elektrostatischen Kraftlinien des Feldes (genauer der Maximallinie).

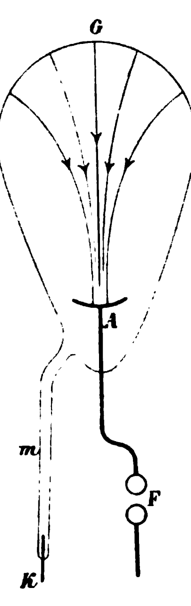


Fig. 8.

Die Glaswand fluorescirt hiebei fast gar nicht. Hingegen fluorescirt die eingefettete Anode lebhaft saphirblau, namentlich in der Fläche von 5 *mm* Durchmesser, in welcher sie von

[1] Ich benütze hiezu ein Fett, welches Kiss in Budapest zum Einfetten der Schliffe liefert und welches unter dem Einflusse der Kathodenstrahlen hell saphirblau luminescirt.

dem stielförmigen Ende des Strahlenbüschels getroffen wird. Dieser Endpunkt der Kathodenstrahlen hat begreiflicherweise keine sehr bestimmte Lage auf der Anode, sondern zeigt eine zitternde Beweglichkeit, welche in charakteristischem Gegensatze steht zu der grossen Ruhe, welche der Ansatzpunkt von Kathodenstrahlen auf einer Kathode bewahrt.

Diese verkehrten Kathodenstrahlen oder Anodenstrahlen zeigen, da sie gleicher Natur wie die gewöhnlichen Kathodenstrahlen sind, auch die entsprechende magnetische Ablenkbarkeit, d. h. die umgekehrte wie Kathodenstrahlen, die von A als Kathode ausgehen würden. Hiebei wird die Ansatzstelle der Anodenstrahlen auf der Glaswand und ihre Endstelle auf der Anode in demselben Sinne abgelenkt.

Die Anodenstrahlen zeigen ferner die zu erwartende umgekehrte elektrostatische Ablenkbarkeit.

Von Interesse ist auch die Abstossung, welche die Anodenstrahlen erfahren durch die dem Recipienten bis auf 2 *cm* genäherte Hand. Hiebei tritt ein weiteres Büschel von Kathodenstrahlen auf, welches denselben Ursprung auf der Glaswand hat wie die Anodenstrahlen, welches aber gegen die Hand hin verläuft.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen auch hier für die Unterstützung meiner experimentellen Arbeiten meinen Dank auszusprechen.

Über einen Erdbeben-Registrator mit elektrisch-photographischer Aufzeichnung des Zeitmomentes des Stosses

von

L. Pfaundler,
w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

Vorbemerkungen über die Methode.

Die Seismographen sollen Richtung und Amplitude der Oscillationen und den Zeitmoment derselben registriren. Obwohl schon ziemlich viele sehr sinnreiche Constructionen für diese mehrfache Aufgabe angegeben und auch ausgeführt worden sind, so kann man doch nicht sagen, dass sie vollständig entsprechen. Für die Aufzeichnung der Oscillationen nach Richtung und Amplitude scheinen die neueren Horizontalpendel zu genügen; aber für die Notirung der Zeiten sind die bisherigen Apparate ungenügend.

Soll diese Notirung einen Werth haben für die Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit etc., so muss sie mindestens auf die Secunde genau sein. Die Registrirung auf einem sich abwickelnden Papierstreifen, der durch ein Uhrwerk bewegt wird, ist aber nicht leicht bis zu dieser Genauigkeit einzurichten. Sollen die dem Intervall einer Zeitsecunde entsprechenden Registrirmarken noch sicher abzulesen sein, so müssen sie ungefähr $^1/_2$ *mm* von einander abstehen. Der Papierstreifen muss daher per Minute um 30 *mm*, also per Stunde um 1800 *mm* vorrücken. Das macht per Tag über 43 *m*, per Jahr über $15^1/_2$ *km* Papierstreifen! Abgesehen von diesem Papieraufwande, ist es wohl sehr schwierig, einen Papierstreifen trotz der Reibung und

der Gefahr des Gleitens, der Veränderung seiner Länge durch Feuchtigkeit u. s. w. mit der Genauigkeit von $^1/_2$ *mm* per Zeitsecunde in Bewegung zu erhalten. Ich halte es daher für zweckmässiger, für die Zeitregistrirung einen separaten Apparat aufzustellen und denselben mit einer Uhr derartig in Verbindung zu setzen, dass deren genauer Gang durch die Registrirung gar nicht beeinträchtigt werden kann.

Als einfachste Lösung dieser Aufgabe erscheint es, das Zifferblatt der ganz selbständig functionirenden Uhr im Moment des Erdstosses zu photographiren, indem man das hiezu nöthige momentane Licht durch den Erdstoss selbst hervorrufen lässt. Zu diesem Zwecke stellen wir in einem abgedunkelten Raume dem Zifferblatte der Uhr, die mit einem Secundenzeiger ausgerüstet sein muss, ein photographisches Objectiv gegenüber und ein paar Glühlämpchen zur Seite, deren Licht durch Reflectoren auf das Zifferblatt geworfen, aber vom directen Bestrahlen des Objectives abgehalten wird. An Stelle der Mattscheibe der photographischen Camera wird eine gewöhnliche Bromsilbergelatinplatte mittelst Cassette eingesetzt. Es handelt sich dann nur noch um die Art und Weise, wie der zum Betriebe dieser Glühlämpchen nöthige Strom durch das Erdbeben eingeleitet werden soll. Eine einfache Contactvorrichtung an einem aufgehängten Pendel, z. B. ein am Pendel angebrachter Stift, der in einem engen Ringe derartig hängt, dass er bei Ruhelage eben noch nicht berührt, aber bei Oscillationen in Berührung tritt, ist dazu nicht geeignet, denn jeder Stoss würde dann eine Reihe von Schwingungen und Contacten geben, welchen eine Reihe von Belichtungen der Platte entsprechen, wodurch das Bild des Stundenzeigers unscharf und verbreitert erscheinen müsste. Die Einrichtung muss vielmehr derartig sein, dass nach dem ersten Stoss, beziehungsweise auf die erste Belichtung nicht sofort wieder eine solche erfolgen kann.

Allerdings wäre es wünschenswerth, dass der Apparat befähigt wäre, nach Verlauf einiger Minuten oder später einen weiteren Stoss neuerdings zu registriren. Es wäre dies durch langsame Rotation (oder Geradeführung) der empfindlichen Platte nicht schwierig zu bewerkstelligen. Ich glaubte mich indess zunächst im Interesse der Einfachheit und der geringeren

Herstellungskosten des Apparates mit einer solchen Construction begnügen zu sollen, welche nur die erste über eine gewisse Intensitätsschwelle hinausgehende Erschütterung registrirt und zugleich durch ein von da an ertönendes Alarmsignal die mit der Beaufsichtigung des Apparates beauftragte Person benachrichtigt, damit dieselbe den Apparat sofort zur Aufnahme eines weiteren Signals in Stand setzen kann.

Dazu kommt noch eine andere Bedingung. Der durch den Erdstoss zu Stande kommende Stromschluss darf in seiner Dauer nicht von der Stärke des Stosses beeinflusst werden; denn ein zu kurzer Stromschluss würde den Glühlampen nicht die nöthige Zeit lassen, um hell genug aufzuleuchten; ein zu langer Stromschluss dagegen würde durch Verlängerung der Beleuchtung die Deutlichkeit und Schärfe des Zeigerbildes, also auch die Genauigkeit der Zeitpunktsbestimmung beeinträchtigen. Die Stromschlussdauer muss vielmehr ganz unabhängig von der Intensität des Erdbebens so regulirt werden, dass eben noch ein deutliches Momentbild auf der Platte erhalten wird. Vorversuche haben ergeben, dass mit zwei Glühlämpchen von $5^1/_2$ Volt leicht ein scharfes Bild des von Fünftel- zu Fünftel-Secunde fortspringenden Secundenzeigers einer Taschenuhr zu erhalten ist. Es scheint also eine $^1/_5$ Secunden lange Belichtung mit dieser Lichtquelle zu genügen. Das Zeitintervall zwischen dem Momente des Stosses und dem Eintritte der photographischen Wirkung ist nicht verschwindend klein, aber constant und beträgt jedenfalls nur Bruchtheile einer Secunde. Es kann eventuell in Rechnung gebracht werden, wenn es nicht durch den Gebrauch zweier gleicher Apparate an beiden Stationen zwischen denen die Zeitdifferenz gemessen werden soll, ohnehin eliminirt wird.

Nach diesen Vorbemerkungen gehe ich nun an die

Beschreibung des Registrirapparates.

Derselbe besteht aus vier von einander unabhängigen, an getrennten Orten aufstellbaren und nur durch Leitungsdrähte zu verbindenden Bestandtheilen, nämlich:

dem Contactapparat,
der photographischen Camera,

dem Läutewerk und

der galvanischen Batterie.

Die schematische Figur 1 zeigt das Zusammenwirken und die Verbindungen dieser Theile, die Figuren 2 und 3 geben perspectivische Ansichten.

Der Contactapparat besteht aus der eisernen, kreisrunden Grundplatte *G*, in deren Mitte der cylindrische Stahlstab *S* von 2·4 *mm* Dicke und 30 *cm* Länge senkrecht befestigt ist. Derselbe geht durch eine seitliche Öffnung eines blechernen Trichters *T*, ohne denselben zu berühren und endet oben in einen kleinen Aufsatz von Messing mit einer schalenförmigen Vertiefung von 0·6 oder 0·8 *mm* Durchmesser. In diese Vertiefung legt man eine Marmorkugel *K*, wobei man sich einer kleinen, beigegebenen Hilfsvorrichtung bedienen kann. Ein leiser Stoss, der die Grundplatte trifft, bringt die Kugel zum Fallen.[1] Sie fällt in die kleine Schale *s*, welche den Hebel *sm* in Bewegung setzt, so dass die Schale *s* sinkt und das regulirbare Gegengewicht steigt. Der prismatische Träger *P* aus Eisen, der auch den Trichter hält, trägt die Axe der

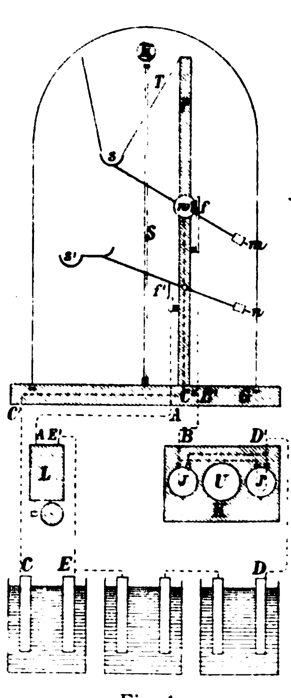


Fig. 1.

messingenen Walze *w*, an welcher der Hebel *sm* befestigt ist. Die isolirte Contactfeder *f* liegt an der Walze an. Bei der Anfangsstellung von *sm* ist jedoch der Contact zwischen *f* und *w* durch ein Hartgummistück unterbrochen; derselbe wird aber

[1] Ob die Kugel durch schwächere oder etwas stärkere Stösse zum Fallen kommt, hängt allerdings von dem Verhältniss der Schwingungsdauer des Stahlstabes zur Oscillationsperiode des Erdbebens ab. Eine Reihe abgestimmter solcher Stahlstäbe würde wohl über letztere Aufschlüsse zu geben im Stande sein.

hergestellt, indem die Schale *s* mit der Kugel sinkt und wird erst wieder unterbrochen, nachdem die Kugel aus der Schale *s* in die untere Schale *s'* abgegeben worden und der Hebel wieder gestiegen ist. Dieser Stromschluss ist es, der die Glühlampen auf einen

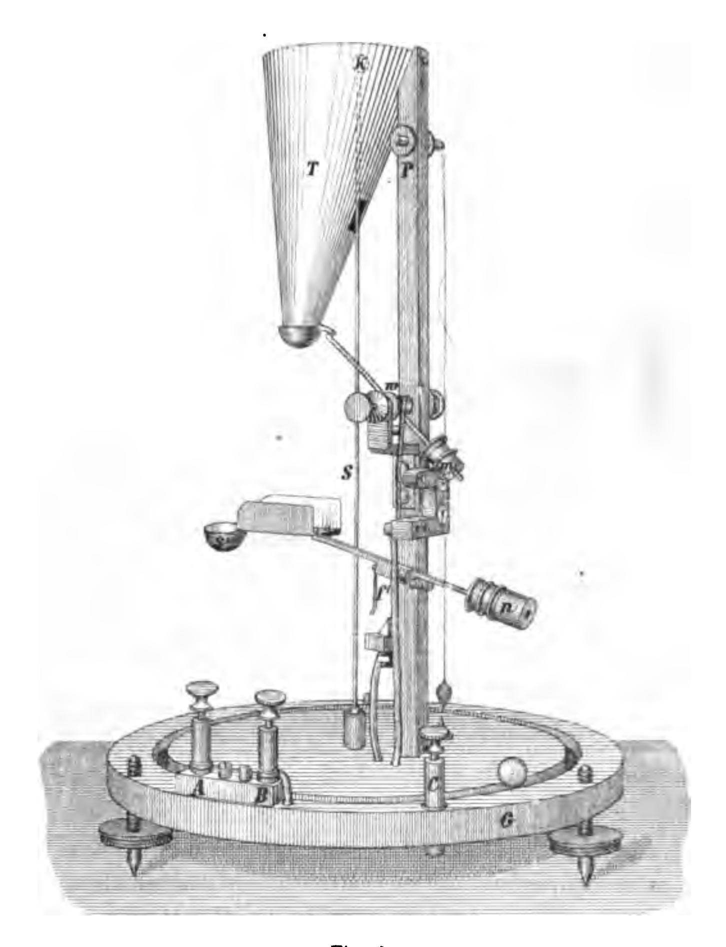


Fig. 2.

Moment aufleuchten lässt. Die in die Schale *s'* abgegebene Kugel bewirkt nun ein Sinken des unteren Hebels *s'n* und hiedurch einen andauernden Stromschluss an der Feder *f'*, wodurch das Läutewerk in Gang gesetzt wird, welches fortläutet, bis die Kugel aus der Schale *s'* herausgenommen wird.

Damit die Contacte nicht versagen, sind dieselben nicht auf blosse Berührung, sondern auf Reibung eingerichtet und die Reibflächen mit Platin belegt. Sie haben in der That noch nie versagt, obwohl sie im Laufe von vielen Monaten oft geprüft wurden. Um den Apparat vor Staub etc. zu schützen, ist er mit einer Glasglocke, die in eine kreisrunde Nuth der Grundblatte passt, bedeckt.

Drei Fussschrauben und ein Senkel gestatten, den Apparat immer wieder in gleicher Lage aufzustellen. Fig. 2 gibt eine

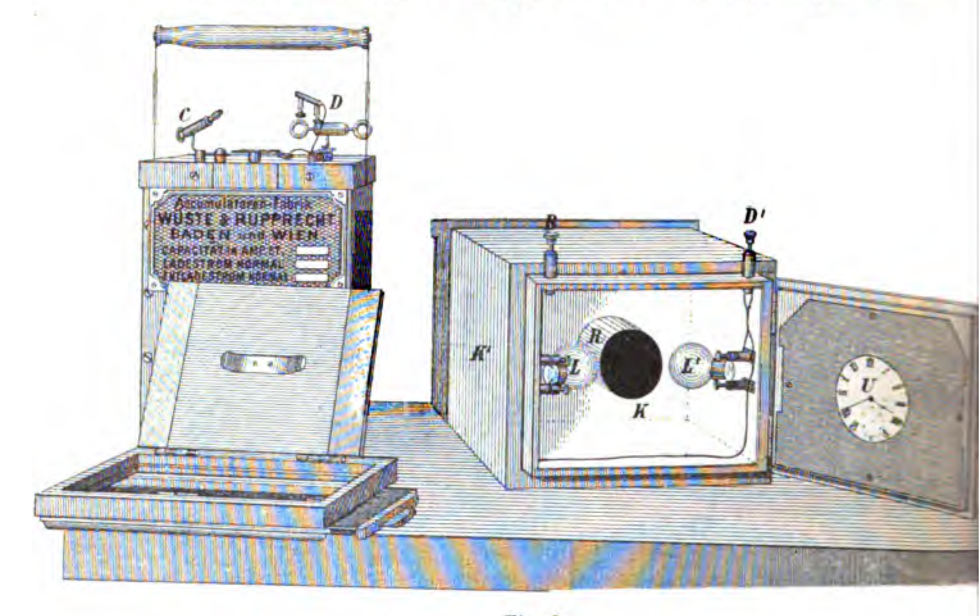


Fig. 3.

Abbildung mit Weglassung der Glasglocke nach einer photographischen Aufnahme in ungefähr $^2/_7$ der natürlichen Grösse.

Die photographische Camera (Fig. 3) besteht aus dem Holzkasten K, der in dem weiteren Kasten K' lichtdicht verschiebbar ist. Der erstere ist mit einer in Charnieren beweglichen Thüre verschliessbar, in deren Mitte eine sicher gehende Taschenuhr befestigt wird, so dass sie ihr Zifferblatt dem Innern zukehrt. Die beiden Glühlämpchen l und l', welche an den Zuleitungsklemmen leicht ausgewechselt werden können, beleuchten das Zifferblatt während des Stromschlusses. Die

Röhre R schützt das dahinter befestigte Objectiv (ein Extra-Rapidlinkeioskop von Görz, Ser. C, Nr. 000, von 6 *cm* Brennweite) vor directer Bestrahlung. Rückwärts ist der Kasten K' mit einer rechteckigen Öffnung versehen, vor welcher eine photographische Cassette gewöhnlicher Form eingeschoben werden kann, und zwar so, dass nacheinander zwei Aufnahmen des Zifferblattes auf einer Trockenplatte von 9×12 *cm* Format gemacht werden können. Diese Cassette ist in Fig. 3, daneben im geöffneten Zustande abgebildet. Zur genauen Einstellung der Camera ist eine Mattscheibe beigegeben. Die äusseren Klemmen B und D', welche den Strom zuführen, sind in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise durch Drähte mit dem Contactapparat einerseits und mit der Batterie anderseits zu verbinden. Sie führen den Strom den Lampen in der Weise zu, dass dieselben nicht hintereinander, sondern nebeneinander eingeschaltet sind. Es hat dies den Vortheil, dass man mit einer Batterie von wenigen Elementen ausreicht und im Falle des Versagens einer Lampe immer noch ein brauchbares Bild erhalten wird. Doch hat das Anbringen zweier Lampen insbesondere den Zweck, das Entstehen eines dunkeln Schattens des Secundenzeigers zu verhindern.

Das Läutewerk (nur in Fig. 1 schematisch dargestellt) ist von der gewöhnlichen Form und wird einerseits mit der Klemme A des Contactapparates, anderseits mit der Batterie, und zwar derartig in Verbindung gebracht, dass nur eine einzige Zelle derselben in Anspruch genommen wird. Der Strom der ganzen Batterie würde nämlich überflüssig stark sein. Nur wenn etwa das Läutewerk sehr weit von den übrigen Apparaten entfernt und mit verhältnissmässig dünnen Drahtleitungen mit denselben verbunden wäre, müssten eventuell wegen des grösseren Widerstandes zwei oder alle drei Elemente in diese Leitung eingeschaltet werden.

Die Batterie. Als solche eignet sich weitaus am besten ein kleiner Accumulator von drei Elementen, dessen Klemmenspannung von ungefähr $5^1/_2$—6 Volt zu den angewendeten Glühlämpchen passt. Man könnte zwar auch mit einer grösseren Anzahl theilweise parallel geschalteter Leclanché-Elemente den Zweck erreichen, aber man braucht, um die nöthige Strom-

stärke zu erreichen, deren so viele, beziehungsweise so grosse Exemplare, dass ihr Preis nicht billiger zu stehen kommt, als der einer kleinen Accumulatorenbatterie von drei Elementen, welche, einmal geladen, durch viele Monate sicher und ohne jeden Aufwand functionirt. Wenn dieser Accumulator frisch geladen ist, so kann seine Spannung im ersten Moment für die Glühlampen zu gross und desshalb gefährlich sein. Man muss daher den ersten Abfall der Spannung abwarten, eventuell künstlich durch einen anderweitigen Stromschluss herbeiführen.

Aufstellung des Apparates.

Der Contactapparat kommt natürlich an einen vor anderweitigen Erschütterungen möglichst geschützten Ort auf eine feste Unterlage zu stehen. Die betreffende Localität soll auch nicht feucht sein, damit Rostbildung vermieden wird. Vor Staub schützt die Glasglocke. Die Camera kommt an einen Ort, dessen tägliche Begehung wenig Mühe macht, der aber insbesondere trocken sein soll, damit die Holztheile, die Uhr und die Trockenplatte nicht durch Feuchtigkeit leiden. Es ist wünschenswerth, wenn auch nicht nothwendig, dass die Camera nicht allzuweit, sagen wir nicht über 10—20 *m* von dem Contactapparat und der Batterie entfernt aufgestellt werde, damit der Leitungswiderstand der Verbindungsdrähte nicht die Spannung an den Glühlampen allzusehr herabsetze. Wäre dies der Fall, was an dem zu schwachen Leuchten der Lampen zu erkennen wäre, so müssten entweder die Leitungsdrähte verstärkt oder eine vierte Zelle zum Accumulator zugeschaltet werden. Das Läutewerk kommt natürlich an denjenigen Ort, wo sein Läuten am ehesten gehört wird. Die Verbindung aller Theile ist aus der Fig. 1 genügend ersichtlich, also nicht weiter zu besprechen. Die Beschickung des Accumulators mit verdünnter Schwefelsäure und die Ladung desselben wird als bekannt vorausgesetzt.

Ist der Apparat aufgestellt, so wird zunächst die Mattscheibe und die Uhr eingesetzt, mit dem Deckel aus Pappe überdeckt und geprüft, ob beim Contact ein scharfes und genügend helles Bild auf der Mattscheibe entsteht. Die scharfe Einstellung erfolgt durch Verschieben des inneren Kastens *K*

in dem äusseren K'. Dann wird die im Dunkeln mit der Trockenplatte beschickte Cassette eingeschoben.[1] Für dieselbe sind zwei verschiedene Einstellungen markirt, um im Nothfalle gleich eine zweite Aufnahme zu ermöglichen. Mit dem Aufziehen des Cassettenschiebers wartet man natürlich, bis am Contactapparat die Kugel aufgesetzt und die Glasglocke übergedeckt ist.

Das Aufsetzen der Kugel gelingt zwar bei einiger Übung aus freier Hand. Sind aber die Finger feucht, so macht es manchmal Schwierigkeiten. Es ist desshalb eine kleine Vorrichtung beigegeben, welche aus einem aufgeschnittenen Ringe mit zwei Handhaben besteht. Mittelst derselben bewerkstelligt man das Aufsetzen der Kugel, wenn man nicht eine sehr unruhige Hand hat, ziemlich sicher. Erst wenn das alles in Ordnung, öffnet man zuletzt den Cassettenschieber.

Die tägliche Bedienung des Apparates beschränkt sich auf das einmalige Aufziehen der Uhr. Zu diesem Zwecke wird aber jedesmal vorher der Cassettenschieber geschlossen und nach dem Einsetzen der Uhr und Verschliessen der Camera wieder herausgezogen. Alle Monate einmal (ungefähr) erneuert man die Trockenplatte.[2] Man benützt diese Gelegenheit, um durch ein künstliches Erdbeben das richtige Functioniren des Apparates zu erproben. Man gibt also dem Contactapparat einen Stoss, beobachtet das Spiel der Hebel, schliesst dann den Cassettendeckel und begibt sich mit der abgenommenen Cassette in die Dunkelkammer, wo man die Platte herausnimmt und entwickelt. Kann man dies nicht selbst machen, so wendet man sich an einen Photographen. Gleich nach der Probe ersetzt man die Cassette durch die mit einer neuen Trockenplatte versehenen Reservecassette, bringt die Kugel an ihren Ort zurück und öffnet dann erst wieder den Schieber der Cassette.

---

[1] Hat man keine Dunkelkammer, so fülle man die Cassette zur Nachtzeit beim Lichte einer rothen Lampe (oder ganz im Finstern) oder wende sich an irgend einen Berufs- oder Amateurphotographen.

[2] Da neue Cassetten wegen der Ausdünstung des Holzes und Lackes die Platten nach ein paar Wochen verschleiern, so muss die Auswechslung der letzteren im ersten Jahre öfters geschehen, während sich in einer alten Cassette die Platten monatelang gut erhalten, wenn die Localität trocken ist.

Hat ein Erdbeben stattgefunden, welches am Apparate registrirt wurde, wovon man durch das Läutewerk benachrichtigt wird, so nimmt man sofort die Glocke ab, die Kugel aus der Schale s' heraus, worauf das Läutewerk zum Schweigen kommt. Dann schliesst man den Cassettenschieber und verschiebt die Cassette auf die zweite Marke, setzt dann die Kugel wieder auf, zieht den Cassettenschieber auf und hat so für ein zweites Erdbeben vorgesorgt. Inzwischen beschickt man die Reservecassette mit einer neuen Trockenplatte. Diese setzt man an Stelle der früheren ein und entwickelt nun, ohne sich beeilen zu müssen, die exponirt gewesene Platte oder schickt sie in der verschlossenen Cassette zu diesem Zwecke an einen Photographen. Dagegen ist es dringend erwünscht, die Uhr an demselben Tage noch mit einer astronomischen Uhr, eventuell auf telegraphischem Wege, genau zu vergleichen. Vollkommener wäre freilich die Einrichtung, wenn die benützte Uhr selbst eine astronomische Pendeluhr sein könnte. Aber die grossen Kosten einer solchen und der Umstand, dass der Gang derselben doch erst wiederum nach astronomischer Methode controlirt werden müsste, haben mich veranlasst, die beschriebene Anordnung zu wählen. Der Leiter der Erdbebenstation kann so die Uhr herausnehmen und mit ihr direct zum Astronomen oder zu einem Telegraphenamt gehen, um den »Stand« seiner Uhr mit einer Normaluhr zu vergleichen. Soll inzwischen der Erdbebenapparat functionsfähig bleiben, so muss freilich durch eine Zwischenuhr die indirecte Vergleichung durchgeführt werden, was aber weniger genau ist.

Die Drehaxen des Contactapparates sind jährlich einmal mit feinem Uhrenöl zu schmieren; am Accumulator ist rechtzeitig vorzusorgen, dass das verdunstende Wasser ersetzt werde, damit die Zellen immer vollgefüllt bleiben. Hat seine Spannung soweit nachgelassen, dass die Lampen nicht mehr genug leuchten, so muss er nachgeladen werden. Bei dem von mir benützten Accumulator war dies erst nach einem halben Jahre nöthig. Sehr zu empfehlen ist die Benützung eines kleinen Voltmeters (Accumulatorenprüfers) zur Messung der Spannung. Man schreitet spätestens zur Nachladung, wenn der Accumulator per Zelle auf 1·8 Volt in seiner Spannung gesunken ist.

Wegen des Vorganges bei der Nachladung ist ein Fachmann zu Rathe zu ziehen.

Der eben beschriebene Apparat ist im physikalischen Institute während eines halben Jahres über hundertmal durch künstliches Beben auf sein sicheres Functioniren geprüft worden und hat hiebei nie versagt. Ich hoffe daher, dass er sich bei geeigneter Behandlung auch künftig bewähren werde.

Beobachtungen an geschlossenen Clark'schen Normalelementen

von

Theodor Wulf S. J.

Assistent am physikal. Institute der Universität Innsbruck.

(Mit 6 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Innsbruck.

Untersuchungen an geschlossenen Elementen haben sich naturgemäss zu beziehen auf die Polarisation und den inneren Widerstand. Von den überaus zahlreichen Arbeiten über die Polarisation seien hier nur diejenigen von F. Richarz[1] und von F. Streintz[2] erwähnt, die nach langjährigen vergeblichen Bemühungen zu dem Resultat führten, dass eine genaue und sichere Bestimmung der Polarisation überhaupt ein Ding der Unmöglichkeit sei. Was dann den inneren Widerstand angeht, so bemerkte v. Waltenhofen[3] schon 1868, dass derselbe bei manchen Elementen mit wachsender Stromstärke abnehme. Uppenborn[4] machte 1891 genauere Messungen und fand besonders für Meidinger- und Leclanché-Elemente ganz bedeutende Abnahmen des inneren Widerstandes. Seine Angaben wurden neuerdings bestätigt und unter anderem auch auf Accumulatoren ausgedehnt von W. Greeff.[5] In England kamen

---

[1] Wiedem. Ann., 1880, Bd. 39, S. 67 ff. u. 201 ff.

[2] Diese Sitzungsberichte, 1895, II. a, Bd. 104.

[3] Poggendorff, Ann., 1868, Bd. 134.

[4] Elektrot. Zeitschrift, 1891, Heft 12, S. 157.

[5] W. Greeff, Über den inneren Widerstand von galv. Elem. und Zersetzungszellen. Inaug.-Diss., Marburg 1895.

H. S. Carhart[1] und P. Schoop[2] zu demselben Resultat. Am Clark'schen Normalelement wurden Untersuchungen der Polarisation nur wenige, des inneren Widerstandes, soweit mir bekannt, nur von v. Ettingshausen[3] und S. Skinner[4] vorgenommen. Dabei bediente sich Skinner noch so aussergewöhnlich grosser Elemente (Oberfläche der Zn-Elektrode 14·4, 29 und 95 cm^2), dass man nicht weiss, inwieweit seine Beobachtungen für die üblichen kleineren Formate zutreffen.

Auf Anregung von Herrn Prof. I. Klemenčič nahm ich deshalb einige weitere Beobachtungen an Clark'schen Elementen vor, indem ich denselben so starke Ströme entzog, wie sie in der Praxis natürlich nie vorkommen, und das Verhalten der Elemente während und nach der Stromlieferung untersuchte. Die Resultate seien gleich hier zusammengestellt.

1. Der innere Widerstand der gebrauchten Elemente (cylindrische Glasgefässe von 2 *cm* Durchmesser, Abstand der Elektroden 3—4 *cm*) lag bei gewöhnlicher Zimmertemperatur je nach der Entfernung und Grösse der Elektroden (wirksame Oberfläche des Zn-Stabes 2—3 cm^2) zwischen 40 und 80 Ohm.

2. Derselbe änderte sich mit der Temperatur sehr stark, so dass er, während diese von circa 30° auf 5° C. fiel, sich nahezu verdreifachte.

3. Eine Verminderung des inneren Widerstandes mit der Stärke und Dauer des Stromes konnte nicht mit Sicherheit constatirt werden.

4. Polarisation war bei stärkeren Strömen von 0·005 Ampère schon nach 0·01 Sekunden wahrzunehmen. Sie stieg während der ersten 10 Minuten nur wenig, dann aber immer schneller.

5. Nach der Unterbrechung des Stromes schwand die Polarisation in einigen Minuten bis auf einen geringen Bruchtheil wieder. Auch wiederholter Kurzschluss durch nur 50 Ω

[1] Electrician, 35. Bd., 1895, S. 19 ff.

[2] Electrician, 1895. S. 187 ff.

[3] Zeitschrift für Elektrotechnik, Clark's Normalelement und seine Verwendung zur Galvanometer-Aichung. Wien 1884, 16. Heft.

[4] S. Skinner, Philos. Mag., Bd. 38, S. 271, ff.

äusseren Widerstand während einer Minute und länger verminderte die E. M. K. des offenen Elementes nicht dauernd.

6. Als ein Element 2 Stunden lang durch 200 Ω geschlossen wurde, wodurch seine E. M. K. fast auf die Hälfte der ursprünglichen herabgedrückt wurde, erlangte es dennoch seine frühere Stärke in 2 Minuten bis auf 0·1% wieder. Von jetzt an aber trat bei Stromschluss die Polarisation viel schneller und stärker auf.

Die Beobachtungsmethode.

Die gewöhnlichen Methoden, den inneren Widerstand eines Elementes zu bestimmen, beruhen bekanntlich darauf, dass man in den Hauptkreis einen Strommesser einschaltet und zugleich an die Klemmen irgend einen Spannungsmesser, Potentialgalvanometer oder dergl. anlegt. Beim Clark'schen Element tritt jedoch so rasch Polarisation ein, dass alle derartigen Vorrichtungen viel zu langsam arbeiten. Die Methode von Kohlrausch mit Wechselstrom und Telephon in der Wheatstone'schen Brücke kann zwar angewendet werden, wenn man zwei Elemente durch Gegeneinanderschalten stromlos macht, will man aber den Widerstand während der Stromlieferung untersuchen, so versagt sie ebenfalls, weil das Aufsuchen eines Tonminimums viel zu viel Zeit erfordert. Hier kann nur eine solche Methode in Betracht kommen, welche die ganze Beobachtungszeit bis auf geringe Bruchtheile von Secunden abzukürzen gestattet, das ist die Condensatormethode.

Legt man an die Klemmen eines Elementes vom Potential E einen Condensator von grosser Capacität C und entladet dann den Condensator durch ein ballistisches Galvanometer, so erhält man einen Ausschlag α, welcher E proportional ist

$$E = A\alpha, \qquad (1)$$

wo bekanntlich

$$A = \frac{R}{C}\,\frac{T}{\pi}\,e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} = \text{const.}$$

Ist dann w_i der innere Widerstand des Elementes und wird dasselbe durch den äusseren Widerstand w_a geschlossen und wieder der Condensator angelegt, so ist der Ausschlag β des Galvanometers jetzt in der Klemmspannung Δ proportional

$$\Delta = E\frac{w_i}{w_i + w_a} = A\beta. \tag{2}$$

Aus 1) und 2) folgt

$$w_i = w_a\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right). \tag{3}$$

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass keine Polarisation vorhanden war. Denn in Folge der Polarisation wird die Klemmspannung sinken und der Ausschlag β kleiner werden. Alsdann wird die Formel 3) nicht mehr den wahren inneren Widerstand, sondern nur einen äquivalenten liefern, der nämlich, wenn er vorhanden wäre, die Klemmspannung um den gleichen Betrag sinken lassen würde, als es jetzt der wahre Widerstand im Verein mit der Polarisation thut. Diesen Einfluss der Polarisation kann man angenähert berechnen, wenn man annimmt, dass w_i auch nach längerem Stromschluss noch den früheren Werth habe. Bezeichnet man dann die Polarisation mit P, so ist nun die Klemmspannung

$$\Delta_p = E\left(1 - \frac{P}{E}\right)\frac{w_i}{w_i + w_a} = A\gamma. \tag{4}$$

Aus 2) und 4) folgt

$$P = E\frac{\beta - \gamma}{\beta}. \tag{5}$$

In Wirklichkeit wird zwar immer etwas Polarisation vorhanden sein; man wird jedoch dem wahren Werth von β möglichst nahe kommen, wenn man entweder die Stromstärke sehr klein, also w_a sehr gross nimmt, oder aber, da das mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Messung nicht angeht, wenn man die Dauer der Stromlieferung so weit verkürzt, dass inzwischen die Polarisation einen merklichen Betrag noch nicht erlangen kann. Demnach hängt die Brauchbarkeit der angewandten Methode hauptsächlich von der Erfüllung folgender Bedingungen ab.

1. Die Ausschläge müssen unter denselben Umständen gleich und genau messbar sein. Das letztere ist leicht erfüllt, wenn die Schwingungsdauer des Galvanometers hinreichend gross ist. Sie war in diesem Falle gegen 16 Secunden. Um die

Zuverlässigkeit der Messung zu bestimmen, wurde der Condensator fünfmal je 2 Secunden lang mit einem Accumulator geladen; es erfolgten die Ausschläge:

	Ausschlag	Fehler
	369·6	Fehler: —0·1
	369·75	+0·05
	369·70	0·0
	369·75	+0·05
	369·65	—0·05
Mittel:	369·70	

Die Differenz der äussersten Werthe erreichte nie den Betrag von 0·1%, was eine hinreichende Genauigkeit ist.

2. Da im Verlaufe der Untersuchungen die Dauer des Stromschlusses zu variiren ist, so darf der Ausschlag nicht von der Zeit, sondern eben nur von der Potentialdifferenz der Elektroden abhängen, mit anderen Worten, der Condensator muss frei sein von Rückstandsbildung. Die zwei gebrauchten Condensatoren waren Glimmercondensatoren von Edelmann in München. Sie hatten zusammen 2·2 Mikrofarad Capacität. Der eine war der nämliche, den ich schon bei einer früheren Untersuchung als fast rückstandsfrei gefunden hatte,[1] der andere war ihm vollkommen gleich. Beide standen schon seit Monaten mit Schalen von H_2SO_4 conc. unter luftdicht schliessenden Glasglocken, gleichwohl zeigte sich, wenn die Ladungsdauer von 0·4 Secunden auf 10 Secunden anwuchs, eine Zunahme der Ladungsmenge von 0·7%. Um diesen Fehler möglichst zu vermeiden, wurde zu jedem Werth β bei geschlossenem Strom das zugehörige α ermittelt, indem der Condensator die gleiche Zeit mit dem offenen Element verbunden wurde.

3. Endlich bedarf man noch eines Apparates, um sehr kleine Zeiten sicher herstellen und messen zu können. Auch diese Bedingung war bei den vorliegenden Versuchen sehr vollkommen erfüllt, indem Herr Prof. Klemenčič wieder die Güte hatte, mir seinen Hiecke'schen Fallapparat zur Verfügung zu

[1] Über Rückstandsbildung und Oscillationen bei verschiedenen Condensatoren. Diese Sitzungsber., 1896, S. 667 ff.

stellen. Bei diesem Apparat, der jedoch für den gegenwärtigen Zweck eine gleich zu besprechende kleine Änderung erfuhr, werden sämmtliche Schaltungen durch ein fallendes Gewicht mit grosser Genauigkeit besorgt.

Die Anordnung der Versuche ist in Fig. 1 angedeutet. *E* ist das Element, *C* der Condensator, *G* das Galvanometer, *w* der äussere Widerstand, a_1, a_2, a_3, a_4 sind die Contacthebelchen des Fallapparates. Zuerst sind a_1 und a_4 offen, so

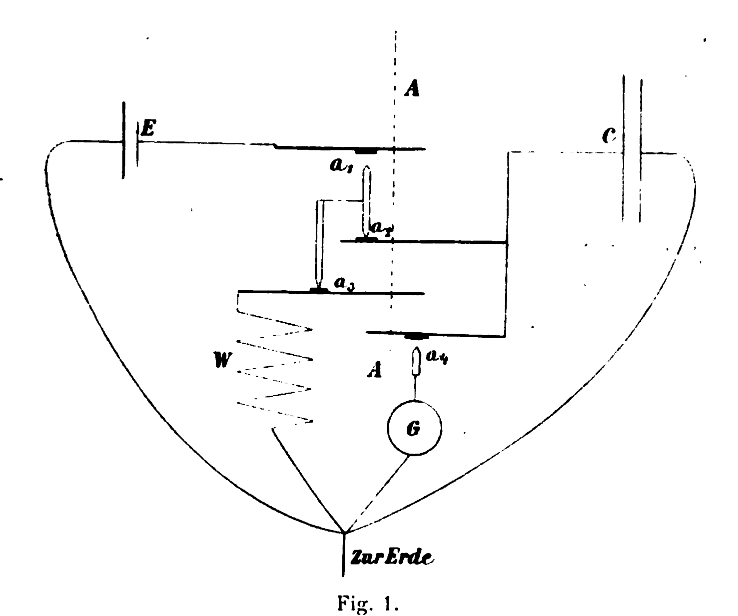


Fig. 1.

dass Element, Condensator und Galvanometer von einander getrennt sind, a_2 und a_3 sind geschlossen. Jetzt gleitet das Gewicht an dem Messingdraht *AA* herab und schliesst zuerst a_1. Der Strom fliesst durch a_1, a_3 und *w*, zugleich ladet sich der Condensator durch a_2 zu dem dort herrschenden Potential.

Nach einer kurzen Zeit trifft das Fallgewicht auf a_2 und trennt dadurch den Condensator vom Element, um ihn gleich darauf durch Niederdrücken von a_4 durch das Galvanometer zu entladen. Contact a_3 hat hier nur eine nebensächliche Bedeutung. Er soll nämlich, um jede unnöthige Beanspruchung des Elementes zu vermeiden, gleich, nachdem der Condensator

abgetrennt ist, auch den Hauptstrom in w öffnen. Die Entfernung a_1—a_2 kann man beliebig verkleinern und so die Zeit, die man vom Schliessen des Stromes bis zur Messung der Klemmspannung will verstreichen lassen, auf sehr kleine Bruchtheile von Secunden abkürzen. Will man die E. M. K. des offenen Elementes bestimmen, so bleibt a_3 von Anfang an offen.

Der Schliesscontact a_1 wurde für diese Untersuchung eigens angefertigt. Er bekam dieselbe Einrichtung wie a_4. Eine elastische Stahllamelle L (Fig. 2) wird durch den Winkelhebel H so weit gehoben, dass das Platinplättchen P etwa 1 *mm* von der darunterstehenden Spitze entfernt ist. Wird der Hebel von dem fallenden Gewicht getroffen, so senkt sich die Feder und macht bei P Contact. Ob diese Vorrichtung sicher functionirt, das kann nur der Versuch lehren. Da eine kleine Unregelmässigkeit im Schliessen von a_1 sich um so mehr bemerkbar machen musste, je kleiner das ganze Zeitintervall $a_1 a_2$ war, so wurde der Apparat auf eine sehr kurze Zeit, nämlich 0·016 Secunden eingestellt, dann wurden fünf Entladungen des Condensators vorgenommen. Der Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Ausschlag betrug 0·12%. Die Zeiten $a_1 a_2$ wurden sowohl aus der Fallhöhe berechnet, als auch experimentell bestimmt durch Laden eines Condensators von bekannter Capacität C durch einen bekannten grossen Widerstand.

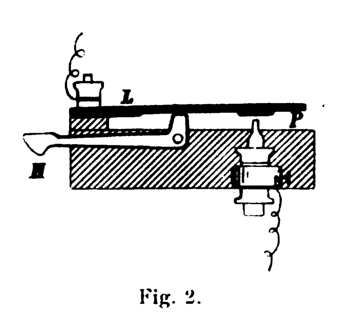


Fig. 2.

Für Schliessungszeiten von mehr als 0·3 Secunden konnte der Fallapparat nicht gebraucht werden und wurde ein eigener Handumschalter angefertigt, der mit zwei Griffen die ganze Schaltung bewerkstelligte. Die Einrichtung ist aus Fig. 3 wohl deutlich zu ersehen. n_1 bis n_5 sind Quecksilbernäpfe; sie bestehen aus kleinen Glascylindern, die in Siegellack eingelassen sind. In der Stellung Fig. 3 ist das Element durch $n_1 n_2 w$ geschlossen und zugleich durch $n_2 n_3 n_4$ der Condensator angelegt; im bestimmten Augenblick wird umgelegt und dadurch der Condensator von der Batterie getrennt und durch n_5 mit

dem Galvanometer verbunden; zugleich wird der Strom bei n_2 geöffnet.

Die Elemente.

Für diese Versuche standen folgende Clark'sche Elemente zur Verfügung:

1. Zwei Elemente von Fuess in Steglitz von dem gewöhnlichen Format nach Feussner. Sie waren von der Physikalisch-

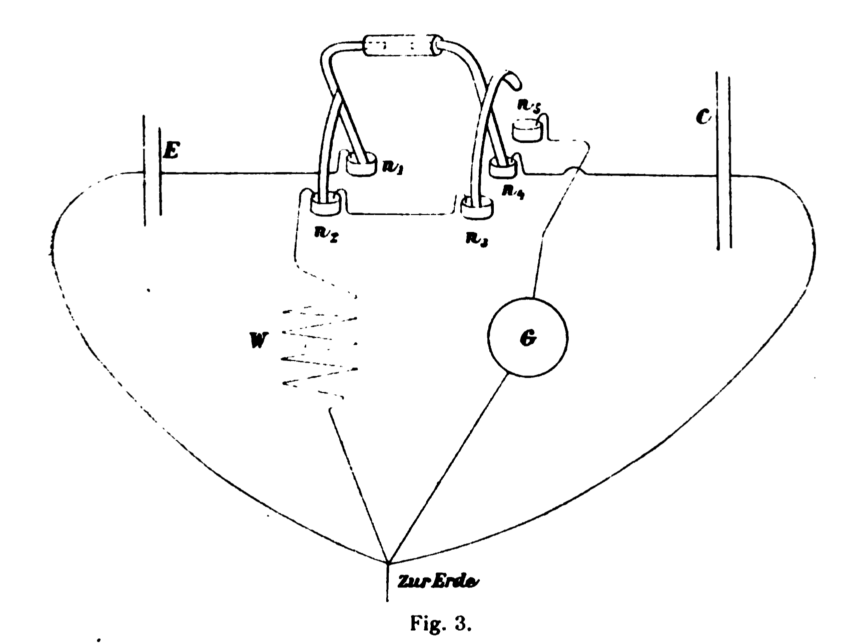


Fig. 3.

technischen Reichsanstalt zu Berlin geaicht. Diese Elemente wurden nur gebraucht in Gegenschaltung zur Messung der E. M. K. der übrigen.

Alle anderen Elemente sind unter Anleitung von Herrn Prof. Klemenčič im hiesigen physikalischen Institut verfertigt. Ein Platindraht, in den Boden der Glasröhrchen von 2 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe eingeschmolzen und mit Quecksilber bedeckt, bildet die eine Elektrode. Darüber liegt die übliche Paste mit dem Zinkvitriol. Ein amalgamirter Zn-Stab, von einem Kork gehalten, ragt als negativer Pol in die Flüssigkeit. Der Rest ist mit Paraffin ausgegossen. Nur auf Elemente

von dieser Form erstrecken sich die vorliegenden Versuche, und zunächst nur auf solche können die folgenden Resultate Anwendung finden. Die Elemente sind folgende:

2. Eine Batterie von 12 Elementen, verfertigt im Februar 1896, auf einen in Paraffin ausgekochten Holzblock montirt.

3. Zwei Einzelelemente: *A* verfertigt am 26. Februar 1896 und *B* vom 27. Februar 1896.

4. Vier frische Elemente *C*, *D*, *E*, *F* vom 5. Juni 1897.

An diesen letzten sechs Elementen *A* bis *F* wurden die eigentlichen Untersuchungen vorgenommen, und zwar so, dass in keinerlei Weise Rücksicht darauf genommen wurde, ob die Elemente später noch brauchbar waren oder nicht.

Vor allem wurden zu Anfang der Beobachtungen sämmtliche Elemente mit einem bestimmten (in Zukunft mit $N=$ Normalelement bezeichnet) der Zwölferbatterie durch Gegeneinanderschalten verglichen, nachdem dieses selbst mit der Fuess'schen Zelle gemessen war. Wird die E. M. K. der letzteren zu Eins angenommen, so ergab sich Folgendes:

Fuess	*N*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	1·00007	0·99986	1·00014	1·00056	1·00052	1·00058	1·00067

Der innere Widerstand.

Um gleich eine beiläufige Vorstellung von der Grösse des inneren Widerstandes dieser Elemente zu geben, seien hier einige Werthe angegeben für verschiedene Elemente. Der äussere Widerstand betrug stets 800 Ω, die Schliessungsdauer 0·4 Secunden. Die Beobachtungen stammen von verschiedenen Tagen, weshalb die Temperaturen sehr ungleich sind.

Tabelle I.

Element	Temperatur	Innerer Widerstand
A	17·5° C.	48·8 Ω
B	18·0	52·0
C	20·4	66·9
E	17·7	75·3
F	19·3	79·8

Es ist nun eine bekannte Thatsache, dass der Widerstand der Elektrolyte in hohem Grade von der Temperatur abhängt. Zwar ist der Temperaturcoëfficient einer gesättigten $ZnSO_4$-Lösung hinreichend bekannt (4% bei 18° C. nach Kohlrausch), allein hier kommt ja nicht diese allein in Betracht. Es wurde also zuerst darüber eine Reihe von Beobachtungen gemacht. Die Elemente wurden zu diesem Zweck mit einem Wattemantel umgeben, dann in einen weiten Glasballon von circa 30 *cm* Durchmesser gesetzt. Der ganze noch übrige Hohlraum war ebenfalls mit Watte ausgefüllt. Das Ganze konnte dann durch ein Wasserbad auf beliebige Temperatur gebracht werden. Ein Thermometer (nach Zehntelgrade eingetheilt) befand sich unmittelbar neben dem Element, ein zweites im Inneren der Watte, ein drittes im Wasserbad. Der Temperaturanstieg erfolgte sehr langsam, so dass die Flüssigkeit unmöglich eine merklich andere Temperatur haben konnte als ihre Umgebung. Wenn alle drei Thermometer längere Zeit dieselbe constante Temperatur gezeigt hatten, begann die Beobachtung. Dabei dauerte die Stromlieferung immer nur 0·016 Secunden. Jedesmal wurde bei drei verschiedenen Stromstärken, nämlich circa 0·001 *A*, 0·0016 *A* und 0·005 *A* beobachtet, entsprechend den Widerständen im äusseren Stromkreis von 1360 Ω, 800 Ω, 200 Ω. Stärkere Ströme hätte man nur dadurch erzielen können, dass man nahezu Kurzschluss gemacht hätte; dann würden aber erstens die Resultate in Folge der Polarisation stark fehlerhaft ausfallen, und zweitens bekämen die späteren Beobachtungen an demselben Element einen sehr fraglichen Werth.

Tabelle II.

Innerer Widerstand des Elements *C*.

Temperatur	Widerstand im äusseren Stromkreise		
	1360 Ω	800 Ω	200 Ω
5·2° C.	134·05	138·1	141·8
13·8	88·60	89·3	89·33
20·4	65·23	66·9	67·7
28·5	51·45	52·1	52·86

Für den äusseren Widerstand 1360 Ω sind die Werthe in Fig. 4 graphisch dargestellt.

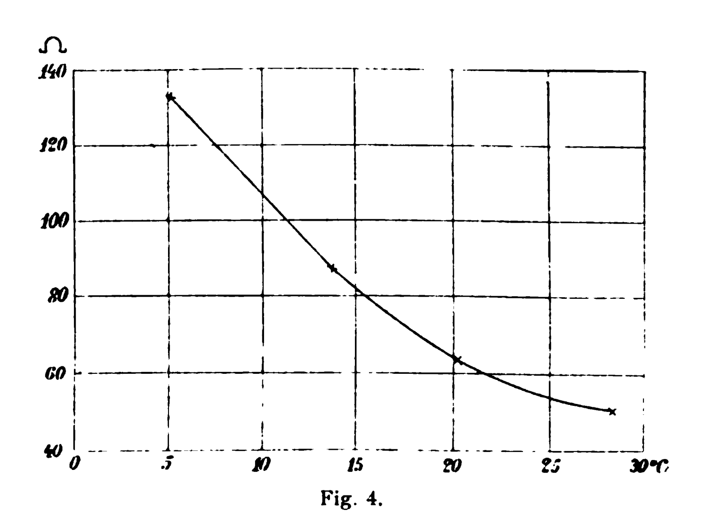


Fig. 4.

Bei Gelegenheit dieser Versuche wurde auch eine Bestimmung des Temperaturcoëfficienten vorgenommen. Dieselbe ergab eine Spannungserniedrigung von 0·073 % für 1° zwischen 5° und 20° *C.*

Es wurde nun versucht, eine Abhängigkeit des inneren Widerstandes von der Stärke und Dauer des Stromes zu constatiren. Einige Zahlen seien hier beispielsweise wiedergegeben.

Tabelle III.

Element *E.* $\theta = 17 \cdot 65°$ C.

Stromabgabe bis zu 0·005 Ampère durch 0·015 bis 0·12 Secunden. Beobachtung mit dem Fallapparat.

Äusserer Widerstand	0·015 Sec.	0·02 Sec.	0·12 Sec.
1360 Ω	73·4	74·6	76·9
800	75·3	76·4	78·9
200	78·2	78·5	81·9

Tabelle IV.

Element A. $\theta = 19{\cdot}2°$ C.

Äusserer Widerstand 200 Ω; Stromstärke 0·0055 A. Einfluss länger andauernder Stromlieferung[1]. Beobachtung mit dem Handumschalter.

Zeit	0·4	2	5	10	30	30	Secunden
Innerer Widerstand	55·0	57·7	58·1	59·0	64	75·9	Ohm

Die letzte Beobachtung zeigte bei der Wiederholung noch den Einfluss der vorhergehenden.

In Fig. 5 ist aus den ersten fünf Werthen dieser Tabelle die mittlere ausgezogene Curve construirt.

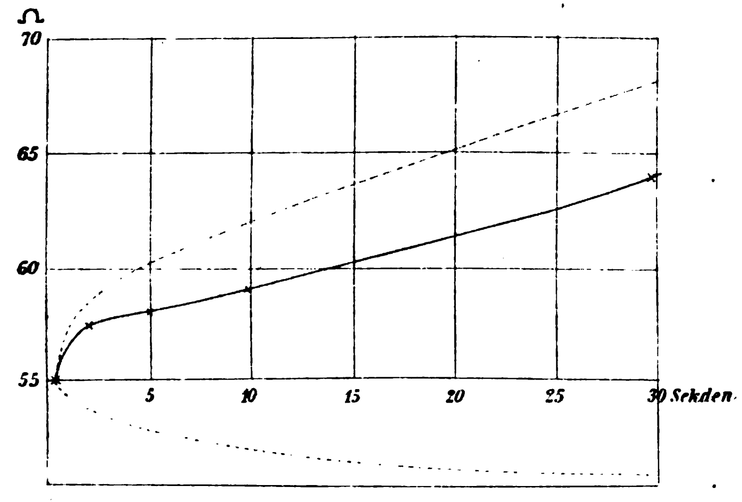


Fig. 5.

Eine Abnahme des inneren Widerstandes ist also nirgends bemerkt worden. Es wäre jedoch verfehlt, wollte man daraus schon schliessen, dass auch keine vorhanden ist. Denn die

[1] Das Element war schon vor diesen Versuchen sehr stark beansprucht; bei frischen Elementen erfolgt die Zunahme der Polarisation nicht so schnell, cf. Tabellen VI und VII.

Polarisation ist beim Clark'schen Element so stark, dass sie ganz gut die Klemmspannung um einen grösseren Betrag erniedrigen kann, als eine etwaige Abnahme des inneren Widerstandes dieselbe erhöhen würde. Man könnte sogar versucht sein, aus der Gestalt der Curve (Fig. 5) auf ein Zusammenwirken dieser zwei Umstände zu schliessen. Denn nimmt man einmal an, der innere Widerstand nähme auch hier in einer ähnlichen Weise ab, wie es von Uppenborn und Greeff l. c. thatsächlich für andere Elemente gefunden wurde und construirt demgemäss die untere gestrichelte Curve in Fig. 5, so ergibt sich eine Zunahme der Polarisation nach der oberen gestrichelten Curve, die man erhält, wenn man die Ordinaten der unteren zu denen der ursprünglichen Curve addirt. Umgekehrt würde aus einem Zusammenwirken von Polarisation und Widerstand für die Klemmspannung die thatsächlich beobachtete Curve resultiren. deren etwas sonderbare Gestalt dadurch eine sehr befriedigende Erklärung fände.

Es wurde auch ein Versuch gemacht, ob sich etwa mit dem Wechselstrom in der Wheatstone'schen Brücke eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Stromstärke constatiren liesse. Als Wechselstromquelle diente ein kleines Inductorium. Um zuerst den Widerstand im stromlosen Zustande zu bestimmen, mussten zwei Elemente gegeneinander geschaltet werden. Durch eine einfache Umlegevorrichtung konnten die Elemente dann parallel geschaltet zur Stromlieferung veranlasst und ebenso schnell wieder in den Wechselstrom eingeschaltet werden. Es schien mir diese Methode aus dem Grunde nicht aussichtslos, weil nach den Beobachtungen, die Greeff (l. c. S. 27) gerade auch an Zinksulfatlösungen gemacht hatte, die Verminderung des Widerstandes beim Öffnen des Stromes nicht sofort verschwindet, und in dem l. c. mitgetheilten Beispiel sogar nach 20 Minuten erst um ein Zehntel des ganzen Betrages abgenommen hatte. Allein bei der geringen Empfindlichkeit der Methode liess sich eine Abnahme des Widerstandes nicht mit Sicherheit feststellen. Es ergaben sich zwar durchschnittlich schwache Veränderungen in dem erwarteten Sinn, die jedoch möglicherweise auch von Beobachtungsfehlern herrühren können. Ich muss somit diese Frage unentschieden lassen.

Die Polarisation.

Unter diesem Titel seien hier jene Erscheinungen zusammengefasst, bei denen die Polarisation offenbar die Hauptrolle spielt. Die Polarisation wird jedenfalls mit der Stromstärke und der Stromdauer zunehmen, und solange daher bei zunehmender Stromlieferung sich noch derselbe innere Widerstand ergibt, wird man sagen, dass die Polarisation einen merklichen Betrag noch nicht erlangt hat. Für die Praxis reicht das aus. Die Theorie dagegen muss hier immer noch einwerfen, dass der Schluss noch nicht vollständig ist. Es könnte ja der Einfluss der Polarisation durch eine Verminderung des Widerstandes gerade aufgehoben werden. Lassen wir diesen Einwurf unberücksichtigt, so wird es darauf ankommen, zunächst durch möglichste Verkürzung der Zeit sozusagen der Polarisation zuvorzukommen und den reinen inneren Widerstand für eine bestimmte Stromstärke zu erhalten. Die weitere Verminderung der Klemmspannung kann dann als Polarisation bezeichnet werden, wenn man annimmt, dass der Widerstand sich mit der Zeit nicht ändert. Für das allmälige Anwachsen der Polarisation mit der Stromstärke und der Zeit enthalten schon Tab. 3 und 4 einige Angaben. Einige weitere, besonders für grössere Zeiten und sehr starke Ströme werden im Folgenden noch angeführt werden. Dabei scheint es mir geeigneter, um eine ungefähre Vorstellung von der Leistungsfähigkeit dieser Elemente zu geben, wenn ich von einem besonders stark in Anspruch genommenen wenigstens die Hauptsachen vollständig mittheile. Es seien dazu die Beobachtungen am Element F gewählt. Zuerst wurde die E. M. K. durch Gegenschalten mit Element N gemessen, worauf dann eine Reihe von Bestimmungen des inneren Widerstandes bei allmälig ansteigender Stromdauer folgte. Diese Widerstandsmessungen sind hier nicht einzeln mitgetheilt. Jedoch sind die Elektricitätsmengen, die dem Element entnommen wurden, angeführt, wie auch die Stromstärken. Der Stromstärke 0·0016 A entsprach der äussere Widerstand 800 Ω, 0·0053 A ein solcher von 200 Ω. Die Zeiten, während welcher bei dem ganzen Beobachtungssatz das Element geschlossen war, sind addirt und als Stromdauer in der Columne IV

enthalten. Die zwei letzten Zeilen enthalten dann die elektromotorische Kraft des Elementes, wie sie circa eine Minute vor und nach dem ganzen Beobachtungssatz bestimmt wurde. Dabei ist immer die E. M. K. des Elementes $N = 1$ gesetzt.

Das Element F wurde am 4. Juni frisch zusammengesetzt.

Tabelle V.

Beobachtungszeit	Temperatur	Ampère	Secunden	Coulomb	Elektromotorische Kraft	
					vorher	nachher
8. Juni 11^h a. m. . . .	19° C.	0	0	0	0·99907	—
» 4^h 45^m p. m.	20·2	0·0016	50	0·080	0·99989	0·99973
» 5^h 30^m p. m.	20·2	0·0053	40	0·210	0·99973	0·99947
9. Juni 10^h a. m. . . .	19·3	0·0016	40	0·064	0·99998	0·99967
» 11^h a. m.	20·0	0·0053	100	0·530	0·99987	0·99958
10. Juni 9^h a. m. . . .	18·5	0·0016	50	0·080	—	—
			Summa . . .	0·964		

Nachdem das Element bei diesen Versuchen sich immer sehr schnell wieder erholt hatte, wurden jetzt grössere Anforderungen gestellt, indem es viel längere Zeit zur Stromlieferung herangezogen wurde. Während der letzten 10 Secunden wurde immer der Condensator angelegt, um die Klemmenspannung am Schluss zu messen. Rechnet man aus der Klemmspannung den inneren Widerstand so, als ob keine Polarisation vorhanden wäre, so ergeben sich die Werthe der Colonne 2. Bei den früheren Beobachtungen aber hatte sich als kleinster innerer Widerstand 82·0 Ω ergeben. Nimmt man diesen als den wahren Widerstand und als constant an, so kann man dann die E. M. K. der Polarisation berechnen. Diese Werthe sind in der letzten Colonne mitgetheilt, und zwar in Bruchtheilen der E. M. K. des offenen Clark-Elementes.

Temperatur 19°. Äusserer Widerstand 200 Ω, Stromstärke am Anfang 0·0051 Ampère nimmt erst langsam, dann schneller ab bis 0·0022 Ampère.

Tabelle VI.

Stromdauer in Minuten	Äquivalenter innerer Widerstand	Polarisation
1	83·6	0·0037
2	87·34	0·0125
5	87·34	0·0125
10	90·70	0·0189
30	142·4	0·1249
60	459·7	0·4225

Rechnet man daraus die gesammte in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge, so findet man unter Annahme von Mittelwerthen für die Polarisation 24·3 Coulomb.

Sofort wurde nun die E. M. K. des Elementes bestimmt und gefunden:

2 Minuten nach Öffnen des Stromes......0·9991
7 » » » » » ......0·9994
$2^1/_2$ Stunden nach Öffnen des Stromes....0·99983
28 » » » » » ....1·00001

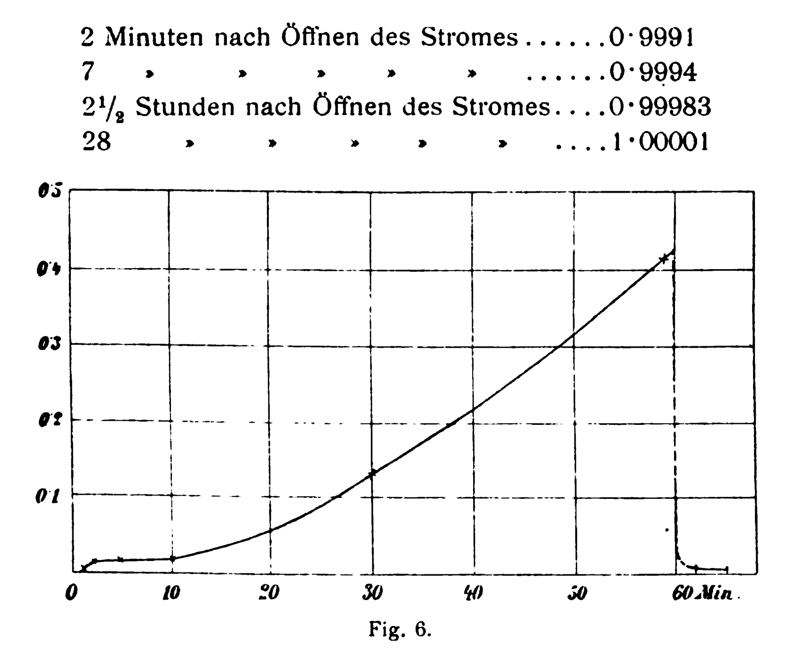


Fig. 6.

In Fig. 6 ist der Verlauf der Polarisation nach dieser Beobachtung graphisch dargestellt.

Scheinbar hat das Element also durch alle diese, für eine Clark'sche Zelle ganz unerhörten Misshandlungen nicht gelitten. Allein die folgenden Beobachtungen belehrten mich eines besseren. Der Widerstand bei kurz dauernder Stromabgabe war zwar nicht wesentlich grösser, allein jetzt nahm die Polarisation viel schneller zu und erreichte zum Beispiel schon nach weniger als 10 Secunden jenen hohen Werth, den sie früher erst nach einer Stunde erlangt hatte. Hier folgen die Resultate in der Reihenfolge, in welcher sie erhalten wurden.

Tabelle VII.

11. Juni, 5^h 30^m p. m. Temperatur 18·5°.

Stromdauer, Secunden	Äusserer Widerstand	Stromstärke, Ampère	Elektricitäts-Menge, Coulomb	Äquivalenter innerer Widerstand
0·8	800	0·00161	0·0012	88
2	800	0·00159	0·0032	97·6
sehr kurz (0·1)?	230	0·00448	0 0005	92·1
0·8	230	0·00337	0·0026	196·1
2·0	230	0·00235	0·0062	380·8
5·0	230	0·00217	0·0131	432·7
10·0	230	0·00214	0·0238	440·3
		Summa. . .	0·0506	

Die späteren Beobachtungen zeigten alle ein Verhalten. welches dem in Tabelle VII mitgetheilten durchaus ähnlich ist.

Als theilweises Gegenstück hiezu seien noch die Beobachtungen am Element *B* erwähnt. Das Element wurde durch einen äusseren Widerstand von nur 50 Ω geschlossen. In 30 Secunden, während welcher das Element einen Strom von durchschnittlich 0·01 Ampère lieferte, stieg der scheinbare Widerstand von circa 50 auf 120 Ω, was einer Polarisation von 0·45 der E. M. K. des offenen Elementes entspricht. Im Laufe eines Monats wurden sechs solcher Beobachtungssätze gemacht. Bei jedem war das Element im Ganzen 100 Secunden lang geschlossen und lieferte eine Elektricitätsmenge von

1 Coulomb, also zusammen 6 Coulomb, trotzdem konnte bis jetzt kein schnelleres Eintreten der Polarisation bemerkt werden.

Das Verhalten des zu stark beanspruchten Elementes *F* scheint demnach einige Ähnlichkeit zu haben mit demjenigen der Accumulatoren, wenn sie entladen sind. Im offenen Zustand haben sie noch ihre normale Spannung, so wie sie aber geschlossen werden, sinkt dieselbe rasch ab.

Über galvanische Polarisation in alkoholischen Lösungen

von

Dr. Ed. Haschek.

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalisch-chemischen Institut der Wiener Universität.

Die bisherigen Untersuchungen über galvanische Polarisation beschränken sich fast alle auf wässerige Lösungen. Es schien deshalb interessant, dieselben auch auf andere Lösungsmittel auszudehnen. Ich wählte Alkohol, da derselbe für viele Salze ein Lösungsmittel und leicht in genügender Reinheit zu erhalten ist. Benützt wurde immer der im Handel vorkommende absolute Alkohol von 99·7%. Sein specifisches Gewicht bei 17° C. war 0·7945, seine Leitfähigkeit 39.10^{-11}.

Leider ist es nicht leicht, Substanzen zu finden, die sich in Alkohol in genügender Menge lösen. Auch ist es nöthig, Salze ohne Krystallwasser zu wählen, einerseits, um den Alkohol nicht unnöthig mit Wasser zu verunreinigen, anderseits, um nicht etwa beim Erhitzen des Salzes Zersetzungen befürchten zu müssen.

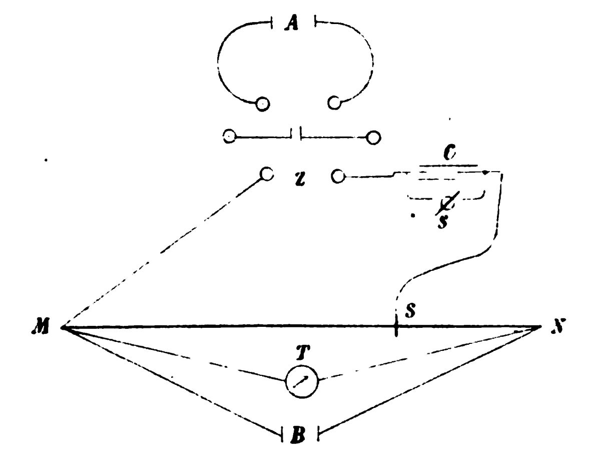
Wegen des hohen inneren Widerstandes der Zelle steigt die elektromotorische Kraft der Polarisation ungemein langsam an. Ich will, um dies zu zeigen, im Folgenden eine Messungsreihe wiedergeben.

Es wurde $CdCl_2$ in 1·10% alkoholischer Lösung zwischen Gaskohleplatten von 36×15 *mm* benetzter Fläche elektrolysirt und die Polarisation während des Stromdurchganges gemessen.[1]

[1] Zur Beobachtungsmethode vergl. F. Exner, Elektrochem. Untersuch. IV, diese Sitzungsber. CIII (1894); F. Erben, ibid. CV (1896).

Als polarisirender Strom diente der Strom einer fünfzelligen Accumulatorenbatterie von etwa 7 Volt Spannung. Der innere Widerstand der Zelle betrug etwa 390 Ω, vorgeschaltet waren 150.000 Ω. Folgende Tabelle gibt die Beobachtungen wieder. Es bedeutet *t* die Zeit in Minuten, *p* die Polarisation in Volt.

t	*p*	*t*	*p*
2	0·56	21	1·16
4	0·66	25	1·17
6	0·78	30	1·23
8	0·88	35	1·24
10	0·94	47	1·27
13	1·01	92	1·29
16	1·07	201	1·37



Bei dieser Art der Messung lassen sich, eben wegen des hohen inneren Widerstandes der Zelle, Spitzen nicht verwenden. Ich habe daher folgende Versuchsanordnung gewählt.

Die Polarisationszelle *(Z)* ist so an eine Wippe angeschaltet, dass sie in der Ruhelage vom Strom *(A)* durchflossen wird. Wird die Wippe umgelegt, so ist die Zelle einerseits mit dem Ende *M* der Brücke *MN*, anderseits durch das Capillarelektrometer *(C)*, dessen Kurzschluss *(s)* nur bei der Beobachtung geöffnet wird, mit dem Schleifcontact *(S)* verbunden. Durch die Brücke floss der Gleichstrom der Strasse *(B)*, die Potential-

differenz an den Enden wurde an einem Torsionsgalvanometer *(T)* abgelesen. Die Beobachtung gestaltet sich sehr einfach. Der Schleifcontact wird auf der Brücke so lange verschoben, bis das Capillarelektrometer beim Umlegen der Wippe keinen Ausschlag gibt. Als polarisirender Strom wurde bei den alkoholischen Lösungen des hohen Widerstandes wegen immer der Gleichstrom der Strasse mit einer vorgeschalteten Glühlampe verwendet. Die Anwendung so hoher elektromotorischer Kräfte war bei den alkoholischen Lösungen geboten, da bei Anwendung einer fünfzelligen Accumulatorenbatterie, die auf etwa 7 Volt geladen war, die Polarisation erst in etwa 2 Stunden ihren vollen Werth erreichte. Bei den Messungen verwendete ich immer Gaskohlestifte, die frei in die Lösung tauchten.

Ich will nun zu den Resultaten übergehen und, um ein Bild für die erreichbare Genauigkeit zu geben, die Einzelmessungen anführen.

1. Alkohol.

Der hier verwendete Alkohol war derselbe, der zur Herstellung der Lösungen diente. Eine Gasentwicklung konnte ich bei der Elektrolyse nicht bemerken. In der folgenden Tabelle sind, wie in allen späteren, die Einzelwerthe der Polarisation in Volt angeführt.

2·253	2·208
2·223	2·221
2·206	2·219
2·208	2·221
2·212	2·219

Daher beträgt die Polarisation im Mittel 2·219 Volt. Dieser hohe Werth erklärt zum Theil die hohen Polarisationen in den Salzlösungen, da offenbar auch der Alkohol mit angegriffen wird.

2. Jodammonium.

Die zur Bestimmung der Polarisation verwendete Lösung enthielt 0·23 *g* NH_4J auf 100 *g* C_2H_6O. In derselben Weise sind

auch im Folgenden immer die Angaben des Procentgehaltes verstanden. Bei der Elektrolyse wurde Jod und Ammoniak ausgeschieden. Die zur Mittelbildung verwendeten Werthe sind folgende:

2·706	2·673
2·715	2·706
2·671	2·706
2·713	2·743
2·704	2·720

Der mittlere Werth der Polarisation ergibt sich daraus zu 2·706 Volt.

3. Ammoniumnitrat.

Die verwendete Lösung enthielt 1·12% an Salz. Die Gasentwicklung ist eine lebhafte, und zwar scheidet sich Ammoniak aus. Die Beobachtungen sind in folgender Tabelle enthalten:

2·426	2·408
2·412	2·414
2·410	2·416
2·414	2·416
2·419	2·421

Im Mittel ergibt sich also für die Polarisation der Werth von 2·416 Volt.

4. Zinkjodid.

Die benützte Lösung enthielt 0·52% ZnJ_2. Es schied sich Jod aus, so dass die Lösung gelb bis braun wurde. Folgende Zahlen wurden zur Bestimmung des Mittelwerthes verwendet:

2·134	2·033	2·114
2·118	2·037	2·116
2·024	2·104	2·124
2·062	2·108	2·106
2·064	2·164	2·110
2·035	2·158	2·116

Daraus ergibt sich für das Maximum der Polarisation der Werth 2·097 Volt.

5. Zinkchlorid.

Die zu den Messungen benützte Lösung enthielt 5·35% $ZnCl_2$. Beim Durchgang des Stromes schied sich an der einen Elektrode Gas, an der anderen eine schwarze, pulverige Substanz ab, die lebhaft Gasblasen aufsteigen liess. Diese letztere Gasentwicklung dauerte auch nach dem Öffnen des Stromes noch einige Zeit an. Die beobachteten Werthe für die Polarisation sind in der folgenden Tabelle enthalten:

2·178	2·204	2·234
2·230	2·206	2·190
2·222	2·206	2·196
2·204	2·110	2·228
2·207	2·118	2·222

Daraus folgt für das Maximum der Polarisation im Mittel der Werth 2·197 Volt.

6. Quecksilberchlorid.

Die verwendete Lösung enthielt 0·55% $HgCl_2$. Beim Durchgange des Stromes trat an beiden Elektroden lebhafte Gasentwicklung ein. Es zerfiel das Salz also nicht in Hg und Cl_2. Dafür spricht auch der hohe Werth der Polarisation, denn wenn auch, wie bereits beobachtet wurde,[1] in der Lösung sich HgCl entwickelt hätte, so könnte nicht an beiden Elektroden Gasentwicklung auftreten. Übrigens ist Calomel in Alkohol unlöslich, es hätte also ein Niederschlag bemerkt werden müssen.

Der Werth der Polarisation war sehr schwankend, wie sich aus folgenden Zahlen ergibt:

2·677	3·000	3·074	3·143
3·099	2·904	3·105	3·143
3·120	2·948	3·084	3·124
3·154	2·962	3·177	3·128
3·240	3·078	3·183	3·221

Im Mittel betrug also die Polarisation 3·078 Volt.

[1] Vergl. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, Bd. II, S. 525.

7. Cadmiumchlorid.

Zur Bestimmung der Polarisation wurde eine 0·26%-Lösung von $CdCl_2$ verwendet. Das Krystallwasser war durch Erhitzen des Salzes ausgetrieben worden. Da die Einzelwerthe sehr gut übereinstimmen, will ich nur 10 Zahlen wiedergeben.

2·981	2·977
2·983	2·977
2·978	2·977
2·979	2·979
2·977	2·979

Als Mittel ergibt sich aus allen beobachteten Zahlen der Werth 2·975 Volt.

8. Natriumchlorat.

Die verwendete Lösung war 0·16%. Sofort nach Stromschluss tritt heftige Gasentwicklung ein. Ich will auch hier nur einen Theil der Beobachtungen wiedergeben.

2·893	2·884
2·880	2·880
2·884	2·893
2·878	2·880
2·886	2·884

Aus allen beobachteten Werthen folgt als Mittel der Polarisation 2·887 Volt.

9. Uranylnitrat.

Die Lösung enthielt 0·18% $(UO)_2(NO_3)_2$.

Ein Versuch, hier die Polarisation zwischen Platinelektroden zu bestimmen, misslang, da sich die Pt-Spitzen in kürzester Zeit mit einem nichtleitenden Überzug bedeckten. Die unten mitgetheilten Zahlen sind alle mit frei eintauchenden Gaskohlestiften bestimmt, bei denen die Leitung während der ganzen Dauer des Versuches ungestört erhalten blieb.

2·816	2·824
2·836	2·818
2·800	2·840
2·834	2·904
2·828	2·848

Daraus ergibt sich als Mittelwerth für die Polarisation 2·835 Volt.

Um nun ein Urtheil darüber zu gewinnen, wie weit die hier für alkoholische Lösungen mitgetheilten Werthe von den Werthen der Polarisation in wässerigen Lösungen abweichen, habe ich die letzteren in nahe gleichprocentigen Lösungen beobachtet. Ich will hier nur die Mittelwerthe anführen und des besseren Vergleiches halber mit den in alkoholischer Lösung erhaltenen Zahlen zusammenstellen.

Substanz	in C_2H_6O		in H_2O	
	p in Volt	%	p in Volt	%
C_2H_6O	2·219	99·7	—	—
NH_4J	2·706	0·23	2·606	0·80
NH_4NO_3......	2·416	1·13	2·351	1·20
ZnJ_2	2·097	0·52	2·194	1·30
$ZnCl_2$........	2·197	5·35	2·401	5·19
$HgCl_2$	3 078	0·55	2·104	0·55
$CdCl_2$	2·975	0·26	2·133	1·00
$NaClO_3$......	2·887	0·16	2·511	0·15
$(UO)_2(NO_3)_2$ ..	2·835	0·18	2·696	0·17

Aus dieser Vergleichung ergibt sich, dass in fast allen Fällen, nur $ZnCl_2$ und ZnJ_2 ausgenommen, die Polarisation in alkoholischer Lösung höher ist, als in der wässerigen. Bei der Elektrolyse der Zinksalze bildet sich höchst wahrscheinlich Zinkäthyl. Der hohe Werth der Polarisation in wässeriger ZnJ_2-Lösung erklärt sich wohl aus dem geringen Procentgehalt, da das Wasser auch angegriffen werden dürfte; in der That geben concentrirtere Lösungen viel geringere Werthe. Übrigens sei bemerkt, dass auch die Stromdichte einen hohen

Einfluss hat, da ich bei Anwendung des Strassenstromes bei $HgCl_2$ in wässeriger Lösung mit Vorschaltung zweier Glühlampen für die Polarisation 2·669 Volt fand, gerade das Doppelte des aus der Wärmetönung berechneten Werthes 1·327 Volt. Der in der Tabelle angeführte Werth ist mit Anwendung einer fünfzelligen Accumulatorenbatterie gefunden.

Es scheint also erwiesen, dass in allen beobachteten Fällen die Zersetzungsproducte der Salze auf den Alkohol einwirken, dass also vorläufig allerdings nicht übersehbare secundäre Processe bei der Elektrolyse stattfinden. Dass unter solchen Umständen ein Versuch, die Polarisation in alkoholischen Lösungen aus der Wärmetönung zu berechnen, aussichtslos ist, ergibt sich von selbst. Sind ja doch nicht einmal die Lösungswärme der Salze in Alkohol bestimmt.

Um den Vergleich zwischen alkoholischen und wässerigen Lösungen noch weiter zu verfolgen, wurde auch der Verlauf der Polarisation mit der Temperatur bestimmt. Die Versuche erheben freilich keinen Anspruch auf besondere Vollständigkeit. Ich habe dabei gefunden, dass ebenso wie in wässerigen Lösungen die Polarisation mit der Temperatur abnimmt. Man erkennt aus den folgenden Zahlen den Abfall der Polarisation mit steigender Temperatur. Untersucht wurden Alkohol und Zinkjodid. Die beobachteten Zahlen sind in den folgenden Tabellen enthalten. Darin bedeutet t die Temperatur, p die Polarisation in Volt.

1. Alkohol.

t	p
19°	2·222
35°	2·142
48°	2·097
68°	1·949
78°	1·745

Bei Alkohol ist der Abfall der Polarisation zwischen 19° und 70° nahezu linear, über 70° wird die Curve nur wenig concav gegen die Temperaturaxe.

2. Zinkjodid.

Verwendet wurde die alkoholische Lösung von 0·52%; die beobachteten Werthe sind folgende:

t	p	t	p
24°	2·066	75·5°	1·855
40°	2·013	76°	1·785
58°	1·956	77°	1·681
73°	1·950	78°	1·608
74·5°	1·956		

Man sieht aus den Zahlen deutlich einen raschen Abfall der Polarisation von etwa 75° ab. Während der Unterschied der Polarisation zwischen 24° und 74° nur 0·1 Volt beträgt, ist er zwischen 74° und 78° über 0·3 Volt.

Schliesslich ist es noch interessant, zu untersuchen, ob und wie sich das Maximum der Polarisation mit der Concentration ändert. Ich habe zu dem Zwecke verschieden concentrirte Lösungen von $HgCl_2$ in Alkohol hergestellt und untersucht (Uranylnitrat, das bis 300% Lösungen gibt, schien mir nicht geeignet, da es Krystallwasser enthält und sehr hygroskopisch ist). Ich habe folgende Resultate erhalten:

Eine 0·55%-Lösung ergibt als Maximum der Polarisation 3·078 Volt (vergl. oben). Erhöht man die Concentration auf 1·19%, so sinkt das Maximum der Polarisation auf 3·002 Volt. Eine weitere Erhöhung auf 4·15% drückt das Maximum noch weiter auf 2·116 Volt. Das Maximum der Polarisation nimmt also rascher ab, als die Concentration zunimmt.

Auf eine Fehlerquelle, die die Einzelzahlen in einzelnen Fällen gefälscht haben mag, möchte ich noch hinweisen.

Da ich bei fast allen Substanzen wegen der verhältnissmässig geringen Löslichkeit gezwungen war, mit niederen Concentrationen zu arbeiten, ist es möglich, dass der beobachtete Werth nicht allein herrührt von der Zersetzung des betreffenden Salzes, sondern dass auch der Alkohol primär zersetzt wurde, was natürlich die Werthe wesentlich modificiren würde. Ähnliches gilt auch für die wässerigen Lösungen, die ich, wie oben bemerkt, im Procentgehalt möglichst gleich den alkoholischen machte.

Es ergibt sich also aus der Untersuchung:

1. Das Ansteigen der Polarisation ist in alkoholischen Lösungen wegen der geringen Leitfähigkeit ein ungemein langsames.

2. Das Maximum der Polarisation liegt in alkoholischen Lösungen meist höher als in den entsprechenden wässerigen.

3. Die Polarisation sinkt in alkoholischen Lösungen ebenso wie in den wässerigen mit der Temperatur ab. Bei Salzlösungen ist der Abfall in der Nähe des Siedepunktes ein besonders rascher.

4. Mit steigender Concentration sinkt die Polarisation, und zwar rascher, als die Concentration zunimmt.

Bestimmung der specifischen Wärme einiger schwer schmelzbarer Metalle

von

Heinrich Mache.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Bekanntlich ist es in neuerer Zeit Herrn Henry Moissan in Paris gelungen, einige der am schwersten schmelzbaren Metalle in den hohen Temperaturen des von ihm construirten Ofens aus ihren Verbindungen zu reduciren. Solche im Moissan'schen Ofen in ergiebiger und praktischer Weise darstellbare Metalle sind das Vanadium, Wolfram, Uran, Chrom und Palladium. Berücksichtigt man, dass es ehedem theils unmöglich, theils sehr schwierig war, diese Metalle anders als in der Form von feinen oder gröberen Pulvern darzustellen und dass ferner der hinreichend genauen Bestimmung der Wärmecapicität von Pulvern eine Reihe von Fehlerquellen experimenteller Natur hindernd im Wege stehen, so scheint es wünschenswerth, diese Bestimmung mittelst der jetzt erhältlichen geschmolzenen Substanzen durchzuführen.

Zur Ermittelung dieser specifischen Wärmen diente das Bunsen'sche Eiskalorimeter. Dasselbe wurde in der allgemein üblichen Anordnung benützt. Das vorbereitete Kalorimeter wurde in ein dünnwandiges Glasgefäss von 28 *cm* Höhe und 15 *cm* Durchmesser gebracht, das Gefäss mit destillirtem und ausgekochtem Wasser gefüllt und sodann mit einem Zinkblechdeckel so verkittet, dass das Kalorimeter darin bis zum Halse versenkt war. Dieses Glasgefäss wurde mittelst eines Messingträgers in einem Blechcylinder von 40 *cm* Höhe und 30 *cm* Durchmesser befestigt und hierin von allen Seiten sorgfältig

mit einem Gemisch von reinem Eis und Wasser verpackt. Die Temperatur des Raumes, in welchem die Messungen geschahen, betrug durchschnittlich 6 und nie über 10° C., so dass es hinreichte, das Eis einmal täglich zu ersetzen. Die Temperatur im inneren Glasgefäss erwies sich bei dieser Anordnung als vollkommen constant.

Das Messen der Volumänderungen geschah mit Hilfe eines calibrirten Scalenrohres. In dem das Scalenrohr tragenden Schenkel war ein kleiner Hahntrichter so eingefügt, dass nach jedem Versuche der Index durch Nachfüllen auf den Ausgangspunkt zurückgestellt werden konnte.

Es erschien zweckmässig, die Messung mittelst eines Scalenrohres vorzunehmen, da nie ein vollkommener Stillstand des Index zu erreichen war. Gleichwohl durfte diese freiwillige Verschiebung höchstens 4 *mm* in der Stunde betragen, damit die hieraus berechnete Correctur klein genug wurde, um im Vergleich zum ganzen Rückgang des Index die möglichen Beobachtungsfehler nicht wesentlich zu überschreiten. Es ist dies auch der Grund, dass von der Anbringung einer Correctur des Ganges nach den Principien der Methode der kleinsten Quadrate, wie sie Boltzmann[1] vorschlägt, Abstand genommen werden konnte.

Die Dauer eines einzelnen Versuches betrug gegen 4 Stunden; es wurde nämlich zunächst durch $1^1/_2$ Stunden der Gang des Instrumentes beobachtet. Zeigte sich derselbe als genügend klein und hinreichend constant, so brachte ich den erwärmten Körper in das Kalorimeter, bestimmte nach Verlauf von etwa $^3/_4$ Stunden den Ausschlag und notirte schliesslich abermals durch $1^1/_2$ Stunden den Gang. Versuche, während welcher der Gang sein Vorzeichen wechselte, wurden ausgeschaltet.

War durch mehrere Versuche oder durch sonstige Umstände es nöthig geworden, einen neuen Eismantel zu bilden, so wurde zunächst der alte durch Hindurchblasen von warmer Luft vollständig zerstört, ehe an die Bildung eines neuen geschritten wurde.

---

[1] Ann. Chem. 232, S. 125—128, 1886.

Zum Erhitzen der Körper bediente ich mich eines dickwandigen, mit Asbestwolle umkleideten Probirgläschens, das durch einen Watte- oder Asbeststöpsel verschlossen wurde. Der Körper fiel aus diesem Gläschen direct in das Kalorimeter. Die ganze Überführung nahm nur 2—3 Secunden in Anspruch.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate, zu welchen ich auf diese Weise gelangte, zusammengestellt. Als Constante zur Berechnung der Volumverminderung diente hiebei die Zahl $\frac{1}{881}$.

	Gewicht der verwendeten Substanz in Gramm		Temperatur	Specifische Wärme	Mittelwerth der specifischen Wärme	Atomwärme
Pd	3·2505	I	99·9	0·0552	0·0549	5·83
		II	99·8	0·0548		
		III	99·8	0·0547		
		IV	99·8	0·0550		
Cr	11·6543	I	99·8	0·1221	0·1208	6·34
		II	99·3	0·1195		
		III	99·5	0·1209		
V	4·217	I	99·3	0·1164	0·1153	5·9
		II	99	0·1143		
		III	99·2	0·1159		
		IV	98·4	0·1147		
Wo	9·3648	I	99	0·0332	0·0336	6·17
		II	98·7	0·0339		
		III	98·9	0·0337		

Die Temperaturangaben beziehen sich auf Centigrade des Luftthermometers. Das verwendete Wolfram und Vanadium stammt von Moissan selbst; das Chrom wurde von Dr. Schuchardt in Görlitz im Moissan'schen Ofen geschmolzen. Das Palladium wurde von Heraeus in Hanau bezogen.

In neuerer Zeit haben A. W. Grodspeed und E. F. Smith die specifische Wärme von Wolframpulver nach der Joly'schen Methode bestimmt;[1] sie erhielten hiefür den Werth 0·0338. Von älteren Bestimmungen der specifischen Wärmen obiger Elemente wären zu erwähnen eine von De La-Rive und Marcet für das Wolfram durchgeführte, welche den Werth 0·035 lieferte, ferner eine Bestimmung von Violle für das Palladium zu 0·0592 und eine von Kopp für das Chrom zu 0·09975. Was diese letztere Bestimmung anbelangt, so wird dieselbe von Börnstein als unsicher bezeichnet, während sich dem von De La-Rive und Marcet im Jahre 1841 für Wolframpulver gegebenen Werth die neuere Bestimmung von Grodspeed und Smith entgegenhalten lässt.

Endlich versuchte ich noch die specifische Wärme des Uran zu bestimmen. Leider zeigte sich hiebei, wie auch bei einer späteren chemischen Analyse, dass das mir zur Verfügung stehende von Moissan geschmolzene Uran bei weitem nicht die Reinheit besass, um es zu einer derartigen Bestimmung geeignet scheinen zu lassen. In der That sind die hiefür in zwei Versuchen gefundenen Werthe 0·0571 und 0·0569, nähern sich also dem von Regnault für Uranoxydul gefundenen Werth. Auch ein von Schuchardt in Görlitz im Moissan'schen Ofen geschmolzenes Stück Uran lieferte analoge Werthe, nämlich 0·0582 und 0·0586. In nach höherem Masse verunreinigt ist das im Handel erhältliche Uranpulver. Seine specifische Wärme fand ich zu 0·0719.

Es ist wohl jetzt Herrn Moissan gelungen, das Uran in einem hohen Grade von Reinheit darzustellen.[2] Es wäre nicht ohne Interesse, mit Hilfe desselben den Blümke-Zimmermannschen Werth für die specifische Wärme des Uran zu verificiren.

---

[1] Zeitschrift für anorgan. Chemie, 8, 207—212, 1895.

[2] H. Moissan, Le four électrique. Paris 1897, p. 240.

Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur

(I. Mittheilung)

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger** und Dr. **Stefan Meyer.**

(Mit 7 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

Nach einigen Messungen mehr qualitativer Natur Plücker's[1] hat zuerst G. Wiedemann[2] sich mit der quantitativen Bestimmung der magnetischen Eigenschaften einer grossen Reihe von Substanzen beschäftigt. Er bediente sich hiebei der als Torsionsmethode bekannten Versuchsanordnung. Dieselbe Methode haben nach ihm eine grössere Zahl von Forschern, wie Schuhmeister,[3] Henrichsen,[4] Plessner,[5] zum Theil in verfeinerter Form angewandt.[6]

Ausser diesem Verfahren kommt hauptsächlich noch ein zweites in Betracht, das von Quincke[7] herrührt und gewöhnlich als Manometermethode bezeichnet wird. Nach dieser Methode liegen ausser von Quincke noch Beobachtungen von Wähner,[8] H. E. J. G. du Bois[9] und Anderen vor.

1 Pogg. Ann. 74, S. 321.

2 Pogg. Ann. 126, S. 8 und 135, S. 177.

3 Diese Sitzungsber. (2), 83, S. 45.

4 Wied. Ann. 22, S. 121; 34, S. 180; 45, S. 38.

5 Wied. Ann. 39, S. 336.

6 Ein ähnliches Verfahren hat auch Curie, C. r. 115, p. 805 und 116, p. 136 benützt.

7 Wied. Ann. 24, S. 347.

8 Diese Sitzungsber. (2), 96, S. 94.

9 Wied. Ann. 35, S. 137.

Die Übereinstimmung der für die Susceptibilität gefundenen Zahlen ist aber eine äusserst geringe und fordert zu einer Neubearbeitung des Gebietes heraus.

Bei der Torsionsmethode ergeben sich, wie G. Wiedemann selbst hervorhebt, Fehlerquellen in Folge der nur schwer zu vermeidenden Luftströmungen. Für schwach magnetische Substanzen ist es auch ungünstig, dass man ihren Magnetismus neben dem dann stark ins Gewicht fallenden des Einschlussgefässes additiv erhält. Ferner ist zu beachten, dass bei absoluten Messungen die Stärke des Feldes, welches bei Anwendung bloss eines Poles ziemlich inhomogen ausfällt, nur schwer genau bestimmt werden kann.

Quincke's Manometermethode schliesst nicht aus, dass bei grösseren Steighöhen der für die Messung massgebende Flüssigkeitsmeniscus an Stellen verschiedener Feldstärke gelangt, so dass daraus bei Annahme eines Mittelwerthes derselben Fehler resultiren würden. Auch waren die meisten Forscher genöthigt, um ein starkes magnetisches Feld zu erhalten, mit den Polen nahe aneinander zu rücken, weshalb ihnen nur ein geringer Raum zur Einführung der Flüssigkeit zur Verfügung stand. Dies bedingt die Verwendung verhältnissmässig enger Capillarröhren, welche die leichte Beweglichkeit und die genaue Temperaturermittlung der Flüssigkeit sehr beeinträchtigen. Je enger ferner ein Capillarrohr ist, desto genauer muss es calibrirt sein, wenn der Steighöhenunterschied von der Capillaritätsconstanten der Flüssigkeit nicht beeinflusst werden soll.

Alle diese Fehlerquellen haben wir in dem im Folgenden beschriebenen Apparate vermieden.

Der Apparat.

Es stand uns ein ringförmiger Elektromagnet von derartigen Dimensionen zur Verfügung, dass wir ein homogenes cylindrisches Feld mit der vertical liegenden Grundfläche vom Durchmesser = 60 *mm* und der Seite = 18 *mm* und magnetische Intensitäten bis über 17.000 C. G. S. erhielten.[1]

---

[1] Siehe auch J. C. Beattie, diese Sitzungsber. 104, S. 653 (1895).

Mit diesem waren die übrigen Theile des Apparates, wie es Fig. 1 zeigt, vereinigt.

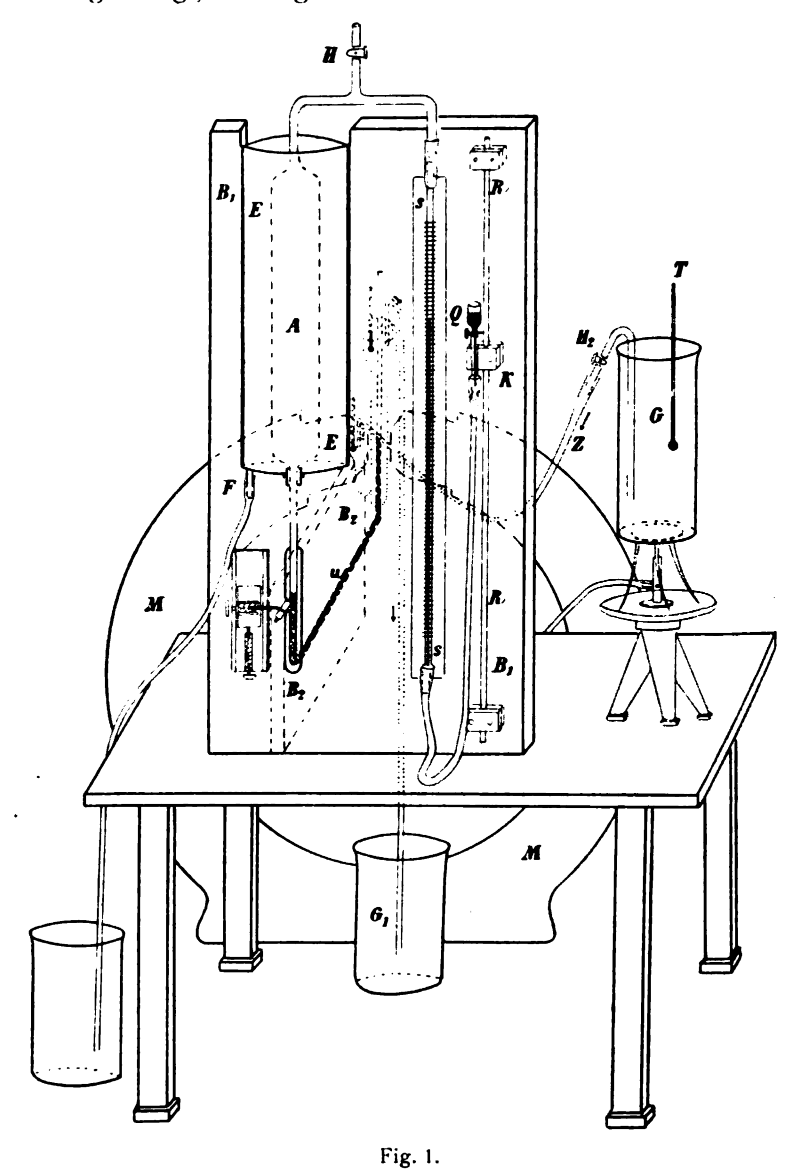


Fig. 1.

Das Wesentlichste daran ist das U-förmige Rohr *(U)*, vom äusseren Durchmesser $d = 8$ *mm* und der lichten Weite

$= 6 \cdot 5$ *mm*, das sich mittelst Kautschukverbindung in einen grösseren Glascylinder *(A)* fortsetzt. Dieser communicirt vermittelst des Hahnes *(H)* mit der Luft und steht mit einem über einer Spiegelscala *(s)* befindlichen Capillarrohr in Verbindung. Unten steckt diese Capillare in einem Kautschukschlauch, dessen Ende mit einem auf einem Brettchen befestigten Quecksilberbehälter *(Q)* verbunden ist, welcher sich auf dem Messingrohr *(R)* verschieben lässt. Der Apparat, auf den zwei zu einander senkrechten Brettern (B_1), (B_2) montirt, steht auf einem Tisch vor dem grossen Elektromagneten von circa 1 *m* Durchmesser und wird so nahe angeschoben, dass der aufsteigende offene Ast des Rohres genau in die Mitte des Feldes kommt.

Das *U*-Rohr selbst ist behufs leichterer Auseinandernahme zum Zwecke der Entleerung und Reinigung bei *a* (Fig. 2) unterbrochen. Ein kurzer Kautschukschlauch verbindet die beiden Rohrenden.

Vorstehende Anordnung findet ihre Begründung in folgender Überlegung:

Wir wollen mit V das Volumen von A einschliesslich der Verbindungsstücke, welches durch den Flüssigkeitsmeniscus im *U*-Rohre einerseits und den Quecksilbermeniscus in der Capillare anderseits begrenzt wird, und mit P den äusseren Luftdruck bezeichnen. Wird der Hahn *(H)* geschlossen und sodann der Magnet erregt, so tritt ein Druck, respective Zug p auf, und die Flüssigkeit wird in dem vorderen Schenkel von *U* steigen, beziehungsweise fallen. Verschieben wir nun den Quecksilberbehälter *(Q)* so lange, bis die Flüssigkeit wieder ihren früheren Stand hat, so haben wir das Volumen V um v verändert. Es gilt dann bei constanter Temperatur die Beziehung

$$PV = (P+p)(V+v)$$

und mit Vernachlässigung von pv gegen pV und vP

$$p = -\frac{v}{V} P. \tag{1}$$

Nachdem das Volumen V ein für allemale gegeben ist, den Luftdruck P das Barometer anzeigt und v nach Calibrirung der

Capillare an der Scala abgelesen werden kann, so ist p hieraus bestimmbar.

Zur Erzielung grosser Genauigkeit ist sonach V recht gross zu wählen und vor Allem dafür Sorge zu tragen, dass keinerlei Temperaturänderungen in diesem grossen Luftvolumen platzgreifen können. Zu dem Zwecke ist A von einem cylindrischen

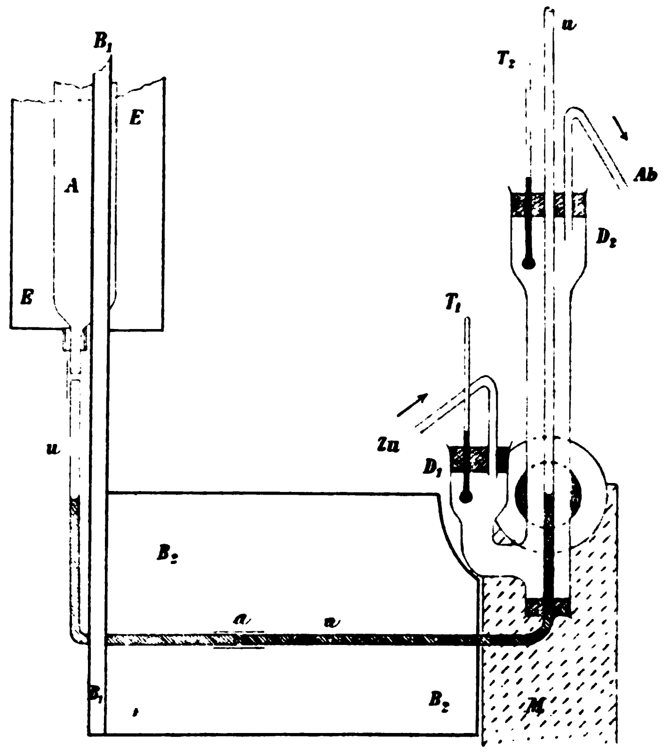


Fig. 2.

Blechgefäss *(E)* umgeben, das mit gestossenem Eis angefüllt wird und einen Abfluss *(F)* für das Schmelzwasser hat.

Um entsprechende Scalenausschläge zu erhalten, muss die Capillare s dem Drucke p angemessene Lumina haben und daher für magnetisch stark verschiedene Substanzen ausgewechselt werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist nach dem Gesagten die Einstellung des Flüssigkeitsmeniscus auf ein und denselben

Punkt. Dies wird erreicht durch ein Mikroskop mit Fadenkreuz, welches vor dem vorderen Schenkel des U-Rohres angebracht ist und mittelst Mikrometerschrauben sowohl horizontal, als vertical verschoben werden kann. Die Beleuchtung des Meniscus geschah durch eine seitwärts stehende Glühlampe, deren Licht ein kleiner Spiegel durch einen im Brette (B_1) befindlichen Schlitz von rückwärts auf das U-Rohr warf.

Um die Substanzen bei verschiedenen Temperaturen beobachten zu können, steckt, wie aus Fig. 2 ersichtlich, das U-Rohr in einem weiteren Rohre, das eben noch im Felde Platz hat. Dieses trägt einen Ansatz D_1, ist oben in analoger Form D_2 erweitert und mittelst Korken wasserdicht abgeschlossen.

Das im Gefässe G (Fig. 1) durch einen Bunsenbrenner angewärmte oder durch Eis abgekühlte Wasser wird durch einen mit Hahn (H_2) versehenen Heber in den Ansatz D_1 (Fig. 2) zugeleitet und läuft aus D_2 in ein am Boden stehendes Gefäss (G_1) ab. Die Temperatur wird an den beiden Thermometern T_1 und T_2 abgelesen und das Mittel aus den Ablesungen in Rechnung gesetzt.

Zur Erregung des Elektromagneten wurde der von der Centrale gelieferte Gleichstrom verwendet.

Gebrauch des Apparates.

Die zu untersuchende Flüssigkeit wurde mit Hilfe eines Scheidetrichters bei geöffnetem Hahne (H) in den offenen Schenkel des U-Rohres eingefüllt, bis der Meniscus in der Mitte des magnetischen Feldes sich befand.

Die Beobachtungen konnten erst begonnen werden, nachdem das gestossene Eis bereits durch längere Zeit im Behälter E war. Auf die Constanterhaltung der Temperatur muss besondere Sorgfalt verwendet werden, denn ist z. B. wie in unserem Falle das grosse Volumen $= 604\ cm^3$ und der Querschnitt der Capillare, wie bei den Messungen an Wasser, $1\ mm^2$, so entspricht schon einem Temperaturunterschied von 0·0045° eine Verschiebung des Quecksilbermeniscus um 1 *cm*.

Wie gegen Temperaturänderungen, ist der Apparat auch gegen plötzliche Luftdruckänderungen sehr empfindlich. Das

Öffnen und Schliessen von Thüren bewirkt daher bereits ein lebhaftes Schwanken des Flüssigkeitsmeniscus um seine Ruhelage, und bei windigem Wetter muss man überhaupt auf genaue Messungen verzichten.

Sobald die Flüssigkeit im U-Rohre die gewünschte Temperatur angenommen hat — man schliesst dies aus der nahen Übereinstimmung der Angaben beider Thermometer T_1, T_2 — wird bei offenem Hahne *(H)* das Fadenkreuz des Mikroskopes auf den Meniscus eingestellt und gleichzeitig der Behälter *(Q)* so lange verschoben, bis der Quecksilbermeniscus auf eine angenommene Anfangslage einspielt. Nun wird der Hahn *(H)* geschlossen, der Magnet erregt, durch Verschieben des Gefässes *(Q)* der Druck, respective Zug compensirt, was man an der scharfen Einstellung des Flüssigkeitsmeniscus auf das Fadenkreuz erkennt. Der neue Stand des Quecksilbermeniscus wird notirt, sodann der Strom geöffnet, abermals auf das Fadenkreuz eingestellt und der Stand des Quecksilbers wieder abgelesen. Bei völliger Constanz der Temperatur der eingeschlossenen Luft und Flüssigkeit müsste das Quecksilber in die ursprüngliche Stellung zurückkehren. Dies tritt aber nicht immer genau ein, weshalb man den Mittelwerth beider Stellungen als Quecksilberstand bei nicht erregtem Magnetismus annimmt, was eine völlig ausreichende Correctur ergibt.

Vor und nach dieser Operation musste die Spannung des magnetisirenden elektrischen Stromes an einem Voltmeter abgelesen werden, da Änderungen derselben im Laufe der Zeit auftraten.

Auch ist von Zeit zu Zeit der Barometerstand zu beobachten.

Unsere Gleichung (I) zur Berechnung des p basirt auf der Annahme, dass der Vorgang der Compression, beziehungsweise Dilatation der Luft im Gefässe A isotherm vor sich gehe. Dass dies wirklich bei unseren Messungen der Fall war, ergab sich aus drei übereinstimmenden Beobachtungen, die derart durchgeführt wurden, dass einmal zwischen den einzelnen Einstellungen je $^1/_2$ Minute, das zweitemal je 1 und das drittemal je $1^1/_2$ Minuten gewartet wurde.

Der angeführte Beobachtungsgang dürfte sich von einem Einzelnen nur schwer ausführen lassen. Wir theilten uns derart

in die Arbeit, dass der eine den magnetisirenden Strom schloss, mittelst Mikroskopes die Einstellung des Meniscus auf das Fadenkreuz beobachtete und die Temperaturablesung übernahm, während der andere den Hahn *(H)* schloss und öffnete, den magnetischen Druck, respective Zug durch Verschiebung des Quecksilberbehälters compensirte, die Wassercirculation am Hahne H_2 regulirte und den Stand des Voltmeters und des Barometers ablas.

Nachdem auf diese Weise der Werth des magnetischen Druckes p gewonnen ist, erhält man die Magnetisirungszahl $\varkappa$ aus der Gleichung

$$\varkappa = \frac{2gp}{M^2}, \qquad \text{(II)}$$

wobei g die Beschleunigung der Schwere und M die Feldstärke bedeutet.

Zur Bestimmung der letzteren haben wir eine für unseren Zweck besonders bequeme Methode ausgearbeitet.

Messung der Feldstärke.

Wir liessen ein kleines Rechteck *(R)* aus Kupferdraht in dem magnetischen Felde derart schwingen, dass die Kraftlinien

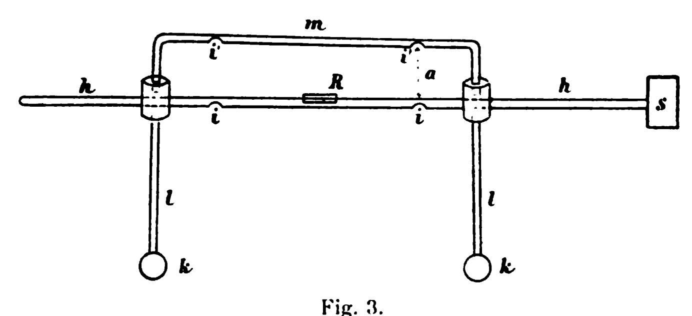


Fig. 3.

von den Längsseiten des Rechteckes senkrecht geschnitten wurden. Die dabei auftretende Dämpfung wurde beobachtet und daraus die Feldstärke bestimmt.

Der von uns verwendete Apparat (Fig. 3) bestand aus einer circa 90 *cm* langen Glasröhre *h*, die an einem Ende einen

Spiegel s trug, während in einem Abstand von etwa 24 *cm* von den Enden zwei grosse Korke aufgeschoben waren. Diese trugen einerseits die Glasröhren l mit den Messingkugeln k, anderseits das zweimal rechtwinkelig umgebogene Glasrohr m. Die lange Glasröhre h und das Rohr m besitzen je zwei Eindrücke i und i', welche eine leicht bewegliche Aufhängung auf Stahlspitzen ermöglichen. Auf der Mitte der Röhre h ist das Rechteck R horizontal aufgesiegelt. Dieses wurde aus einem Kupferdraht von etwa 0·8 *mm* Stärke hergestellt, dessen Enden zusammengelöthet wurden. Die Rechtecksseiten hatten die Längen 4·26 *cm* und 1·40 *cm*.

Die Schwingungsgleichung unseres Pendels ist

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varkappa\varphi - \beta\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \text{(III)}$$

wobei β der dämpfenden Kraft entspricht, welche bei nicht erregtem Magnetismus lediglich vom Luft- und Reibungswiderstand abhängt, während bei vorhandenem magnetischen Feld die Dämpfung in Folge der im Rechteck inducirten Ströme noch hinzutritt.

In der Ruhelage verlaufen die magnetischen Kraftlinien parallel zu den kurzen Seiten des Rechteckes, mithin auch parallel zur Rechtecksebene, das heisst durch die Fläche (F) desselben gehen keine Kraftlinien. Wird das Pendel um den Winkel φ aus seiner Ruhelage gebracht, so erhalten wir in Folge der Feldstärke M auf unser Rechteck ein magnetisches Potential

$$W = FM \sin\varphi.$$

Die Änderung von W erzeugt im Rechteck eine elektromotorische Kraft

$$e = \frac{dW}{dt} = FM \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Es wird demnach der Kupferdraht von einem Strom durchflossen, dessen Stärke i

$$i = \frac{e}{w} = \frac{FM}{w} \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

ist, wobei w den elektrischen Widerstand des Stromkreises bedeutet.

Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Moment m senkrecht zur Rechtecksfläche

$$m = iF = \frac{F^2 M}{w} \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Es sucht demnach das magnetische Feld das Rechteck mit einem Drehungsmoment

$$Mm \cos\varphi = \frac{F^2 M^2}{w} \cos^2\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

entgegengesetzt der Schwingungsrichtung zu drehen.

Für kleine Schwingungen kann $\cos\varphi = 1$ gesetzt werden; in Gleichung (III) wird demnach

$$\beta = \beta_1 + \frac{F^2 M^2}{w}.$$

Ist uns also das logarithmische Decrement unseres Pendels im magnetischen Feld und ausserhalb desselben nebst dem Trägheitsmoment K bekannt, so sind uns alle Stücke zur Berechnung des Quadrates der Feldstärke gegeben.

Die Versuche wurden in der Weise angestellt, dass von einer Bogenlampe durch einen verticalen Spalt, über welchen ein dünner Draht als Marke gespannt war, unter Anwendung einer Linse ein Bild auf dem Spiegel s entworfen und von diesem auf eine in etwa 4 *m* Entfernung befindliche Scala reflectirt wurde. Der Apparat, mit den Einkerbungen i auf die Stahlspitzen gebracht, wurde dann in Schwingungen versetzt und an einer Stop-Uhr die Zeit abgelesen, welche das Pendel brauchte, damit die von der Marke angezeigte Amplitude auf der Scala von 40 *cm* auf 20 *cm* abgenommen hatte.

Das Trägheitsmoment (K) der Vorrichtung (Fig. 3) wurde nach Abmessung der Distanz a aus den zwei Schwingungsdauern gefunden, die sich ergeben, wenn einmal die Vertiefungen i, das anderemal diejenigen des Rohres m (i') auf die Stahlspitzen aufgesetzt wurden.

Die Messung der Feldstärkenquadrate wurde für verschiedene Stromstärken des magnetisirenden Stromes vorgenommen und aus den Ergebnissen eine Curve aufgezeichnet.

Da wir die Substanzen unter Einwirkung verschieden starker Felder untersuchten, haben wir die Widerstände, die der Magnetisirungswicklung und den einzelnen Stellungen des vorgeschalteten Rheostaten entsprachen, ein für allemale gemessen und aus der variablen Spannung, die bei den Einzelversuchen abgelesen wurde, auf die Stärke des magnetisirenden Stromes geschlossen, welche dann mittelst der oben erwähnten Curve direct die Grösse M^2 angab.

Die Messungen.

Es schien uns wichtiger, für einige wenige Substanzen möglichst genaue absolute Zahlen der Susceptibilität angeben zu können, als das Beobachtungsmaterial auf Kosten der Zuverlässigkeit zu häufen. Wir geben deshalb in dieser Mittheilung lediglich die Resultate wieder, welche uns das Wasser und Eisenchloridlösungen ergaben und gedenken in einer weiteren Arbeit unsere Untersuchungen auf eine grössere Reihe von Flüssigkeiten auszudehnen.

Dabei ist zu bemerken, dass zur Reduction unserer Zahlen auf das Vacuum noch der Magnetismus der umgebenden Luft abzuziehen wäre.

A. Das Wasser.

Wir benützten für diese Messungen eine Capillare s (Fig. 1) vom Querschnitte 0·01 cm^2, welche bei der grössten Feldstärke eine Verschiebung des Quecksilbermeniscus um circa 6 *cm* erforderte.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit der unser Apparat functionirte, geben wir die Versuche am Wasser in ausführlicher Weise wieder.

Dasselbe wurde bei vier verschiedenen Feldstärken und vier Temperaturen zwischen 3° und 90° C. untersucht. Die benützten Feldstärkenquadrate betrugen, bei Anwendung von Stromstärken bis zu 24 Ampère, rund

$100 . 10^6$ C. G. S.
$150 . 10^6$ C. G. S.
$230 . 10^6$ C. G. S.
$300 . 10^6$ C. G. S.

und wurden der Reihenfolge nach als die Stellungen I bis IV bezeichnet. Der genaue Werth derselben findet sich fallweise in den folgenden Tabellen. Diese enthalten der Reihe nach die Temperatur, den Stand des Quecksilbermeniscus bei fehlendem und vorhandenem Magnetismus und den daraus berechneten Ausschlag s in Centimetern. Darunter befindet sich die Angabe des Luftdruckes P, des Mittelwerthes des Quadrates der Feldstärke M^2 und die daraus berechnete Magnetisirungszahl $\varkappa$.

Stellung IV.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
3°				
	40	34·0	40·5	6·25
3				
	40	33·8	39·8	6·1
2·5				
	40	33·8	39·8	6·1
2·3				
	40	33·7	39·7	6·15
2·3				
	40	33·9	39·5	5·85
2				
	40	39·6	39·8	6·3
2				
	40	34·0	40·0	6·0
2·2				
	40	34·3	40·5	5·95
2·3				
	40	34·5	40·8	5·9
2·3				
Mittel 2°39				6·06

$P = 73 \cdot 95\, cm$ Quecksilbersäule
$M^2 = 304 . 10^6$ (C. G. S.)
$\varkappa = -0 \cdot 652 . 10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung I.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
14°	40	38·0	40·0	2·0
14	40	38·3	40·0	1·7
14	40	38·1	39·9	1·85
14	40	38·0	40·0	2·0
14	40	38·2	40·0	1·8
14	40	38·1	40·0	1·9
14	40	38·0	39·9	1·95
14				
Mittel 14°				1·9

$P = 75·38\ cm$ Quecksilbersäule

$M^2 = 107.10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -0·597.10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung II.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
13°5	40	36·8	40·0	3·2
13·5	40	36·8	39·8	3·1
13·6	40	37·0	40·7	3·3
13·7	40	37·1	40·0	2·9
13·9	40	37·0	40·0	3·0
14·0	40	37·1	39·8	2·8
14·1	40	37·0	39·9	3·0
14·1	40	37·1	40·0	2·9
14·2	40	37·2	40·3	2·9
14·3	40	37·2	40·5	3·0
14·0				
Mittel 13°9				3·01

$P = 75·4\ cm$ Quecksilbersäule

$M^2 = 156.10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -0·643.10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung III.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
15°	40	35·3	39·9	4·65
15	40	35·5	40·0	4·5
15	40	35·6	40·0	4·4
15	40	35·5	39·9	4·45
15	40	35·6	39·9	4·35
15	40	35·5	40·1	4·55
15				
Mittel 15°				4·5

$P = 75 \cdot 38$ *cm* Quecksilbersäule
$M^2 = 231.10^6$ (C. G. S.)
$\varkappa = -0 \cdot 652.10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung IV.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
14°2	40	34·0	39·9	6·0
14·2	40	34·3	40·0	5·7
14·2	40	34·0	39·6	5·8
14·2	40	34·0	39·9	6·0
14·3	40	34·3	39·9	5·7
14·3	40	34·0	39·7	5·9
14·3	40	33·9	39·9	6·0
14·3	40	34·3	39·8	5·6
14·3	40	34·1	39·6	5·7
14·4	40	34·2	40·0	5·8
14·4				
Mittel 14°3				5·82

$P = 75 \cdot 4$ *cm* Quecksilbersäule
$M^2 = 304.10^6$ (C. G. S.)
$\varkappa = -0 \cdot 638.10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung IV.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
53°	40	34·3	39·2	5·3
52·9	40	34·3	39 5	5·5
52·5	40	34·5	39·7	5·3
52·1	40	34·6	39·9	5·4
52	40	34·7	40·1	5·3
52	40	34·0	39·3	5·7
53	40	34·5	39·7	5·4
53·5	40	34·6	40·2	5·5
53·6	40	34·8	40·0	5·2
53·2	40	34·6	39·8	5 3
53·2	40	34·7	40·2	5·4
52·6	40	34·3	39 4	5·4
52·5	40	34·7	39·9	5·3
53	40	34·5	39 7	5·4
53·4				
Mittel 52°8				5·38

$P = 73 \cdot 95$ *cm* Quecksilbersäule

$M^2 = 303.10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -580.10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung I.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
90°	40	38·4	40·2	1·7
89·8	40	38·4	40·1	1·7
89·7	40	38·2	40·0	1·8
89·5	40	38·6	40·0	1·4
89·5	40	38·3	40·0	1·7
89·4	40	38 4	40·0	1·6
89·5	40	38·2	40·0	1·8
89·3	40	38·1	40·0	1·9
89·3	40	38·3	40·0	1·7
89·4	40	38·3	40 0	1·7
89·3				
Mittel 89°5				1·7

$P = 75 \cdot 35$ *cm* Quecksilbersäule

$M^2 = 107 \cdot 5 . 10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -0 \cdot 539 . 10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung II.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
88°				
87·8	40	37·0	39·7	2·9
88·8	40	37·3	39·9	2·7
89	40	37·3	39·8	2·6
89	40	37·3	40·0	2·7
89·5	40	37·4	40·0	2·6
90·2	40	37·4	40·0	2·6
90·8	40	37·5	40·2	2·6
90·6	40	37·3	40·0	2·7
90·4	40	37·3	40·0	2·7
90·1	40	37·2	39·9	2·8
Mittel 89°·5				2·7

$P = 75 \cdot 35\ cm$ Quecksilbersäule

$M^2 = 155 . 10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -0 \cdot 577 . 10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung III.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
89°				
89·5	40	36·0	40·0	4·0
89·3	40	36·4	40·0	3·6
89·3	40	36·1	40·0	3·9
89	40	36·0	40·0	4·0
88·9	40	36·0	40·0	4·0
88·9	40	36·1	39·9	3·9
88·6	40	36·1	40·0	3·9
88·2	40	36·0	40·1	3·9
88	40	36·0	40·0	4·0
87·8	40	35·9	39·9	4·1
Mittel 88°·8				3·93

$P = 75 \cdot 35\ cm$ Quecksilbersäule

$M^2 = 230 . 10^6$ (C. G. S.)

$\varkappa = -0 \cdot 572 . 10^{-6}$ (C. G. S.)

Stellung IV.

Temperatur in Celsiusgraden	Anfangsstellung vor dem Versuche	Schlussstellung	Anfangsstellung nach dem Versuche	Scalentheile in Centimetern s
86				
	40	34·8	39·9	5·2
87				
	40	34·8	40·0	5·2
87·5				
	40	35·0	40·0	5·0
87·5				
	40	35·0	39·8	4·9
87·6				
	40	34·5	39·4	5·2
88				
	40	35·0	40·0	5·0
88				
	40	35·0	40·2	5·1
88·5				
	40	34·8	40·0	5·2
88				
	40	35·0	39·7	4·9
89				
	40	34·9	40·0	5·1
89				
Mittel 87°9				5·08

$$P = 75\cdot35\ cm \text{ Quecksilbersäule}$$
$$M^2 = 304\,.\,10^6 \text{ (C. G. S.)}$$
$$\varkappa = -0\cdot558\,.\,10^{-6} \text{ (C. G. S.)}$$

Die Resultate der vorhergehenden Tabellen finden sich in der folgenden Zusammenstellung der Susceptibilität $\varkappa$ mit den zugehörigen Temperaturen T und Feldstärken M.

Die mit * bezeichneten Daten beziehen sich auf eine Versuchsreihe, welche, nachdem inzwischen verschiedene andere Flüssigkeiten der Messung unterzogen worden waren, etwa einen Monat später als die anderen vorgenommen wurde. Diese zuletzt erzielten Resultate fügen sich so gut den früher erhaltenen ein, dass wir darin einen glänzenden Beweis für die Zuverlässigkeit unseres Apparates erblicken können.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$-\varkappa . 10^6$	Mittel
2?39	2?39	304	0·652*	0·652
14·3	14·0	107	0·597	0·632
	13·9	156	0·643	
	15·0	231	0·652	
	14·3	304	0·638	
52·8	52·8	303	0·580*	0·580
88·9	89·5	107·5	0·539	0·562
	89·5	155	0·577	
	88·8	230	0·572	
	87·9	304	0·558	

Vergleichen wir unsere Ergebnisse mit jenen anderer Forscher, so finden wir, dass dieselben, wie aus der folgenden Nebeneinanderstellung zu ersehen ist, eine Mittelstellung einnehmen.

Es fanden:

H. E. J. G. du Bois[1] ..... $-\varkappa . 10^6 =$ 0·861
Quincke[2] .... 0·837
Curie .... 0·79
Henrichsen[3] .... 0·75
Wähner .... 0·541
Schuhmeister .... 0·436

Schuhmeister und Quincke glaubten eine Änderung, und zwar eine Abnahme, von $\varkappa$ mit der Feldstärke annehmen zu sollen. Wir konnten eine solche nicht finden.

Hingegen ist es recht auffallend, dass es keinem der genannten Forscher[4] gelungen ist, die doch bei uns deutlich

[1] Aus den Angaben von du Bois berechnet für Luft als umgebendes Medium.

[2] Aus der Quincke'schen Constanten Q umgerechnet.

[3] Von Henrichsen aus seinen Werthen für Eisenchlorid bestimmt.

[4] Curie, C. r. 116, p. 137 hat sogar ein Temperaturintervall von 15° bis 189° beobachtet.

in die Augen springende Abhängigkeit von der Temperatur direct nachzuweisen.

Wir haben dieselbe in Fig. 4, allerdings in Folge der sehr gross aufgetragenen $\varkappa$ in etwas verzerrter Form, wiedergegeben. Berechnet man unter Annahme eines linearen Verlaufes aus

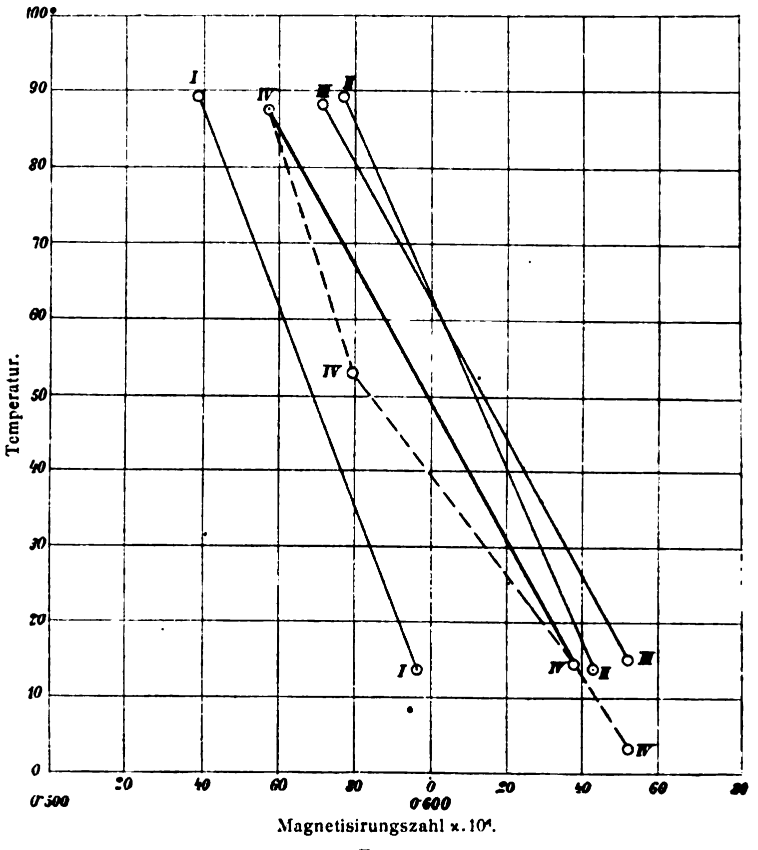


Fig. 4.

den sichersten Werthen (Stellung IV und III) die Temperaturcoëfficienten, so erhält man für die Formel

$$\varkappa = \varkappa_0(1+\varepsilon t)$$

$$\varepsilon_{IV} = -0{\cdot}00166$$

$$\varepsilon_{III} = -0{\cdot}00162$$

im Mittel $\varepsilon = -0\cdot00164$, welcher Werth in genügender Übereinstimmung mit dem von Henrichsen als Mittelwerth für eine Reihe organischer Substanzen angegebenen $\varepsilon_v = -0\cdot00134$ steht.

B. Eisenchloridlösungen.

Wegen der Wichtigkeit der physikalischen Constanten des Wassers haben wir in ausführlichen Tabellen unsere diesbezüglichen Messungen aufgezeichnet. Bei den nun folgenden Ergebnissen für Eisenchloridlösungen beschränken wir uns auf die Angabe der Hauptresultate, hätten wir doch andernfalls nicht weniger als circa 4000 Zahlen zu notiren.

Bei diesen Lösungen mussten drei verschiedene Capillaren *s* (Fig. 1) verwendet werden, deren Querschnitte 0·112, 0·0416 und 0·010 cm^2 betrugen.

Die folgenden Tabellen enthalten die gefundenen Magnetisirungszahlen $\varkappa$ der Lösung wiederum in Zusammenstellung mit den entsprechenden Temperaturen T und Feldstärken M, nebst der Angabe des Procentgehaltes an wasserfreiem Salz (Proc.), des specifischen Gewichtes (γ) und der Zahl der bei 17·5° im Liter gelösten Gramm-Moleküle (g. m.). Das Salz wurde als monomolecular mit der Formel $FeCl_3$ angenommen.[1]

Lösung 1.

Proc. $= 42\cdot3\%$ $FeCl_3$,
$\gamma_{17\cdot5} = 1\cdot390$,
g. m. $= 3\cdot62$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
1°7	1°6	110	43·41	44·23
	2·0	145	44·48	
	2·0	235·5	44·27	
	1·2	307	44·77	

[1] Die Berechtigung hiezu leiten wir aus einer Arbeit von P. Th. Müller C. r. 118, p. 644—646 her, welcher das Moleculargewicht des Eisenchlorids in alkoholischer und ätherischer Lösung bestimmte.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
11°4	10°3	108	42·46	42·68
	11·3	143	42·52	
	12·0	235·5	42·78	
	12·0	307	42·95	
53°7	52·8	108	37·59	37·93
	53·4	143	37·74	
	53·9	232·5	37·97	
	54·7	303·5	38·42	
81°9	82·2	107·5	34·53	35·18
	81·7	142	35·62	
	81·5	232·5	35·60	
	82·1	305	34·97	

Lösung 2.

Proc. = 29·0% $FeCl_3$,
$\gamma_{17 \cdot 5}$ = 1·246,
g. m. = 2·23.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°1	1°9	109	28·61	29·27
	2·4	142·5	29·35	
	2·2	232	29·57	
	1·9	270·5	29·55	
12·2	12·2	108·5	28·10	25·56
	12·0	143	28·72	
	12·3	233	28·86	
	12·5	261·5	28·57	
32·2	32·5	108	26·80	27·27
	32·7	141	26·95	
	31·4	229·5	27·83	
	32·2	270·5	27·51	
50·1	50·5	108	25·90	26·15
	49·8	141	25·95	
	48·1	230	26·69	
	52·2	269	26·05	
70·1	69·8	108	25·16	24·88
	69·4	143	24·83	
	70·8	231	24·85	
	70·4	272	24·66	
88·7	87·9	106·5	24·20	24·06
	87·1	141	23·96	
	89·4	232·5	24·09	
	90·4	269·5	24·01	

Lösung 3.

Proc. = 23·92% $FeCl_3$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·194
g. m. = 1·76

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
3°1	2°8	107	21·92	22·41
	2·9	142	22·45	
	3·1	231	22·65	
	3·4	303	22·62	
16·8	16·0	108·5	21·19	21·66
	16·7	141·5	21·47	
	17·2	232	21·96	
	17·4	303	21·92	
34·1	34·1	109	20·28	20·66
	33·6	143	20·69	
	34·2	234	20·96	
	34·3	305	20·70	
52·95	53·0	106	19·23	19·41
	52·3	140·5	19·50	
	52·3	230	19·57	
	54·2	303	19·35	
71·75	70·7	106	18·40	18·43
	72·0	141	18·80	
	71·9	230	18·81	
	72·4	303	18·53	
89·6	87·3	109	18·49	18·15
	86·5	143	18·39	
	91·1	232	17·79	
	89·7	303	17·93	

Lösung 4.

Proc. = 18·54% $FeCl_3$,
$\gamma_{17·5}$ = 1·144,
g. m. = 1·31.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
3°6	2°6	109	15·74	16·11
	3·9	143	16·02	
	4·1	233	16·41	
	4·0	304·5	16·26	
15·0	14·2	108	15·35	15·46
	15·0	143	15·68	
	15·3	232·5	15·84	
	15·6	299	15·89	
35·1	34·6	102	14·61	14·93
	35·7	137·5	14·82	
	35·0	229	15·28	
	35·0	301·5	15·03	
52·0	52·3	106	13·92	14·14
	52·0	141	14·29	
	51·5	232	14·33	
	52·3	302	14·03	
70·9	70·9	105	13·86	13·69
	71·7	141	14·02	
	70·2	230·5	13·47	
	70·9	301	13·43	
89·1	89·5	104	13·12	12·99
	88·7	139·5	13·24	
	89·2	230	12·93	
	89·4	301	12·66	

Lösung 5.

Proc. = 11·8% $FeCl_3$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·088,
g. m. = 0·79.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°4	3°1	105	9·51	9·58
	2·0	140	9·67	
	2·2	231	9·55	
	2·2	301	9·53	
12·1	12·0	105	9·22	9·25
	12·0	140	9·20	
	12·0	230	9·37	
	12·3	301·5	9·22	
36·5	38·0	104·5	8·50	8·50
	36·0	139·5	8·55	
	36·3	230	8·60	
	35·8	301	8.37	
54·4	54·7	106	7·94	7·97
	55·0	141	7·96	
	54 0	230	8·00	
	53·9	302	7·97	
71·6	72·6	106	7·54	7·66
	71·8	141	7·65	
	71·1	231	7·78	
	71·0	302	7·66	
91·4	89·6	104·5	7·17	7·03
	91·5	139·5	6·95	
	92·4	229	7·12	
	92·2	300·5	6·89	

Lösung 6.

Proc. = 6·2% $FeCl_3$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·045,
g. m. = 0·40.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
13°	13°	106·5	3·99	3·87
	13	108	3·94	
	13	143	3·90	
	13	233	3·95	
	13	305	3·56	
55·45	53·7	108	3·30	3·43
	55·4	143	3·53	
	56·8	232	3·49	
	55·9	304	3·42	
79·95	78·6	108·5	3·09	3·08
	81·0	141	3·19	
	79·6	230	3·04	
	80·6	302	3·07	

Die Änderung der Magnetisirungszahl mit wechselnder Feldstärke erweist sich, wie aus sämmtlichen Tabellen zu entnehmen ist, unregelmässig und so gering, dass wir sie als innerhalb der Beobachtungsfehler liegend betrachten und deshalb auch nur den Mittelwerth als massgebend ansehen können.

Um eine leichtere Übersicht über den Gang der Susceptibilität mit der Concentration zu gewinnen, sind in einer graphischen Darstellung in der Fig. 5 der Gang des $\varkappa$ mit dem Procentgehalt, in Fig. 6 mit dem Moleculargehalt zusammengestellt.

Selbstverständlich muss mit abnehmender Concentration der Werth des $\varkappa$ sich demjenigen für reines Wasser nähern. Es

zeigt dies auch unsere Figur, in welcher die Concentrationen nebst den zugehörigen $\varkappa$ für die drei Temperaturen 0°, 40° und 80° eingetragen sind. Die erhaltenen Curven sind schwach convex gegen die Abscissenaxe. Sie verlieren jedoch ihre Krümmung vollständig, wenn wir statt des Procentgehaltes den Moleculargehalt einführen, wie es in Fig. 6 ersichtlich ist.

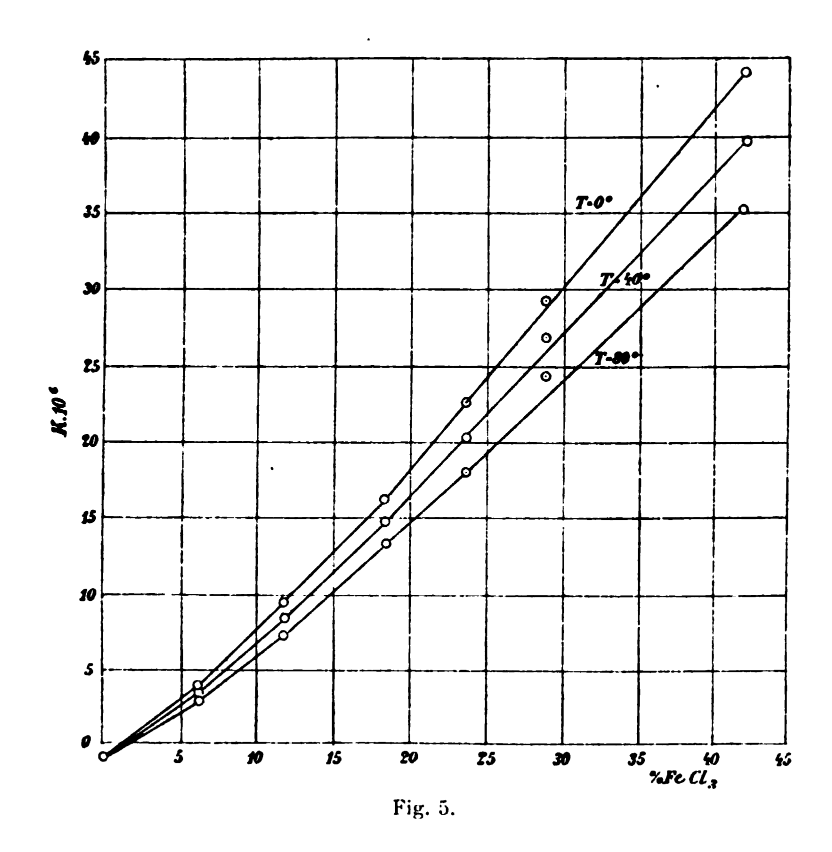


Fig. 5.

Wir erlauben uns daraus den Schluss zu ziehen, dass die Magnetisirungszahlen lediglich von der im Liter gelösten Salzmenge abhängig sind, hingegen völlig indifferent gegenüber Constitutionsänderungen der gelösten Substanz, wie sie durch Dissociation, Umlagerung etc. eintreten.

Ein Vergleich mit den Resultaten anderer Forscher lässt sich nur schwer vornehmen, da sich diese meist nur auf

concentrirte Lösungen beschränken und hierin sehr grosse Abweichungen untereinander aufweisen.[1]

Die Fig. 7 zeigt die Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Temperatur bei den verschiedenen Concentrationen. In Übereinstimmung mit bereits bekannten Messungen ergibt sich eine Abnahme

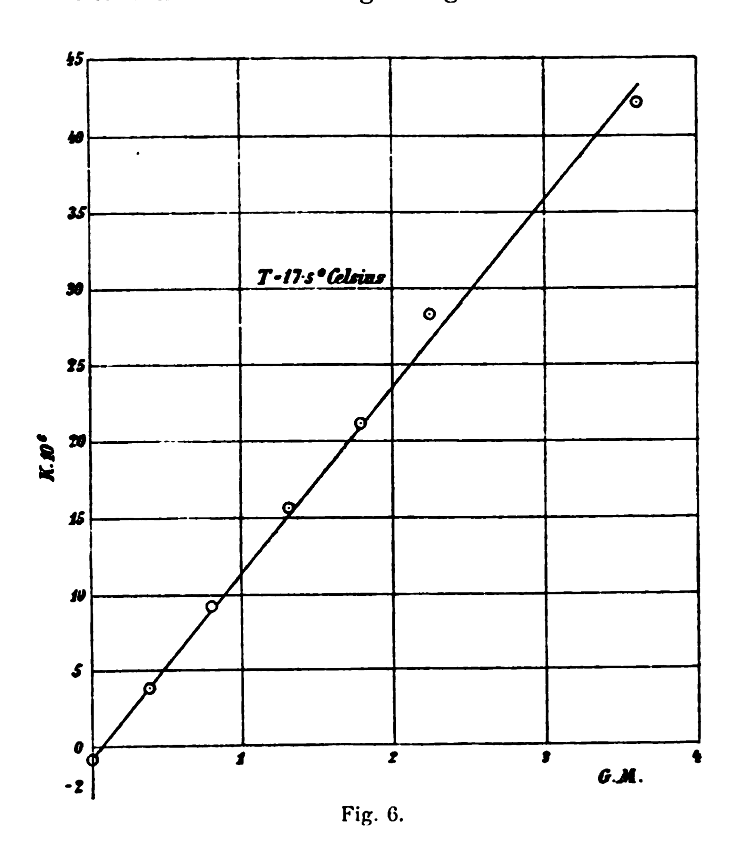


Fig. 6.

der Magnetisirungszahl mit wachsender Temperatur, und es kann wiederum dieser Gang als ein geradliniger aufgefasst werden.

Die aus der graphischen Darstellung gewonnenen Temperaturcoëfficienten sind für die Formel

$$\varkappa = \varkappa_0(1 + \varepsilon t)$$

[1] Siehe die Zusammenstellung in Winkelmann, Handbuch der Physik, III, 2, S. 206.

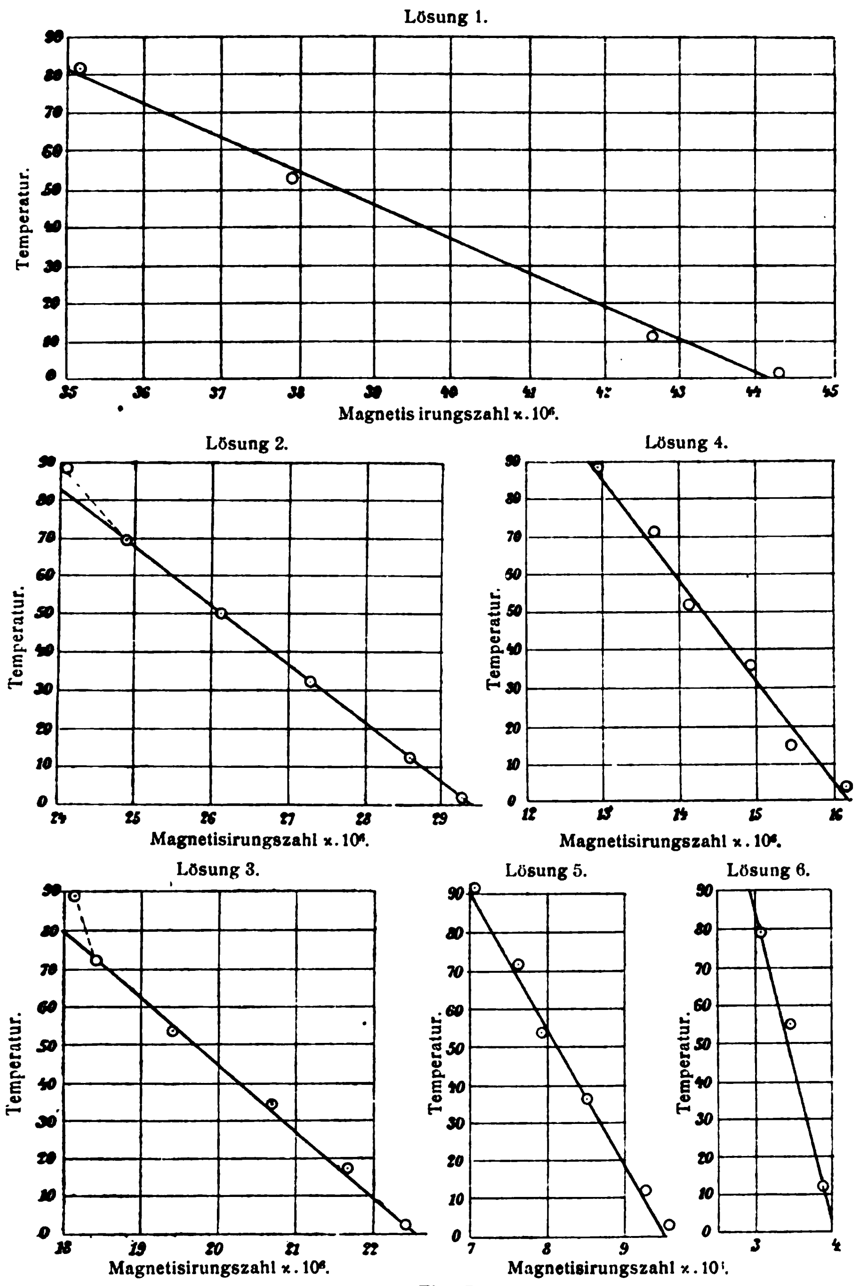

Lösung 1.
Temperatur.
Magnetis irungszahl x.10⁶.
Lösung 2.
Temperatur.
Magnetisirungszahl x.10⁶.
Lösung 4.
Temperatur.
Magnetisirungszahl x.10⁶.
Lösung 3.
Temperatur.
Magnetisirungszahl x.10⁶.
Lösung 5.
Temperatur.
Lösung 6.
Temperatur.
Magnetisirungszahl x.10⁶.

Fig. 7.

Lösung 1 .... $\varepsilon_1 = -0 \cdot 00252$
Lösung 2 .... $\varepsilon_2 = -0 \cdot 00219$
Lösung 3 .... $\varepsilon_3 = -0 \cdot 00254$
Lösung 4 .... $\varepsilon_4 = -0 \cdot 00232$
Lösung 5 .... $\varepsilon_5 = -0 \cdot 00290$
Lösung 6 .... $\varepsilon_6 = -0 \cdot 00274$
Reines Wasser ... $\varepsilon = -0 \cdot 00164$

Eine gesetzmässige Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten von der Concentration ergibt sich demnach aus unseren Messungen nicht. Dies ist nicht auffällig, da überhaupt sämmtliche Zahlen für denselben zwischen den engen Grenzen 0·00290 und 0·00164 gefunden wurden.

In guter Übereinstimmung befinden sich unsere Resultate mit dem Werthe des Temperaturcoëfficienten einer sehr concentrirten Eisenchloridlösung, welchen Quincke zu —0·00290 angibt. Wir halten uns daher für berechtigt, die Werthe von G. Wiedemann: —0·00325 und Plessner: —0·00356 für etwas zu gross anzusehen.

Als allgemeine Ergebnisse unserer bisherigen Untersuchungen können wir nach dem Gesagten Folgendes aufstellen:

1. Es kann die Magnetisirungszahl des Wassers dargestellt werden durch die Formel:

$$\varkappa = -0 \cdot 647(1 - 0 \cdot 00164 t)\, 10^{-6}.$$

2. Sie ist unabhängig von der Stärke der Magnetisirung.

3. Die Magnetisirungszahlen der Eisenchloridlösungen, welche ebenfalls keine Abhängigkeit von der Stärke des magnetischen Feldes erkennen lassen, verlaufen linear mit dem Moleculargehalt der Lösung.

4. Es nimmt die Susceptibilität derselben mit wachsender Temperatur in geradlinigem Verhältnisse ab.

Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur

(II. Mittheilung)

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger** und Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 30 Textfiguren.)

In unserer ersten Mittheilung[1] brachten wir eine neue Methode zur Bestimmung der Magnetisirungszahl $\varkappa$ von Flüssigkeiten und veröffentlichten gleichzeitig die von uns an Wasser und Eisenchloridlösungen erhaltenen Resultate. Im Folgenden wollen wir nun unsere weiteren Untersuchungen bekanntgeben, welche sich auf Lösungen der Chloride, Sulfate und Nitrate von Eisen, Mangan, Cobalt und Nickel erstrecken.

A. Eisensalze.

a) **Eisensulfat.**

Wie in der früheren Mittheilung, enthalten auch hier die Tabellen die Angaben der Temperatur T, der Feldstärke M und der Magnetisirungszahl $\varkappa$, nebst dem Procentgehalt, dem specifischen Gewicht (γ) bei 17°5 Celsius und der Anzahl der im Liter gelösten Gramm-Moleküle (g. m.).

Da sich bei einer wässerigen Lösung von Ferrosulfat freie Säure bildet, suchten wir einer derartigen Zersetzung von vornherein dadurch zu begegnen, dass wir die abgewogene Menge

[1] Diese Sitzungsber., 106. Bd., S. 594.

des reinen krystallisirten Salzes von der Formel $FeSO_4 + 7H_2O$ anstatt in reinem, in angesäuertem (4·06% Schwefelsäure) Wasser lösten. Überdies wurde der Eisengehalt der Lösung auf chemisch-analytischem Wege bestimmt. Das angeführte specifische Gewicht ist das der so gewonnenen Lösung.

Jede der in den folgenden Tabellen angeführten Zahlen ist der Mittelwerth einer Reihe von vier bis sechs Messungen.

Lösung 1.

Proc. = 13·07% ($FeSO_4$),

$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·190,

g. m. = 1·09.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°3	2°0	109	14·00	14°24
	2·0	158	14·44	
	2·8	233	14·38	
	2·3	305	14·15	
43·9	43·4	108	12·38	12·57
	43·8	156	12·76	
	43·8	232	12·66	
	44·2	235	12·63	
	44·1	306	12·44	
80·3	79·1	109	11·35	11·38
	80·6	156	11·39	
	81·0	232	11·44	
	80·4	303	11·35	

Lösung 2.

Proc. = 11·64% ($FeSO_4$).
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·150,
g. m. = 0·88.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
3°2	3°5	107	10·28	10·43
	2·9	156	10·60	
	3·9	232	10·56	
	2·3	304	10·28	
15·0	15·0	109	9·74	10·04
	15·0	157	10·03	
	15·0	231	10·07	
	15·0	304	10·13	
54·0	57·6	106	8·62	8·93
	52·0	155	9·00	
	52·5	231	9·12	
	53·8	303	8·98	
80·8	80·9	106	8·17	8·34
	80·9	154	8 39	
	81·2	230	8·45	
	80·1	302	8·34	

Lösung 3.

Proc. = 7·26% ($FeSO_4$),
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·101,
g. m. = 0·53.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°4	3°0	107	5·54	6·08
	2·1	155	6·44	
	2·6	228	6·09	
	2·0	302	6·27	

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
44°2	43·9	107	4·61	5·28
	44·0	156	5·45	
	44·5	229	5·67	
	44·2	301·5	5·39	
80·1	80·4	105	4·09	4·60
	79·7	154	4·70	
	81·8	228	4·96	
	81·0	298	4·63	

Lösung 4.

Proc. = 4·03% ($FeSO_4$),
$\gamma_{17·5}$ = 1·067,
g. m. = 0·28.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°9	2°5	108	2·61	2·66
	2·8	156	2·42	
	3·0	232	2·76	
	3·2	302	2·86	
44·8	43·4	106	2·44	2·38
	44·4	155	2·31	
	44·0	231	2·43	
	46·6	301	2·36	
81·1	81 0	106	2·01	2·14
	81·5	154	2·14	
	80·5	229	2·27	
	81·5	301	2·12	

Aus diesen Tabellen geht hervor, dass die Magnetisirungszahl von der Feldstärke unabhängig ist; hingegen haben wir,

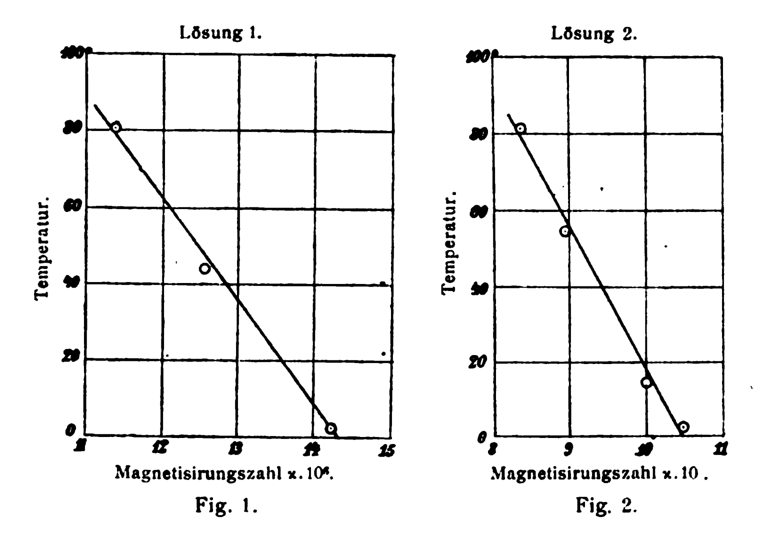


Fig. 1. Fig. 2.

wie immer, eine regelmässige Abnahme derselben mit der Temperatur zu verzeichnen, wie am deutlichsten aus den graphi-

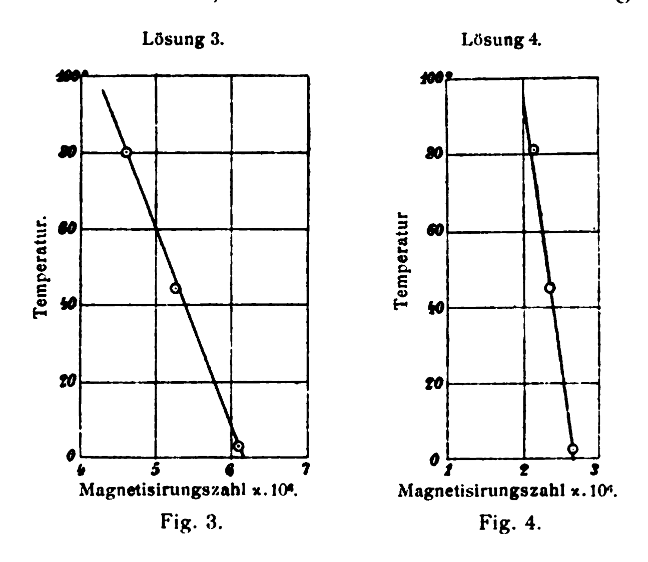


Fig. 3. Fig. 4.

schen Darstellungen Fig. 1—4 hervorgeht, die der Reihenfolge auch zu den Lösungen 1—4 gehören.

Die graphische Methode ergibt für die Formel $\varkappa = \varkappa_0(1+\varepsilon t)$ die folgenden Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot00258$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00251$$
$$\varepsilon_3 = -0\cdot00315$$
$$\varepsilon_4 = -0\cdot00278.$$

Bezüglich der Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Concentration ist zu erwähnen, dass es in linearem Verhältniss zu dem in der Volumeinheit enthaltenen Moleculargehalt steht.

b) Eisennitrat.

Für diese, sowie die folgenden Lösungen, ausgenommen diejenigen des Cobalt- und Nickelsulfates, wurde das specifische Gewicht bei der angefügten Temperatur bestimmt und danach aus den Tabellen von Landolt und Börnstein der Procentgehalt entnommen.

Lösung 1.

Proc. = $34\cdot6\%$ $Fe_2(NO_3)_6$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = $1\cdot314$,
g. m. = $0\cdot94$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
3°2	2°3	108	21·07	21·28
	3·5	156	21·42	
	3·7	230	21·41	
	3 2	303	21·21	
44·9	45·2	107	18·32	18·70
	44·4	156	19·07	
	44 8	231	18·85	
	45·4	302	18·57	
83·3	83·2	106	16·12	16·46
	83·2	154	16·70	
	82·0	229	16·86	
	84·8	302	16·17	

Lösung 2.

Proc. = 20·04% $Fe_2(NO_3)_6$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·162,
g. m. = 0·48.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°0	1°8	106	10·29	10·47
	2·2	152	10·67	
	2·2	228	10·59	
	1·6	303	10·33	
44·3	44·3	107	9·22	9·14
	44·4	155	9 27	
	44·5	231	9·16	
	44·2	304	8·92	
83·7	82·8	108	8·06	8·02
	83·3	155	8·09	
	84·0	232	8·10	
	83·7	305	7·83	

Aus diesen Tabellen gewannen wir die folgenden Diagramme (Fig. 5 und 6).

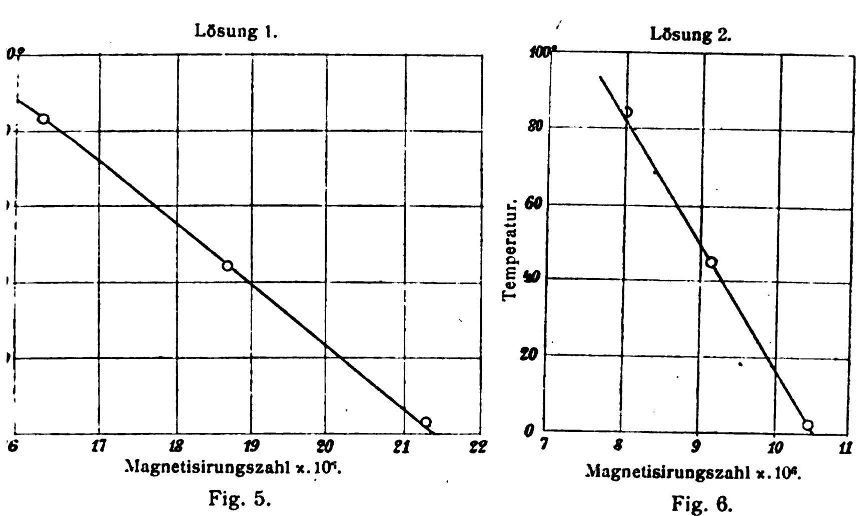


Fig. 5.

Fig. 6.

Daraus ergeben sich die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00290$$
$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00287.$$

Die Abhängigkeit der Magnetisirungszahl vom Salzgehalt für sämmtliche untersuchten Eisensalze ergibt ein interessantes

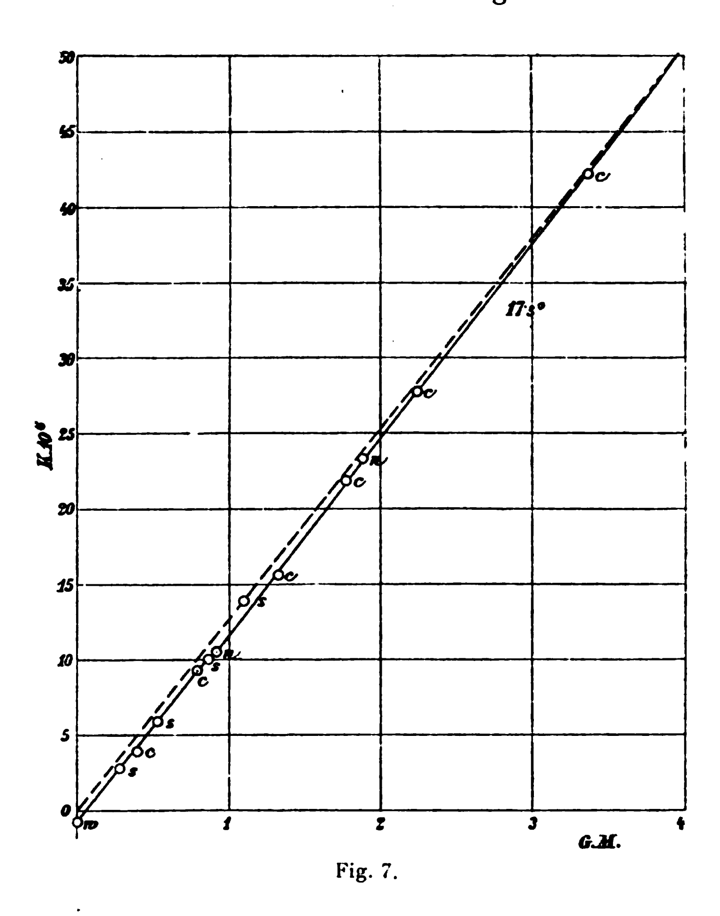


Fig. 7.

Resultat, wenn man den Gehalt durch die Zahl der im Liter gelösten Gramm-Moleküle darstellt. Es zeigt sich aufs Deutlichste, wie man am besten aus der Fig. 7 ersieht, dass das $\varkappa$ ausschliesslich vom Eisengehalt bestimmt wird.

In der Zeichnung bedeuten die mit *c*, *s* und *n* benannten Punkte entsprechend das Chlorid, Sulfat und Nitrat, *w* die

Magnetisirungszahl des reinen Wassers. Die angegebenen Concentrationen beziehen sich auf gleiche Eisenmengen, so dass für das Nitrat die Formel $\frac{1}{2} Fe_2(NO_3)_6$ eingeführt wurde. — Sämmtliche Angaben gehören zu einer Temperatur von 17°5 Celsius.

Eine unerhebliche Abweichung von der Geraden zeigt nur unsere concentrirteste Eisensulfatlösung, was seine Ursache jedoch lediglich in einer fehlerhaften Bestimmung des Procentgehaltes haben dürfte.

Aus diesem Ergebnisse ist zu schliessen, dass die Säurereste entweder alle gleich grossen Einfluss nehmen, oder, wie wir anzunehmen geneigt sind, ihre Einwirkung überhaupt ausser Spiel fällt.

Da mit wachsendem Salzgehalte das in der Volumeinheit enthaltene Wasser abnimmt, so kann man nicht, wie es bisher geschehen ist, die Magnetisirungszahl einfach auf die Art in zwei Componenten zerlegen, dass man als die eine das $\varkappa$ des reinen Wassers annimmt und den Rest der gelösten Substanz zuschreibt, sondern der absolute Antheil des Wassers wird umso geringer, je concentrirter die Lösung ist. Es dürfte daher diesem Umstande am besten dadurch Rechnung getragen werden, dass man die Salzcomponente als eine Gerade auffasst (in der Figur 7 durch eine gestrichelte Linie angedeutet), welche von 0 ausgehend, sich der Curve der Lösung mit wachsender Concentration nähern muss und beim wasserfreien Salz sie schneiden würde.

Wir können also von einem Atommagnetismus des Eisens sprechen, welcher seiner Grösse nach mit der trigonometrischen Tangente der in Fig. 7 enthaltenen gestrichelten Geraden zusammenfällt, somit in absoluten Einheiten den Werth $12·5 . 10^{-6}$ hat. —

B. Mangansalze.

a) Manganochlorid.

Da sich nach den vorhergegangenen Messungen erwarten liess, dass allgemein $\varkappa$ von der Feldstärke unabhängig sei,

haben wir uns im Folgenden in der Regel damit begnügt, bei zwei Feldintensitäten zu beobachten.

Lösung 1.

Proc. = 33·1% $MnCl_2$,
γ_{15} = 1·346,
g. m. = 3·55.

T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$
1°5	106	54·69
15·0	105	52·40
55·7	104	46·64
86·2	106	43·08

Lösung 2.

Proc. = 23·1% $MnCl_2$,
γ_{15} = 1·224,
g. m. = 2·25.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°3	2°0	106	33·74	34·13
	2·6	155	34·52	
48·8	48·8	107	29·35	29·85
	48·8	155	30·35	
85·5	85·8	107	26·83	26·94
	85·2	155	27·04	

Lösung 3.

Proc. = 12·24% $MnCl_2$,
γ_{15} = 1:112,
g. m. = 1·08.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°3	2°2	105	16·35	16·54
	2·3	153·5	16·73	
50·2	50·2	105	14·43	14·44
	50·1	154	14·45	
82·0	81·8	105	12·89	13·09
	82·1	154	13·29	

Zu obigen Tabellen gehören folgende, den Gang des $\varkappa$ mit der Temperatur enthaltende Figuren (Fig. 8—10).

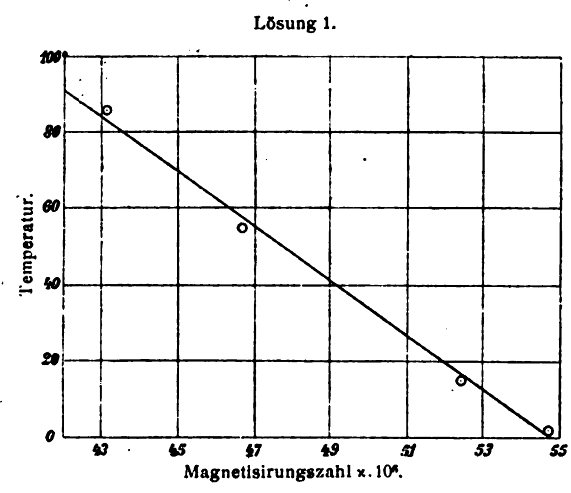


Fig. 8.

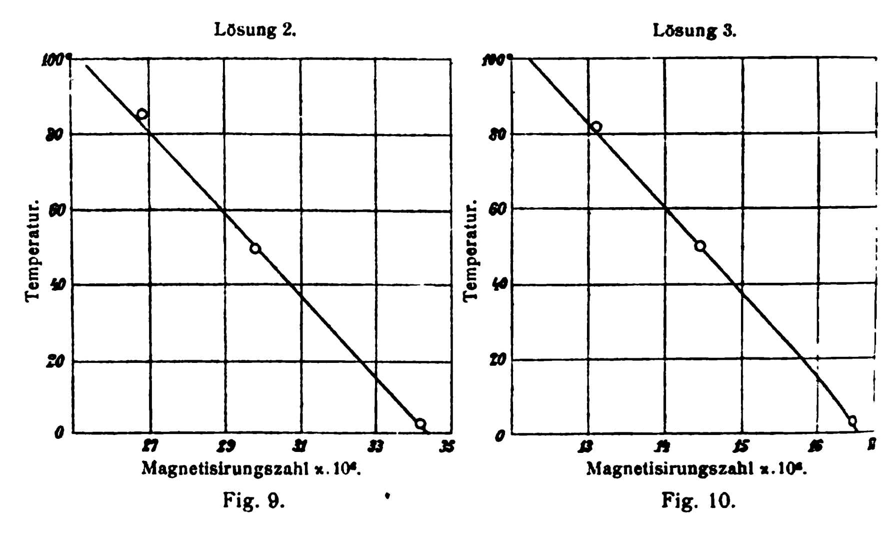


Fig. 9. Fig. 10.

Aus diesen Zeichnungen ergeben sich die Temperatur-coëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot 00260$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot 00259$$
$$\varepsilon_3 = -0\cdot 00263.$$

b) Manganosulfat.

Lösung 1.

Proc. $= 23\cdot 9\%$ $MnSO_4$,
$\gamma_{15} = 1\cdot 272$,
g. m. $= 2\cdot 01$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°0	2°3	142	30·78	30·82
	1·8	232·5	30·86	
18·0	18·0	141	29·00	29·07
	18·0	230	29·14	
54·5	53·2	142	26·73	26·50
	55 9	232·5	26·27	
82·0	82·1	142	24·38	24·49
	81·8	232·5	24·59	

Lösung 2.

Proc. = 13·23% $MnSO_4$,
γ_{15} = 1·134,
g. m. = 1·00.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°9	2°9	155	14·99	14·91
	2·8	302	14·83	
45·6	46·4	155	13·19	13·13
	44·9	302	13·07	
83·2	82·8	156	12·14	11·87
	83·5	303	11·60	

Die graphische Darstellung der Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Temperatur ist in den Figuren (Fig. 11 und 12) wiedergegeben.

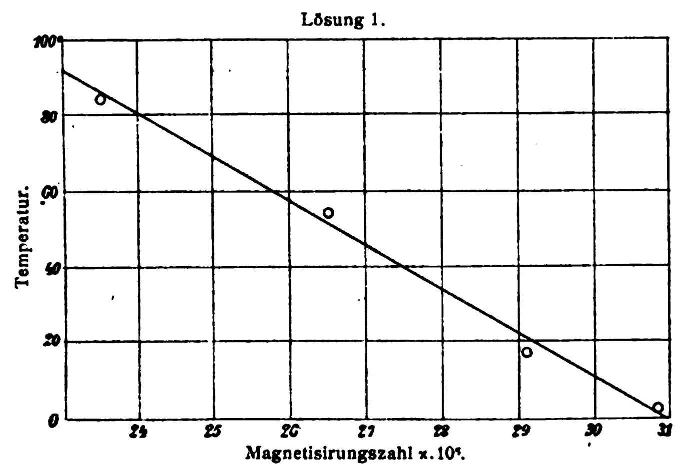


Fig. 11.

Lösung 2.

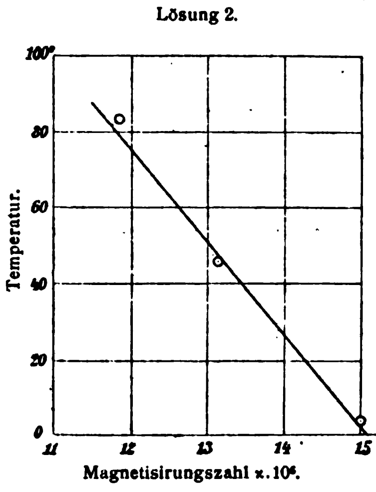


Fig. 12.

Die daraus resultirenden Temperaturcoëfficienten sind

$$\varepsilon_1 = -0\cdot00281$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00266.$$

c) Manganonitrat.

Lösung 1.

Proc. = 23·35% $Mn(NO_3)_2$.
γ_{15} = 1·206,
g. m. = 1·58.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°9	2°5	156	23·70	23·27
	3·0	303	22·83	
18·6	18·6	156	22·25	22·08
	18·6	303	21·92	
55·5	53·8	156	20·11	19·71
	57·0	303	19·30	
81·9	81·1	155	18·11	17·94
	82·7	302	17·76	

Lösung 2.

Proc. $= 12 \cdot 37\%$ $Mn(NO_3)_2$,
$\gamma_{15} = 1 \cdot 106.$
g. m. $= 0 \cdot 77.$

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
3°3	3°3	154	11·48	11·38
	3·3	302	11·27	
46·9	47·4	154	9·64	9·69
	46·4	301·5	9·74	
82·2	83·1	154	8·68	8·66
	81·2	301	8·63	

Diesen Tabellen entsprechen die Temperaturcurven Fig. 13 und 14.

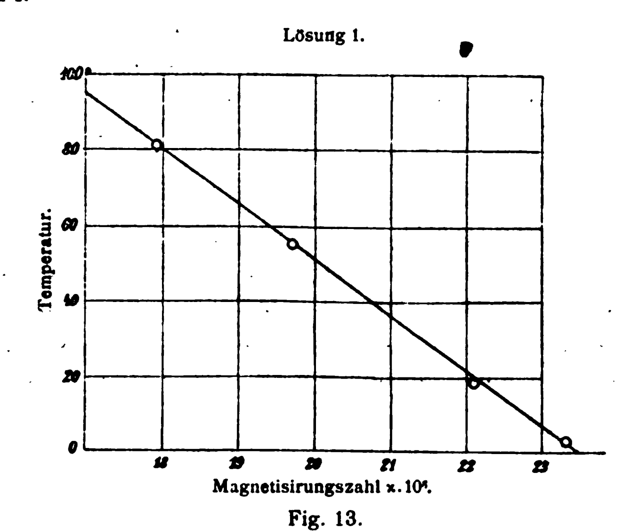


Fig. 13.

Lösung 2.

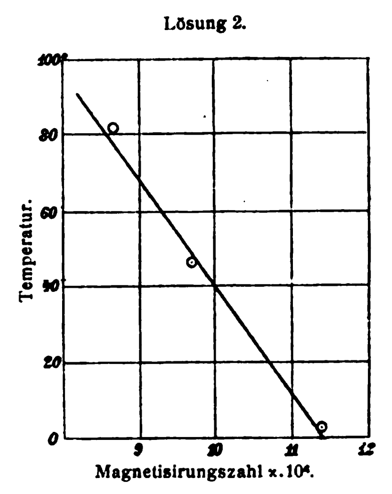


Fig. 14.

Aus den Geraden der Figuren erhält man die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00287$$

$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00311.$$

Auch die Mangansalze zeigen ein den Eisensalzen ganz analoges Verhalten. Es ist wiederum der Mangangehalt ausschliesslich bestimmend für die Grösse der Magnetisirungszahlen, wie aufs Beste aus der beigegebenen Zeichnung (Fig. 15) hervorgeht, die ganz nach Art und Weise der Figur 7 hergestellt ist.

Die — man möchte sagen — mathematische Gerade, welche die Werthe des x für die verschiedenen Concentrationen der einzelnen Salze verbindet, findet auch hier im reinen Wasser ihren gesetzmässigen Anfang. Die zugehörige gestrichelte Gerade des Magnetismus der Salzcomponente liefert für den Atommagnetismus des Mangan den Werth $15 \cdot 0 . 10^{-6}$ absolute Einheiten.

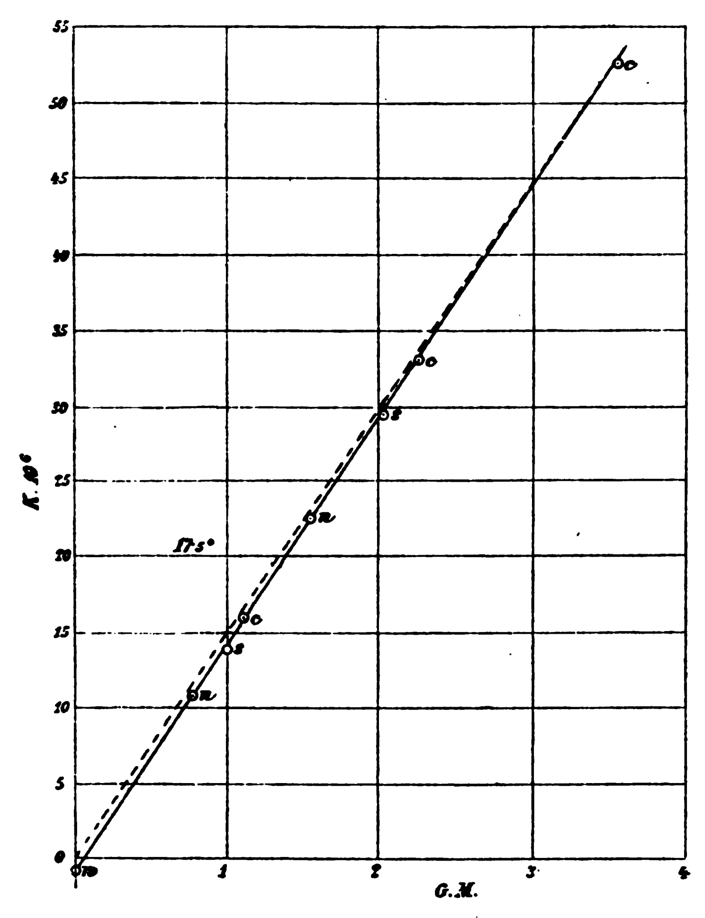


Fig. 15.

C. Cobaltsalze.

a) **Cobaltchlorür.**

Lösung 1.

Proc. = $21 \cdot 0\%$ $CoCl_2$,

$\gamma_{17 \cdot 5} = 1 \cdot 239$,

g. m. = $2 \cdot 02$.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°3	2°3	302·5	21·57	21·57
14·5	14·5	302	20·76	20·76
51·6	50·5	157	19·12	18·89
	52·8	303	18·66	
83·0	83·7	156	17·55	17·48
	82·2	307	17·41	

Lösung 2.

Proc. = 12·17% $CoCl_2$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·125,
g. m. = 1·06.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
1°9	2°0	156	11·16	10·85
	1·7	303	10·54	
16·5	16·5	155	10·52	10·32
	16·5	301·5	10·12	
53·2	52·3	155	9·64	9·37
	54·0	303	9·09	
80·8	81·3	156	8·50	8·45
	80·3	302·3	8·41	

Fig. 16 und 17 zeigen die Temperaturcurven.

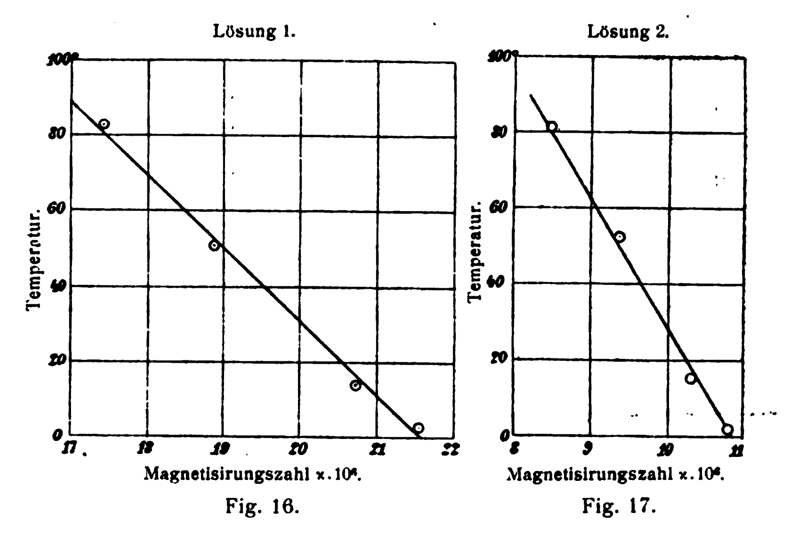


Fig. 16.

Fig. 17.

Die Geraden der Zeichnungen ergeben die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot00238$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00281.$$

b) Cobaltsulfat.

Der Procentgehalt dieses Salzes wurde von Herrn Dr. Robert Clauser auf chemisch-analytischem Wege bestimmt und danken wir demselben an dieser Stelle für die Liebenswürdigkeit, mit der er sich dieser Arbeit unterzog.

Lösung 1.

Proc. $= 22\cdot02\%$ $CoSO_4$,
$\gamma_{15} = 1\cdot225$,
g. m. $= 1\cdot75$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°2	2°3	155	15·74	15·65
	2·1	302	15·56	
16·5	16·5	156·5	15·18	14·98
	16·5	303	14·78	

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
55°5	54·1	155·5	13·63	13·56
	56·8	303	13·50	
82·7	81·4	155	12 63	12·51
	84·0	301·5	12·39	

Lösung 2.

Proc. = 14·15% $CoSO_4$,
γ_{15} = 1·129,
g. m. = 1·03.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
3°1	3°0	153·5	8·39	8·41
	3·2	302	8·43	
47·5	47·1	155	7·59	7·38
	48·0	302	7·17	
87·8	88·0	155·5	6·69	6·68
	87·6	303	6·66	

Die Temperaturcurven sind aus Fig. 18 und 19 ersichtlich.

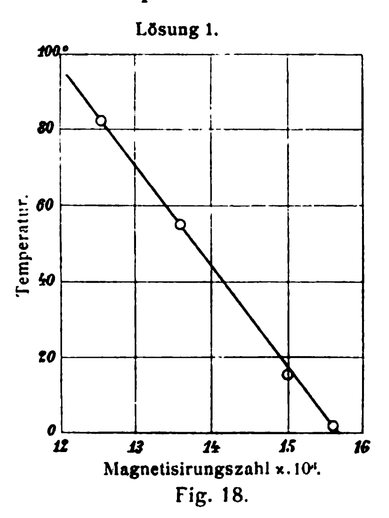


Fig. 18.

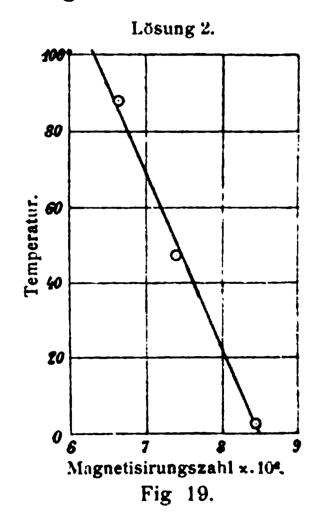


Fig 19.

Wir gewinnen aus obiger Darstellung die Temperatur-coëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot00247$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00250.$$

c) **Cobaltnitrat.**

Lösung 1.

Proc. $= 28\cdot5\%$ $Co(NO_3)_2$,
$\gamma_{17\cdot5} = 1\cdot299$,
g. m. $= 2\cdot03$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°3	2°3 2·2	155 302·5	21·33 21·10	21·22
14·0	14·0 14·0	155 301	19·96 20·30	20·13
49·3	48·8 49·8	153·5 300	18·85 18·25	18·55
80·8	81·2 80·4	155 303	17·07 16·71	16·89

Lösung 2.

Proc. $= 15\cdot9\%$ $Co(NO_3)_2$,
$\gamma_{17\cdot5} = 1\cdot148$,
g. m. $= 1\cdot00$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
1°9	2°1 1·7	154 303	10·27 9·96	10·12
14·5	14·0 15·0	156 302	9·43 9·47	9·45
53·8	53·5 54·1	156 303	8·55 8·35	8·45
81·8	81·8 81·7	155 300	7·72 7·76	7·74

Der Gang des $\varkappa$ mit der Temperatur ist in den Fig. 20 und 21 dargestellt.

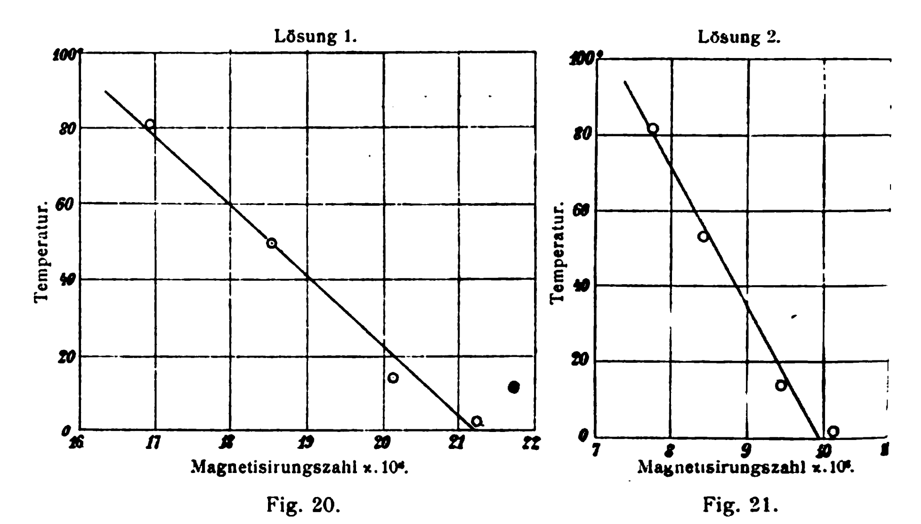


Fig. 20.

Fig. 21.

Die Temperaturcoëfficienten der Cobaltnitrat-Lösungen sind demnach

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00254$$
$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00251.$$

Die folgende Figur 22 gibt eine Zusammenstellung der $\varkappa$ der Cobaltsalze nach ihrem Moleculargehalt und es zeigt sich

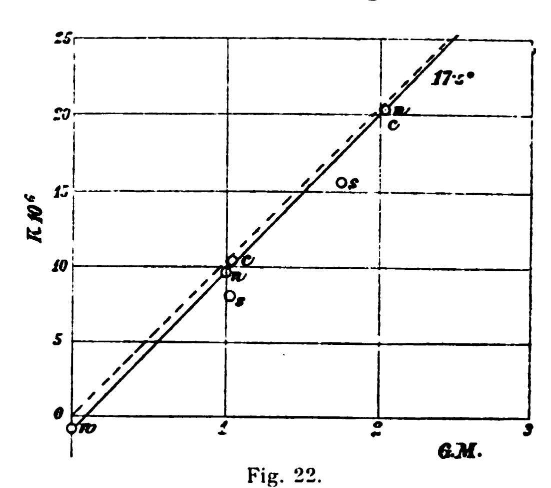


Fig. 22.

wieder, dass lediglich die Cobaltmenge die Grösse der Suszeptibilität bestimmt. Die Abweichung des Sulfates dürfte in der Art der Gehaltsbestimmung zu suchen sein. Diese konnte nämlich erst vorgenommen werden, nachdem die Lösungen mehrere Wochen stehen geblieben waren, was leicht eine Änderung der Concentration zur Folge haben konnte.

Der Atommagnetismus ist wieder durch die gestrichelte Gerade angedeutet und ergibt für Cobalt den absoluten Werth $10\cdot0.10^{-6}$.

D. Nickelsalze.

a) Nickelchlorür.

Lösung 1.

Proc. = $20\cdot23\%$ $NiCl_2$,
$\gamma_{17\cdot5}$ = $1\cdot259$,
g. m. = $1\cdot97$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°3	2°5	158	9·77	9·73
	2·0	306	9·68	
14·3	14·3	158	9·47	9·44
	14·3	306	9·40	
54·2	54·0	157	8·60	8·50
	54·4	305	8·41	
79·9	79·8	156	7·80	7·76
	80·0	303	7·71	

Lösung 2.

Proc. $= 12 \cdot 27\%$ $NiCl_2$,
$\gamma_{17 \cdot 5} = 1 \cdot 132$,
g. m. $= 1 \cdot 07$.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°0	2°0	156	4·59	4·57
	1·9	303·5	4·54	
46·0	45·6	157	3·95	3·94
	46·5	304	3·93	
81·0	80·7	156	3·64	3·59
	81·2	303	3·55	

Die Geraden der Figuren 23 und 24 geben wiederum den Gang des $\varkappa$ mit der Temperatur an.

Lösung 1.

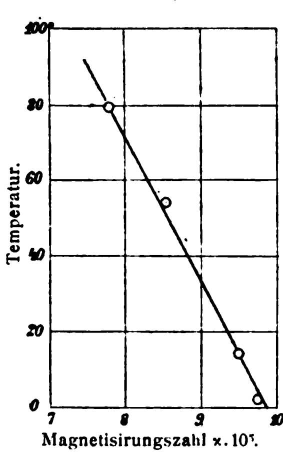


Fig. 23.

Lösung 2.

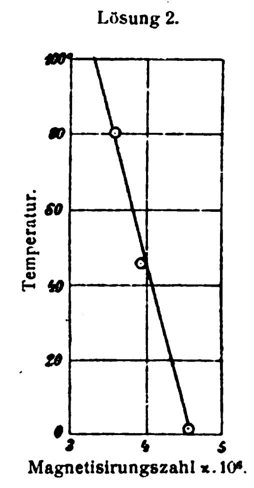


Fig. 24.

Aus diesen graphischen Darstellungen erhält man die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00272$$
$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00272.$$

b) Nickelsulfat.

Die Gehaltsbestimmung dieser zwei Lösungen verdanken wir, wie die der Cobaltsulfat-Lösungen, der Freundlichkeit des Herrn Dr. Robert Clauser.

Lösung 1.

Proc. = 23·8% $NiSO_4$,
γ_{15} = 1·249,
g. m. = 1·92.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°2	1°7	156	7·33	7·12
	2·6	301	6·91	
14·5	14·5	156	7·02	6·91
	14·5	302 5	6·79	
54·5	52·9	154	6·16	6·15
	56·1	301	6·15	
81·9	81·5	153·5	5·54	5·54
	82·2	299·5	5·54	

Lösung 2.

Proc. = 13·75% $NiSO_4$,
γ_{15} = 1·129,
g. m. = 1·00.

T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$
2°7	303	3·20
15·3	305	2·96
55·2	303·5	2·72
82·2	304	2·40

Anschliessend sind in den Figuren 25 und 26 die Temperaturcurven wiedergegeben.

Lösung 1.

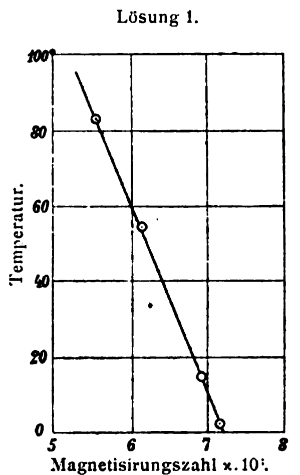


Fig. 25.

Lösung 2.

Temperatur.

Magnetisirungszahl x.10⁶.

Fig. 26.

Daraus berechnen sich die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot00278$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00305.$$

c) **Nickelnitrat.**

Lösung 1.

Proc. = $32\cdot6\%$ $Ni(NO_3)_2$,

$\gamma_{17\cdot5}$ = $1\cdot355$,

g. m. = $2\cdot47$.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°1	2°1	155	10·99	10·94
	2·1	301	10·88	
13·5	13·5	157	10·54	10·59
	13·5	303	10·65	
51·6	51·1	153	9·78	9·60
	52·1	300	9·43	
82·0	82·2	154	8·87	8·90
	81·7	301	8·92	

Lösung 2.

Proc. = 18·0% $Ni(NO_3)_2$.
$\gamma_{17\cdot5}$ = 1·171,
g. m. = 1·21.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°6	2°3	155	4·90	4·78
	2·9	301	4·66	
15·4	15·4	154	4·66	4·59
	15·4	301	4·53	
55·9	56 2	156	3·99	3·97
	55·6	303	3·94	
80·4	80·1	155	3·58	3·62
	80·7	302	3·67	

Die Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Temperatur ist in den Figuren 27 und 28 dargestellt.

Lösung 1.

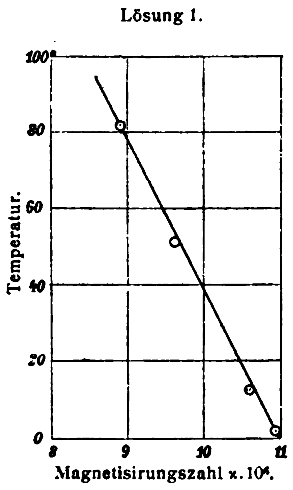


Fig. 27.

Lösung 2.

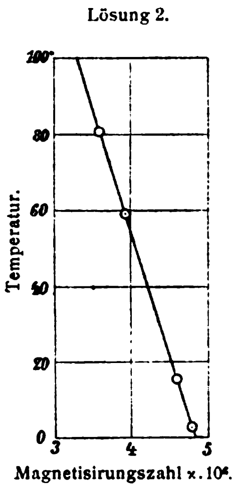


Fig. 28.

Aus den graphischen Darstellungen ergeben sich die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00233$$
$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00322.$$

In Fig. 29 haben wir die Magnetisirungszahl $\varkappa$ in ihrer Abhängigkeit vom Moleculargehalt dargestellt. Hier zeigt sich nicht mehr die schöne Gerade, welche wir für die anderen Metalle erhielten; allerdings ist für den Sulfatwerth dasselbe zu sagen, wie beim Cobalt (S. 645). Nickel ist das schwächste

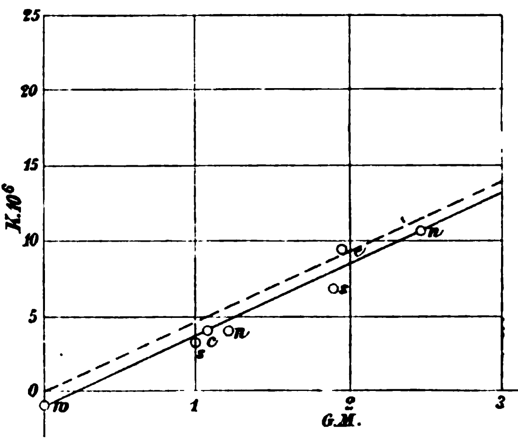


Fig. 29.

der von uns untersuchten Metalle, wesshalb nicht ausgeschlossen ist, dass neben dem Metallgehalt auch die jeweilige Säure hier bereits auf die Magnetisirungszahl mitbestimmend wirkt.

Nichtsdestoweniger sind die Abweichungen nicht derartig, dass wir auf eine lineare Darstellung der Abhängigkeit von $\varkappa$ vom Nickelgehalt verzichten müssten.

Der aus der gestrichelten Geraden entnommene Atommagnetismus des Nickel beträgt $4 \cdot 95 . 10^{-6}$ (C. G. S.).

Während man aus den Messungen, die vor uns angestellt wurden, noch nicht mit Sicherheit die Berechtigung des Atommagnetismus behaupten kann,[1] geht aus unserem bei Weitem genaueren Beobachtungsmaterial aufs Deutlichste hervor, dass bei den von uns bisher untersuchten stark magnetischen Salzen die metallischen Bestandtheile thatsächlich für die Grösse der Magnetisirungszahl allein massgebend sind und dass die Art der Bindung im Molekül, sei es mit verschiedenen Säureresten oder in verschiedener Werthigkeit, vollständig belanglos ist; haben wir doch für alle Metalle keinen diesbezüglichen Unterschied zwischen den Chloriden, Sulfaten und Nitraten finden können, noch zwischen dem zweiwerthigen Eisen im Ferrosulfat und dem dreiwerthigen im Nitrat und Chlorid.

Eine merkwürdige Reihenfolge im Atommagnetismus ergibt die Figur 30, in welcher die Abhängigkeit desselben vom Moleculargehalt an Metall bei 17°5 wiedergegeben ist.

Die absoluten Werthe für $\varkappa . 10^6$ sind nämlich für

Nickel	4·95	= 2.2·5 (C. G. S.)
Cobalt	10·0	= 4.2·5 (C. G. S.)
Eisen	12·5	= 5.2·5 (C. G. S.)
Mangan	15·0	= 6.2·5 (C. G. S.)

Es verhalten sich also die Atommagnetismen von Nickel, Cobalt, Eisen und Mangan genau wie 2 : 4 : 5 : 6. Diese in die Augen springende Gesetzmässigkeit legt den Schluss nahe, dass sich auch noch Metalle finden, welche die natürliche Zahlenreihe ergänzen. In der That zeigt ein Vergleich unserer Messungen mit denen Quincke's, dass sich das Chrom zwischen Nickel und Cobalt einfügt. Quincke's Zahlen sind nach besonderem Maasse für die einzelnen Metalle im Folgenden gegeben.

		Grösster Werth $\times \frac{2}{3}$
Mangan	7·8 bis 9·1	6·0
Eisen	6·1 » 8·2	5·4
Cobalt	5·7 » 6·1	4·0
Chrom	2·7 » 4·1	2·8
Nickel	2·5 » 2·9	2·0

[1] Vergl. Winkelmann, Handb. d. Phys., III, 2, p. 212.

Es ist eine erfreuliche Thatsache, dass trotz der weiten Grenzen, innerhalb welcher die Quincke'schen Atommagnetismen liegen, sie zu unseren Zahlen in gut übereinstimmendem Verhältnisse stehen.

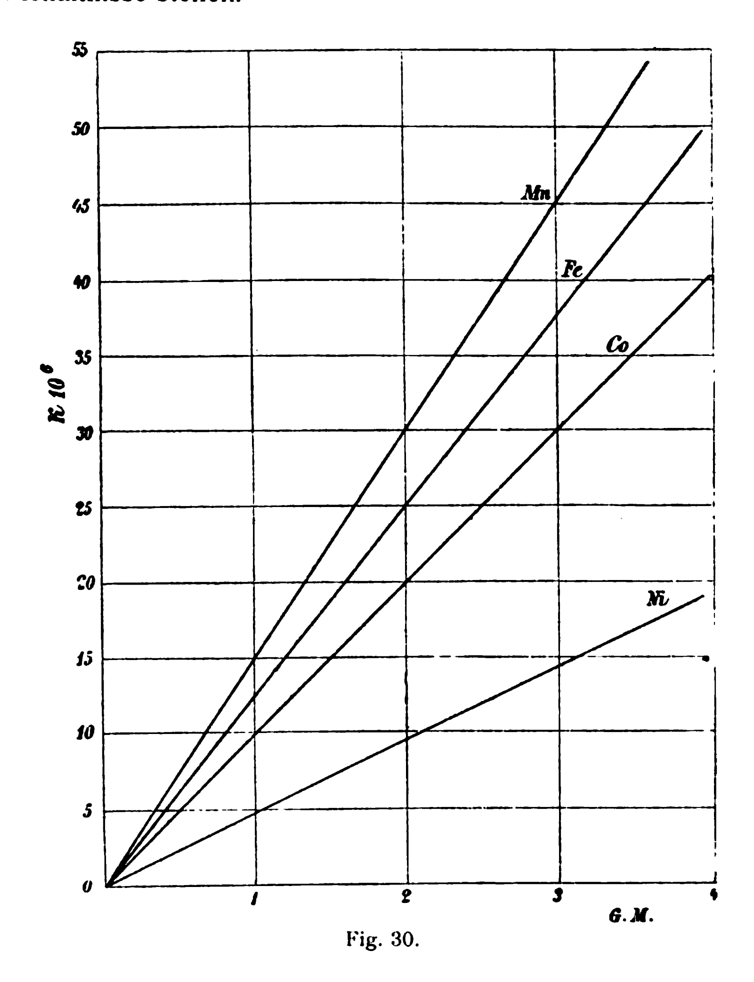


Fig. 30.

Ganz besonders gut stimmt aber unser Ergebnis mit der von G. Wiedemann aus seinen relativen Zahlen abgeleiteten einfachen Beziehung überein, wonach die Atommagnetismen der vier genannten Metalle sich verhalten wie $a:a+b:a+{}^{3}/_{2}b:$ $a+2b$, — braucht man doch blos $a = b = 2.2 \cdot 5$ zu setzen um seine Werthe mit den unsrigen in Einklang zu bringen.

Es erscheint uns nicht uninteressant, obige Reihe festgestellt zu haben und wir behalten es einer weiteren Untersuchung vor, ob es in der That Metalle gibt, die sich genau an erster und dritter Stelle einfügen, da in diesem Falle die paramagnetischen Elemente auf eine kleine gesetzmässige Zahl beschränkt wären.

Es hat dieser Schluss umsomehr Wahrscheinlichkeit, als thatsächlich die Salze anderer Metalle alle so kleine Magnetisirungszahlen zeigen, dass man deren Atommagnetismen daraus vorläufig noch nicht erkennen kann.

Wie in unserer früheren Mittheilung, hätten wir bezüglich der Temperaturcoëfficienten noch zu bemerken, dass alle negativ sind, mithin mit wachsender Temperatur der Magnetismus abnimmt, dass aber eine besondere Gesetzmässigkeit in ihren Zahlenwerthen nicht zu erkennen ist. Ihre Werthe bewegen sich innerhalb der Grenzen —0·00233 und —0·00322, die freilich zum grossen Theil durch die Unsicherheit der Beobachtung bedingt sein können.

Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke

von

O. Tumlirz.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Mai 1897.)

Obwohl die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke bei den technischen Untersuchungen eine hervorragende Rolle spielt, ist sie doch bisher noch wenig untersucht worden. Genaue Bestimmungen rühren nur von Regnault[1] her, welcher bei dem Drucke einer Atmosphäre vier Versuchsreihen ausführte und die folgenden Werthe erhielt:

1. Reihe	von 127·7°	bis 231·11° C.	$c_p = 0·46881$
2. »	» 137·73	» 225·86	0·48111
3. »	» 124·31	» 210·44	0·48080
4. »	» 122·75	» 216·03	0·47963

Den ersten Werth 0·46881 erklärte Regnault für nicht ganz zuverlässig; die übrigen geben das Mittel

$$c_p = 0·4805 \text{ von } 128° \text{ bis } 217° \text{ C.}$$

Da nämlich die gleichnamigen Grenzen der Temperaturintervalle in der 2., 3. und 4. Reihe nicht weit auseinanderliegen, so kann man aus den Grenzwerthen die Mittelwerthe 128° und 217° nehmen. Man ersieht daraus, dass der Werth $c_p = 0·4805$ nur für ein gewisses Temperaturintervall bei dem Drucke einer Atmosphäre gilt und keinen Aufschluss darüber gibt, ob die specifische Wärme sich mit dem Drucke und der Temperatur ändert.

[1] Mém. de l'Acad. 26, p. 1, 1862.

Eine andere Bestimmung rührt von Mallard und Le Chatelier[1] her, aus welcher H. Zeuner[2] die folgende Tabelle berechnete:

Für $\vartheta =$	0°	100°	200°	500°	1000°	2000°
ist $c_p =$	0·420	0·457	0·493	0·603	0·885	1·149

Die Zahlen zeigen eine so enorme Zunahme der specifischen Wärme des Wasserdampfes mit der Temperatur, dass ihre Zuverlässigkeit noch fraglich ist. Endlich ist noch zu erwähnen, dass H. Zeuner[3] auf Grund der Hypothese, dass das Correctionsglied der Zustandsgleichung des Wasserdampfes nur eine Function des Druckes sei, die folgende Werthe berechnete:

$\vartheta =$	0°	50°	100°	150°	200°
$c_p =$	0·4258	0·4650	0·4685	0·4842	0·5055

H. Zeuner machte aber selbst hiezu die Bemerkung, dass jede andere Hypothese über das Correctionsglied zu einem anderen Gesetze der Veränderlichkeit führen müsse.

Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass man aus Versuchen, welche Hirn und Cazin[4] im Jahre 1866 über die Ausdehnung des überhitzten Wasserdampfes angestellt haben, die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke ableiten kann. Bei diesen für das Studium des überhitzten Wasserdampfes sehr werthvollen Versuchen wurde in einem cylindrischen Gefässe aus Kupfer von 7·50 *l* Inhalt überhitzter Wasserdampf von der gegebenen Temperatur ϑ' auf einen solchen Druck p' gebracht, dass er beim Entweichen durch eine Öffnung von ungefähr 6 cm^2 Inhalt in die freie Atmosphäre (Druck p'') gerade die dem Drucke p'' entsprechende Sättigungstemperatur ϑ'' annahm. Der Versuch wurde folgendermassen ausgeführt: Der Cylinder C, der in Fig. 1 schematisch gezeichnet ist, befand sich in einem Ölbade $KKKK$ von der Temperatur ϑ' und hatte an seinen beiden Enden Ansatz-

[1] Annales des Mines, t. IV, 1883.

[2] Techn. Thermodynamik, I, S. 140, 1887.

[3] Techn. Thermodynamik, II, S. 237, 1890.

[4] Annales de chimie et de physique, S. IV, t. 10, p. 349, 1867.

röhren BB von 12 *cm* Länge, welche an ihrem Ende mit den verticalen Wänden des das Ölbad enthaltenden Gefässes fest verbunden waren. Diese Wände waren in der Richtung der Cylinderaxe durchbohrt. Durch die Bohrungen wurde in jede Röhre B eine Kupferröhre gebracht, welche bis zum Cylinder C reichte und dort durch eine Glasplatte D verschlossen war. Aussen war die Kupferröhre mittelst eines ringförmigen Ansatzes an die Gefässwand KK angekittet und ihr Eingang überdies durch eine zweite angekittete Glasplatte abgesperrt. Endlich sei noch erwähnt, dass das Ölbad durch Ziegelwände allseits geschützt war und dass bei den Versuchen in der Richtung der Cylinderaxe AA visirt wurde.

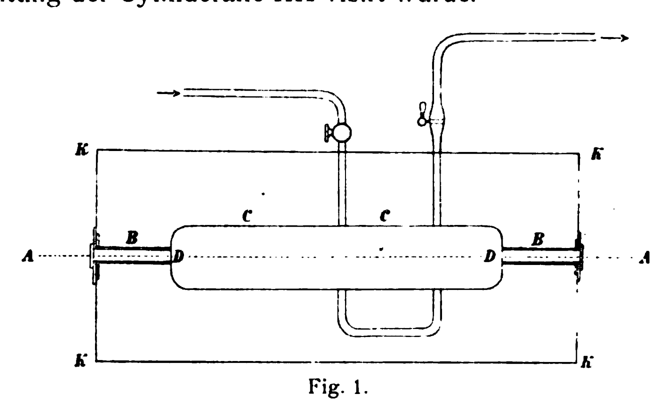


Fig. 1.

Ob der im Gefäss zurückgebliebene Dampf bei dem Drucke p'' gerade gesättigt war, erkannte man daran, dass beim Ausfluss im Inneren entweder Nebel sichtbar wurden oder nicht. Zu diesem Zwecke wurde zunächst bei einer bestimmten Anfangstemperatur ϑ' ein hoher Anfangsdruck gewählt, so dass beim Ausfluss ein dichter Nebel erschien. Hierauf wurde der Anfangsdruck bei derselben Anfangstemperatur allmälig herabgesetzt, bis der Nebel, der bei jedem folgenden Versuche immer schwächer wurde, schliesslich nach dem Durchgange durch eine Reihe von Färbungen überhaupt nicht mehr erschien. Der Grenzwerth des Anfangsdruckes, bei dem der Nebel gerade ausblieb, wurde durch wiederholte Versuchsreihen, welche bei derselben Anfangstemperatur ϑ' mit abwechselnd abnehmenden und zunehmenden Anfangsdrucken

angestellt wurden, mit einer Fehlergrenze bestimmt, welche kleiner als 0·02 Atmosphären war.

Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

ϑ' Cels.	p' Atm.	ϑ'' Cels.	p'' Atm.	ϑ_0 Cels.	p_0 Atm.	n	ϑ_2 Cels.
131·5	1·397	99·6	0·984	131·94	1·419	4·260	110·08
151·8	1·685	99·6	0·984	152·25	1·712	4·102	115·75
174	2·115	99·5	0·981	174·60	2·156	4·214	122·98
179	2·219	99·5	0·981	179·60	2·262	4·220	124·53
189·2	2·451	99·4	0·979	189·94	2·503	4·247	127·84
192·2	2·528	99·5	0·981	192·81	2·577	4·260	128·80
197·8	2·636	99·3	0·975	198·68	2·703	4 236	130·39
219·4	3·231	99·3	0·975	220·32	3·314	4·286	137·34
239	3·743	99·1	0·967	240·24	3·870	4·240	142·80
254·7	4·275	99·1	0·967	255·98	4·420	4·254	147·63

Für die adiabatischen Zustandsänderungen ideeller Gase gelten die Gleichungen:

$$\frac{p'}{p''} = \left(\frac{273+\vartheta'}{273+\vartheta''}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{v''}{v'}\right)^{k},$$

worin v' und v'' die zu p', ϑ' und p'', ϑ'' gehörigen specifischen Volumina und k das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Drucke zur specifischen Wärme bei constantem Volumen bedeuten. Grashof[1] hat nun zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass wenn man die obigen Versuchsergebnisse nach der Formel

$$\frac{p'}{p''} = \left(\frac{273+\vartheta'}{273+\vartheta''}\right)^{n} \qquad 1)$$

prüft, man für n Werthe erhält, welche, wie die Spalte 7 zeigt, unzweifelhaft auf eine Constante hinweisen. Es hat also die Function, welche für die adiabatischen Zustandsänderungen des Wasserdampfes Druck und Temperatur verbindet, dieselbe Form wie bei den ideellen Gasen.

[1] Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, XI, S. 404, 1867.

Daraus, dass für die adiabatischen Zustandsänderungen des Wasserdampfes die Gleichung 1) gilt, folgt noch nicht, dass auch zwischen dem Drucke und dem specifischen Volumen eine Beziehung von derselben Form wie bei den ideellen Gasen besteht, weil der Wasserdampf in der Nähe der Condensationsgrenze von dem Mariotte-Gay Lussac'schen Gesetze abweicht, und es wäre daher der Schluss, dass der Werth $\frac{n}{n-1}$ das Verhältniss zwischen der specifischen Wärme des Wasserdampfes bei constantem Druck und der specifischen Wärme bei constantem Volumen ist, unrichtig.

Zu den angeführten Versuchen hat H. Zeuner[1] die Bemerkung gemacht, dass die Annahme, dass der im Gehäuse zurückgebliebene Dampf während des Ausströmens eine adiabatische Zustandsänderung erfahren habe, nicht zulässig sei, weil trotz der sehr kurzen Zeit des Ausflusses von Seiten der Gefässwandungen eine Wärmeabgabe stattfand, welche nicht vernachlässigt werden darf. Die obigen Versuche hätten eine grosse Ähnlichkeit mit jenen Versuchen, welche zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden specifischen Wärmen der atmosphärischen Luft angestellt wurden und bei welchen auch die Luft so lange ausströmte, bis der Druck im Ausflussgefässe auf eine Atmosphäre gesunken war. Die Berechnung dieser Versuche habe aber dann bei Vernachlässigung jener Wärmeabgabe zu Werthen geführt, welche kleiner seien als der Werth 1·410, der allgemein als der genaueste angesehen werde.

Da die Versuche von Hirn und Cazin für das Verhalten des Wasserdampfes von ausserordentlicher Wichtigkeit sind, so ist es nothwendig, die Einwände des H. Zeuner näher zu prüfen. Betrachten wir den letzten Versuch. Es war $p' = 4·275$ Atm., $\vartheta' = 254·7°$ C. und $p'' = 0·967$ Atm., $\vartheta'' = 99·1°$ C. Da bei diesem Versuche der Anfangsdruck am grössten war, so war auch die Ausflusszeit am grössten. Eine angenäherte Rechnung ergibt für diese Ausflusszeit 0·093 Secunden. Indem in dieser kurzen Zeit die Temperatur des Wasserdampfes von

[1] Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, XI, S. 523, 1867.

254·7° auf 99·1° sinkt, entsteht an der Gefässwand ein sehr grosses Temperaturgefälle, durch welches trotz der geringen Wärmeleitungsfähigkeit des Wasserdampfes und trotz der Kürze der Zeit eine beträchtliche Wärmemenge von der Gefässwand abgegeben wird.

Wenn wir also sagen wollten, dass der ganze im Gefäss zurückgebliebene Dampf eine adiabatische Zustandsänderung erfahren habe, so wäre dies entschieden unrichtig. Bei den Versuchen, welche zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden specifischen Wärmen der Gase in der Weise angestellt werden, dass das ursprünglich im Gefäss verdichtete Gas in die freie Atmosphäre austritt, gilt das Gleiche, und die aufgenommene Wärme hat zur Folge, dass mehr Gas ausströmt, als es bei genau adiabatischer Zustandsänderung der Fall wäre, so dass, wenn hierauf das zurückgebliebene Gas bei geschlossenem Gefäss sich bis zur Temperatur der Umgebung erwärmt, die Druckvermehrung zu klein ausfällt. Alle diese Umstände, auf welche H. Zeuner hinwies, sind vollständig richtig, aber sie gelten nicht für die Beobachtungen von Hirn und Cazin, denn die Beobachtung dieser Forscher fand nur in der Axe des Cylinders statt, und zwar auf optischem Wege. Die Frage ist also nicht die, ob der ganze zurückgebliebene Dampf eine adiabatische Zustandsänderung erfuhr, sondern die, ob der Dampf in der Axe des Cylinders eine adiabatische Zustandsänderung durchmachte. Dass aber in der Axe wirklich eine adiabatische Zustandsänderung anzunehmen ist, ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

Der Wasserdampf kann von der Gefässwand Wärme sowohl durch directe Leitung, als auch durch Absorption der Wärmestrahlen aufnehmen. Die letztere tritt im Vergleich zur ersteren ganz zurück. Was die Wärmeleitung anbelangt, so ist leider die Wärmeleitungsfähigkeit des Wasserdampfes nicht bekannt. Um aber den betrachteten Fall beurtheilen zu können, wollen wir uns zunächst einen festen isotropen Körper denken, der den ganzen Raum auf der positiven Seite der x, y-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ausfüllt und dieselbe Wärmeleitungsfähigkeit, dieselbe Dichte und dieselbe specifische Wärme wie die atmosphärische Luft bei dem Drucke

einer Atmosphäre und bei 100° C. hat. Bezeichnen wir die genannten Grössen mit $\varkappa$, μ, c, so soll

$$\varkappa = 0\cdot00005734\left(\frac{g}{cm,\ \sec}\right), \qquad \mu = 0\cdot0009459\left(\frac{g}{cm^3}\right),$$
$$c = 0\cdot23751$$

sein. Der Körper habe bis zu dem Zeitpunkte, von dem aus wir die Zeit zählen, überall die Temperatur A und die xy-Ebene werde zur Zeit $t = 0$ plötzlich auf die Temperatur Null gebracht und dann bei dieser Temperatur erhalten. Für die Temperatur in dem Körper ergibt sich dann das Gesetz:

$$\vartheta = \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}dy,$$

wo

$$a^2 = \frac{\varkappa}{c\mu}$$

ist.

Wir wollen nun in dieser Gleichung $t = 0\cdot1$ Secunden setzen und nachsehen, welchen Werth die Temperatur ϑ für $z = 1\,cm$ hat. Es ist

$$\vartheta = \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2a\sqrt{0\cdot1}}} e^{-y^2}dy = A - \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{2a\sqrt{0\cdot1}}}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

oder

$$\frac{\vartheta}{A} = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{4a^2\times0\cdot1}}}{\sqrt{\pi}}\Big[2a\sqrt{0\cdot1} - \frac{1}{2}(2a\sqrt{0\cdot1})^3 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(2a\sqrt{0\cdot1})^5 - \ldots\Big]$$

oder

$$\frac{\vartheta}{A} = 1 - 0\cdot00001,$$

d. h. die Temperatur wird für $z = 1\,cm$ nach 0·1 Secunden nur um 0·001% herabgesetzt sein. War $A = 155\cdot6$, so beträgt die Temperaturdepression 0·001556° C.

Hirn und Cazin haben die Dimensionen ihres Cylinders nicht angegeben, sondern bloss seinen Inhalt 7·50 *l*. Aus den Dimensionen ihrer Zeichnung wäre zu schliessen, dass die Länge zehnmal grösser war als der Radius, woraus mit Bezug auf den Inhalt die Länge = 62 *cm* und der Radius = 6·2 *cm* folgen würde. Hätte der eben betrachtete feste Körper die Form dieses Cylinders und wäre seine ursprüngliche Temperatur = 155·6° C. gewesen, dann würde, wenn zur Zeit $t = 0$ die ganze Oberfläche auf 0° C. gebracht und hernach bei dieser Temperatur erhalten würde, die Abkühlung in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0·1$ Secunden so wenig in die Tiefe dringen, dass die Temperatur in jenen Punkten, welche von der Oberfläche 1 *cm* weit entfernt sind, nur um 0·001556° C. sinkt. Dagegen ist allerdings die Abkühlung in den Punkten, welche sehr nahe an der Oberfläche liegen, sehr gross, so dass auch die Wärmemenge beträchtlich ist, welche aus der Oberfläche austritt.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich nun sofort, dass, wenn der cylindrische Körper ursprünglich die Temperatur 100° C. hat und die ganze Oberfläche zur Zeit $t = 0$ auf 255·6° C. gebracht und hernach bei dieser Temperatur erhalten wird, die Erwärmung in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0·1$ Secunden so wenig in die Tiefe dringt, dass die Temperatur in jenen Punkten, welche von der Oberfläche 1 *cm* weit entfernt sind, nur um 1·001556° C. steigt.

Um die Wärmemenge zu finden, welche in dem früheren Falle aus der Oberfläche des cylindrischen Körpers in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0·1$ Secunden austritt, kehren wir wieder zu der obigen Gleichung für ϑ zurück. Die Wärmemenge, welche in der Zeit dt durch die Flächeneinheit einer zur z-Axe senkrechten Ebene von der Abscisse z in der Richtung gegen die xy-Ebene hindurchtritt, ist gleich

$$dQ = \varkappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dt = \frac{A\varkappa}{a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4a^2t}} dt.$$

Für $z = 0$ ist diese Menge gleich

$$dQ = \frac{A\varkappa}{a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} dt$$

und somit die Wärmemenge, welche in der Zeit von $t = 0$ bis $t = t$ aus der xy-Ebene pro Flächeneinheit ($1\ cm^2$) austritt, gleich

$$Q = \frac{2A\varkappa}{a\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{t}.$$

Setzen wir hierin $t = 0 \cdot 1$ und für $\varkappa$ und a die obigen Werthe ein, dann ist

$$Q = 0 \cdot 00004 A.$$

Und setzen wir hierin $A = 155 \cdot 6$, dann ist

$$Q = 0 \cdot 006224\ g\ \text{cal}.$$

Hat der Körper die Gestalt des Cylinders von Hirn und Cazin und war seine Temperatur ursprünglich 155·6° C., dann können wir die letzte Formel mit grosser Annäherung zur Berechnung seines Wärmeverlustes in dem Falle benützen, dass die Oberfläche plötzlich auf 0° C. gebracht und dann bei dieser Temperatur erhalten wird. Nach den erwähnten Dimensionen hat die Oberfläche einen Inhalt von $2657\ cm^2$; es tritt somit in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 0 \cdot 1$ Secunden die Wärmemenge

$$0 \cdot 006224 \times 2657 = 16 \cdot 8\ g\ \text{cal}.$$

aus. Die gleiche Wärmemenge muss in dem zweiten oben betrachteten Falle eintreten.

Bei dem letzten Versuche von Hirn und Cazin, bei dem die Ausflusszeit am grössten, und zwar 0·093 Secunden war, muss die Wärmemenge, welche während dieser Zeit von der Gefässwand an den zurückgebliebenen Wasserdampf überging, von derselben Ordnung gewesen sein; sie war also im Vergleich zum Wasserwerth des zurückgebliebenen Dampfes wohl sehr beträchtlich, aber wir sehen aus dem Vorhergehenden zugleich, dass die Wärme während der Ausflusszeit nur in eine sehr geringe Tiefe eindringen konnte, so dass die Axe davon unbeeinflusst blieb.

H. Zeuner machte in der erwähnten Notiz auch die Bemerkung, dass der Dampf im Gehäuse sich während des Ausströmens in heftiger wirbelnder Bewegung befinde, wodurch

Wärme von der Gefässwand durch Convection ins Innere übertragen werde. Dieser Ansicht kann ich aber nicht zustimmen. Wohl entstehen dann, wenn in dem Gefässe wie bei der Versuchsanordnung von Clement und Desormes ursprünglich eine Verdünnung ist und dann die äussere Luft in Form eines Strahles einströmt, heftige Wirbelbewegungen, da der Strahl sich am Boden des Gefässes nach allen Seiten hin theilt, beim Ausströmen aber sind die Verhältnisse anders. Dass beim Ausströmen keine Wirbel im Gefässe entstehen, dafür spricht die Beobachtung bei den incompressiblen Flüssigkeiten. Ich habe bei der Beobachtung der Stromlinien beim Abfluss einer Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung im Boden des Gefässes[1] ein ausserordentlich empfindliches Mittel angewendet, wodurch jede auch noch so leise Bewegung sichtbar wurde, und habe bei meinen zahlreichen Versuchen niemals gesehen, dass der Ausfluss eine Wirbelbewegung im Gefässe hervorruft.

Auf Grund dieser Erwägungen sind wir demnach berechtigt, in der Gleichung

$$\frac{p'}{p''} = \left(\frac{278+\vartheta'}{273+\vartheta''}\right)^n,$$

in welcher $n = 4\cdot2319$ ist, das richtige Gesetz der adiabatischen Zustandsänderung des Wasserdampfes zu erblicken. Es soll nun auseinandergesetzt werden, in welcher Weise wir aus den Versuchen von Hirn und Cazin auf die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke schliessen können.

Wir gehen von einer Betrachtung aus, welche H. Zeuner[2] zu einem anderen Zwecke angestellt hat. Zwei Punkten der Grenzcurve GG des Wasserdampfes mögen die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2, die Spannungen p_1 und p_2 und die specifischen Volumina v_1 und v_2 entsprechen. Wir ziehen durch sie die Adiabaten A_1 und A_2 für das Gebiet der überhitzten Dämpfe. Die Entropie habe für diese Adiabaten die Werthe S_1 und S_2. Man kann nun die Differenz $S_2 - S_1$ auf zweierlei Weise

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II. a, November 1896.

[2] Techn. Thermodynamik, II, S. 232, 1890.

erhalten; einmal, indem man für die beiden erwähnten Punkte der Grenzcurve die Ausdrücke für die Entropie aufstellt und subtrahirt, und das anderemal, indem man von dem Zustande (p_2, v_2, ϑ_2) längs einer Curve constanten Druckes $(p = p_2)$ zur Adiabate A_1 übergeht. Dem Punkte, in welchem die Adiabate A_1 von der Curve constanten Druckes geschnitten wird,

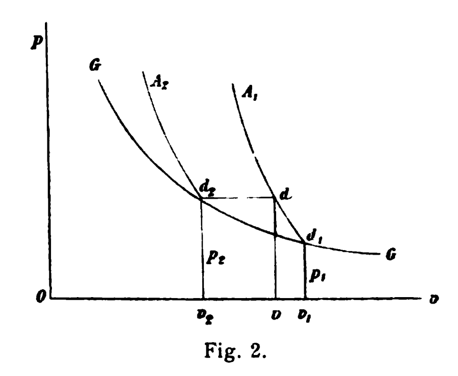


Fig. 2.

mögen die Werthe v, ϑ entsprechen. Ferner entspricht ihm der Druck p_2. Bezeichnen wir mit c_p die specifische Wärme für constanten Druck, dann ist im letzteren Falle

$$S_1 - S_2 = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta}. \tag{2}$$

Die Entropie der Gewichtseinheit eines gesättigten Dampfes bei der Temperatur $\vartheta°$ C. ist

$$S = S_0 + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{c d\vartheta}{273+\vartheta} + \frac{r}{273+\vartheta}, \tag{3}$$

wo ϑ_0 eine gewisse Anfangstemperatur, S_0 die ihr entsprechende Entropie der Flüssigkeit, c die specifische Wärme der Flüssigkeit und r die Verdampfungswärme bedeuten. Daraus folgt

$$S_2 - S_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{c d\vartheta}{273+\vartheta} + \frac{r_2}{273+\vartheta_2} - \frac{r_1}{273+\vartheta_1}. \tag{4}$$

Nun ist

$$\frac{r_2}{273+\vartheta_2} - \frac{r_1}{273+\vartheta_1} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r}{273+\vartheta}\right) d\vartheta,$$

also ist

$$S_2 - S_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{c}{273+\vartheta} + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r}{273+\vartheta} \right) \right] d\vartheta =$$

$$= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{c + \frac{dr}{d\vartheta}}{273+\vartheta} - \frac{r}{(273+\vartheta)^2} \right] d\vartheta.$$

Nach Regnault gilt für Wasser die Beziehung

$$c + \frac{dr}{d\vartheta} = 0 \cdot 305;$$

somit ist

$$S_2 - S_1 = 0 \cdot 305 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{273+\vartheta} - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{r d\vartheta}{(273+\vartheta)^2} =$$

$$= 0 \cdot 305 \log \text{nat} \frac{273+\vartheta_2}{273+\vartheta_1} - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{r d\vartheta}{(273+\vartheta)^2}. \qquad 5)$$

Hirn und Cazin haben ihre Versuchsresultate, um sie leichter mit einander vergleichen zu können, auf einen und denselben Werth des Druckes, nämlich auf den Druck einer Atmosphäre reducirt. Wir wollen diesen Druck mit p_a bezeichnen; ihm entspricht die Siedetemperatur $\vartheta_a = 100°$ C. Die Reduction geschah in der Weise, dass jener Druck p_0 und jene Temperatur ϑ_0 ermittelt wurden, für welche die Beziehungen

$$\frac{p_0}{p_a} = \frac{p'}{p''} \quad \text{und} \quad \frac{273+\vartheta_0}{273+100} = \frac{273+\vartheta'}{273+\vartheta''}$$

bestehen. Diese Werthe bilden die fünfte und sechste Spalte der obigen Tabelle. Da die rechten Seiten der letzten Beziehungen die Gleichung 1) erfüllen, so thun es auch die linken Seiten, d. h. die Werthe p_0 und ϑ_0 gehören einer und derselben Adiabate an, und zwar jener, welche durch den Punkt ($p_a = 1$ Atm. und $\vartheta_a = 100°$ C.) der Grenzcurve des Wasserdampfes hindurchgeht. Diese Adiabate wählen wir nun zur Adiabate A_1. Es ist dann in den obigen Gleichungen $\vartheta_1 = \vartheta_a = 100$ zu setzen. Ferner ist $\vartheta = \vartheta_0$ zu nehmen und ϑ_2 als die Siedetemperatur zu betrachten, welche zu dem Drucke $p_0 = p_2$ gehört. In der obigen Tabelle bilden die Werthe von ϑ_2 die achte Spalte.

Da der höchste Werth von ϑ_2 gleich 147·63° C. ist, so wollen wir die Verdampfungswärme des Wassers zwischen 100° und 150° C. durch die Formel

$$r = 536\cdot500 - 0\cdot70764(\vartheta - 100) - 0\cdot000132(\vartheta - 100)^2$$

darstellen. Es ist darnach

Für $\vartheta =$	110°	120°	130°	140°	150°
$r =$	529·410	522·294	515·152	507·983	500·788.

Die Tabellen des H. Zeuner[1] liefern für dieselben Temperaturen

$$r = 529\cdot409 \quad 522\cdot294 \quad 515\cdot153 \quad 507\cdot985 \quad 500\cdot788.$$

Die Zahlen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Wenn wir die Formel für r in der Form

$$r = 782\cdot085 - 0\cdot60917(273+\vartheta) - 0\cdot000132(273+\vartheta)^2$$

schreiben und in die Gleichung 5) einsetzen, so wird

$$S_2 - S_1 = 0\cdot305 \log\text{nat} \frac{273+\vartheta_2}{373} - 782\cdot085 \frac{\vartheta_2 - 100}{373(273+\vartheta_2)} + 0\cdot60917 \log\text{nat} \frac{273+\vartheta_2}{373} + 0\cdot000132(\vartheta_2 - 100)$$

oder

$$S_2 - S_1 = 0\cdot91417 \log\text{nat} \frac{273+\vartheta_2}{373} - 2\cdot0967 \frac{\vartheta_2 - 100}{273+\vartheta_2} + 0\cdot000132(\vartheta_2 - 100). \tag{6}$$

Diese Gleichung wollen wir jetzt mit der Gleichung 2) zusammenfassen und in letzterer $\vartheta = \vartheta_0$ setzen. Es wird dann

$$\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_0} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} = -0\cdot91417 \log\text{nat} \frac{273+\vartheta_2}{373} + 2\cdot0967 \frac{\vartheta_2 - 100}{273+\vartheta_2} - 0\cdot000132(\vartheta_2 - 100).$$

Wenn wir nun daraus den mittleren Werth von c_p zwischen den Temperaturen ϑ_2 und ϑ_0 bestimmen wollen und

[1] Techn. Thermodynamik, II, Anhang, 1890.

dabei die natürlichen Logarithmen durch die gemeinen ersetzen, so erhalten wir die Gleichung

$$c_p \log \frac{273+\vartheta_0}{273+\vartheta_2} = -0\cdot 91417 \log \frac{273+\vartheta_2}{373} + \\ + 0\cdot 9106 \frac{\vartheta_2 - 100}{273+\vartheta_2} - 0\cdot 0000573(\vartheta_2 - 100). \qquad 7)$$

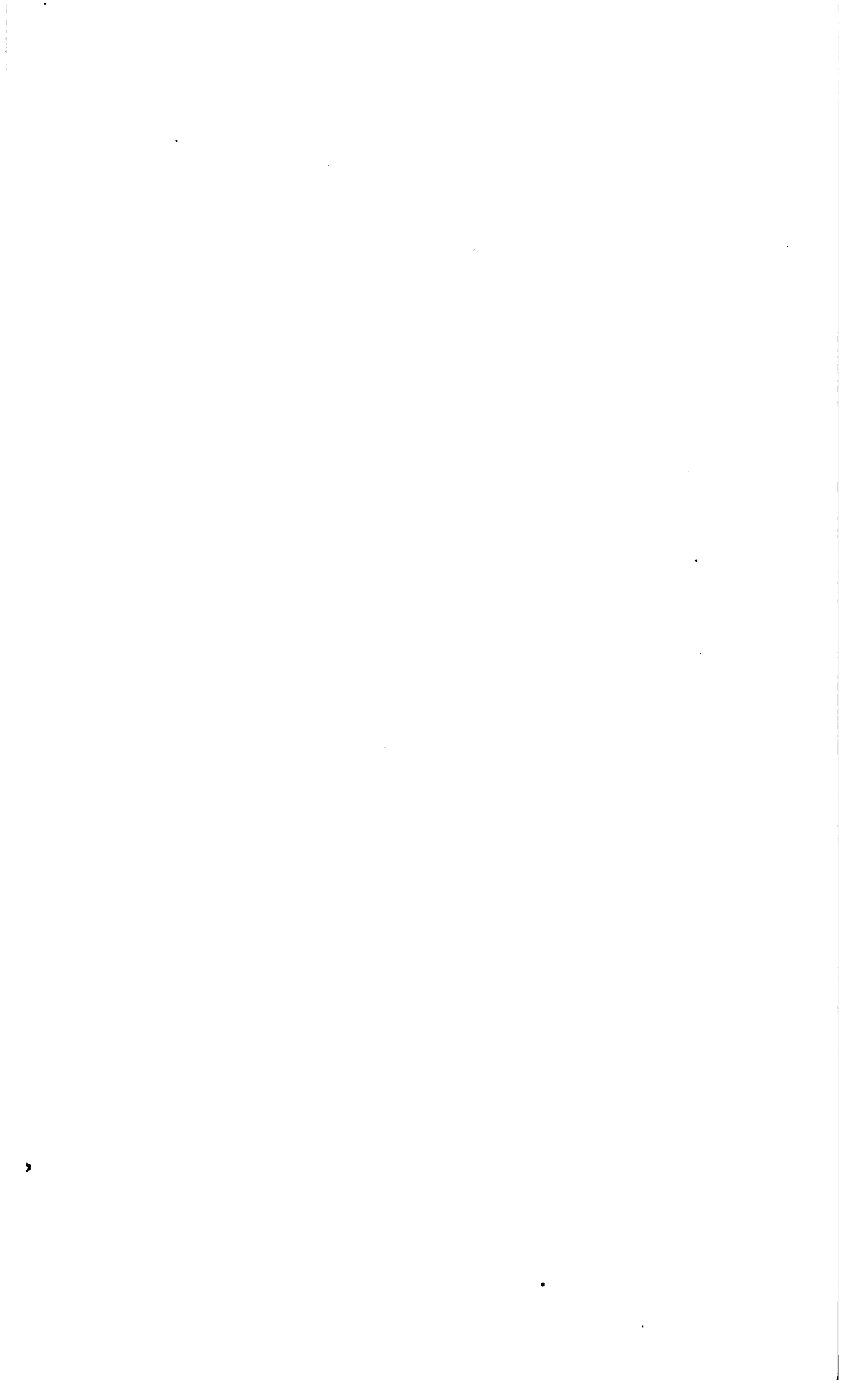
Die Formel gibt für c_p die folgenden Werthe:

Druck in Atm.	Temperaturintervall	c_p
1·419	von 110·08° bis 131·94°	0·5309
1·712	» 115·75 » 152 25	0·5022
2·156	» 122·98 » 174·60	0·5221
2·262	» 124·53 » 179·60	0·5234
2·503	» 127·84 » 189·94	0·5286
2·577	» 128·80 » 192·81	0·5310
2·703	» 130·39 » 198·68	0·5265
3·314	» 137·34 » 220·32	0·5356
3·870	» 142·80 » 240 24	0·5267
4 420	» 147·63 » 255·98	0·5291

Die Zahlen für c_p deuten unzweifelhaft auf einen constanten Werth hin, so dass wir den Satz aussprechen können:

Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke hat von der Condensationsgrenze bis zu jener Adiabate, welche die Condensationsgrenze im Punkte $\vartheta = 100°$ C., $p = 1$ Atm. trifft, für jeden Druck denselben mittleren Werth.

Dieser constante Werth ist 0·5256. Da die Zustandsänderung bei constantem Drucke von der Condensationsgrenze bis zu der genannten Adiabate bis zur Null abnimmt, wenn wir den Anfangspunkt der Zustandsänderung mit dem Punkte $\vartheta = 100°$ C., $p = 1$ Atm. der Condensationsgrenze zusammenfallen lassen, so folgt aus dem obigen Satze, dass die specifische Wärme des Wasserdampfes für constanten Druck bei dem Drucke einer Atmosphäre und bei 100° C. gleich 0·5256 ist.



Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 60 kr. = 5 Mk. 20 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. VIII. UND IX. HEFT.

JAHRGANG 1897. — OCTOBER UND NOVEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHANDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8. und 9. Heftes October und November 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 40 kr. = 2 Mk. 80 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XIX. SITZUNG VOM 7. OCTOBER 1897.

Erschienen sind im Laufe der akademischen Ferien: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. b, Heft IV—VI (April bis Juni 1897); Abth. III, Heft V (Mai). — Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft VI—VII (Juni und Juli) und Heft VIII (August). — Der akademische Almanach für 1897 (47. Jahrgang).

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident der kaiserlichen Akademie Prof. E. Suess, begrüsst die Mitglieder der Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien.



Der Vorsitzende gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 30. Juli d. J. erfolgte Hinscheiden des Präsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

Seiner Excellenz

des Herrn

k. u. k. wirklichen Geheimen Rathes

DR. ALFRED RITTER VON ARNETH,

Directors des k. k. geheimen Haus-, Hof- und Staatsarchives.

Die Mitglieder geben ihr Beileid über diesen schmerzlichen Verlust durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Secretär theilt mit, dass die wissenschaftliche Expedition S. M. Schiff »Pola« in die südliche Hälfte des Rothen Meeres am 4. September l. J. den Centralhafen von Pola verlassen hat und dass die Mitglieder derselben bei der Abfahrt von Seite der kaiserlichen Akademie auf telegraphischem Wege beglückwünscht worden sind.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar: Herr Prof. Dr. Karl Exner in Innsbruck für die Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede und die Herren Geh. Regierungsrath Director Dr. H. C. Vogel in Potsdam und Director A. Karpinsky in St. Petersburg für die Wahl zu ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Classe.

Herr Dr. Hermann F. Müller, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, dankt für die ihm als Mitglied der wissenschaftlichen Expedition nach Bombay durch die kaiserliche Akademie ermöglichte Gelegenheit zu Studien über die indische Beulenpest.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner übersendet eine Abhandlung von Dr. Eduard Graeffe, Inspector der zoologisch-zootomischen Übungsstation in Triest, betitelt: »Vorläufiger Bericht über die mikroskopischen Organismen des aus der Tiefe des Rothen Meeres gedredschten Schlammes der Expedition S. M. Schiff »Pola« in den Jahren 1895—1896«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet eine Abhandlung des Herrn A. Thraen, Pfarrer in Dingelstaedt, betitelt: »Bestimmung der Bahn des periodischen Kometen von Wolf (Komet 1884 III und 1891 II)«.

Die k. u. k. Marine-Section übermittelt zu den bereits vorgelegten und für die akademischen Denkschriften bestimmten wissenschaftlichen Arbeiten über die von den k. u. k. See-Officieren während der Reise in die nördliche Hälfte des Rothen Meeres 1895—1896 ausgeführten Beobachtungen weitere zwei Arbeiten, und zwar:

V. »Meteorologische Beobachtungen« und

VI. »Geodätische Untersuchungen«,

beide ausgeführt von dem Linienschiffs-Lieutenant Cäsar Arbesser v. Rostburg.

Das Mitglied des wissenschaftlichen Stabes der Expedition S. M. Schiff »Pola« in das Rothe Meer, Herr Regierungsrath Prof. J. Luksch in Fiume, übersendet sein Manuscript über die in den Jahren 1895—1896 in der nördlichen Hälfte dieses Meeres ausgeführten »Physikalischen Untersuchungen«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über das innere Virial eines elastischen Körpers«, von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
2. »Über den Feuerbach'schen Kreis«, von Prof. Dr. Benedikt Sporer am königl. würtemb. Gymnasium in Echingen.
3. »Eine neue Theorie des Sonneninnern«, von Herrn Knopslich-Rowel, d. Z. in Berlin.

Herr Max v. Groller, k. u. k. Oberst i. R. in Wien, übersendet einen vorläufigen Bericht über seine im Monat August l. J. mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführten Vorarbeiten zur Vermessung des Pasterzen-Gletschers.

Herr Josef E. Pfiel, Chemiker in Wien, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift: »Zeichnung und Beschreibung eines neuartigen Motors für expandirende Gase oder Dämpfe«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus seinem Laboratorium:

1. »Über das aus Isobutyraldehyd und Benzaldehyd entstehende Glykol und sein Verhalten gegen Schwefelsäure«, von Dr. Rich. Reik.
2. »Über Reduction der Kohlensäure bei gewöhnlicher Temperatur. II. Das Verhalten des Magnesiums«, von Ad. Lieben.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende fünf Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

1. »Über die Dimorphie der α-Hemipinmethylestersäure«, von Dr. Rud. Wegscheider.
2. »Untersuchungen über die Esterbildung«, von Dr. Rud. Wegscheider.
3. »Über eine allgemein anwendbare Methode der Bestimmung von Acetylgruppen in organischen Verbindungen«, von Dr. Franz Wenzel.
4. »Über die directe Einführung von Hydroxyl in das β-Oxypyridin«, von Rich. Kudernatsch.
5. »Über das β-Acetacetylpyridyl«, von Andor Ferenczy.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Herrn Eduard Mazelle, Adjunct am astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest, betitelt: »Tägliche Periode des Niederschlages in Triest«.

Herr Prof. J. Liznar in Wien überreicht den II. Theil seiner Arbeit, betitelt: »Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 ausgeführten Messungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Cabreira A., Sur la Géométrie des courbes transcendantes. Lissabon, 1896. Traduit du Portugais par Jorge Frederico D'Avillez. 8°.

Dosamantes J. C., Théorie sur les rayons invisibles (Cathodiques et X). Mexico, 1897. 8°.

Foveau de Courmelles, Traité de Radiographie médicale et scientifique. Paris, 1897. 8°.

Hanssen C. J. T., Reform chemischer und physikalischer Berechnungen. München, 4°.

Lilje C. A., Die Gesetze der Rotationselemente der Himmelskörper. Stockholm, 1897, 8°.

Socolow S., Des Planètes se trouvant vraisemblement au delà de Mercure et de Neptune. Moskau, 1897. 8°.

XX. SITZUNG VOM 14. OCTOBER 1897.

Herr Prof. Dr. Carl Gegenbaur in Heidelberg dankt für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Mach überreicht eine von M. U. Dr. Ludwig Mach in Jena ausgeführte Arbeit: »Optische Untersuchung der Luftstrahlen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Innsbruck: »Über die magnetische Nachwirkung bei verschiedenen Feldstärken«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht eine Arbeit von Dr. Adolf Steuer in Wien, betitelt: »Sapphirinen des Rothen Meeres, gesammelt während der Expedition S. M. Schiff »Pola«, October 1895 bis Mai 1896«.

Über die magnetische Nachwirkung bei verschiedenen Feldstärken

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

Im 106. Bande dieser Sitzungsberichte habe ich einige Beobachtungen über die Magnetisirung weicher, ausgeglühter Eisenstäbe und die dabei auftretende magnetische Nachwirkung mitgetheilt. Die Beobachtungen wurden theils magnetometrisch gemacht, indem der Zuwachs der Magnetisirungsintensität in der Zeit von 4—60 Secunden nach Erregung des Feldes gemessen wurde, theils untersuchte ich den Vorgang mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers und eines Hiecke'schen Fallapparates. Diese letzte Untersuchungsmethode diente speciell zu dem Zwecke, um zu zeigen, dass auch beim weichen Eisen ein Theil der Magnetisirung sozusagen momentan auftritt, d. h. dass dessen Entwicklung nur durch die Selbstinduction und die Foucault'schen Ströme bedingt ist, und dass sich an diesen Theil sodann die magnetische Nachwirkung anschliesst.

Was nun die Abhängigkeit der magnetischen Nachwirkung von der Feldstärke anbelangt, so hat die Untersuchung gezeigt, dass jener Theil der magnetischen Nachwirkung, welcher in die Zeit von 4 auf 60 Secunden nach Erregung des Feldes fällt, zwar mit der Feldstärke dem absoluten Werthe nach wächst; drückt man ihn jedoch in Theilen der gesammten temporären Magnetisirungsintensität aus, so nehmen die Werthe rasch ab und sind bei Feldstärken von einigen Einheiten kaum mehr nennenswerth.

Nachfolgend will ich noch einige Versuche mit dem ballistischen Galvanometer und Hiecke's Fallapparat beschreiben, welche zeigen, dass 1. auch jener Theil der magnetischen Nachwirkung (ausgedr. in $^0/_0$), welcher sich in der ersten Zeit nach Erregung des Feldes (etwa bis 3 Secunden) entwickelt, mit der Feldstärke rasch abnimmt, sobald man mit Feldstärken zu thun hat, in denen die Susceptibilität schnell wächst, und dass 2. die magnetische Nachwirkung nahezu constant ist in sehr schwachen Feldern, wo die Magnetisirungsintensität der Feldstärke nahezu proportional verläuft.

Zunächst muss ich jedoch auf einen Fehler zurückkommen, welcher einigen Angaben der eingangs erwähnten Abhandlung anhaftet. Beim Vergleich der magnetometrisch beobachteten Verhältnisse der Magnetisirungsintensität für Stahl (St.) und Eisen (Ew.) mit den entsprechenden Daten, wie sie mit dem ballistischen Galvanometer beim Commutiren des Feldes erhalten wurden, stellte es sich heraus, dass die ersteren Werthe für die Beobachtungszeit 4 Secunden nach Erregung des Feldes nur ebenso gross, ja zum Theile kleiner ausfielen als die letzteren. Mit Rücksicht auf die kurze Schwingungsdauer der Galvanometernadel stimmte dies nicht mit den übrigen Beobachtungen. In Wirklichkeit verhält sich die Sache so, dass die dort gemachte Berechnung die beim weichen Eisen nach 4 Secunden beobachteten Ausschläge zu klein erscheinen lässt und dass die bei vertical gestellter Spule nach 4 Secunden magnetometrisch beobachteten Verhältnisse für Ew./St. bei $H = 0 \cdot 146$ und $0 \cdot 047$ thatsächlich die Werthe $2 \cdot 43$, respective $2 \cdot 03$ haben, denen die ballistischen Verhältnisse $2 \cdot 19$ und $1 \cdot 81$ gegenüberstehen, die kleiner sind als die ersten, was nun mit den sonstigen Beobachtungen übereinstimmt. Obwohl es darnach nicht nothwendig ist, anzunehmen, dass sich die magnetische Nachwirkung in der Mitte schneller entwickelt als an den Enden, so schien mir doch die Möglichkeit einer für die verschiedenen Theile des Stabes ungleichzeitigen Ausbildung dieser Erscheinung ganz gut möglich, und ich machte in dieser Richtung einige orientirende Versuche. Zu diesen Beobachtungen bediente ich mich ebenfalls des ballistischen Galvanometers und des Hiecke'schen Fallapparates.

Eine Secundärspule wurde an verschiedene Stellen (Mitte und beide Enden) eines in einer Magnetisirungsspirale liegenden weichen, ausgeglühten Eisenstabes gelegt und an jeder Stelle folgende Beobachtungen gemacht. Es wurde der inducirte Strom an dem mit der Secundärspule verbundenen Galvanometer beobachtet 1. wenn der Primärstrom mit der Hand unterbrochen und die Secundärleitung geschlossen gehalten wurde; in diesem Falle konnte ein Theil der magnetischen Nachwirkung, wie dies durch die Schwingungsdauer der Galvanometernadel bedingt ist, ablaufen; 2. wenn der Primärstrom und kurze Zeit darauf die Secundärleitung durch das fallende Gewicht des Hiecke'schen Apparates unterbrochen wurde; in diesem Falle wurde nur der momentan abfallende Theil der Magnetisirungsintensität beobachtet.

Als Galvanometer diente wieder ein Rubens-Du Bois'sches Instrument mit einer Schwingungsdauer von 5·2 Secunden (einf.) und mit parallel geschalteten feindrahtigen Rollen. Das logarithmische Decrement (brig.) war bei geschlossener Galvanometerleitung 0·364 und bei offener 0·150. In vielen Fällen war vor dem Galvanometer ein Nebenschluss angebracht.

Die Primärrolle (auf ein Glasrohr gewickelt) hatte eine Länge von 94 *cm* und 10·5 Windung pro Längeneinheit. Die Secundärrolle, ebenfalls auf Glas gewickelt, war 6·3 *cm* lang und hatte insgesammt 1400 Windungen.

Am Fallapparat diente der tiefste Contact zum Öffnen der Secundärleitung; zwei andere waren für die Unterbrechung des Primärstromes bestimmt. Die Zeitdifferenz zwischen dem Öffnen der beiden Kreise betrug in einem Falle 0·134 und im anderen 0·031 Secunden. Die Secundärrolle hatte insbesondere bei eingelegtem Eisenstab und namentlich bei höheren Feldstärken einen ziemlich grossen Selbstinductionscoëfficienten, so dass der Ablauf des inducirten Stromes verhältnissmässig langsam vor sich ging. Durch Beobachtungen bei beiden Zeitintervallen konnte man einen Aufschluss erhalten, wie weit der inducirte Magnetismus thatsächlich verschwunden war.

Nachfolgend bedeutet:

α den Galvanometerausschlag beim Öffnen der Primärleitung mit der Hand, wobei die Secundärleitung geschlossen blieb.

β und γ die Galvanometerausschläge beim Öffnen der Primär- und Secundärleitung durch den Fallapparat, und zwar für das Zeitintervall 0·134, respective 0·031 Secunden. Diese Ausschläge sind überall auf die Dämpfung bei geschlossener Secundärleitung reducirt.

Es sei noch erwähnt, dass die angeführten α, β und γ Mittelwerthe sind, die aus mehreren Beobachtungen abgeleitet wurden. Die Beobachtungen in der Mitte und an den beiden Enden eines 6 *mm* dicken und 50 *cm* langen, ausgeglühten weichen Eisenstabes ergaben nun bei den unten verzeichneten Feldstärken H folgende Resultate:

$H = 0·065$

	Mitte	$\frac{\alpha}{\beta}$	1. Ende	$\frac{\alpha}{\beta}$	2. Ende	$\frac{\alpha}{\beta}$
α	51·0	1·24	26·0	1·21	27·7	1·25
β	41·0		21·6		22·1	

$H = 0·194$

	Mitte	$\frac{\alpha}{\beta}$	1. Ende	$\frac{\alpha}{\beta}$	2. Ende	$\frac{\alpha}{\beta}$
α	186·5	1·19	89·6	1·16	93·0	1·17
β	156·4		77·2		79·6	

Aus den Verhältnissen $\frac{\alpha}{\beta}$ folgt nicht mit Sicherheit, dass sich der Vorgang der magnetischen Nachwirkung an verschiedenen Stellen des Stabes in zeitlicher Beziehung ungleich entwickeln würde.

Beobachtungen beim Zeitintervall von 0·031 Secunden lehrten, dass die durch Selbstinduction und Foucault'sche Ströme bedingte Verzögerung in diesem Falle nicht über 0·134 Secunden hinausgeht. Ein Umstand verdient jedoch erwähnt zu werden: Während beim grösseren Zeitintervall die unter gleichen Bedingungen nacheinander beobachteten Ausschläge sowohl in der Mitte, als auch an den beiden Enden ziemlich gleich ausfielen und nur geringe Abweichungen zeigten, war dies beim kleineren Zeitintervall anders. Hier zeigten die Ausschläge nur bei den Beobachtungen in der Mitte eine gute Übereinstimmung, während sie bei den Beobachtungen an den beiden Enden ziemlich unregelmässig hin- und hersprangen,

so dass es den Eindruck machte, als wenn die Molecularmagnete erst nach einigen Schwingungen in ihre definitive Ruhelage gelangen würden.

Nun mögen einige Beobachtungen angeführt werden, welche sich auf die Grösse der magnetischen Nachwirkung bei verschiedenen Feldstärken beziehen, und zwar speciell auf jenen Theil, welcher in den ersten Secunden nach Unterbrechung des Feldes auftritt. Die Versuche wurden mit den soeben beschriebenen Apparaten ausgeführt. Die Daten der Tabelle I beziehen sich auf einen 6 *mm* dicken, 50 *cm* langen, jene der Tabelle II auf einen 4 *mm* dicken und ebenfalls 50 *cm* langen Eisendraht. Beide Drähte wurden auf der Kohlengluth ausgeglüht und ungefähr 6 Wochen nach dem Ausglühen untersucht. Tabelle III enthält die gleichen Versuche für einen unausgeglühten 6 *mm* dicken, 50 *cm* langen weichen Eisenstab von gleicher Provenienz wie die früheren. Die Daten dieser Tabelle sollen hauptsächlich zeigen, wie gross der Einfluss der Selbstinduction auf den zeitlichen Ablauf des inducirten Stromes ist; denn bei diesem Stabe war die magnetische Nachwirkung ausserordentlich klein.

n gibt den Theil der magnetischen Nachwirkung, welcher in α enthalten ist, und zwar ausgedrückt in Procenten von β. Zunächst lehren die Werthe der Tabelle III, dass bei diesem Stabe der inducirte Strom beim Zeitintervall von 0·134 Secunden nur etwa bis zu $H = 1 \cdot 12$ noch vollständig abläuft, was man ungefähr aus dem Vergleich der Werthe für β und γ entnehmen kann. Bei höheren Feldstärken geht die Verzögerung des Ablaufes des inducirten Stromes in Folge der Selbstinduction wahrscheinlich über dieses Zeitintervall hinaus.

Tabelle I und II zeigen nun, dass bei diesen Stäben eine beträchtliche magnetische Nachwirkung auftritt, deren procentischer Werth gegen den momentan ablaufenden Theil der Magnetisirungsintensität jedoch mit der Feldstärke sehr rasch abnimmt. Die Untersuchung der Abnahme lässt sich nach dieser Methode und mit der hier gebrauchten Secundärrolle nicht bis zu noch grösseren Feldstärken verfolgen, weil die zeitliche Verzögerung durch die Selbstinduction zu gross wird. Schon in Tabelle I erscheint bei $H = 3 \cdot 04$ die Angabe über

die magnetische Nachwirkung durch diese Verzögerung soweit gestört, dass *n* sogar etwas grösser erscheint als bei der vorhergehenden Feldstärke, was jedenfalls für die magnetische Nachwirkung nicht zutrifft. Ähnliche Verhältnisse finden sich auch in Tabelle II.

Tabelle I.

H	α	γ	β	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	n%
0·033	25·7	20·8	21·3	1·236	1·207	21
0·065	53·3	42·4	41·3	1·257	1·290	29
0·194	201	166	172	1·210	1·168	17
0·517	702	586	663	1·198	1·059	6
1·12	1999	1586	1920	1·260	1·041	4
3·04	8221	5689	7643	1·445	1·089	9

Tabelle II.

H	α	γ	β	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	n%
0·065	21·2	17·7	17·7	1·200	1·200	20
0·194	71·7	59·8	60·3	1·200	1·189	19
0·517	250	224	224	1·116	1·116	12
1·12	719	668	684	1·076	1·051	5
3·04	3187	2738	2954	1·164	1·078	8

Tabelle III.

H	α	γ	β	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	n%
0·065	34·5	34·2	34·2	1·009	1·009	0·9
0·194	118·6	116·6	117·1	1·017	1·013	1·3
0·517	396	387	393	1·024	1·007	0·7
1·12	1097	1034	1076	1·061	1·017	1·7
3·04	4340	3650	4087	1·189	1·062	6·2

Während durch diese und andere bereits beschriebene Versuche zur Genüge erwiesen erscheint, dass der procentische Werth der magnetischen Nachwirkung in jenem Theile des Magnetisirungsgebietes, in dem die Susceptibilität rasch ansteigt, mit der Feldstärke ziemlich schnell abnimmt, schien es mir nicht ohne Interesse, zu untersuchen, wie die magnetische Nachwirkung bei schwachen Feldstärken verläuft, in denen die Magnetisirungsintensität mit der Feldstärke nahezu proportional geht. Einige Versuche, welche ich bei einer früheren Gelegenheit nach dem magnetometrischen Verfahren anstellte, ergaben bei einigen niederen Feldstärken folgende in Tabelle IV enthaltenen Daten für die Zunahme Δ (ausgedrückt in Scalentheilen) der Magnetisirungsintensität in der Zeit von 2·8 bis 60 Secunden nach Commutirung des Feldes, und zwar bei einem 4 *mm* dicken, 50 *cm* langen Stabe.

Tabelle IV.

H	Δ	$\frac{\Delta}{H}$
0·047	3·4	72
0·094	7·1	75
0·141	9·9	70
0·188	11·4	62

Wie die Tabelle lehrt, sind die Verhältnisse $\frac{\Delta}{H}$ in einem kurzen Intervall, in welchem ja auch die Magnetisirungsintensität nahezu proportional der Feldstärke steigt, constant.

Mit den hier verwendeten magnetometrischen Hilfsmitteln konnten jedoch die Beobachtungsgrenzen nach unten nicht erweitert werden; ich versuchte daher dieses Ziel mit Hilfe des ausserordentlich empfindlichen ballistischen Galvanometers und einer Secundärspule von sehr vielen Windungen zu erreichen. Da bei diesen schwachen Feldern die inducirte Magnetisirungsintensität sehr klein ist, so war selbst bei einer mit

mehreren tausend Windungen gewickelten Spule, eine durch die Selbstinduction bewirkte Verzögerung, welche über das Zeitintervall von 0·134 Secunden hinausreichen würde, nicht zu befürchten. Es wurde daher eine neue, 11 *cm* lange Secundärspule mit 7688 Windungen, auf ein der Länge nach geschlitztes Messingrohr gewickelt. Ebenso wurde für diese Versuche eine neue, etwas weitere Primärrolle von 98 *cm* Länge auf einem Glasrohr hergestellt.

Bei dieser Gelegenheit müssen noch die Thermoströme erwähnt werden, welche die Versuche nach dieser Methode sehr schwierig machen und eine ausserordentliche Vorsicht erheischen, falls man bei den niedersten Feldstärken verlässliche Resultate erzielen will. In der Secundärleitung waren immer thermoelektrische Kräfte vorhanden, welche Ströme erzeugten, die durch das Öffnen der Secundärleitung unterbrochen wurden. In vielen Fällen erwies es sich als sehr vortheilhaft, die Ablenkung in Folge des thermoelektrischen Stromes durch eine andere constante schwache elektromotorische Kraft zu compensiren.

Die Versuche der Tabellen V und VI wurden mit je einem 6 *mm*, jene der Tabelle VII mit einem 4 *mm* dicken Draht aus weichem, ausgeglühtem Eisen gemacht. Jeder Draht hatte die Länge von 50 *cm*.

Tabelle V.

H	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	n %
0·0053	19·0	15·6	1·218	22
0·0101	37·2	30·2	1·232	23
0·0193	71·8	58·3	1·232	23
0·0634	258·0	207·4 [1]	1·244	24

[1] Eine Bestimmung des Ausschlages beim Zeitintervall 0·031 ergab $\gamma = 202·9$, ein Zeichen, dass die Verzögerung durch die Selbstinduction in diesem Fall über das Zeitintervall von 0·134 wohl kaum hinausreicht.

Tabelle VI.

H	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	$n\%$
0·0053	13·6	11·5	1·183	18
0·0101	26·0	22·5	1·156	16
0·0193	50·5	42·7	1·182	18
0·0634	176·2	151·8	1·161	16

Tabelle VII.

H	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	$n\%$
0·0101	15·8	13·6	1·162	16
0·0193	30·5	25·1	1·215	21
0·0634	105·6	88·3	1·196	20

Die Daten dieser Tabellen bestätigen die schon früher angedeutete Thatsache, dass die magnetische Nachwirkung in schwachen Feldern proportional der Feldstärke zunimmt, respective dass ihr procentischer Werth constant ist.

Tägliche Periode des Niederschlages in Triest

von

Eduard Mazelle.

Mit dem 1. Juli 1894 konnte ich am k. k. astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest einen Ombrographen — System Rung[1] — zur Aufstellung bringen, welcher bisher in tadelloser Weise und dank der nicht gestrengen Winter mit kaum nennenswerther Unterbrechung[2] continuirlich in Gang erhalten werden konnte.

Da nun drei Jahre continuirlicher Aufzeichnungen vorliegen und diese einen ziemlich regelmässigen Gang ergeben und namentlich in Berücksichtigung, dass bisher stündliche Regenbeobachtungen aus unserem Küstengebiete noch nicht vorliegen, so glaube ich berechtigt zu sein, an eine vorläufige Publication der Ergebnisse dieser dreijährigen continuirlichen Aufzeichnungen schreiten zu können.

Da das Observatorium derzeit noch über keinen verwendbaren Garten verfügt und eine Aufstellung in zu entlegenen Orten nicht möglich war, so wurde auch dieser Ombrograph neben den Stations-Regenmessern auf der Plattform des Observatoriums untergebracht.

[1] Rung-Ombrograph mit Sinuswage. Meteorologische Zeitschrift der Deutschen meteorol. Gesellschaft, 1884, S. 461.

[2] Nur an acht Niederschlagstagen (1 im December, 2 im Jänner und 5 im Februar) musste das Auffanggefäss verschlossen werden. Sobald die Temperatur wieder stieg, wurde der Apparat empfangsbereit gemacht. — Im October 1895 mussten auch durch zwei Tage die Aufzeichnungen eingestellt werden, da das Umkippgefäss wegen Rostbildung defect wurde und durch ein neues aus verzinntem Messing ersetzt werden musste.

Das Auffanggefäss liegt 28·4 *m* über dem Erdboden. demnach 1·9 *m* höher als das Auffanggefäss des Stations-Regenmessers, dessen Aufzeichnungen seit einer längeren Reihe von Jahren veröffentlicht werden.

Zu bemerken wäre noch, dass sämmtliche Aufzeichnungen sich auf mittlere Triester Zeit beziehen.

Regenmenge. In der Tabelle 1 finden sich die in den einzelnen Stunden gemessenen Regenmengen nach Monaten geordnet vor. Diese Werthe wurden sodann nach Jahreszeiten geordnet und, um einen eventuellen Vergleich mit anderen Stationen zu erleichtern, auch noch für das Winter- und Sommerhalbjahr vereinigt. Dieselben wurden noch einer Ausgleichung nach $(a+2b+c):4$ unterzogen und auf ein mittleres Jahr reducirt. Die erhaltenen Resultate finden sich in Tabelle 2.

Aus der Betrachtung der Curven, welche den täglichen Gang der Regenmenge für die vier Jahreszeiten darstellen, ersieht man die Bildung von vier Maxima und vier Minima, wovon das erste Maximum auf die ersten Morgenstunden zwischen 2 und 6^h a. fällt, das zweite Vormittags zwischen 9 und 11^h, das dritte Maximum Nachmittags und das vierte in den ersten Nachtstunden zwischen 9 und 12^h. Im Durchschnitte könnte hervorgehoben werden, dass diese Extreme je nach den Jahreszeiten um 4^h a., 10^h a., 3^h p. und 10^h p. herum sich vertheilen und beinahe den Eintrittszeiten der Wendestunden im täglichen Gange des Luftdruckes entsprechen. Das an einigen Orten Nachmittags sehr deutlich ausgeprägte Maximum kommt hier kaum zum Ausdrucke; in der Winter- und Sommer-Gangcurve erscheint es nur als eine Störung im regelmässigen Anstiege der Curve, besser ersichtlich wird es nur in der Frühling- und in der Herbst-Curve. Dafür ergibt sich hier aus diesen Gangcurven, mit Ausnahme des Herbstes, sehr deutlich das Morgenmaximum.

Tabelle 1.

Regenmenge in Millimetern.

3 Jahre.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November
1ʰ a.	12·4	4·5	2·1	10·6	4·0	20·8	4·8	10·8	26·5	22·2	20·8	4·4
2	10·5	3·3	3·4	14·2	10·7	14·3	4·1	17·4	74·8	5·6	16·2	4·6
3	11·8	8·0	5·1	10·2	9·3	16·8	7·9	23·1	13·7	2·1	8·1	5·3
4	8·1	8·7	8·2	8·1	10·1	21·1	20·8	10·7	4·8	1·9	16·1	6·5
5	5·4	6·1	6·6	14·3	6·4	18·6	9·8	4·4	27·0	6·0	30·7	5·7
6	4·6	7·4	3·5	18·4	2·5	21·8	21·9	2·6	13·0	5·8	22·0	3·5
7	7·1	11·8	3·6	13·4	5·4	9·2	11·5	2·2	12·6	1·5	31·6	7·4
8	5·5	8·0	3·8	11·1	3·4	16·1	8·0	0·2	4·7	2·4	24·7	4·7
9	7·5	6·3	8·4	10·3	2·2	10·4	0·4	1·6	7·5	2·7	54·5	4·3
10	5·5	6·1	7·6	6·5	8·1	31·3	1·3	5·0	3·3	1·7	34·9	4·5
11	5·0	7·1	2·4	8·2	9·6	16·1	1·0	10·2	39·3	9·5	20·3	4·3
12ʰ m.	7·8	13·1	2·3	12·8	6·0	15·7	4·8	12·9	2·1	3·4	14·8	0·5
1ʰ p.	7·6	6·7	2·0	7·0	5·9	16·8	5·3	0·6	21·0	0·3	49·3	1·1
2	10·1	6·7	2·8	13·3	6·8	10·4	2·4	0·3	6·2	2·4	20·6	5·0
3	10·2	10·1	1·6	8·7	7·4	10·6	2·6	0·0	10·5	4·0	18·7	6·1
4	12·7	3·6	2·1	26·2	4·6	8·1	25·9	1·2	3·4	16·3	12·5	6·6
5	13·4	6·4	2·4	6·6	1·4	12·7	6·1	2·1	16·4	11·4	15·4	8·2
6	16·3	8·4	3·9	8·0	2·1	13·5	3·1	19·3	26·2	13·4	10·2	1·5
7	23·2	8·6	4·5	4·5	6·6	15·5	14·0	1·9	8·7	7·4	7·5	2·1
8	18·3	7·1	5·2	16·1	5·9	22·1	15·1	3·6	32·6	4·0	8·6	9·9
9	15·0	7·3	5·7	9·3	10·3	17·3	18·0	27·0	0·6	25·8	5·5	5·7
10	21·2	8·7	9·1	7·4	12·3	14·8	25·0	29·0	6·6	19·6	6·9	9·5
11	19·9	4·6	6·9	9·8	5·4	12·2	5·8	23·2	41·7	24·3	6·3	7·9
12ʰ n.	18·9	4·4	3·9	9·7	9·7	18·3	3·7	11·9	19·7	29·8	24·1	7·3
Summe..	278·0	173·0	107·1	264·7	156·1	384·5	223·3	221·2	422·9	223·5	480·3	126·6

Tabelle 2.

Täglicher Gang der Regenmenge.

Millimeter in einem mittleren Jahre. — Ausgeglichene Werthe.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter-Halbjahr	Sommer-Halbjahr	Jahr
1ʰ a.	6·9	12·3	18·0	15·2	19·2	33·2	52·4
2	6·5*	12·5	**23·3**	9·6	17·3	**34·6**	51·9
3	**7·7**	12·6	18·5	6·8*	17·1*	28·5	45·6
4	**7·7**	12·9	13·2	8·9	19·0	23·7	42·7*
5	6·4	**13·4**	13·0	11·7	21·1	23·4	**44·5**
6	6·0*	12·7	11·9	**12·1**	21·9	20·8	42·7
7	6·5	10·8	8·6	12·0*	22·3	15·6	37·9
8	6·6	9·3*	5·2	13·8	23·5	11·4	34·9
9	**6·7**	10·2	3·5*	**16·3**	**25·5**	11·2*	36·7
10	6·3	**12·4**	6·6	14·8	22·4	17·7	**40·1**
11	6·0*	12·3	**10·9**	10·7	17·6*	**22·3**	39·9
12ʰ m.	6·4	11·1	9·7	10·2*	18·6	18·8	37·4
1ʰ p.	6·3	10·4	6·9	**12·3**	**21·5**	14·4	35·9
2	6·4	9·8*	4·8*	11·3	20·5	11·8*	32·3*
3	6·8	10·2	5·5	10·1*	19·4	13·2	32·6
4	6·7	**10·4**	8·2	**11·3**	19·6	17·0	36·6
5	7·6	8·7	10·7	10·9	18·1	19·8	37·9
6	9·6	7·9*	12·2	8·5	16·6*	21·6	38·2
7	11·0	10·1	12·4	6·8*	17·9	22·4	40·3
8	10·5	12·6	14·4	8·2	19·1	26·6	45·7
9	10·5	**12·7**	16·9	11·0	18·7	32·4	51·1
10	**11·4**	11·1	**19·8**	12·3	19·1	**35·5**	54·6
11	10·7	10·6*	**19·8**	14·5	20·1	**35·5**	**55·6**
12ʰ n.	8·7	11·5	15·3*	**17·4**	**20·6**	32·3*	52·9
Mittel....	7·7	11·2	12·1	11·5	19·9	22·6	42·5

Die Maxima[1] fallen im

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Morgenmaximum	$3-4^h$ a.	**5^h** a.	**2^h** a.	(6^h a.)
Vormittagsmaximum .	9^h a.	10^h a.	11^h a.	9^h a.
Nachmittagsmaximum	(12^hm., 3^hp.)	4^h p.	(6^h p.)	1^hp., 4^hp.
Nachtmaximum......	(7^hp.) **10^h**p.	9^h p.	$10-11^h$p.	**12^h** n.

Im Sommer und Frühling ist das Morgenmaximum am grössten, im Winter und Herbst das Nachtmaximum.

Die Minima fallen im

Winter	Frühling	Sommer	Herbst
6^h a.	8^h a.	**9^h** a.	(7^h a.)
11^h a.	2^h p.	2^h p.	12^h m.
(1^h p., 4^h p.)	**6^h** p.	—	3^h p., **7^h** p.
($8-9^h$ p.) 2^h a.	11^h p.	12^h n.	**3^h** a.

Nach dem Morgenmaximum fällt das Minimum je nach den Jahreszeiten zwischen 6 und 9^h a.; nach dem Vormittagsmaximum ist das Minimum um Mittag und in den ersten Nachmittagstunden zu bemerken. Nach dem schwach ausgeprägten Nachmittagsmaximum ist das Minimum, namentlich im Frühling und Herbst zwischen 6 und 7^h p. zu entnehmen, während das Minimum nach dem Nachtmaximum um und nach Mitternacht (11^h p.—3^h a.) fällt.

Schreiben wir die Hauptextreme für die einzelnen Jahreszeiten heraus und bilden das geometrische und algebraische Verhältniss

	Hauptmaximum	Hauptminimum	Quotient	Differenz
Winter....	11·4	6·0	1·90	5·4
Frühling ..	13·4	7·9	1·70	5·5
Sommer ..	23·3	3·5	6·66	19·8
Herbst....	17·4	6·8	2·56	10·6,

[1] Der leichteren Übersicht halber werden hier, wie auch in den folgenden Zeilen, die Stundenintervalle nur mit dem entsprechenden Endwerthe angegeben (z. B. 9^h a. entspricht der Stunde $8-9^h$). Die in den Gangcurven kaum ersichtlichen Extreme erscheinen hier eingeklammert.

so ersehen wir für den Sommer eine relativ grosse Amplitude, und zwar erscheint der Quotient der Hauptextreme des Sommers im Vergleiche zu dem des Winters 3·5 und die Differenz 3·7 mal grösser.

Die mittlere Ordinate ist am grössten im Sommer, dann folgt der Grösse nach die des Herbstes, sodann die Frühlings-Ordinate, während das Wintermittel den kleinsten Betrag erreicht.

Vereinigen wir je 6 Monate zu einer gemeinsamen Summe, indem zum Winterhalbjahr die Monate October bis inclusive März gerechnet werden, so finden wir in den resultirenden zwei ausgeglichenen Gangcurven die Extreme der einzelnen Jahreszeiten-Curven combinirt vor.

Im Winterhalbjahr ist das Nacht- und Vormittagsmaximum deutlich zu entnehmen, das Morgenmaximum hingegen kaum ersichtlich, höchstens durch eine kleine Krümmung im aufsteigenden Curvenaste, da es durch den Einfluss der Ordinaten der Herbstcurve fast verschwindet.

Die Gangcurve für das Sommerhalbjahr zeigt hingegen wieder deutlich das Morgenmaximum um 2^h a., ausserdem das Nachtmaximum zwischen $10-11^h$ p. und das Vormittagsmaximum um 11^h a. Das Nachmittagsmaximum ist nicht zu entnehmen, wenn man von der äusserst schwachen Krümmung im ansteigenden Nachmittags-Curvenaste absieht.

Das Vormittagsmaximum des Winterhalbjahres, zugleich Hauptmaximum, findet sich in der Wintercurve ausgeprägt, deutlicher in der Frühlingscurve, namentlich stark aber in der Herbstcurve. In der Sommerhalbjahr-Curve, welche fast vollständig der Sommercurve entspricht, findet sich um diese Stunde das Hauptminimum. Das im Winterhalbjahr ersichtliche Maximum um 1^h p. findet sich weder in der Wintercurve, noch in der Frühlingscurve, wohl aber in der Herbstcurve, speciell im Monate October. Das dritte Maximum um Mitternacht wird ebenfalls von der Herbstcurve verursacht, während die Wintercurve das Maximum um 10^h p. zeigt, die Frühlingscurve um 9^h p.

Schreiben wir die Eintrittszeiten der deutlich zum Ausdrucke gelangten Extreme nebeneinander

	Maximum	Minimum
Winterhalbjahr ...	12^h n., 9^h a., 1^h p.;	3^h a., 11^h a., 6^h p.,
	Minimum	Maximum
Sommerhalbjahr ..	12^h n., 9^h a., 2^h p.;	2^h a., 11^h a., 10^h p.

so ersieht man, dass die entgegengesetzten Extreme der Winter- und Sommer-Halbjahrcurven auf dieselben Stunden fallen, mit der einzigen Ausnahme des letztangeführten Werthes, wo eine grössere Zeitdifferenz zu constatiren wäre.

In der Jahrescurve findet sich das Nachtmaximum und das Vormittagsmaximum gut ausgeprägt, schwach das Morgenmaximum, während das Nachmittagsmaximum kaum durch eine Ausbuchtung der Curve ersichtlich wird.

Erst eine längere Beobachtungsreihe, namentlich in Verbindung mit Registrirungen an nahe gelegenen Orten, wie Pola und Fiume, kann die Frage entscheiden, ob für die tägliche Periode des Regenfalles in unseren Gegenden dieser complicirte Gang mit vier Maxima, welcher nach den bisherigen Beobachtungen wahrscheinlich wird, als Thatsache angenommen werden muss.

Wie verwickelt und verschieden gerade diese tägliche Periode überhaupt ausfällt, ersieht man schon aus den Zusammenstellungen in den zwei Lehrbüchern der Meteorologie von Sprung und van Bebber, eingehender noch aus der Durchsicht der verschiedenen Resultate, welche bisher berechnet vorliegen und in der Meteorologischen Zeitschrift Erwähnung finden.

So zeigen z. B. Coïmbra und Modena[1], die erstere Station nach fünfjährigen Beobachtungen, ausser dem Nachmittagsmaximum ein Nacht- und ein Morgenmaximum deutlich ausgebildet, während z. B. für Bern[1] (achtjährige Registrirungen) das Nachmittagsmaximum fehlt. Wien[2] (siebenjährige Beobachtungsreihe) zeigt kein Morgenmaximum, wohl aber ein Vor-

[1] Hann, Zur täglichen Periode des Regenfalles. Meteorolog. Zeitschrift, 1882, S. 53.

[2] Hann, Tägliche Periode des Regenfalles in Wien. Meteorolog. Zeitschrift, 1889, S. 221.

mittagsmaximum (7—8^h a.). Welchen Einfluss gerade die Aufstellung und Construction der Ombrographen hat, ersieht man aus dem Vergleiche der Ergebnisse der alten und neuen Beobachtungsreihe für Wien.[1]

Der Gang für New-York[2] (7 Jahre) lässt in der Jahrescurve nur drei Maxima entnehmen, betrachten wir hingegen die Sommerhalbjahrcurve, so finden sich auch hier vier Maxima (um 4^h a., 8^h a., 1^h p., 6^h p.). Berücksichtigen wir hingegen die später publicirten Resultate,[3] aus 22jährigen Beobachtungen abgeleitet, so findet sich nach einer an den mitgetheilten Daten vorgenommenen Ausgleichung, $(a+2b+c):4$, für das volle Jahr eine Gangcurve mit vier Maxima um 4^h a., 8^h a., 3^h p. und 6^h p., für die Regenzeit hingegen nur drei Maxima um 4^h a., 8^h a. und 7^h p.

Auch Klagenfurt[4] (dreijährige Beobachtungsreihe) zeigt vier Maxima, und zwar um 4^h a., 9^h a., 4^h p. und 9^h p., so dass das Vormittags- und Abendmaximum mit dem täglichen Barometermaximum übereinstimmt.

Die Gangcurve für Hongkong[5] (fünfjähriges Mittel) zeigt für den Herbst auch vier Maxima, um 4^h a., 9^h a., 4^h p. und 8^h p.

Vier Maxima finden sich auch in der Jahrescurve für Chemnitz,[6] allerdings nur aus Beobachtungen des Jahres 1887, abgeleitet.

Im Jahrgange 1893 derselben Zeitschrift wird der stündliche Regenfall für Alexandria,[7] allerdings auch nur für ein Jahr

[1] Hann, Über den täglichen Gang einiger meteorologischen Elemente in Wien. Diese Sitzungsber., 1881, S. 222, und die unter 2), S. 7, angeführte Publication.

[2] Augustin, Täglicher Gang des Regenfalles. Meteorolog. Zeitschrift, 1882, S. 235.

[3] Hann, Tägliche Periode des Regenfalles. Meteorolog. Zeitschrift, 1892, S. 480.

[4] Hann, Tägliche Periode des Regenfalles in Klagenfurt. Meteorolog. Zeitschrift, 1889, S. 229.

[5] Hann, Tägliche Periode des Regenfalles zu Hongkong. Meteorolog. Zeitschrift, 1889, S. 350.

[6] Hann, Täglicher Gang der meteorologischen Elemente zu Chemnitz. Meteorolog. Zeitschrift, 1890, S. 65.

[7] Hann, Tägliche Periode des Regenfalles in Alessandria. Meteorolog. Zeitschrift, 1893, S. 40.

mitgetheilt (1891), aber auch in dieser Reihe lassen sich vier Maxima entnehmen ($2-4^h$ a., $6-8^h$ a., $2-4^h$ p., $8-10^h$ p.).

Für Hohenheim publicirt Mack[1] nach zehnjährigen Aufzeichnungen die stündlichen Mittel der Regenmenge. Gleichen wir auch diese Reihe (April bis inclusive October) nach $(a+2b+c):4$ aus, so ergibt sich ebenso ein täglicher Gang mit vier Maxima um 3^h a., 6^h a., 4^h p., 9^h p.

Eine weitere Bearbeitung der Triester Beobachtungen, z. B. Trennungen nach verschiedenen Wettertypen, müssen vorderhand in Anbetracht der Kürze der Beobachtungsreihe noch unterbleiben.

Regenhäufigkeit. In den Tabellen 3 und 4 finden sich in analoger Weise wie für die Regenquantität die resultirenden Grössen für die Regenhäufigkeit zusammengestellt.

Die mit Hilfe der Tabelle 4 construirten Gangcurven lassen im Ganzen und Grossen dieselbe Vertheilung der Extreme wie bei der Regenmenge erkennen. Es finden sich das Morgen-, das Vormittags-, das Nachmittags- und das Nachtmaximum; nur die Sommercurve zeigt eine einfache Periode mit einem Maximum und einem Minimum, wobei das gut ausgeprägte Maximum mit dem Hauptmaximum der Sommer-Gangcurve der Quantität übereinstimmt.

Die Maxima[2] vertheilen sich auf folgende Stunden:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Morgenmax.	3^h a.	3^h a.	**2^h** a.	**1^h** a. (4^h a.)
Vormittagsmax. . .	8-9^h a.	(8^h a.)	—	8^h a.
Nachmittagsmax. .	(2^h p.)	3^h p.	(1^h p.)	2^h p. (4-5^h p.)
Nachtmax.	(6^h p.) **10^h** p.	**8-9^h** p.	(6^h p.)	(10^h p.)

Im Winter stimmen diese Maxima mit denen des täglichen Ganges der Regenmenge überein; im Frühling und Herbst antecipiren diese Extreme im Vergleiche zu denen der Quantität des Regenfalles.

[1] Mack, Tägliche Periode des Regenfalles in Hohenheim. Meteorolog. Zeitschrift, 1891, S. 391.

[2] Um die Besprechung zu kürzen, erörtern wir hier nur die Maxima. Die Minima erscheinen übrigens in den Tabellen durch Sternchen hervorgehoben.

Tabelle 3.

Regenhäufigkeit in Stunden.

3 Jahre.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November
1h a.	12	10	4	9	7	11	4	6	10	8	13	9
2	12	7	4	10	7	12	7	9	8	5	14	9
3	12	13	4	10	10	14	6	7	9	3	12	7
4	8	12	4	7	9	13	8	6	5	4	16	10
5	7	11	5	11	8	11	5	8	8	5	10	7
6	5	9	4	12	7	12	6	5	5	3	15	4
7	7	8	3	11	5	11	7	4	9	3	13	5
8	10	11	3	10	8	12	5	2	7	3	21	7
9	11	9	3	10	7	11	2	3	7	4	18	6
10	7	8	4	7	7	13	3	1	3	2	17	4
11	7	10	5	6	8	9	3	2	4	6	13	4
12h m.	9	9	4	7	7	10	4	4	4	5	13	2
1h p.	11	9	4	8	8	11	3	3	6	2	15	3
2	10	9	5	7	9	10	4	1	8	4	16	5
3	10	9	6	9	10	9	5	0	7	4	11	4
4	11	9	5	7	8	12	8	2	5	3	12	3
5	15	7	4	7	6	11	5	2	5	3	14	5
6	17	8	5	10	5	12	5	2	10	3	10	2
7	15	8	4	11	9	10	4	2	7	2	8	2
8	13	9	4	12	11	11	7	4	5	3	9	2
9	15	11	4	10	10	11	7	7	1	7	13	5
10	15	9	7	10	10	13	4	7	4	6	10	5
11	15	9	6	7	9	11	4	7	6	6	9	5
12h n.	13	11	6	10	9	12	5	8	7	8	13	5
Summe. .	267	225	107	218	194	272	121	102	150	102	315	120

Tabelle 4.

Täglicher Gang der Regenhäufigkeit.

Stunden in einem mittleren Jahre. — Ausgeglichene Werthe.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter-Halbjahr	Sommer-Halbjahr	Jahr
1^h a.	8·7	9·5$_*$	7·0	**9·5**	19·0	15·7	34·7
2	8·4$_*$	9·9	**7·5**	9·0	18·9	**15·9**	34·8
3	**8·7**	**10·5**	7·3	8·5$_*$	**19·1**	**15·9**	**35·0**
4	8·3	10·2	6·7	**8·7**	18·6	15·3	33·9
5	7·3	10·0	6·4	8·0	17·3	14·4	31·7
6	6·4$_*$	9·9	6·1	7·3$_*$	16·3$_*$	13·4	29·7$_*$
7	6·5	9·6	5·8	7·9	17·1	12·7	29·8
8	**7·4**	9·6	5·0	**9·3**	**19·0**	12·3	**31·3**
9	**7·4**	9·4	3·8	9·2	18·6	11·2	29·8
10	6·9$_*$	8·7	2·9$_*$	8·1	16·3	10·3$_*$	26·6
11	7·1	8·1$_*$	3·1	7·4	15·1$_*$	10·6	25·7$_*$
12^h m.	7·5	8·2	3·7	6·9$_*$	15·2	11·1	26·3
1^h p.	7·8	8·7	4·1	7·1	16·3	11·4	27·7
2	8·1	8·9	4·2	**7·4**	16·9	11·7	**28·6**
3	8·2	**9·1**	4·3	6·8	16·4	**12·0**	28·4
4	8·5	8·8	4·5	6·4	16·3	11·9	28·2$_*$
5	8·9	8·5$_*$	4·7	6·4	16·9	11·6$_*$	28·5
6	**9·5**	9·0	4·9	5·3	17·0	11·7	28·7
7	9·2	10·1	4·9	4·4$_*$	16·4	12·2	28·6
8	9·1$_*$	**10·8**	5·0	5·4	17·0	13·3	30·3
9	9·7	**10·8**	5·1	7·1	**18·4**	14·3	32·7
10	**10·2**	10·3	5·2	7·2	**18·4**	14·5	32·9
11	10·1	9·8	5·7	7·3	18·0$_*$	14·9	32·9
12^h n.	9·7	9·7	6·4	8·5	18·7	15·6	34·3
Mittel....	8·3	9·5	5·2	7·5	17·4	13·1	30·5

In der Gangcurve für das Winterhalbjahr, welche hier ebenso wie oben nur des eventuellen Vergleiches wegen, mit anderen Stationen mitgetheilt wird, finden sich eigentlich alle Extreme des Winters und theilweise des Frühlings und Herbstes vereinigt. So findet man das 1^h-Morgenmaximum des Herbstes und das 3^h-Maximum des Frühlings und Winters vor, ebenso stimmt das Maximum um 8^h a. mit den der Herbst- und der Wintercurven überein. Das um 2^h p. ersichtliche Extrem entspricht dem Herbst-Gange, das 6^h p.-Maximum wieder dem des Winters und das Abendmaximum zwischen $9-10^h$ p. ist hingegen durch den Gang des Winters, des Frühlings und des Herbstes (October) verursacht.

Eine Trennung nach Jahreszeiten bringt daher auch in kurzen Beobachtungsreihen den täglichen Gang viel deutlicher zur Anschauung, da in der Halbjahrcurve die Extreme sich entweder verwischen können, oder wie hier, wo die Extreme in den einzelnen Jahreszeiten um nicht zu grosse Zeitintervalle verschoben erscheinen, jedes für sich zur Geltung gelangt und dadurch die Gangcurve complicirt erscheinen lässt.

Doch ist immer, wenn die einzelnen Extreme nicht zu streng gesondert betrachtet werden, der allgemeine Gang mit den Morgen-, Vormittags-, Nachmittags- und Nachtmaxima zu bemerken.

Die Sommerhalbjahrcurve entspricht fast ganz der Sommercurve, nur für 3^h p. lässt sich deutlich das Nachmittags-Extrem entnehmen, verursacht durch die Frühlingscurve, beziehungsweise durch die April- und Maiwerthe.

Die Jahrescurve ergibt deutlich das Morgenmaximum (3^h a.) und das Vormittagsmaximum (8^h a.). Das Nachmittags-Extrem (2^h p.) ist noch zu entnehmen, hingegen kaum angedeutet das Nachtmaximum (10^h p.).

Was nun die Amplitude anbelangt, so finden wir für die Differenzen und für die Quotienten der grössten und kleinsten Häufigkeiten jeder Reihe folgende Werthe:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Differenz	3·8	2·7	4·6	5·1
Quotient	1·59	1·33	2·59	2·16.

welche den grössten Quotienten im Sommer zeigen, die grösste Differenz hingegen im Herbst. Die kleinste Amplitude ist im Frühling zu beobachten. Der Unterschied in der Amplitude ist hier kleiner als bei der Quantität des Regenfalles.

Regendauer. Bei der laufenden Bearbeitung der Regenaufzeichnungen wurde nicht nur die Regenhöhe und die leicht zusammenzuzählende Häufigkeit des Regenfalles notirt, sondern auch täglich die Regendauer — auf Zehntel-Stunde genau — aus den Ombrographen-Aufzeichnungen bestimmt, nicht nur um eine genauere Bestimmung der später zu besprechenden Intensität des Regenfalles ableiten zu können, sondern auch um einen Vergleich mit bereits vorliegenden Beobachtungsergebnissen [1] continuirlicher Aufzeichnungen über die Regendauer eines nahe gelegenen Ortes, und zwar des hydrographischen Amtes zu Pola anstellen zu können.

In gleicher Weise wie in den früheren Tabellen wurden auch hier die einzelnen Beobachtungen bearbeitet und in den Tabellen 5 und 6 zusammengestellt.

Es ist wohl klar, dass die mit der letztgenannten Tabelle gezeichneten Curven mit denen der Häufigkeit (Tabelle 4) im Allgemeinen übereinstimmen werden; Abweichungen finden sich grösstentheils nur bei den schwächer ausgebildeten Extremen, so dass eine abermalige Discussion der Curven hier überflüssig erscheint. Die aus diesen Curven entnommenen Maxima werden in der folgenden Zusammenstellung gleich mit den für Pola bestimmten Maxima vereinigt. Diese letzteren wurden den Gangcurven der Tabelle 7 entnommen, welche aus der oben citirten Publication, Tabelle XXIV, abgeleitet wurde.

Eintrittszeiten der Maxima der Regendauer für Triest.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Morgenmaximum	(2—3^h a.)	—	**1—2^h** a.	1—2^h a.
Vormittagsmaximum .	(9^h a.)	5^h a.	—	**8^h** a.
Nachmittagsmax.	2^h p.	1^h p.	(1—2^h p.	(1^h p.) 5^h p.
Nachtmaximum	(7^h p.) **10^h** p.	**9^h** p.	—	(10^h p.)

[1] Mazelle, Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur. Denkschriften der math.-naturw. Classe der kais. Akad. der Wissenschaften, Bd. LXII, Tab. XXIII und XXIV auf S. 90 und 91.

Eintrittszeiten der Maxima der Regendauer für Pola

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Morgenmaximum	1^h a.	—	1^h a.	—
Vormittagsmaximum .	**7^h** a.	**6^h** a.	4—**5^h** a.	**6^h** a.
Nachmittagsmax.	3^h p.	5^h p.	12^h m.	(4—5^h p.)
Nachtmaximum	10^h p.	**10^h** p.	**10^h** p.	9^h p.

Die Jahrescurven zeigen die Maxima der Dauer für

Triest	Pola
(1^h a.)	(12—1^h a.)
8^h a.	**6^h** a.
1^h p.	(3—4^h p.)
10^h p.	10^h p.

Im Ganzen und Grossen ist wohl auf eine Übereinstimmung der Eintrittszeiten der Maxima zwischen Triest und Pola hinzuweisen, wobei zu bedenken ist, dass die Werthe für Pola sich auf einen achtjährigen Zeitraum von 1885 bis 1892 beziehen. Nur wäre zu bemerken, dass das Morgenmaximum in der Frühlings- und Herbstcurve für Pola ganz fehlt, während die Gangcurven des Winters und Sommers dieser achtjährigen Beobachtungsreihe das Morgenmaximum auch entnehmen lassen.

Intensität des Regenfalles. Gehen wir nun zur Bestimmung der Intensität des Regenfalles über, welche hier aus den unausgeglichenen Werthen der Regenmenge und der Regendauer, wie sie in Tabelle 1 und 5 dargestellt sind, berechnet wurden. Die erhaltenen Werthe, wie sie in Tabelle 8 zusammengestellt erscheinen, geben daher den Niederschlag für eine Stunde Regen an.

Würde die Intensität des Regenfalles unter Zuhilfenahme der Häufigkeit, Tabelle 3, bestimmt worden sein, so würde eine kleinere Intensität pro Regenstunde resultiren, da als eine volle Regenstunde jede angenommen erscheint, in welcher mindestens 0·1 *mm* Niederschlag gemessen werden konnte. Hier aber, bei Berücksichtigung der Regendauer, werden nur jene Bruchtheile einer Regenstunde in Rechnung gezogen, in welcher wirklich ein Niederschlag zu beobachten war.

Tabelle 5.

Regendauer in Stunden.

3 Jahre.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November
1h a.	10·1	6·4	2·3	7·5	4·1	7·8	3·2	3·8	5·7	4·8	9·6	4·6
2	10·0	5·3	2·6	7·1	4·3	8·9	3·2	5·1	5·1	2·7	11·2	4·4
3	8·4	7·4	3·3	5·8	4·4	9·1	3·9	3·9	3·6	1·6	8·7	4·6
4	4·4	8·1	4·0	5·8	5·7	8·8	5·3	3·2	1·2	1·7	10·0	5·3
5	4·4	7·5	4·8	7·3	4·0	9·1	4·1	3·5	2·0	3·2	7·8	4·6
6	4·0	7·0	2·9	7·7	3·2	9·2	3·9	1·3	3·0	3·0	8·6	3·7
7	4·7	6·7	3·0	7·4	3·3	7·5	4·5	1·2	4·1	1·7	11·8	4·0
8	4·8	6·8	2·6	6·0	4·3	8·9	4·0	0·3	3·3	2·8	15·0	5·4
9	7·6	5·9	2·0	6·6	4·6	7·1	1·2	1·3	4·6	1·1	13·8	5·0
10	5·7	6·1	2·8	3·7	4·5	7·3	1·3	0·5	1·0	1·1	12·1	3·6
11	4·7	7·0	3·7	4·4	5·1	6·0	1·9	0·4	2·0	2·5	9·7	2·7
12h m.	6·1	6·2	3·7	6·4	4·6	7·2	1·8	1·5	1·5	2·9	9·1	1·6
1h p.	5·9	6·9	3·5	5·5	5·3	7·9	2·2	1·1	3·5	0·6	11·4	1·7
2	7·9	7·1	3·6	5·0	4·5	5·2	1·7	0·1	4·0	2·2	10·3	2·7
3	7·2	4·6	3·3	6·0	6·4	6·6	1·7	0·0	4·1	2·0	6·0	2·3
4	8·6	5·8	3·2	5·4	4·2	4·6	4·7	0·4	2·8	2·1	8·4	0·8
5	10·5	5·4	3·0	5·3	2·7	4·6	3·2	0·3	1·7	2·2	9·1	2·9
6	13·6	6·1	3·4	6·5	3·3	7·4	2·7	1·4	4·9	2·7	6·2	1·5
7	13·0	6·1	2·7	9·0	6·3	7·3	2·1	0·9	2·0	1·0	6·1	1·1
8	10·6	7·6	2·8	8·8	7·8	7·8	4·5	2·3	3·6	1·6	6·6	1·5
9	10·7	7·8	3·0	8·0	7·7	7·9	4·6	3·7	1·0	4·5	7·5	2·0
10	13·0	6·1	4·6	8·1	7·7	8·6	2·7	5·8	1·3	3·9	6·9	2·9
11	12·5	4·3	5·1	5·8	7·7	7·1	2·7	5·6	3·7	4·9	6·1	2·5
12h n.	11·8	7·6	3·3	6·5	6·4	7·7	2·3	4·7	4·6	3·1	8·6	2·9
Summe.	200·2	155·8	79·2	155·6	122·1	179·6	73·4	52·3	74·3	59·9	220·6	74·3

Tabelle 6.

Täglicher Gang der Regendauer.

Stunden in einem mittleren Jahre. — Ausgeglichene Werthe.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter- Halbjahr	Sommer- Halbjahr	Jahr
1h a.	6·5	6·6	**4·2**	**5·9**	**13·5**	9·7	**23·2**
2	6·1	6·6*	**4·2**	**5·9**	13·3	9·5	22·8
3	6·1	6·6	3·8	5·4	12·9	9·0	21·9
4	5·7	6·7	3·4	5·4	12·5	8·7	21·2
5	5·3	**6·8**	3·1	5·3*	12·1	8·4	20·5
6	4·9	6·6	3·0	5·3*	11·8*	8·0	19·8*
7	4·7*	6·4	2·9	6·1	12·5	7·6	20·1
8	4·9	6·2	2·7	**7·0**	**13·3**	7·5	**20·8**
9	5·0	5·9	2·1	6·6	13·0	6·6	19·6
10	5·0	5·4*	1·4*	5·7	11·8	5·7*	17·5
11	5·1	5·4*	1·4*	5·0	11·0*	5·9	16·9*
12h m.	5·3	**5·9**	1·7	4·7	11·1	**6·5**	17·6
1h p.	5·6	**5·9**	2·0	4·7	**11·7**	**6·5**	**18·2**
2	**5·7**	5·6	2·0	4·6	11·5	6·4	17·9
3	5·5*	5·6	2·1	3·9*	10·6*	**6·5**	17·1
4	5·8	5·0	2·2	3·9*	10·8	6·1	16·9
5	6·5	4·7*	2·3	**4·2**	11·8	5·9*	17·7
6	7·2	5·8	2·4	3·6	12·4	6·6	19·0
7	**7·3**	7·2	2·5	3·0*	12·6	7·4	20·0
8	7·1*	7·9	2·9	3·5	12·7	8·7	21·4
9	7·3	**8·0**	3·2	4·3	13·1	9·7	22·8
10	**7·6**	7·8	3·4	4·5	**13·2**	10·1	**23·3**
11	7·5	7·2	3·8	4·6	12·9*	**10·2**	23·1*
12h n.	7·2	6·8	4·0	5·1	13·2	9·9	23·1*
Mittel....	6·0	6·4	2·8	4·9	12·3	7·8	20·1

Tabelle 7.

Regendauer für Pola.

Ausgeglichene Werthe.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1^h a.	**20·6**	23·7	**9·8**	19·6	6·1
2	19·7	23·1	9·6	20·2	6·0
3	18·6$_*$	22·1$_*$	9·5$_*$	20·8	5·9$_*$
4	18·8	22·8	**9 9**	22·2	6·1
5	20·1	25·0	**9·9**	24·7	6·6
6	23·0	**25·6**	9·2	**26·2**	**7·0**
7	**24·6**	24·0	8·2	25·1	6·8
8	23·2	20·8	7·7	22·4	6·2
9	21·7	18·4	6 9	21·2	5·7
10	21·2	18·3	6·5$_*$	21·1	5·6
11	20 8	18·1	7·4	19·0	5·4
12^h m.	20·4$_*$	16·7	**7·8**	15·6	5·0
1^h p.	20·6	16·4$_*$	7·2	14·0$_*$	4·8$_*$
2	22·1	17·6	7·1	14·9	5·1
3	**23·0**	18·4	7·1	16·8	5·4
4	22·1	19·6	6·4	17·5	5·4
5	21·2	**20·7**	6·0$_*$	17·5	5·5
6	21·0	19·7	7·0	19 1	5·6
7	20·0	18·6$_*$	8·1	21·1	5·6
8	19·3$_*$	19·6	8·9	22·5	5·8
9	19·8	23 0	9·9	**22·7**	6·3
10	**20·3**	**25·6**	**10·3**	20·1	**6·4**
11	20·2$_*$	25·4	9·9	18·4$_*$	6·2
12^h n.	20·4	24 3	9 7$_*$	19·1	6 1
Mittel....	20·9	21·1	8·3	20·1	5·9

Tabelle 8.

Intensität des Regenfalles.

	Unausgeglichene Werthe					Ausgeglichene Werthe				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1h a.	1·01	1·82	3·32	2·49	2·06	1·04*	1·85	4·22	2·65	2·25
2	0·96	1·93	7·19	1·44	2·56	1·06	1·89	**5·41**	1·60	2·26
3	1·31	1·88	3·92	1·04	1·88	1·27	1·91	4·69	1·24*	2·07
4	1·51	1·93	3·74	1·44	1·97	**1·35**	1·92	3·92*	1·66	2·02*
5	1·09	1·93	4·29	2·72	2·26	1·20*	**1·98**	**4·22**	2·23	**2·17**
6	1·12	2·12	4·57	2·05	2·21	1·23	1·93	4·03	**2·28**	**2·16**
7	1·57	1·54	2·68	2·31	1·96	**1·37**	1·70	2·91	2·01*	1·89
8	1·22	1·59	1·70	1·37	1·44	1·36	1·49*	1·85*	2·04	1·69*
9	1·43	1·25	1·34	3·09	1·91	1·35	1·76	1·95	2·50	1·90
10	1·31	2·96	3·43	2·45	2·33	1·25	**2·34**	4·99	**2·57**	2·31
11	0·94	2·19	11·75	2·29	2·65	1·16*	2·31	**7·77**	2·10*	**2·37**
12h m.	1·45	1·89	4·13	1·38	1·83	**1·21**	1·89	5·99	2·19	2·14
1h p.	1·00	1·59	3·96	3·70	2·23	1·13*	1·79*	3·40	**2·65**	1·97
2	1·05	2·08	1·54	1·84	1·60	1·14	1·79*	2·33*	2·54*	1·81*
3	1·45	1·40	2·26	2·80	1·80	**1·25**	1·90	2·48	2·64	1·90
4	1·05	2·74	3·86	3·13	2·42	1·18	**2·13**	3·68	**2·88**	**2·16**
5	1·18	1·64	4·73	2·46	2·01	1·16*	1·85	4·68	2·62	2·14
6	1·24	1·37	5·40	2·41	2·11	1·33	1·39	**5·11**	2·34	2·01
7	1·67	1·18	4·92	2·07	1·81	**1·51**	1·38*	5·04	2·22*	2·00*
8	1·46	1·81	4·93	2·32	2·27	1·47	**1·59**	4·92*	2·34	2·13
9	1·30	1·56	4·90	2·64	2·16	1·43*	1·58	5·25	2·56	2·24
10	1·65	1·41	6·29	2·63	2·38	**1·51**	1·43*	**5·84**	2·69	2·35
11	1·43	1·33	5·89	2·85	2·47	1·43	1·47	5·28	3·13	**2·41**
12h n.	1·20	1·83	3·04	4·19	2·32	1·21	1·70	3·82*	**3·43**	2·29
Mittel .	1·28	1·79	4·32	2·38	2·11	1·28	1·79	4·32	2·38	2·11

Ausserdem ist zu bedenken, dass manchmal ein, wenn auch kurzer Regen, wenn er gerade knapp vor Ende eines Stundenintervalles anfängt und kurz nach Beginn des folgenden aufhört, zwei Regenstunden zur Folge haben kann, während er in Wirklichkeit mit kaum je ein Zehntel-Stunde in Rechnung zu bringen wäre.

Eine vergleichende Betrachtung der täglichen Perioden, wie sie in Tabelle 8 und Tabelle 2 dargestellt erscheinen, ergeben sofort eine vollkommene Identität zwischen der Regenmenge und Intensität, nur dass die bei der Regenmenge mitunter kaum angedeuteten secundären Extreme bei der Regenintensität deutlich ersichtlich werden.

Die hier zusammengestellten Eintrittszeiten für die Maxima und Minima zeigen im Vergleiche zu den auf S. 689 befindlichen eine hübsche Übereinstimmung.

Eintrittszeiten der Extreme der Regenintensität.

Maxima			
Winter	Frühling	Sommer	Herbst
4^h a.	5^h a.	2^h a., 5^h a.	6^h a.
7^h a.	**10^h** a.	**11^h** a.	10^h a.
12^h m., 3^h p.	4^h p.	6^h p.	1^h p., 4^h p.
7^h p., **10^h** p.	$8-9^h$ p.	10^h p.	**12^h** n.

Minima			
Winter	Frühling	Sommer	Herbst
5^h a.	8^h a.	4^h a., **8^h** a.	7^h a.
11^h a.	$1-2^h$ p.	2^h p.	11^h a.
1^h p., 5^h p.	**7^h** p.	8^h p.	2^h p., 7^h p.
9^h p., 1^h a.	10^h p.	12^h n.	**3^h** a.

Am intensivsten ist im Winter und Herbst der Nachtregen, im Frühling und Sommer der Vormittagsregen.

In den in Betracht gezogenen drei Jahren erreichte der durch 2193 Regenstunden niedergegangene Niederschlag 3061·2 *mm*. Die aus dieser Grösse resultirende Regensumme eines mittleren Jahres von 1020·4 *mm* kommt der 55jährigen

normalen Regenmenge (1840—1895) von Triest mit 1086 *mm* sehr nahe. Aus der genaueren Bestimmung der Dauer des Regens während der einzelnen Tagesstunden folgt, dass die obenangeführte Regenhöhe innerhalb 1447·3 Stunden niederging, daher eine mittlere Intensität des Regens von 2·11 *mm* pro Stunde resultirt. Berücksichtigen wir hingegen nur die Häufigkeit der Regenstunden, wo als eine volle Regenstunde jede Stunde mit Niederschlag gezählt wird (hier 2193), so resultirt pro Regenstunde ein mittlerer Niederschlag von 1·40 *mm*.

Regenwahrscheinlichkeit. Aus der Häufigkeit der Regenstunden, unter Berücksichtigung der 10 Tage, an welchen die Registrirungen ausbleiben mussten (siehe Fussnote S. 685), wurde die Regenwahrscheinlichkeit in Promillen berechnet. Die erhaltenen sowie die ausgeglichenen Werthe finden sich in Tabelle 9. Der tägliche Gang ist natürlich derselbe wie bei der Häufigkeit in Tabelle 4.

Die grösste und kleinste Regenwahrscheinlichkeit ist aus folgender Zusammenstellung ersichtlich.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Maximum	0·116	0·117	0·081	0·105	0·097
	10^h p.	9^h p.	2^h a.	1^h a.	2^h a.
Minimum	0·073	0·088	0·032	0·049	0·071
	6^h a.	11^h a.	10^h a.	7^h p.	11^h a.

Zu allen Jahreszeiten zeigen daher die grösste Regenwahrscheinlichkeit die Nacht- oder die ersten Morgenstunden; die geringste Regenwahrscheinlichkeit findet sich Vormittags, mit Ausnahme des Herbstes, wo diese auf 7^h Abends fällt. Die mittlere Regenwahrscheinlichkeit einer Stunde ist am kleinsten im Sommer (0·056), am grössten im Frühling (0·103), im Jahresmittel ist dieselbe 0·084.

Schwellenwerthe. Um die Vertheilung der Niederschläge verschiedener Grösse auf die einzelnen Tagesstunden näher kennen zu lernen, wurden dieselben für jeden einzelnen Monat nach ihrer Niederschlagshöhe geordnet.

Tabelle 9.

Regenwahrscheinlichkeit.

In Promillen.

	Unausgeglichene Werthe					Ausgeglichene Werthe				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1h a.	99	98	72	111	95	100	103*	76	**105**	96
2	87	105	87	103	96	96*	108	**81**	99	**97**
3	110	123	80	81	99	**99**	**114**	79	94*	97
4	91	105	69	111	94	95	110	74	**96**	94
5	87	109	76	81	88	83	109	70	89	88
6	68	112	58	81	80	73*	108	66	80*	82
7	68	98	72	77	79	74	104	63	87	82*
8	91	109	51	114	91	**84**	104	54	**102**	**86**
9	87	101	43	103	84	**84**	102	41	101	82
10	72	98	25	85	70	79*	95	32*	90	74
11	84	83	33	85	71	81	88*	34	82	71*
12h m.	84	87	43	74	72	86	89	41	77*	73
1h p.	91	98	43	74	76	89	94	44	79	76
2	91	94	47	92	81	92	97	45	**82**	**79**
3	95	101	43	70	77	94	**99**	47	75	78
4	95	98	54	66	78	96	96	48	71	78*
5	99	87	43	81	77	102	92*	51	71	78
6	114	98	62	55	82	**107**	98	53	59	79
7	103	109	47	44	76	105	110	53	49*	79
8	99	123	58	52	83	104*	**117**	54	60	84
9	114	112	54	92	93	111	**117**	55	78	90
10	118	120	54	77	92	**116**	112	56	79	91
11	114	98	62	74	87	115	107	62	80	91
12h n.	114	112	72	96	99	110	105	69	94	95
Mittel .	95	103	56	82	84	95	103	56	82	84

Da die schwachen Niederschläge zugleich die weitaus häufigsten sind, so wurden die Grenzen für diese enger gezogen, und zwar wurden die Niederschläge unter 1 *mm* in drei Gruppen (von 0·3 zu 0·3), getrennt, die von 1—3 *mm* in je zwei Gruppen (von 0·5 zu 0·5) und von 3 *mm* aufwärts nur von Millimeter zu Millimeter. Aus diesen Werthen wurden dann die in Tabelle 10 bis 14 zusammengezogenen Resultate bestimmt, welche diese Vertheilung für die einzelnen Jahreszeiten und für das Jahr darstellen.

Wenn diese Tabellen — wegen der Kürze der Beobachtungszeit — auch nicht so angelegt werden konnten, um eine genauere Bestimmung des Scheitelwerthes vornehmen zu können, so lässt sich doch ersehen, dass die Niederschläge zwischen 0·1—0·3 *mm* mit wenigen Ausnahmen am häufigsten vorkommen, und zwar ist ihr Übergewicht gegenüber den anderen Schwellenwerthen grösstentheils bedeutend zu nennen.

Im Sommer wird der Unterschied am geringsten. Unter 1000 Regenstunden fallen kleine Niederschläge von 0·1 bis 0·3 *mm* im Winter durch 436, im Frühling durch 423, im Sommer durch 351 und im Herbst durch 374 Stunden.

Wollte man aus den hier mitgetheilten Grössen die Häufigkeitscurven construiren (die Regenmengen als Abscissen, die dazugehörigen Häufigkeitszahlen als Ordinaten), so könnte in groben Zügen hervorgehoben werden, dass Nachts und Morgens sich diese Curven durch einen steileren Abfall auszeichnen würden, während die Tagesstunden, namentlich die vor Mittag und im Winter und Herbst auch die späteren Nachmittagsstunden sich durch einen flacheren Verlauf bemerkbar machen würden.

Die in den Wintermonaten beobachtete grösste Regenmenge pro Stunde überschritt nicht die 9 *mm*, während im Frühling ein Niederschlag von 21 *mm*, im Herbst von 29 *mm* und im Sommer ein Maximum von 48 *mm* (48·4 von 1—2^h a.) pro Stunde aufgezeichnet werden konnte.

Tabelle 10.

Schwellenwerthe der Regenmenge. — Winter.

	0·1—0·3	0·4—0·6	0·7—0·9	1·0—1·4	1·5—1·9	2·0—2·4	2·5—2·9	3·0—3·9	4·0—4·9	5·0—5·9	6·0—10·9	11·0—20·9	> 21·0
1h a.	15	4	1	1	2	2	0	1	.	.	.	.	.
2	12	3	1	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.
3	11	7	2	3	3	2	0	0	1	.	.	.	.
4	10	5	0	2	3	1	2	0	0	0	1	.	.
5	12	5	2	1	1	0	0	0	2	.	.	.	.
6	7	4	3	1	0	1	0	2	.	.	.	.	.
7	7	2	2	0	3	1	1	0	1	1	.	.	.
8	14	3	2	1	0	2	0	2	.	.	.	.	.
9	11	2	1	4	4	0	0	0	0	0	1	.	.
10	8	3	2	2	2	0	0	1	0	1	.	.	.
11	8	5	5	2	0	1	1	.	.	.	.	.	.
12h m.	10	2	3	3	1	0	1	1	0	0	1	.	.
1h p.	14	3	0	3	2	1	1	.	.	.	.	.	.
2	8	7	2	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.
3	13	4	2	4	0	0	0	0	1	0	1	.	.
4	11	5	5	2	1	0	0	0	0	0	1	.	.
5	10	5	4	4	0	1	1	.	.	1	.	.	.
6	11	3	4	5	3	1	0	3	.	.	.	.	.
7	7	5	5	3	1	1	1	2	1	0	1	.	.
8	12	2	1	2	1	4	1	2	0	1	.	.	.
9	15	0	6	2	1	2	2	2	.	.	.	.	.
10	10	2	3	5	3	3	2	2	1	.	.	.	.
11	11	6	2	5	1	2	1	1	0	0	1	.	.
12h n.	14	3	3	3	3	1	1	1	1	.	.	.	.
Summe	261	90	61	64	37	28	17	22	8	4	7	0	0

Tabelle 11.

Schwellenwerthe der Regenmenge. — Frühling.

	0·1—0·3	0·4—0·6	0·7—0·9	1·0—1·4	1·5—1·9	2·0—2·4	2·5—2·9	3·0—3·9	4·0—4·9	5·0—5·9	6·0—10·9	11·0—20·9	> 21·0
1h a.	10	4	3	2	3	1	0	2	1	0	1	.	0
2	9	5	1	4	2	1	2	4	0	1	.	.	.
3	16	4	3	7	1	0	0	0	2	0	1	.	.
4	11	3	1	3	2	6	0	2	0	0	1	.	.
5	12	2	2	4	3	1	2	2	1	1	.	.	.
6	12	3	4	3	3	0	1	1	2	0	2	.	.
7	13	3	2	2	1	3	1	0	1	1	.	.	.
8	16	6	0	3	1	1	0	1	0	1	1	.	.
9	13	5	2	4	0	0	1	3	.	.	.	.	.
10	9	5	0	4	3	2	0	2	0	0	1	1	.
11	7	2	3	3	2	0	3	0	2	1	.	.	.
12h m.	5	4	0	4	4	3	1	2	1	.	.	.	.
1h p.	10	5	2	3	3	1	1	0	1	1	.	.	.
2	12	5	1	2	1	0	0	3	0	2	.	.	.
3	12	5	4	1	0	2	0	3	1	.	.	.	.
4	15	5	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1
5	14	2	2	2	2	0	0	0	1	0	1	.	.
6	11	5	3	4	0	2	1	0	0	1	.	.	.
7	16	5	3	3	0	0	1	0	1	0	1	.	.
8	15	4	5	1	4	0	1	0	1	1	2	.	.
9	14	2	2	3	4	2	2	0	0	1	1	.	.
10	14	6	2	6	0	0	1	3	0	0	1	.	.
11	13	5	2	0	1	1	4	0	0	0	1	.	.
12h n.	10	6	3	5	1	1	2	1	0	1	1	.	.
Summe	289	101	51	75	41	28	24	30	16	12	15	1	1

Tabelle 12.

Schwellenwerthe der Regenmenge. — Sommer.

	0·1—0·3	0·4—0·6	0·7—0·9	1·0—1·4	1·5—1·9	2·0—2·4	2·5—2·9	3·0—3·9	4·0—4·9	5·0—5·9	6·0—10·9	11·0—20·9	> 21·0
1ʰ a.	5	2	4	1	2	0	2	0	1	2	0	1	.
2	9	3	0	2	0	1	2	2	2	0	2	0	1
3	8	1	2	0	4	2	0	2	2	0	0	1	.
4	8	2	1	3	0	0	1	2	0	1	0	1	.
5	7	2	5	3	1	0	0	0	0	0	2	1	.
6	6	1	1	4	0	1	0	1	0	0	1	1	.
7	7	5	1	1	1	0	1	3	0	0	1	.	.
8	5	4	1	1	1	1	0	0	1	.	.	.	.
9	6	5	0	0	0	0	0	0	0	1	.	.	.
10	4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	.	.	.
11	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
12ʰ m.	4	2	1	2	0	0	1	1	0	0	1	.	.
1ʰ p.	5	2	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	.
2	5	2	1	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	6	2	0	2	0	0	0	1	0	1	.	.	.
4	5	3	2	1	2	0	0	0	0	0	1	1	.
5	5	1	0	1	2	1	0	1	0	0	0	1	.
6	5	0	3	2	0	0	2	1	0	0	3	1	.
7	5	1	1	2	1	0	0	0	0	1	2	.	.
8	3	4	0	3	0	1	1	0	1	0	2	0	1
9	5	2	0	1	1	0	0	1	1	2	1	1	.
10	5	1	0	0	1	1	0	4	0	1	0	1	1
11	6	0	1	3	0	0	1	2	0	0	2	1	1
12ʰ n.	4	4	1	5	0	0	0	2	2	2	.	.	.
Summe	131	51	25	43	18	8	14	24	10	12	19	13	5

Tabelle 13.

Schwellenwerthe der Regenmenge. — Herbst.

	0·1—0·3	0·4—0·6	0·7—0·9	1·0—1·4	1·5—1·9	2·0—2·4	2·5—2·9	3·0—3·9	4·0—4·9	5·0—5·9	6·0—10·9	11·0—20·9	> 21·0
1ʰ a.	13	3	0	4	2	2	1	1	2	1	1	.	.
2	9	7	1	5	2	2	1	0	1	.	.	.	.
3	8	8	0	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.
4	17	0	4	4	3	0	1	0	0	0	1	.	.
5	7	3	2	3	1	2	0	2	0	1	0	1	.
6	8	4	0	3	2	1	1	1	0	1	1	.	.
7	5	6	2	2	1	0	1	0	1	1	2	.	.
8	15	4	4	3	1	2	0	0	1	0	1	.	.
9	9	7	2	1	3	1	1	1	0	1	1	0	1
10	7	5	2	2	3	0	1	1	1	0	0	1	.
11	8	5	1	1	3	2	1	1	0	0	0	1	.
12ʰ m.	8	4	3	2	1	1	0	0	0	0	1	.	.
1ʰ p.	8	6	1	0	2	1	0	0	0	0	0	1	1
2	12	5	2	2	1	0	1	1	0	0	0	1	.
3	8	3	1	2	1	2	0	1	0	0	0	1	.
4	7	2	0	2	0	4	0	1	0	1	0	1	.
5	7	4	0	4	1	2	1	1	0	1	1	.	.
6	3	3	3	2	2	0	0	1	0	0	0	1	.
7	3	2	1	1	3	0	1	0	0	1	.	.	.
8	3	5	1	2	0	0	0	2	0	0	1	.	.
9	8	5	6	3	0	0	0	1	0	0	1	1	.
10	8	3	0	2	1	3	0	1	0	2	1	.	.
11	10	2	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	.
12ʰ n.	10	3	4	2	0	0	2	1	1	0	2	0	1
Summe	201	99	42	55	36	28	13	17	7	11	15	10	3

Tabelle 14.

Schwellenwerthe der Regenmenge. — Jahr.

	0·1—0·3	0·4—0·6	0·7—0·9	1·0—1·4	1·5—1·9	2·0—2·4	2·5—2·9	3·0—3·9	4·0—4·9	5·0—5·9	6·0—10·9	11·0—20·9	> 21·0
1ʰ a.	43	13	8	8	9	5	3	4	4	3	2	1	.
2	39	18	3	14	5	5	6	7	3	1	2	0	1
3	43	20	7	12	10	6	0	2	5	0	1	1	.
4	46	10	6	12	8	7	4	4	0	1	3	1	.
5	38	12	11	11	6	3	2	4	3	2	2	2	.
6	33	12	8	11	5	3	2	5	2	1	4	1	.
7	32	16	7	5	6	4	4	3	3	3	3	.	.
8	50	17	7	8	3	6	0	3	2	1	2	.	.
9	39	19	5	9	7	1	2	4	0	2	2	0	1
10	28	13	4	9	8	2	2	4	1	2	1	2	.
11	26	14	9	6	5	3	6	1	2	1	1	2	1
12ʰ m.	27	12	7	11	6	4	3	4	1	0	3	.	.
1ʰ p.	37	16	3	7	8	3	3	1	1	1	0	2	1
2	37	19	6	11	4	1	2	5	0	2	0	1	.
3	39	14	7	9	1	4	0	5	2	1	1	1	.
4	38	15	8	7	3	5	0	2	1	1	2	2	1
5	36	12	6	11	5	4	2	2	1	2	2	1	.
6	30	11	13	13	5	3	3	5	0	1	3	2	.
7	31	13	10	9	5	1	3	2	2	2	4	.	.
8	33	15	7	8	5	5	3	4	2	2	5	0	1
9	42	9	14	9	6	4	4	4	1	3	3	2	.
10	37	12	5	13	5	7	3	10	1	3	2	1	1
11	40	13	7	9	3	4	6	3	0	1	5	2	1
12ʰ n.	38	16	11	15	4	2	5	5	4	3	3	0	1
Summe	882	341	179	237	132	92	68	93	41	39	56	24	9

Um die Vertheilung der Niederschläge noch übersichtlicher darzustellen, wurden in den Tabellen 15 und 16 die berechneten Wahrscheinlichkeiten, mit welchen bestimmte Niederschlagshöhen zu den einzelnen Tagesstunden zu erwarten sind, zusammengestellt, und zwar wurden die Wahrscheinlichkeiten bestimmt, mit welchen Niederschläge mit und grösser als 1 *mm* 5 *mm*, 10 *mm* und 20 *mm* vorkommen können. In den letzten fünf Columnen der Tabelle 16 finden sich die ausgeglichenen Wahrscheinlichkeitsgrössen für die Niederschläge von und über 1 *mm*.

Aus diesen letzteren Reihen ersieht man, dass die Wahrscheinlichkeit für grössere Niederschläge im Laufe eines Tages regelmässige Schwankungen aufweist, und zwar stimmt die tägliche Periode im Ganzen und Grossen mit der der Regenmenge überein. Die Wahrscheinlichkeit für grössere Niederschläge ($\gtreqless$ 1 *mm*) nimmt daher in den Stunden der grösseren Regenmenge zu.

Es ergeben sich die Maxima zu folgenden Stunden:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst
3^h a.	(2^h a.) 5^h a.	(2^h a.) 6^h a.	6^h a.
9^h a.	12^h m.	11^h a.	10^h a.
1^h p.	6^h p.	(6^h p.)	5^h p.
(7^h p.) 10^h p.	9^h p.	$10-11^h$ p.	(10^h p.) 1^h a.,

welche eine ziemliche Übereinstimmung mit den auf S. 689 für die Regenmengen hervorgehobenen Eintrittszeiten aufweisen.

Die Wahrscheinlichkeitszahlen für das Eintreffen von Regenfällen mit mindestens 5 *mm* pro Stunde erreichen auch ihre grössten Werthe zu den Zeiten, wo in der täglichen Periode der Regenmenge die Maxima zu finden sind. Das gleiche lässt sich von den wenigen Fällen mit Regen von und über 10 *mm* und 20 *mm* sagen.

Die Wahrscheinlichkeit in Promillen, mit welcher im Winter ein Regen von $\gtreqless$ 1 *mm* pro Stunde im Mittel zu erwarten ist, beträgt nur 312, im Sommer 445; für einen Niederschlag $\gtreqless$ 5 *mm*... 18 gegen 131. Regen mit mehr als 10 *mm* kommt, wie bereits erwähnt, im Winter gar nicht vor, im Sommer mit einer Wahrscheinlichkeit von $59^0/_{00}$ und Regen $\gtreqless$ 20 *mm* mit $13^0/_{00}$.

Tabelle 15.

Wahrscheinlichkeit einer Regenstunde mit bestimmter Niederschlagshöhe.

In Promillen der Gesammtzahl der Regenstunden.

	Winter		Frühling				Sommer				Herbst			
	≧ 1 mm	≧ 5 mm	≧ 1 mm	≧ 5 mm	≧ 10 mm	≧ 20 mm	≧ 1 mm	≧ 5 mm	≧ 10 mm	≧ 20 mm	≧ 1 mm	≧ 5 mm	≧ 10 mm	≧ 20 mm
1h a.	231	0	370	37	0	0	450	150	50	0	467	67	0	0
2	304	0	483	34	0	0	500	125	42	42	393	0	0	0
3	310	0	324	29	29	0	500	45	45	0	273	0	0	0
4	375	42	483	34	0	0	421	105	53	0	300	33	0	0
5	174	0	467	33	0	0	333	143	95	0	455	91	45	0
6	222	0	387	65	0	0	500	125	62	0	455	91	0	0
7	389	56	333	37	0	0	350	50	0	0	381	143	48	0
8	208	0	267	67	0	0	286	0	0	0	258	32	0	0
9	391	43	286	0	0	0	83	83	0	0	357	107	36	36
10	316	53	481	74	37	0	429	143	0	0	391	43	43	0
11	182	0	478	43	0	0	444	333	333	111	391	43	43	0
12h m.	318	45	625	0	0	0	417	83	0	0	250	50	0	0
1h p.	292	0	370	37	0	0	417	83	83	0	250	100	100	50
2	292	0	308	77	0	0	384	0	0	0	240	40	40	0
3	240	40	250	0	0	0	333	83	0	0	368	53	53	0
4	160	40	222	37	37	37	333	133	66	0	500	111	55	0
5	269	38	250	42	0	0	500	83	83	0	500	91	0	0
6	400	0	296	37	0	0	529	235	59	0	400	67	67	0
7	370	37	200	33	0	0	461	231	0	0	500	83	0	0
8	423	38	294	88	0	0	562	187	62	62	357	71	0	0
9	300	0	419	65	0	0	533	267	133	0	240	80	40	0
10	516	0	333	30	0	0	600	200	133	67	476	143	0	0
11	367	33	259	37	0	0	588	235	176	59	300	150	100	0
12h n.	333	0	387	65	0	0	550	100	0	0	346	115	38	38
Mittel	312	18	355	42	4	1	445	131	59	13	363	73	28	6

Tabelle 16.

Wahrscheinlichkeit einer Regenstunde mit bestimmter Niederschlagshöhe.

In Promillen der Gesammtzahl der Regenstunden.

	Jahr				Ausgeglichene Werthe, ≧ 1 *mm*				
	≧ 1 *mm*	≧ 5 *mm*	≧ 10 *mm*	≧ 20 *mm*	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1ʰ a.	378	58	10	0	275*	402	487	**418**	393
2	423	38	10	10	287	415	487	381	392
3	346	19	19	0	**325**	404	480	310*	377
4	392	49	10	0	308	439	419	332	374*
5	365	63	31	0	236*	**451**	397*	416	**378**
6	391	69	11	0	252	394	**421**	**437**	377
7	360	70	12	0	302	330	372	369	341
8	253	30	0	0	299	289*	251	314*	294*
9	308	55	11	11	**326**	330	220*	341	319
10	408	66	26	0	301	432	346	**383**	372
11	364	65	52	13	250*	516	**434**	356	**387**
12ʰ m.	410	39	0	0	278	**525**	424	285	377
1ʰ p.	325	48	36	12	**299**	418	409	248*	339
2	295	34	11	0	279	309	380	274	300
3	286	36	12	0	233	257	346*	369	287*
4	282	71	35	12	207*	236*	375	467	302
5	357	60	12	0	274	254	466	**475**	347
6	392	67	22	0	360	**260**	505	450	370
7	341	73	0	0	391	247*	503	439	366
8	389	89	11	11	379	302	529	363	369
9	356	79	30	0	385	**366**	557	328*	390
10	460	70	20	10	**425**	336	580	373	**409**
11	362	96	53	11	395	309*	**581**	355	394
12ʰ n.	392	65	9	9	316	351	534	365	381
Mittel . .	361	58	18	4	308	357	438	369	360

Extreme. Bei der Bearbeitung des Curvenmateriales wurden auch die starken Regengüsse besonders untersucht. Da die dabei gemessenen Regenmengen sich auf verschieden lange Bruchtheile einer Stunde vertheilen, so wurde des Vergleiches halber für jeden Regenguss bestimmt, wie viel Millimeter Niederschlagshöhe auf eine Zehntelstunde zu schreiben wäre. Eine grössere Genauigkeit lässt der in Gebrauch stehende Ombrograph nicht zu. Die dabei erhaltenen Beträge sind aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen.

Regengüsse in 0·1 Stunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni
Mittel	1·8	—	2·1	1·1	3·1	2·9
Maximum ...	1·8	—	7·4	1·7	5·6	5·4
	Juli	**August**	**Sept.**	**October**	**Nov.**	**Dec.**
Mittel	2·5	3·1	**3·9**	2·3	2·1	2·2
Maximum ...	7·4	7·8	**10·0**	6·2	2·5	3·3

Der stärkste Regenguss war im September zu beobachten, wo in 0·1 Stunde ein Niederschlag von 10 *mm* Höhe niederging und daher, falls solch eine Intensität andauern könnte, in einer Stunde ein Regen von 100 *mm* gemessen werden müsste, oder in einem Tage 2400 *mm*, womit diese Regenmenge sich würdig den grössten Regenfällen anschliessen könnte, z. B. den für Uccle mit 2520 *mm* gefundenen, siehe Meteorolog. Zeitschrift, 1897, S. 29.

Auch der August, Juli und März zeichnen sich durch kräftige Regengüsse aus, mit 78, beziehungsweise 74 *mm* für die Stunde.

Den Jahreszeiten nach fallen die ergiebigsten Güsse im Sommer und Herbst, die schwächsten im Winter.

	Sommer	Herbst	Frühling	Winter
Mittleres Maximum...	6·9	6·2	4·9	1·7 *mm*

Von den zur Beobachtung gelangten Regengüssen fallen auf den Winter 6%, auf den Frühling und Herbst je 22% und auf den Sommer 50%.

Der Zeit nach vertheilen sich diese Regengüsse auf folgende Stunden:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
12^hn. — 4^ha. . . .	2	4	9	1	16
4^ha. — 8^ha. . . .	0	6	10	3	19
8^ha. —12^hm. . .	0	5	6	0	11
12^hm.— 4^hp. . . .	1	4	5	4	14
4^hp. — 8^hp. . . .	1	3	11	2	17
8^hp. —12^hn. . . .	2	2	13	13	30

Im Winter finden diese Regengüsse am häufigsten Nachts und Morgens statt, im Frühling Morgens und Vormittags, im Sommer Nachts und Vormittags und im Herbst Nachts.

Es sollen hier für die einzelnen Monate noch die in einer Stunde gemessenen wirklichen maximalen Regenmengen mitgetheilt werden.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Maximum	7·2	6·9	21·2	5·7	12·9	21·1
Mittl. Maximum.	1·6	1·9	2·7	1·7	2·8	3·5

	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.
Maximum	15·2	**48·4**	24·2	29·1	9·5	8·0
Mittl. Maximum.	4·5	**7·2**	3·9	3·6	1·6	2·1

Diese grössten stündlichen Regenmengen fallen auch am häufigsten während der Nachtstunden.

In dem dreijährigen Zeitraum, innerhalb welchem die hier zur Besprechung gelangten Beobachtungsergebnisse gewonnen wurden, fällt auch die (seit 1841) für Triest gemessene grösste Regenmenge eines Tages. Am 14. October 1896 ging ein Niederschlag von 156·8 *mm* nieder, wovon aber 154·0 *mm* schon innerhalb 12 Stunden, und zwar von 3^h a. bis 3^h p. erreicht wurden.

Niederschlag während des Tages und der Nacht. Zum Schlusse soll noch eine Trennung der hier zur Bearbeitung gelangten Niederschlagselemente nach Tages- und Nachtstunden vorgenommen werden, und zwar derart, dass zur ersten Hälfte die Stunden von 6^h a. bis 6^h p. gezählt werden, während zur zweiten Hälfte die von 6^h p. bis 6^h a.

Für die Regenmenge ergeben sich folgende Werthe, welche, wie auch die übrigen unten angeführten Resultate, nicht direct aus den früher besprochenen Tabellen entnommen wurden, sondern aus den ersten Zusammenstellungen der unausgeglichenen Werthe.

Regenmenge in Millimetern.

	Tag	Nacht	Nacht : Tag
Winter	82·0	104·1	1·27
Frühling	122·0	146·5	1·20
Sommer	93·7	195·4	**2·09**
Herbst..........	143·6	133·2	0·93*
Jahr............	441·3	579·2	1·31

Man ersieht daraus, dass der Nachtregen im Allgemeinen einen höheren Betrag erreicht, als der Regen während der Tagesstunden, mit Ausnahme des Herbstes, woselbst tagsüber ein grösserer Niederschlag sich ergibt. Am grössten wird der Unterschied zwischen den beiden Tageshälften im Sommer, wo der Niederschlag, welcher in den Nachtstunden niedergeht, mehr als doppelt so gross ist, als der der Tagesstunden.

Regenhäufigkeit in Stunden.

	Tag	Nacht	Nacht : Tag
Winter	94	106	1·13
Frühling	106	122	1·15
Sommer	52	73	**1·40**
Herbst..........	88	91	1·03*
Jahr............	340	392	1·15

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich das Übergewicht der Regenstunden während der Nacht, und zwar erscheint dieses am grössten während des Sommers, am geringsten während des Herbstes.

Wollen wir die Dauer des Regens genauer darstellen, so greifen wir zu den auf Zehntel-Stunden genau bestimmten Regenzeiten und erhalten nachfolgende

Regendauer in Stunden.

	Tag	Nacht	Nacht : Tag
Winter	66·6	78·5	1·18
Frühling	67·1	85·3	1·27
Sommer	25·6	41·0	**1·60**
Herbst	60·3	57·9	0·96*
Jahr	219·6	262·7	1·20

Daraus ergibt sich, dass, mit Ausnahme des Herbstes, während der Nacht durch längere Zeit Regen fällt, als tagsüber, und zwar ist dieses Übergewicht im Sommer am stärksten ausgeprägt.

Von den 1020 *mm*, welche im Durchschnitt aus dieser 36monatlichen Beobachtungszeit für ein mittleres Jahr angenommen werden können, fallen daher 579 *mm* Nachts in 263 Stunden und während des Tages 441 *mm* in 220 Stunden.

Daraus ergibt sich während der Nacht eine Intensität des Regens von 2·20 *mm* pro Stunde, während des Tages eine solche von 2·01 *mm*. Für die einzelnen Jahreszeiten findet sich nachfolgende

Intensität des Regenfalles in Millimetern.

	Tag	Nacht	Nacht : Tag
Winter	1·23	1·33	1·08
Frühling	1·82	1·72	0·95*
Sommer	3·66	4·77	**1·30**
Herbst	2·38	2·30	0·97
Jahr	2·01	2·20	1·09,

woraus sich entnehmen lässt, dass der Regen in den Nachtstunden des Winters und Sommers, namentlich aber in der letztgenannten Jahreszeit ergiebiger ist, als während des Tages; hingegen im Herbst und Frühling, wenn auch weniger bemerkbar, intensiver während der Tagesstunden.

Die Regenwahrscheinlichkeit wird durch nachfolgende Grössen dargestellt:

Regenwahrscheinlichkeit in Promillen.

	Tag	Nacht	Nacht : Tag
Winter	89	101	1·13
Frühling	96	110	1·15
Sommer	47	66	**1·40**
Herbst	81	84	1·04*
Jahr	78	90	1·15

Zu allen Jahreszeiten ist — entsprechend der besprochenen Häufigkeit — die Wahrscheinlichkeit für einen Niederschlag während der Nachtstunden grösser, im Jahresdurchschnitt 0·090 gegen 0·078. Der Unterschied ist am deutlichsten im Sommer zu bemerken, am schwächsten im Herbst.

Die oben angeführten Häufigkeitszahlen für die Regenstunden vertheilen sich, nach Gruppen geordnet, folgendermassen:

Häufigkeit der Regenstunden (Juli 1894 bis Juni 1897).

	Winter		Frühling	
	T	N	T	N
0·1— 0·9	201	**211**	209	**232**
1·0— 1·9	50	**51**	51	**65**
2·0— 2·9	14	**31**	23	**29**
3·0— 3·9	8	**14**	15	15
4·0— 4·9	2	**6**	8	8
5·0— 5·9	**3**	1	**7**	5
6·0—10·9	**4**	3	3	**12**
11·0—20·9	—	—	**1**	—
> 21·0	—	—	**1**	—

	Sommer		Herbst		Jahr	
	T	N	T	N	T	N
0·1— 0·9	97	**110**	**172**	170	679	**723**
1·0— 1·9	24	**37**	42	**49**	167	**202**
2·0— 2·9	9	**13**	**21**	20	67	**93**
3·0— 3·9	8	**16**	8	**9**	39	**54**
4·0— 4·9	1	**9**	3	**4**	14	**27**
5·0— 5·9	3	**9**	4	**7**	17	**22**
6·0—10·9	7	**12**	6	**9**	20	**36**
11·0—20·9	5	**8**	**7**	3	**13**	11
> 21·0	1	**4**	**2**	1	4	**5**

Daraus ersieht man, wie im Sommer, wo, wie oben erwähnt, die Nachtregen an Häufigkeit die Niederschläge während des Tages bedeutend überwiegen, dies bei allen Niederschlagsgruppen jedweder Grösse der Fall ist, während im Winter und theilweise im Frühling die grösseren Niederschläge tagsüber häufiger vorkommen. Im Herbste finden sich auch die schwächeren Niederschläge während des Tages häufiger vor als während der Nacht, doch ist der Unterschied sehr gering.

Den Abschluss sollen nachfolgende Wahrscheinlichkeiten einiger Schwellenwerthe bilden, welche nicht aus den Tabellen 15 und 16 entnommen, sondern direct aus den Häufigkeitszahlen der Schwellenwerthe in Berücksichtigung der Häufigkeit sämmtlicher Regenstunden des entsprechenden zwölfstündigen Zeitintervalles berechnet wurden.

Wahrscheinlichkeit der Schwellenwerthe in Promillen.

	Winter		Frühling	
	T	N	T	N
$\geqq$ 1 *mm*	287	**334**	343	**366**
$\geqq$ 5	**25**	13	38	**46**
$\geqq$ 10	—	—	**6**	3
$\geqq$ 20	—	—	**3**	—

	Sommer		Herbst		Jahr	
	T	N	T	N	T	N
$\geqq$ 1 *mm*	374	**495**	351	**375**	334	**384**
$\geqq$ 5	103	**151**	72	**74**	53	**63**
$\geqq$ 10	45	**69**	**38**	18	**19**	18
$\geqq$ 20	6	**18**	**8**	4	4	4

Die Wahrscheinlichkeit eines Niederschlages $\geqq$ 1 *mm* pro Stunde ist Nachts immer grösser als tagsüber, ebenso die Niederschläge $\geqq$ 5 *mm*, jedoch letztere mit Ausnahme des Winters, woselbst diese tagsüber wahrscheinlicher werden.

Noch grössere Niederschläge, mit und mehr als 10 *mm* pro Stunde, welche im Winter nicht mehr vorkommen,

erscheinen im Frühling und Herbst auch tagsüber mit grösserer Wahrscheinlichkeit, als während der Nacht.

Dasselbe gilt für den Niederschlag mit mehr als 20 *mm*.

Für die Sommerszeit ergeben sich hingegen sämmtliche Niederschläge mit grösserer Wahrscheinlichkeit während der Nachtstunden. Diese Wahrscheinlichkeiten überwiegen die der Tagesstunden immer mehr, je höher der Schwellenwerth, wie auch aus den Quotienten der Wahrscheinlichkeitszahlen zwischen den Nacht- und Tagesstunden ersichtlich wird: 1·32, 1·47, 1·53 und 3·00.

Über das innere Virial eines elastischen Körpers

von

Dr. **Jos. Finger.**

Von grosser Bedeutung für die mechanische Wärmetheorie ist das Virialtheorem von Clausius. Diesem zufolge[1] ist, wenn $P_x P_y P_z$ die zu drei festen rechtwinkligen Coordinatenaxen parallelen Componenten der auf irgend einen in stationärer Bewegung befindlichen, irgend einem Punktsystem angehörigen materiellen Punkt, dessen Masse m, dessen Geschwindigkeit v ist und dessen rechtwinklige Coordinaten xyz sind, einwirkenden Kraft bedeuten und wofern der Mittelwerth einer variablen Grösse durch einen über dieselbe gesetzten wagrechten Strich angedeutet ist,

$$\Sigma \frac{m}{2} \overline{v^2} = -\frac{1}{2} \Sigma (\overline{P_x x + P_y y + P_z z}). \tag{1}$$

Die Summe ist beiderseits auszudehnen über sämmtliche Punkte des Punktsystems.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung wird nach Clausius das Virial des Systems genannt, so dass das Clausius'sche Theorem (1) einfach lautet: »Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich seinem Virial«. Clausius zerlegt das Virial in zwei Theile. Der erste Theil bezieht sich auf die inneren Kräfte, mit welchen die mate-

[1] »Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz von R. Clausius«. Pogg. Annalen, Bd. 141 (1870), S. 124—130 und Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn (Juni 1870, S. 114). — »Sur une quantité analogue au potential et sur un théorème y relatif«. Comptes-rendus, 1870, p. 1314.

riellen Punkte des Systems einander gegenseitig anziehen oder abstossen und wird nach Clausius als das »innere Virial« des Punktsystems bezeichnet, während den von aussen her auf das System wirkenden äusseren Kräften der zweite Theil, das »äussere Virial« zukommt.

Unter der Annahme, dass die inneren Kräfte R bloss Functionen der Entfernung r derjenigen Massenpunkte sind, die einander mit der Kraft $R = \varphi(r)$ anziehen oder abstossen, und wofern $R = \varphi(r)$ für anziehende Kräfte positiv, für abstossende negativ in Rechnung kommt, ist das innere Virial nach Clausius bestimmt durch

$$\frac{1}{2}\Sigma(\overline{R.r}) = \frac{1}{2}\Sigma[\overline{r.\varphi(r)}], \tag{2}$$

wo die Summe auf sämmtliche Paare je zweier auf einander wirkenden materiellen Punkte des ganzen Systems auszudehnen ist.

Das äussere Virial des Druckes auf die Oberfläche des Körpers ist, wofern der Körper einem gleichförmigen, zur Oberfläche normalen Drucke p ausgesetzt ist, gegeben durch $\frac{3}{2}pV$, wo V das Volum des Körpers bedeutet.

Yvon Villarceau[1] hat im engen Anschluss an den Clausius'schen Virialsatz folgendes Theorem aufgestellt:

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}mv^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{d^2\Sigma(m\rho^2)}{dt^2} + \frac{1}{2}\Sigma[r\varphi(r)] - \frac{1}{2}\Sigma(P_x x + P_y y + P_z z), \tag{3}$$

wo jedoch $P_x P_y P_z$ bloss die Componenten der äusseren Kräfte bedeuten und $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist.[2] Villarceau hat überdies nachgewiesen, dass die Gleichung (3) auch für die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf ein fortschreitendes

---

[1] »Sur un nouveau théorème de Mécanique générale«. Comptes-rendus, tome 75 (1872), p. 232—240.

[2] Bezüglich des Prioritätsstreites zwischen Clausius und Villarceau sei verwiesen auf R. Clausius, »Sur l'équation mécanique, dont découle le théorème du virial« (Comptes-rendus, tome 75, p. 912—916) und Y. Villarceau, »Note concernant un nouveau théorème de Mécanique« (ibidem, p. 990—992).

Axensystem Giltigkeit hat, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist.

Das erste Glied der rechten Seite der Gleichung (3), d. i. die zweite nach der Zeit t genommene Ableitung des polaren Trägheitsmomentes $\Sigma(m\rho^2)$ des Systems wurde ausser von Clausius theils allgemein, theils für besondere Fälle besonders in Untersuchung gezogen von Jacobi,[1] Lipschitz,[2] C. Grinwis[3] und C. E. Basevi.[4] Der Mittelwerth dieses zweiten Differentialquotienten kann nach allgemeiner Übereinstimmung bei stationären Bewegungen, wie sie auch Clausius voraussetzt, gleich Null gesetzt werden, so dass dadurch die Gleichung (3) die Form (1) annimmt.

Die letzten Glieder der Gleichung (3), welche das Virial des Systems bestimmen, sind in Bezug auf die verschiedenen Formen, in welchen man dieselben ausdrücken kann, von R. Clausius[5] in Untersuchung gezogen worden.

Eine wichtige Rolle spielt bekanntlich das Virialtheorem in der kinetischen Gastheorie.

In die Elasticitätstheorie hat das Virial meines Wissens bisher nicht Eingang gefunden, und doch bestehen, wie in dieser Abhandlung gezeigt werden soll, für elastische Körper einfache und interessante Beziehungen zwischen dem inneren Virial, den Spannungen und dem elastischen Potential.

I. Beziehung zwischen dem inneren Virial und den Spannungen.

Unter Virial I sei in der Folge statt des Mittelwerthes von $-\frac{1}{2}\Sigma(P_x x+P_y y+P_z z)$ der wahre Werth dieser Grösse zu einer beliebigen Zeit verstanden.

[1] Jacobi, »Vorlesungen über Dynamik«, Berlin, 1866, S. 22—27.

[2] Borchardt's Journal, Bd. 66 (1866), S. 363—374: »Über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems«.

[3] C. Grinwis, »Über die vollständige Gleichung des Virials«, Arch. Néerl. Bd. 19 (1884), p. 461—478.

[4] C. E. Basevi, »Clausius' Virialtheorem«. Nat. Bd. 52 (1895), S. 413 und 414.

[5] R. Clausius, »Über verschiedene Formen des Virials«. Poggendorf's Annalen, Jubelband, 1874.

In Folge der vorausgesetzten Deformation des elastischen Körpers erlangen die anfänglichen, vor der Deformation bestehenden Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes m, welcher durch diese Deformation zur beliebigen Zeit t in die Lage M gelangt, zu dieser Zeit gewisse Werthe XYZ. Die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten jener im Punkte M herrschenden Spannung, welche sich auf ein Flächenelement bezieht, das zur Zeit t im deformirten Körper zur x-Axe, beziehungsweise y-Axe, beziehungsweise z-Axe normal ist, seien $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$. Die Normalspannungen $X_x Y_y Z_z$ seien positiv oder negativ in Rechnung gebracht, je nachdem dieselben Druck- oder Zugspannungen sind. Es sei vorausgesetzt, dass zum mindesten in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M die Componenten der einwirkenden äusseren Kräfte und die cubische Dichtigkeit stetige Functionen der Punktcoordinaten und der Zeit t sind, so dass auch innerhalb desselben Bereiches die Componenten $X_x Y_y \ldots$ der Spannungen als stetige Functionen derselben Veränderlichen angesehen werden können. Unter dieser Voraussetzung ist die Annahme gerechtfertigt, dass die componentale Beschleunigung der Bewegung parallel zu irgend einer Axe innerhalb der ganzen Ausdehnung eines Parallelepipeds, dessen vom Punkte M ausgehende Kanten mit den Coordinatenaxen gleichgerichtet sind und die (positiven) Längen ΔX, ΔY, ΔZ haben, dasselbe Qualitätszeichen besitzt, wofern diese Kanten entsprechend klein gewählt sind. Es hat sonach auch P_x, d. i. die X-Componente der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf irgend einen innerhalb dieses Parallelepipeds befindlichen materiellen Punkt (XYZ) zur Zeit t einwirken, für alle Punkte dieses Parallelepipeds dasselbe Qualitätszeichen. Es kann demnach die auf alle diese Punkte sich erstreckende Summe $\Sigma\left[-\frac{P_x}{2}\cdot X\right]$, d. i. das auf die x-Richtung bezügliche Gesammtvirial gleichgesetzt werden dem Producte aus $-\frac{1}{2}\Sigma P_x$ und irgend einem Mittelwerthe der diesen einzelnen Punkten entsprechenden Abscissen, der offenbar durch $X+\alpha$ bezeichnet werden kann, wo $0 < \alpha < \Delta X$

ist. Anderseits ist, wenn I_x den Mittelwerth dieses Virials pro Volumeinheit bedeutet, dieses Virial durch $I_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z$ ausdrückbar, daher

$$I_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z = -\frac{1}{2}(X+\alpha) . \Sigma P_x . \tag{4}$$

Für die zwischen den einzelnen Punkten des Parallelepipeds gegenseitig wirkenden, anziehenden oder abstossenden inneren Kräfte ist $\Sigma P_x = 0$, so dass bei der Bildung von ΣP_x bloss die X-Componenten der äusseren Kräfte zu summiren sind, nämlich die X-Componenten der auf die Massen der einzelnen materiellen Punkte dieses Parallepipeds von aussen einwirkenden Kräfte, deren Mittelwerth pro Volumeinheit p_x sei, ferner die Druckkräfte, welche auf die zur x-Axe senkrechten Seitenflächen des Parallelepipeds ausgeübt werden nämlich

$$\bar{X}_x . \Delta Y . \Delta Z \quad \text{und} \quad -\left(\bar{X}_x + \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} . \Delta X\right) . \Delta Y . \Delta Z,$$

ferner die auf die Seitenflächen $\Delta Z . \Delta X$ wirkenden Schubkräfte

$$\bar{X}_y . \Delta Z . \Delta X \quad \text{und} \quad -\left(\bar{X}_y + \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} . \Delta Y\right) . \Delta Z . \Delta X$$

und schliesslich die in den beiden Seitenflächen $\Delta X . \Delta Y$ thätigen Schubkräfte

$$\bar{X}_z . \Delta X . \Delta Y \quad \text{und} \quad \left(-\bar{X}_z + \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} . \Delta Z\right) . \Delta X . \Delta Y .$$

(Durch die oberhalb eines Zeichens angebrachten Querstriche sind hier und in der Folge Mittelwerthe innerhalb der betreffenden Fläche angedeutet.)

Demgemäss ist

$$\Sigma P_x = \left(p_x - \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} - \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} - \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z}\right) . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z . \tag{5}$$

Um nun den auf die Volumeinheit entfallenden Mittelwerth i_x des auf die x-Richtung bezüglichen inneren Virials für das in Betracht gezogene Parallelepiped zu bestimmen, hat

man zunächst das Virial der auf die innere Masse einwirkenden Kraft $p_x . \Delta X \Delta Y \Delta Z$, welches offenbar in der Form

$$-\frac{1}{2} p_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z (X + \beta),$$

wo $0 < \beta < \Delta X$ ist, ausgedrückt werden kann, und die Viriale der früheren auf die Seitenflächen wirkenden sechs Kräfte, nämlich die Viriale

$$-\frac{1}{2} \overline{X_x X} . \Delta Y \Delta Z \text{ und } + \frac{1}{2} \left(\overline{X_x X} + \frac{\Delta_x (\overline{X_x X})}{\Delta X} . \Delta X \right) . \Delta Y \Delta Z,$$

ferner $-\frac{1}{2} \overline{X_y X} . \Delta Z \Delta X$ u. s. w. von dem Virial (4) zu subtrahiren und durch das Volum $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ des Parallelepipeds zu dividiren, wodurch man nach Einsetzung des Werthes (5) und (4) beim Grenzübergange zu dem Grenzwerthe für $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$, also auch für $\alpha = \beta = 0$ leicht zu folgender einfachen Beziehung gelangt:

$$i_x = -\frac{1}{2} X_x . \tag{6}$$

In gleicher Weise sind die auf die y- und z-Richtung bezüglichen inneren Viriale i_y und i_z pro Volumeinheit $i_y = -\frac{1}{2} Y_y$, $i_z = -\frac{1}{2} Z_z$, sonach das gesammte innere Virial pro Volumeinheit $i_x + i_y + i_z = -\frac{1}{2} (X_x + Y_y + Z_z)$ und das innere Virial di des dem Punkte M unmittelbar benachbarten Körperelementes vom Volum dV

$$di = -\frac{1}{2} (X_x + Y_y + Z_z) . dV . \tag{7}$$

In strengerer Weise können die Gleichungen (6) und (7) etwa folgendermassen abgeleitet werden: Bedeuten ρ die cubische Dichtigkeit und p_x die äussere Kraft pro Volumeinheit im beliebigen Punkte M zur Zeit t, so ist

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = p_x - \frac{\partial X_x}{\partial X} - \frac{\partial X_y}{\partial Y} - \frac{\partial X_z}{\partial Z},$$

sonach, wenn dV das dem Punkte M unmittelbar benachbarte unendlich kleine Volumelement zur selben Zeit bedeutet,

$$\int^V X \cdot \frac{\partial^2 X}{dt^2} \rho . dV = \int^V X p_x . dV - \int^V X \cdot \frac{\partial X_x}{\partial X} dV -$$
$$- \int^V X \cdot \frac{\partial X_y}{\partial Y} dV - \int^V X \cdot \frac{\partial X_z}{\partial Z} dV, \quad (8)$$

wo diese sämmtlichen Volumintegrale ausgedehnt werden können auf ein beliebiges allseits geschlossenes Volum V, das innerhalb des elastischen Körpers gelegen ist. Wie früher, sei auch hier vorausgesetzt, dass die hier zu integrirenden Grössen innerhalb des Volums V stetige Functionen der Coordinaten sind.

Nun ist

$$X \frac{\partial X_x}{\partial X} = \frac{\partial (X X_x)}{\partial X} - X_x, \quad X \frac{\partial X_y}{\partial Y} = \frac{\partial (X X_y)}{\partial Y},$$
$$X \frac{\partial X_z}{\partial Z} = \frac{\partial (X X_z)}{\partial Z},$$

sonach, wenn man die letzten drei Raumintegrale der Gleichung (8) in Flächenintegrale verwandelt, die sich über die Flächenelemente dF der Grenzfläche F des Volums V erstrecken,

$$\int^V X \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \rho dV - \int^V X . p_x dV -$$
$$- \int^F X (X_x \cos x, n + X_y \cos y, n + X_z \cos z, n) dF = \int^V X_x . dV,$$

wo n die nach dem Inneren des Volums V gerichtete Normale des Flächenelementes dF bedeutet. Die in dieser Gleichung innerhalb der Klammern enthaltene Summe stellt die X-Componente X_n des auf das Flächenelement dF einwirkenden äusseren Druckes dar, so dass die letzte Gleichung nach ihrer Multiplication mit $-\frac{1}{2}$ die Form annimmt:

$$-\frac{1}{2}\int^V X\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\rho\, dV - \left[-\frac{1}{2}\int^V X\,.\,p_x dV - \frac{1}{2}\int^F XX_n dF\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int^V X_x dV.$$

Da nun das erste Glied dieser Gleichung das auf die x-Richtung bezügliche Virial sämmtlicher Kräfte darstellt, welche auf den von der Fläche F eingeschlossenen Körpertheil einwirken, dagegen das innerhalb der eckigen Klammern enthaltene zweite Glied das auf dieselbe Richtung bezogene Virial sämmtlicher äusseren Kräfte ausdrückt, so muss die Differenz dieser beiden Glieder, d. i. $-\frac{1}{2}\int^V X_x dV$ dem auf die x-Richtung bezogenen Virial der inneren Kräfte gleichen, wodurch die Gleichung (6) also auch (7) nachgewiesen ist.

II. Beziehung des inneren Virials zum inneren Potential.

Es sei dv das anfängliche, vor der Deformation vorhandene Volum jenes Körperelementes, das zur Zeit t im deformirten Zustande das Volum dV einnimmt. Ferner sei durch f die Potentialfunction der Elasticität bezeichnet, worunter verstanden sein soll eine Function von der Beschaffenheit, dass das dem Zeitelement dt entsprechende Differential $df.dv$ die von den inneren Kräften in diesem Zeitelement geleistete mechanische Arbeit ausdrückt. Das Potential U der inneren Kräfte (das »elastische Potential«) ist dann

$$U = -\int f.dv. \tag{9}$$

Wie früher, sei auch hier stets vorausgesetzt, dass die zur beliebigen Zeit t bestehenden Coordinaten XYZ des Punktes M stetige Functionen der Coordinaten xyz der anfänglichen Lage m dieses Punktes und der Zeit t sind. Dies muss dann auch der Fall sein für die Componenten $\xi = X-x$, $\eta = Y-y$, $\zeta = Z-z$ der stattgefundenen Verschiebung mM dieses Punktes.

Kürze halber seien durch $a_{11} a_{12} \ldots$ bezeichnet die Grössen

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}, & a_{21} = \frac{\partial \xi}{\partial y}, & a_{31} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ a_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, & a_{22} = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}, & a_{32} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ a_{13} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & a_{23} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & a_{33} = 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die hier angeführten partiellen Differentialquotienten der Componenten $\xi \eta \zeta$ der Verschiebung mM seien Verschiebungsderivationen genannt. In der allgemeinen Elasticitätstheorie sind von ganz besonderer Wichtigkeit folgende sechs Functionen der Grössen (10)

$$\left.\begin{array}{l} a_x = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \\ a_y = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \\ a_z = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \\ b_x = a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} \\ b_y = a_{31} a_{11} + a_{32} a_{12} + a_{33} a_{13} \\ b_z = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Durch diese sechs Functionen $a_x \ldots b_z$ ist nämlich in jedem Falle nicht nur die Deformation eines beliebigen Körperelementes vollkommen bestimmt, sondern es ist auch, wie zuerst George Green[1] gezeigt hat, mag die Deformation welche immer und mag das Körperelement isotrop oder aëolotrop sein, die Potentialfunction f stets nur eine Function dieser sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$.

Das Verhältniss der Volumelemente $\frac{dV}{dv}$ ist durch die Determinante

[1] Green, On the propagation of light in crystallized media (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839). — Green, On the laws of reflexion and refraction of light (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1838). — Siehe auch: Mathematical Papers of George Green, edited by N. M. Ferrers (London 1871), p. 249, 296, 297. — Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, tome XX. Paris 1872, p. 592). — Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, II. Edit., part II, p. 462 u. s. w.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{dV}{dv}, \tag{12}$$

also die cubische Dilatation in M durch $D-1$ bestimmt.

Für die normalen Spannungen $X_x Y_y Z_z$ bestehen die allgemeinsten Gleichungen:[1]

$$D.X_x = a_{11}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{31}\frac{\partial f}{\partial a_{31}}$$
$$D.Y_y = a_{12}\frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{32}\frac{\partial f}{\partial a_{32}}$$
$$D.Z_z = a_{13}\frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{23}\frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{33}\frac{\partial f}{\partial a_{33}}.$$

Setzt man diese Werthe in (7) ein und beachtet, dass $\frac{dV}{D} = dv$ ist, so findet man für das Virial di desjenigen Körperelementes, dessen anfängliches Volum dv war, den Werth

$$di = -\frac{1}{2}\Sigma\left(a_{mn}\frac{\partial f}{\partial a_{mn}}\right).dv, \tag{13}$$

wo sich die Summe Σ auf alle 9 Grössen (10) erstreckt.

Gewöhnlich wird bekanntlich in der Elasticitätstheorie die Annahme gemacht, dass die Potentialfunction f eine homogene Function der Verschiebungsderivationen $\lambda_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\lambda_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\lambda_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}, \ldots$, und zwar vom zweiten Grade ist. Unter dieser Voraussetzung würde zufolge der Werthe (10) und zufolge einer bekannten Eigenschaft homogener Functionen die Gleichung (13) die Form annehmen

$$di = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} + 2f\right].dv,$$

[1] Carl Neumann, Zur Theorie der Elasticität (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1860, S. 281—318). — Boussinesq, Théorie des ondes etc. (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1872). — Finger, Das Potential der inneren Kräfte u. s. w. (Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII, 1894, S. 174.

demnach der Unterschied zwischen dem inneren Virial di und dem inneren Potential $dU = -f.dv$ gegeben sein durch

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_x}+\frac{\partial f}{\partial \lambda_y}+\frac{\partial f}{\partial \lambda_z}\right].dv.$$

Selbst wenn auch nicht von der obigen, nur unter beschränkenden Voraussetzungen giltigen Annahme ausgegangen wird, so bestehen — und zwar auch für aëolotrope Substanzen — zwischen dem inneren Virial und Potential einfache Beziehungen.

Es lässt sich nämlich die von der Wahl der drei orthogonalen Axenrichtungen xyz unabhängige Summe der Normalspannungen $X_x Y_y Z_z$, die der Summe der demselben Punkte M zugehörigen Hauptspannungen $S_1 S_2 S_3$ gleich ist, auch folgendermassen ausdrücken:[1]

$$X_x+Y_y+Z_z = S_1+S_2+S_3 =$$
$$= \frac{2}{D}\left[a_x\frac{\partial f}{\partial a_x}+a_y\frac{\partial f}{\partial a_y}+a_z\frac{\partial f}{\partial a_z}+b_x\frac{\partial f}{\partial b_x}+b_y\frac{\partial f}{\partial b_y}+b_z\frac{\partial f}{\partial b_z}\right]. \quad (14)$$

Sind nun abc die reciproken Werthe der Halbaxen des Ellipsoids

$$a_x x^2+a_y y^2+a_z z^2+2b_x yz+2b_y zx+2b_z xy = 1, \quad (15)$$

d. i. jenes Ellipsoids, das anfänglich (vor der betrachteten Deformation) alle jene Punkte in sich enthält, die zur Zeit t in einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte 0 und dem Halbmesser 1 liegen, und sind $(\alpha_x\alpha_y\alpha_z)$, $(\beta_x\beta_y\beta_z)$, $(\gamma_x\gamma_y\gamma_z)$ die Richtungscosinus dieser Halbaxen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, so ist

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= a^2\alpha_x^2+b^2\beta_x^2+c^2\gamma_x^2\\
a_y &= a^2\alpha_y^2+b^2\beta_y^2+c^2\gamma_y^2\\
a_z &= a^2\alpha_z^2+b^2\beta_z^2+c^2\gamma_z^2\\
b_x &= a^2\alpha_y\alpha_z+b^2\beta_y\beta_z+c^2\gamma_y\gamma_z\\
b_y &= a^2\alpha_z\alpha_x+b^2\beta_z\beta_x+c^2\gamma_z\gamma_x\\
b_z &= a^2\alpha_x\alpha_y+b^2\beta_x\beta_y+c^2\gamma_x\gamma_y
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

[1] Finger, »Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aëolotropen und isotropen Substanzen«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII, 1894, S. 1082 und 1083.

Die Axen dieses Ellipsoids (15) sind bekanntlich die Deformationshauptaxen in ihrer anfänglichen Lage und die linearen Dilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ in der Richtung dieser Axen sind die Hauptdilatationen; demgemäss ist

$$\left.\begin{aligned} a &= 1+\lambda_a \\ b &= 1+\lambda_b \\ c &= 1+\lambda_c \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Da die Potentialfunction f eine Function der sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ ist und diese letzteren Grössen mittelst der Gleichungen (16) stets durch abc und irgend welche drei Grössen, welche die Axenrichtungen des Ellipsoids (15), also auch die Richtungscosinus $\alpha_x \beta_x \ldots$ zu ermitteln gestatten, ausgedrückt werden können, so kann die Potentialfunction f auch als eine Function von abc und der letztgenannten drei Richtungsgrössen betrachtet werden. Dann ist aber den Gleichungen (6) zufolge

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x}.\alpha_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y}.\alpha_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z}.\alpha_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x}.\alpha_y \alpha_z + \frac{\partial f}{\partial b_y}.\alpha_z \alpha_x + \frac{\partial f}{\partial b_z}.\alpha_x \alpha_y\right].2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x}.\beta_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y}.\beta_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z}.\beta_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x}.\beta_y \beta_z + \frac{\partial f}{\partial b_y}.\beta_z \beta_x + \frac{\partial f}{\partial b_z}.\beta_x \beta_y\right].2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x}.\gamma_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y}.\gamma_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z}.\gamma_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x}.\gamma_y \gamma_z + \frac{\partial f}{\partial b_y}.\gamma_z \gamma_x + \frac{\partial f}{\partial b_z}.\gamma_x \gamma_y\right].2c.$$

Demnach findet man bei Berücksichtigung von (16)

$$a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} =$$
$$= 2\left[a_x \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial a_z} + a_x \frac{\partial f}{\partial b_x} + b_y \frac{\partial f}{\partial b_y} + b_z \frac{\partial f}{\partial b_z}\right].$$

Der Gleichung (14) zufolge ist daher stets

$$X_x + Y_y + Z_z = \frac{1}{D}\left[a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}\right] \qquad (18)$$

oder es ist, wenn mit Zuhilfenahme von (17) die Potentialfunction f als Function der Hauptdilatationen $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ und der oberwähnten drei Richtungsgrössen ausgedrückt ist, zufolge (18)

$$X_x + Y_y + Z_z = \\ = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_c} + \lambda_a\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \lambda_b\frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \lambda_c\frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right]. \qquad (19)$$

Durch Einsetzung von (18), beziehungsweise (19) in (7) bei Beachtung von (12) findet man für das innere Virial di des Körperelementes, dessen anfängliches Volum dv war, folgende Werthe:

$$di = -\frac{1}{2}\left[a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}\right].\,dv \qquad (20)$$

$$di = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right].\,dv - \\ -\frac{1}{2}\left[\lambda_a\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \lambda_b\frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \lambda_c\frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right].\,dv. \qquad (21)$$

Das Virial einer Einzelkraft, deren Angriffspunkt die Coordinaten xyz hätte und deren Potential U wäre, würde $\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ sein. Die Analogie zwischen diesem Ausdruck und dem eben gefundenen Werthe (20) ist in die Augen springend.

Da $a^2b^2c^2$ als reciproke Quadrate der Halbaxen des Ellipsoids (15) die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

sind, wo

$$\left.\begin{aligned} A &= a^2+b^2+c^2 = a_x+a_y+a_z \\ B &= b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 = a_ya_z+a_za_x+a_xa_y-b_x^2-b_y^2-b_z^2 \\ C &= a^2b^2c^2 = a_xa_ya_z-a_xb_x^2-a_yb_y^2-a_zb_z^2+2b_xb_yb_z = D^2 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

ist, so können abc auch als einwerthige Functionen von ABC, also die Potentialfunction f in jedem Falle als einwerthige Function von ABC und der drei oberwähnten Richtungsgrössen angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung ist den letzten Gleichungen (22) zufolge

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (b^2+c^2)\frac{\partial f}{\partial B} + b^2c^2\frac{\partial f}{\partial C}\right].2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (c^2+a^2)\frac{\partial f}{\partial B} + c^2a^2\frac{\partial f}{\partial C}\right].2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (a^2+b^2)\frac{\partial f}{\partial B} + a^2b^2\frac{\partial f}{\partial C}\right].2c,$$

sonach

$$a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} = 2\left[A\frac{\partial f}{\partial A} + 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 3C\frac{\partial f}{\partial C}\right].$$

Es kann sonach der Gleichung (20) gemäss das Virial di auch in folgender Form ausgedrückt werden:

$$di = -\left(A\frac{\partial f}{\partial A} + 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 3C\frac{\partial f}{\partial C}\right)dv. \tag{23}$$

Besonders bemerkenswerth ist jener Ausdruck für das innere Virial di, der sich ergibt, wenn man die Deformationen jenes Triëders in Betracht zieht, dessen Spitze M ist und dessen in M zusammenstossende Kanten anfänglich (vor der betrachteten Deformation) zu den Coordinatenaxen xyz parallel waren und die Länge 1 hatten.

Durch $R_1R_2R_3$ seien die Längen und Lagen dieser Kanten zur Zeit t bezeichnet, so dass die den Richtungen xyz entsprechenden linearen Dilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ für den Punkt M

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= R_1-1\\ \lambda_2 &= R_2-1\\ \lambda_3 &= R_3-1\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

sind.

Den früheren Gleichungen $X=x+\xi$, $Y=y+\eta$, $Z=z+\zeta$ zufolge ist für irgend einen dem Punkte M unmittelbar benachbarten Punkt, dessen anfängliche Coordinaten $x+dx$, $y+dy$,

$z+dz$ und dessen Coordinaten zur Zeit t nach erfolgter Deformation $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ sind,

$$dX = \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz = a_{11}dx + a_{21}dy + a_{31}dz$$

$$dY = \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz = a_{12}dx + a_{22}dy + a_{32}dz$$

$$dZ = \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)dz = a_{13}dx + a_{23}dy + a_{33}dz.$$

Die relativen Coordinaten der Endpunkte $M_1 M_2 M_3$ der drei Kanten $R_1 R_2 R_3$ des oberwähnten Triëders in Bezug auf ein durch den Anfangspunkt M dieser Kanten gelegtes, zu xyz paralleles Axensystem besitzen demnach die Werthe

$$(a_{11}a_{12}a_{13}),\ (a_{21}a_{22}a_{23}),\ (a_{31}a_{32}a_{33}),$$

und es ist daher

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = a_x \\ R_2^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_y \\ R_3^2 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_z \\ R_2R_3\cos(R_2R_3) &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = b_x \\ R_3R_1\cos(R_3R_1) &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = b_y \\ R_1R_2\cos(R_1R_2) &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = b_z \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Da diesen Gleichungen gemäss die Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ durch die Längen $R_1 R_2 R_3$ der Kanten und entweder durch die drei Kantenwinkel $(R_2 R_3)$, $(R_3 R_1)$, $(R_1 R_2)$ oder durch drei andere die gegenseitige Lage dieser Kanten bestimmende Richtungsgrössen (z. B. die drei Neigungswinkel der Seitenflächen des Triëders $MM_1M_2M_3$) bestimmt sind, so kann auch die Potentialfunction f als Function dieser sechs Grössen betrachtet werden. Dann ist aber den Gleichungen (25) gemäss

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} = \frac{\partial f}{\partial a_x}.2R_1 + \frac{\partial f}{\partial b_z}.R_2\cos(R_1R_2) + \frac{\partial f}{\partial b_y}.R_3\cos(R_3R_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_2} = \frac{\partial f}{\partial b_z}.R_1\cos(R_1R_2) + \frac{\partial f}{\partial a_y}.2R_2 + \frac{\partial f}{\partial b_x}.R_3\cos(R_2R_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_3} = \frac{\partial f}{\partial b_y}.R_1\cos(R_3R_1) + \frac{\partial f}{\partial b_x}.R_2\cos(R_2R_3) + \frac{\partial f}{\partial a_z}.2R_3.$$

Es ist sonach

$$R_1\frac{\partial f}{\partial R_1}+R_2\frac{\partial f}{\partial R_2}+R_3\frac{\partial f}{\partial R_3}=$$

$$=2\left[a_x\frac{\partial f}{\partial a_x}+a_y\frac{\partial f}{\partial a_y}+a_z\frac{\partial f}{\partial a_z}+b_x\frac{\partial f}{\partial b_x}+b_y\frac{\partial f}{\partial b_y}+b_z\frac{\partial f}{\partial b_z}\right],$$

daher zufolge (14)

$$X_x+Y_y+Z_z=\frac{1}{D}\left(R_1\frac{\partial f}{\partial R_1}+R_2\frac{\partial f}{\partial R_2}+R_3\frac{\partial f}{\partial R_3}\right). \quad (26)$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung (7) führt, da $\frac{dV}{D}=dv$ ist, zu dem einfachen Virialwerthe

$$di=-\frac{1}{2}\left(R_1\frac{\partial f}{\partial R_1}+R_2\frac{\partial f}{\partial R_2}+R_3\frac{\partial f}{\partial R_3}\right).dv. \quad (27)$$

oder wenn schliesslich nach Einsetzung der Werthe $R_1=1+\lambda_1$, $R_2=1+\lambda_2$, $R_3=1+\lambda_3$ die Potentialfunction f als Function der drei linearen Dilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ längs der drei Axenrichtungen und dreier die gegenseitige Lage der drei Kanten $R_1R_2R_3$ des Tetraëders bestimmenden Richtungsgrössen in Rechnung gezogen wird, so wird

$$X_x+Y_y+Z_z=$$

$$=\frac{1}{D}\left[\frac{df}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_3}+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+\lambda_3\frac{\partial f}{\partial\lambda_3}\right] \quad (28)$$

und

$$di=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_3}\right)dv-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+\lambda_3\frac{\partial f}{\partial\lambda_3}\right].dv. \quad (29)$$

In der Elasticitätstheorie geht man bisher fast immer von der Annahme aus, dass die Verschiebungsderivationen $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ ... unendlich klein sind, so dass fast stets Glieder, welche höhere Potenzen dieser Derivationen enthalten, gegenüber Gliedern mit niederen Potenzen vollständig vernach-

lässigt werden. Unter dieser Voraussetzung, die leider in gar vielen Fällen durch die Erfahrung nicht gerechtfertigt ist, nehmen, wie dies aus den Gleichungen (10), (11), (12), (24) und (25) sofort zu ersehen ist, die in den letzten Gleichungen angewendeten Variablen, von welchen die Function f abhängig ist, folgende einfache und allgemein als sogenannte »Deformationselemente« zur Anwendung kommende Werthe an:

$$\lambda_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda_x, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_y, \quad \lambda_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \lambda_z,$$

$$D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

$$\cos(R_2 R_3) = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \cos(R_3 R_1) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\cos(R_1 R_2) = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Da die hier durchgeführte Untersuchung lediglich von der Annahme der Stetigkeit der hier zur Anwendung kommenden Functionen ausgeht und im Übrigen die Beschaffenheit des in Betracht gezogenen Körpers völlig unbestimmt lässt, so haben alle hier abgeleiteten Gleichungen Giltigkeit für alle, also auch für anisotrope Substanzen, mögen dieselben homogen sein oder mögen sich ihre physikalischen Eigenschaften in continuirlicher Weise von Punkt zu Punkt ändern. In dem besonderen Falle, dass die betrachtete Substanz isotrop ist, hängt der Werth der Potentialfunction f bekanntlich in keiner Weise ab von den Richtungen der Deformationshauptaxen, also auch nicht von den Axenrichtungen des Ellipsoids (15). Es ist demgemäss f bloss eine Function der drei Längen abc oder zufolge (17) der drei Hauptdilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ oder nach (22) der drei Grössen ABC. Es ist demnach auch das innere Virial di einer isotropen Substanz den Gleichungen (20), (21) und (23) zufolge bloss eine Function der drei Grössen abc oder der drei Hauptdilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ oder der drei Grössen ABC.

Über den Feuerbach'schen Kreis

von

Prof. Dr. **B. Sporer** in Ehingen.

(Mit 4 Textfiguren.)

Seit der Auffindung des Neunpunktekreises des Dreiecks durch Brianchon und Poncelet[1] und der wichtigsten Eigenschaft desselben durch Feuerbach,[2] wonach er den In- und die Ankreise des Dreiecks berührt, ist der Neunpunktekreis oder der Feuerbach'sche Kreis Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden.[3] Namentlich war es die von Feuerbach aufgefundene Eigenschaft, die den Scharfsinn zahlreicher Geometer herausforderte. Trotz der mannigfaltigen Beweise des Satzes von Feuerbach ist aber doch keiner bekanntgeworden, der befriedigte, auch der von Schröter gegebene nicht.[4]

Die Beweise selbst stützen sich vielfach auf algebraische Beziehungen am Dreieck und sind beinahe durchwegs mehr oder weniger verwickelt, erkünstelt und erzwungen, so dass keiner Gemeingut der mathematischen Welt geworden ist. Es möge deshalb uns gestattet sein, in Folgendem zu zeigen, dass dieser Satz eine einfache Folgerung aus einer Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel ist. Zugleich werden sich dabei eine

[1] Vergl. deren inhaltsreiche Abhandlung über die gleichseitige Hyperbel in Gergonne's Annalen, Bd. 11, 1821.

[2] Feuerbach, Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks. Nürnberg 1822.

[3] Über die Literatur vergl. Lange, Geschichte des Feuerbach'schen Kreises. Progr. der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule, Berlin, Ostern 1894.

[4] Journal für Mathematik, Bd. 68, S. 208—234 und Math. Annalen, Bd. VII.

Reihe weiterer merkwürdiger Beziehungen zwischen dem Feuerbach'schen Kreise und dem Dreieck ergeben.

I.

Ist irgend einem Dreieck ABC eine gleichseitige Hyperbel H^2 umschrieben, so geht dieselbe durch den Höhenschnitt H

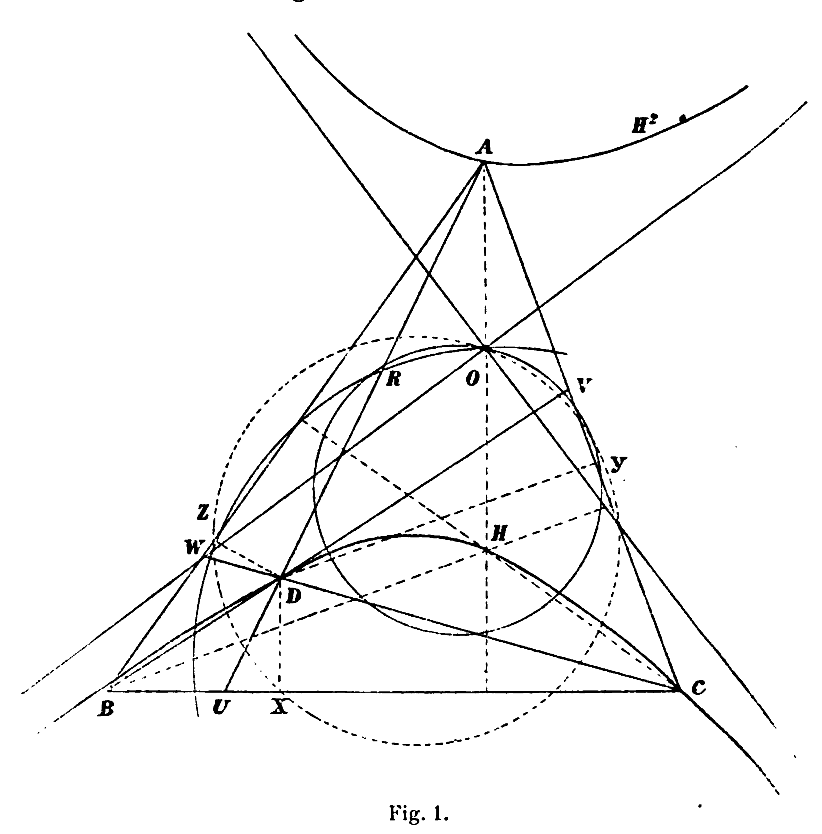


Fig. 1.

des Dreiecks und ihr Mittelpunkt O liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks (Fig. 1). Alle einem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln bilden also ein Büschel durch vier Punkte A, B, C, H und durch einen weiteren Punkt D ist eine einzige solche Hyperbel bestimmt. Eine unmittelbare Folge hievon ist aber die: die vier Feuerbach'schen Kreise der vier Dreiecke

$$ABC \qquad ABD \qquad ACD \qquad BCD$$

schneiden sich in einem Punkte O, dem Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel, welche dem Viereck $ABCD$ umschrieben ist.

Treffen sich ferner die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ in den Punkten U, V, W, so ist das Dreieck UVW ein Polardreieck der Hyperbel H^2, und da jeder einem solchen Polardreieck umschriebene Kreis durch den Mittelpunkt dieser Hyperbel geht, so geht also auch der durch die Punkte UVW gelegte Kreis durch den Punkt O.[1]

Fällen wir weiter etwa von dem Punkte D auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX, DY, DZ und legen durch die Fusspunkte X, Y, Z dieser Lothe einen weiteren Kreis, so geht auch dieser durch den Punkt O. Ist nämlich R die Mitte von AD, so sind über den Seiten des Dreiecks RYZ als Sehnen Kreise beschrieben, nämlich der Kreis durch die Punkte XYZ und die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke ADB und ADC. Die Peripheriewinkel über den Sehnen ZR und YR in den Feuerbach'schen Kreisen sind aber gleich $ZBD = ZXD$ und gleich $YCD = YXD$, d. h. zusammen so gross als der Winkel ZXY, woraus unmittelbar folgt, dass die Kreise durch einen Punkt gehen, der in diesem Falle nur der Mittelpunkt O von H^2 sein kann. Da nicht nur der Punkt D, sondern auch jeder der übrigen Punkte A, B, C einen solchen Kreis durch O liefert, erhalten wir also im Ganzen neun Kreise durch O.

Das erhaltene Resultat ermöglicht es uns aber, den folgenden Satz auszusprechen:

»Ist irgend einer gleichseitigen Hyperbel H^2 ein beliebiges Dreieck ABC einbeschrieben und fällen wir von einem beliebigen Punkte D der Hyperbel auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX, DY und DZ, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe mit dem Mittelpunkte O der Hyperbel auf einem Kreise. Lassen wir also den Punkt D die ganze Hyperbel durchlaufen, so erhalten wir ein System von unendlich vielen Kreisen, die alle durch einen Punkt, den Mittelpunkte O der

---

[1] Soweit gaben diese Eigenschaften bereits Brianchon und Poncelet in der angezogenen Arbeit. Ausser diesen fünf Kreisen führen dieselben noch drei weitere an, die uns aber hier nicht berühren.

Hyperbel, gehen, also einen festen Punkt auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks ABC gemein haben. Der letztere Kreis gehört zudem ebenfalls diesem System von Kreisen an, und zwar entspricht

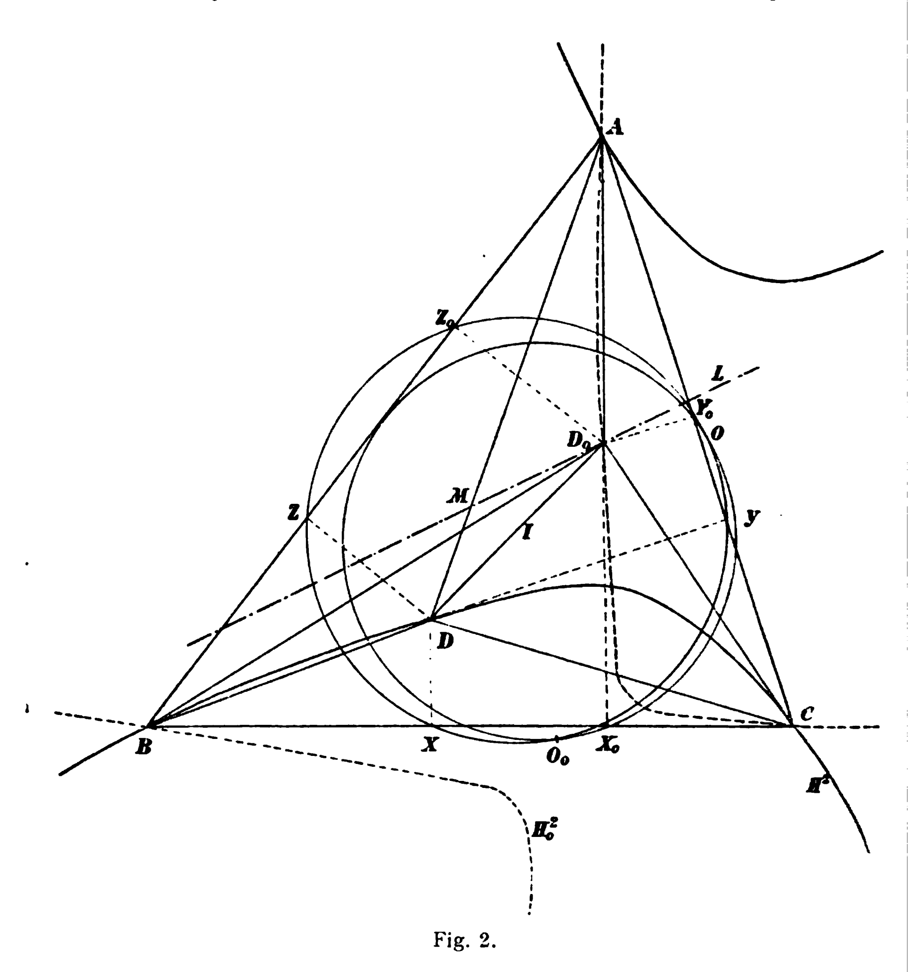


Fig. 2.

er dem Höhenschnitt H des Dreiecks ABC als Punkt D der Hyperbel H^2.«

II.

Fällen wir von einem Punkt D auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX, DY und DZ und legen durch die

Fusspunkte X, Y, Z dieser Lothe einen Kreis I^2 mit dem Mittelpunkte I (Fig. 2), so schneidet dieser die Seiten noch in den Punkten X_0, Y_0 und Z_0, und die Lothe in diesen Punkten auf den Seiten treffen sich allemal in einem Punkte D_0, und zwar ist I die Mitte von DD_0. Legen wir durch die Punkte D und D_0 die beiden dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln H^2 und H_0^2, so müssen die Mittelpunkte O und O_0 derselben sowohl auf dem Kreis I^2 (nach I), als auch auf dem Feuerbach'schen Kreis von ABC liegen, d. h. diese beiden Kreise schneiden sich stets in zwei Punkten, den Mittelpunkten O und O_0.

Lassen wir aber jetzt X mit X_0, Y mit Y_0 und Z mit Z_0 zusammenfallen, d. h. wählen wir als Punkt D etwa den Mittelpunkt des Inkreises, so fällt D mit D_0, H^2 mit H_0^2 und O mit O_0 zusammen und wir haben:

»Der Inkreis berührt den Feuerbach'schen Kreis im Mittelpunkte derjenigen gleichseitigen Hyperbel, die dem Dreieck ABC umschrieben ist und ausserdem noch durch den Mittelpunkt des Inkreises geht.« Analoges gilt für die Ankreise.

Ausserdem erhalten wir noch unmittelbar aus den Resultaten in I:

»Legen wir durch die Endpunkte der Winkelhalbirenden (d. h. deren Schnitten mit den Gegenseiten) einen Kreis, so geht dieser durch den Berührungspunkt O des Inkreises und des Feuerbach'schen Kreises. Desgleichen gehen durch diesen Punkt O die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke, die aus zwei Ecken des Dreiecks ABC und dem Mittelpunkte I des Inkreises gebildet werden. Fällen wir ebenso etwa von der Ecke A auf die Seiten des Dreiecks BCI Lothe und legen durch die Fusspunkte dieser Lothe einen Kreis, so geht auch dieser durch O.«

Überhaupt gehört zu jedem Punkte D der gleichseitigen Hyperbel durch $ABCI$, wie wir sahen, ein solcher Kreis durch O. Wir werden aber dieses System von Kreisen noch auf eine andere Art erhalten.

III.

Lassen wir den Punkt D die gleichseitige Hyperbel H^2 durchlaufen, so können wir nach dem Orte des zugehörigen Punktes D_0 fragen (Fig. 2). Die Punkte D und D_0 sind aber auch die Brennpunkte eines Kegelschnittes, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist. Daraus folgt aber, dass z. B. die Geraden AD und AD_0 mit den Seiten AB und AC wechselweise gleiche Winkel bilden, oder dass die Punkte D und D_0 aus den Ecken A, B und C durch projectivische Büschel projicirt werden. So sind z. B. die Büschel, die die Punkte D_0 aus den Ecken B und C projiciren, projectivisch. Zudem entspricht aber dem Punkte A als Punkt D ein Punkt auf BC, d. h. BC entspricht sich in den beiden Büscheln selbst, die Büschel sind nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch.

Der Ort des Punktes D_0 ist also eine Gerade L. Lassen wir aber D in den Höhenschnitt H des Dreiecks ABC fallen, so entspricht diesem der Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC, d. h. wie alle Hyperbeln H^2 den Höhenschnitt gemein haben, so haben alle Geraden L den Punkt M gemein, oder wir haben:

»Ziehen wir durch den Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC eine beliebige Gerade L, wählen auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt D_0, fällen von diesem auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe und legen durch deren Fusspunkte X_0, Y_0, Z_0 einen Kreis, so gehen die unendlich vielen Kreise, welche zu den Punkten D_0 der Geraden L gehören, alle durch einen Punkt O_0 auf dem Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks ABC«.

Und insbesondere z. B. für den Inkreis:

»Verbinden wir den Mittelpunkt M des Umkreises mit dem Mittelpunkte I des Inkreises eines Dreiecks ABC, fällen von einem beliebigen Punkte dieser Verbindungslinie Lothe auf die Seiten des Dreiecks ABC und legen durch die Fusspunkte dieser Lothe einen Kreis, so geht dieser durch den Berührungspunkt O des Inkreises mit dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks ABC.«

IV.

Die Asymptoten aller gleichseitigen Hyperbeln, die dem Dreieck ABC umschrieben sind, umhüllen eine Curve der dritten Classe und des vierten Grades. Um dieselben zu erhalten, können wir von den Punkten des Umkreises ausgehen und von diesen Lothe auf die Seiten des Dreiecks fällen. Die Fusspunkte dieser Lothe liegen dann auf Geraden G, und zwar bilden allemal die Geraden G, die den Endpunkten eines Durchmessers entsprechen, ein Paar von zusammengehörigen Asymptoten.[1] Unter den unendlich vielen Kreisen, die den Punkten D_0 einer der Geraden L zugeordnet sind, gibt es aber immer drei, die zu Geraden werden. Zwei derselben entsprechen den Schnitten R und R_1 von L mit dem Umkreis (Fig. 3), diese als Punkte D_0 angesehen, und zwar sind diese Asymptoten der Hyperbel H^2. Die dritte Gerade entspricht dem unendlich fernen Punkte von L als Punkt D_0. Um diese Gerade zu erhalten, können wir auch von dem vierten Schnitt E der Hyperbel mit dem Umkreis ausgehen, indem dieser der dem letzten Punkte D_0 conjugirte Punkt D ist. Um diesen Punkt E zu erhalten, können wir auf verschiedene Weise verfahren:

1. Wie wir sahen, bilden die Geraden AD und AD_0 mit den Seiten AC und AB wechselweise gleiche Winkel. Die Gerade AD_0 ist aber der Geraden L jetzt parallel, woraus sich die Gerade AD ergibt.

2. Hat irgend ein Kreis mit dem Mittelpunkte M mit einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkte O vier Punkte gemein, so ist die Mitte N von OM der Schwerpunkt der vier gemeinsamen Punkte. Um den Punkt E zu erhalten, haben wir also nur den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC mit der Mitte N von OM zu verbinden und auf dieser Verbindungslinie E so zu bestimmen, dass $3SN = NE$ ist.

3. Verbinden wir die Punkte M und O mit den Mitten der Seiten des Vierecks $ABCE$, so sind diese Verbindungslinien

---

[1] Jacob Steiner, Über eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades). Ges. Werke, Bd. 2, S. 639—647 oder Journal für Math., Bd. 53, S. 231—237.

paarweise gleich und parallel, indem die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des Vierecks in dem Punkte N gehälftet werden. Fällen wir also in einem Kreisviereck von den Mitten der sechs Seiten auf die zugehörigen Gegenseiten Lothe, so gehen diese durch den Mittelpunkt O der gleichseitigen Hyperbel durch die Ecken des Vierecks. Sind also

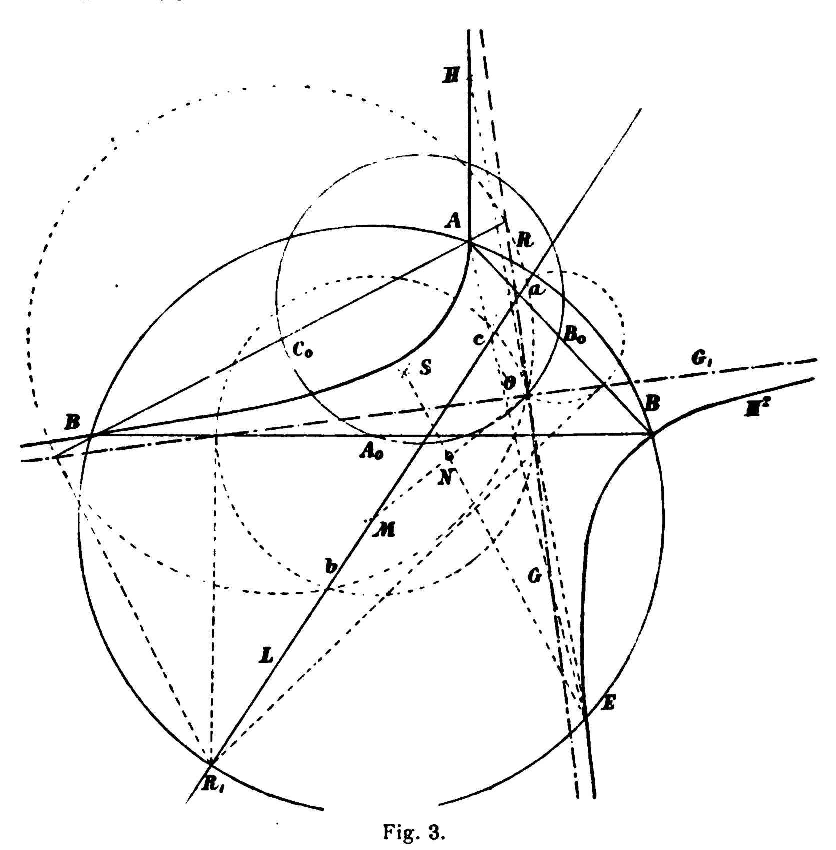


Fig. 3.

A_0, B_0, C_0 die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC, so haben wir, um E zu erhalten, nur von den Punkten A, B und C entsprechend auf die Strahlen OA_0, OB_0 und OC_0 Lothe zu fällen, dieselben werden sich dann immer in dem gesuchten Punkte E treffen.

4. Der Höhenschnitt H ist Ähnlichkeitspunkt des Feuerbach'schen Kreises und des Umkreises. Verlängern wir also

HO über O hinaus um sich selbst, so liegt der Endpunkt auf dem Umkreis, und da O auch Mittelpunkt der Hyperbel ist und diese durch H geht, auch auf der Hyperbel, ist also der vierte Schnitt E. Die Fusspunkte der Lothe von E auf die Seiten des Dreiecks ABC liegen dann immer auf der dritten Geraden G durch O.

Aber auch die Asymptoten lassen sich noch auf eine zweite Art construiren. Bedenken wir, dass die Abschnitte einer Secante einer Hyperbel zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten gleich lang sind, so folgt sofort, dass wir die Asymptoten einer Hyperbel H^2 erhalten, wenn wir um die Seitenmitten A_0, B_0 und C_0 mit A_0O, B_0O und C_0O entsprechend Kreise beschreiben. Diese treffen dann die zugehörigen Seiten in denselben Punkten wie die Asymptoten von H^2.

Da die Mittelpunkte dieser Kreise mit ihrem gemeinsamen Schnitte ferner auf einem Kreise liegen, so schneiden sich diese drei Kreise noch in Punkten a, b und c einer Geraden, nämlich der Leitlinie der Parabel, die O zum Brennpunkte hat und dem Dreieck $A_0B_0C_0$ einbeschrieben ist. Diese Leitlinie geht aber zudem durch den Höhenschnitt des Dreiecks $A_0B_0C_0$, d. h. den Mittelpunkt M; sie ist mit der Geraden L identisch. Wählen wir nämlich aus den drei Seiten des Dreiecks ABC und den Asymptoten der Hyperbel H^2 je vier Gerade heraus, so erhalten wir fünf Gruppen von vier Geraden, und zu jeder Gruppe gehört eine Parabel, welche diese Geraden berührt, und die Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf einem Kreise. Diese Brennpunkte sind aber die Punkte a, b, c, R und R_1, und da drei derselben auf einer Geraden liegen, so ist dies mit allen der Fall.

Die Geraden Aa, Bb und Cc stehen zudem auf der Geraden L senkrecht, doch wollen wir uns damit begnügen, dies erwähnt zu haben.

V.

Die Gerade L schneidet H^2 in zwei Punkten. Diese Punkte sind zugleich Punkte D und D_0, oder sie bilden ein Paar von zusammengehörigen Punkten D und D_0. In diesem Falle vereinigte sich aber die Hyperbel H_0^2 mit der Hyperbel H^2, die

Mittelpunkte O und O_0 derselben fallen also zusammen, und der Kreis I^2 berührt in O den Feuerbach'schen Kreis (Fig. 4). Dies gestattet uns wieder eine Reihe von Folgerungen zu ziehen:

1. »Die Gerade, welche den Mittelpunkt M des Umkreises mit dem Mittelpunkte I des Inkreises verbindet, berührt die besondere Hyperbel H^2 durch

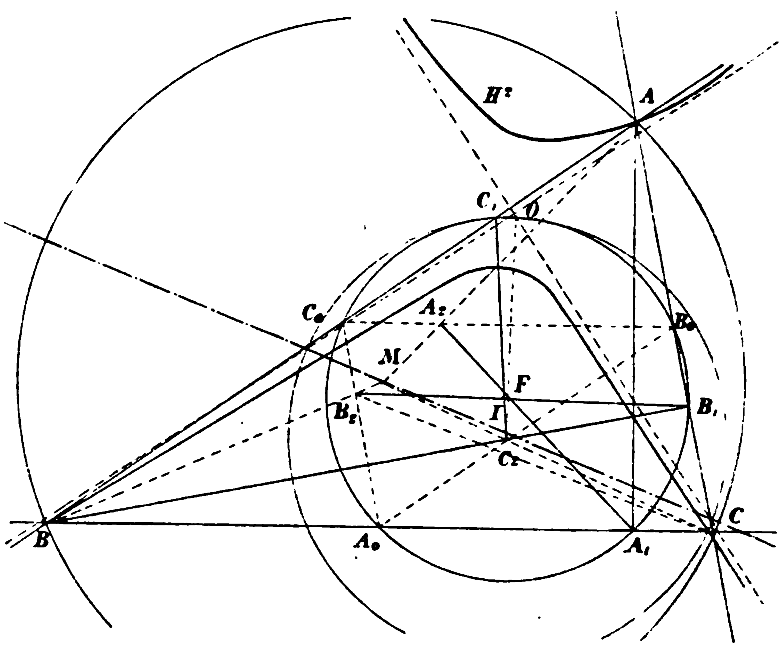


Fig. 4.

den Inkreismittelpunkt. Um die Asymptoten dieser Hyperbel zu erhalten, brauchen wir nur die Schnitte des Inkreises mit der Verbindungslinie MI mit dem Berührungspunkte O des Inkreises und des Feuerbach'schen Kreises zu verbinden. Diese Verbindungslinien sind dann allemal diese Asymptoten.« Und da weiter der Ort der Berührungspunkte aller Tangenten von einem festen Punkte P an die Kegelschnitte eines Büschels eine bestimmte Curve des dritten Grades ist und alle obigen gleichseitigen Hyperbeln H^2 ein Büschel bilden, so folgt für

den Punkt M als Punkt P: »In jedem Dreieck liegen folgende zwölf Punkte auf einer Curve des dritten Grades C^3, nämlich: Die drei Ecken, der Höhenschnitt, die drei Höhenfusspunkte, die vier Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise und der Mittelpunkt des Umkreises und die Geraden von letzterem Punkte nach den Ecken und dem Höhenschnitte sind zugleich Tangenten an diese Curve«.

2. »Geht eine Axe eines Kegelschnittes, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist, durch den Mittelpunkt des Umkreises, so berührt der über dieser Axe als Durchmesser beschriebene Kreis den Feuerbach'schen Kreis. Um den Kegelschnitt selbst zu construiren, wenn die Axe der Lage nach gegeben ist, können wir z. B. wie folgt verfahren: Zunächst construiren wir irgend zwei Fusspunktekreise oder die zur Geraden L gehörigen Geraden G den Berührungspunkt O; dieser mit dem Mittelpunkte des Feuerbach'schen Kreises verbunden, liefert auf L den Mittelpunkt I des Kreises I^2 und damit den letzteren Kreis selbst, wodurch die Axe selbst bestimmt ist.«

3. Insbesondere folgt:

Lassen wir die Gerade L auf MA fallen, so degenerirt der einbeschriebene Kegelschnitt in diese Gerade; schneidet diese B_0C_0 (vergl. IV) in A_2, so ist der Kreis I^2 der Kreis um A_2 mit dem Halbmesser AA_2.

Dieser Kreis muss aber nach Obigem den Feuerbach'schen Kreis berühren, und da er durch den Höhenfusspunkt A_1 geht, so liegen A_1 und A_2 mit dem Mittelpunkte F des Feuerbach'schen Kreises in einer Geraden, oder die Geraden A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 schneiden sich in letzterem Mittelpunkte.

VI.

Gehen beide Axen des Kegelschnittes durch den Mittelpunkt M, d. h. beschreiben wir dem Dreieck ABC einen Kegelschnitt C^2 ein, der den Mittelpunkt M des Umkreises zum Mittelpunkte hat, so folgt aus V unmittelbar:

»Der Kegelschnitt C^2, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist und mit dem Umkreis des Dreiecks den Mittelpunkt gemein hat, ist so beschaffen, dass die beiden Kreise über den Axen desselben als Durchmessern den Feuerbach'schen Kreis berühren, die Summe oder Differenz der Halbaxen des Kegelschnittes ist also gleich dem Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises oder aber gleich dem Halbmesser des Umkreises. Diese Halbaxen sind nämlich gleich den Abschnitten des Durchmessers des Feuerbach'schen Kreises, der durch M geht und in die er durch den Punkt M zerlegt wird. Der Kegelschnitt C^2 ist zudem immer eine Ellipse.«[1] Und hieraus wieder:

»Beschreibt man um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe oder dem Unterschiede der Halbaxen einen Kreis, so gibt es immer unendlich viele Dreiecke ABC, die alle dem Kreis ein- und der Ellipse umbeschrieben sind. Die Mittelpunkte der Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke ABC und also auch die Schwerpunkte dieser Dreiecke und ebenso die Höhenschnitte derselben liegen auf Kreisen, die zur Ellipse concentrisch sind. Die Feuerbach'schen Kreise berühren zudem die beiden über den Axen der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreise.«[2]

In jedem Dreieck ist ferner

$$1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma).$$

Bezeichnen wir aber die Seiten des Dreiecks mit a, b, c, die Lothe von M auf diese Seiten mit x, y, z und den Halbmesser des Umkreises mit r, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{2r}$$

[1] Vergl. auch Steiner, Ges. Werke. Bd. 2, S. 670, 2.

[2] Zu dem gleichen Resultat kommt Steiner, Ges. Werke, Bd. 2, S. 671. Jedoch sollte es dort am Schlusse von III. 2c heissen: Die den Dreiecken $A_1B_1C_1$ umschriebenen Kreise sind gleich, anstatt: Die den Dreiecken ABC etc.

oder

$$1+\frac{xyz}{r^3}=\frac{1}{8r^2}(a^2+b^2+c^2),$$

also:

$$\frac{xyz}{r}=\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2-8r^2).$$

Ist weiter H der Höhenschnitt des Dreiecks, so ist auch

$$HM^2=9r^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Sind aber A und B die Axen der Ellipse C^2, so folgt für deren Product unmittelbar aus dem Secantensatz:

$$AB=-\frac{1}{4}HM^2+\frac{1}{4}r^2=\frac{1}{4}(r^2-HM^2)$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2-8r^2)$$

und da $r=A+B$ ist, also

$$\frac{xyz}{r}=\frac{xyz}{A+B}=\frac{1}{2}AB$$

oder

$$xyz=\frac{1}{2}AB(A+B).$$

Hiebei haben wir sämmtliche Winkel des Dreiecks als $<90°$ angesehen. Ist einer der Winkel stumpf, so tritt an Stelle von $A+B$ der Werth $A-B$, und wir finden also:

$$xyz=\frac{1}{2}AB(A\pm B)$$

oder:

»Das Product der Entfernungen des Kreismittelpunktes M von den Seiten der Dreiecke ABC ist constant,[1] und ebenso ist die Quadratsumme der Seiten dieser Dreiecke constant, nämlich gleich dem achtfachen Quadrat des Halbmessers des Umkreises vermehrt oder vermindert um das Product der Axen der

[1] Steiner, Ges. Werke, Bd. 2, S. 271.

Ellipse, je nachdem alle Winkel des Dreiecks spitz oder aber einer stumpf ist; d. h. es ist:

$$a^2+b^2+c^2 = 8r^2 \pm 4AB.$$

Der untere Abschnitt der Höhe eines Dreiecks zur Seite a ist weiter gleich $b.\cot\beta.\cos\gamma = c.\cot\gamma.\cos\beta$. Bezeichnen wir aber die Abstände des Mittelpunktes M von den Seiten des Dreiecks der Seitenmitten $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC mit x_1, y_1, z_1, so sind diese halb so gross als die unteren Höhenabschnitte, und wir haben also:

$$x_1y_1z_1 = abc.\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma.$$

$$= \frac{abc.\cos^2\alpha.\cos^2\beta.\cos^2\gamma}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma},$$

d. h.

$$x_1y_1z_1 = \frac{x^2y^2z^2}{r^3} = \frac{x^2y^2z^2}{(A\pm B)^3}$$

oder

$$x_1y_1z_1 = \frac{A^2B^2}{4(A\pm B)}$$

und ebenso:

$$xyz.x_1y_1z_1 = \frac{1}{8}A^3B^3$$

$$\frac{xyz}{x_1y_1z_1} = \frac{2(A\pm B)^2}{AB};$$

oder:

»Ebenso ist auch das Product der Lothe von M auf die Seiten der Dreiecke $A_0B_0C_0$ constant, nämlich $= \frac{A^2B^2}{4(A\pm B)}$ und ausserdem gelten für die beiden Producte dieser Lothe die Gleichungen:

$$xyz.x_1y_1z_1 = \frac{1}{8}A^3B^3 \quad \text{und} \quad \frac{xyz}{x_1y_1z_1} = \frac{2(A\pm B)^2}{AB}.[1]$$

[1] Steiner, S. 671. Aus diesen Relationen lassen sich wieder andere von Steiner gegebene ableiten. Aus $\frac{xyz}{r} = \frac{1}{2}AB$ erhalten wir zunächst:

$$\frac{ax.by.cz}{abcr} = \frac{1}{2}AB \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta ABM.\Delta AMC.\Delta MBC}{32\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.$$

Die angegebene Relation $xyz.x_1y_1z_1 = \frac{1}{8}AB$ hätten wir auch direct ableiten können. Ist H der Höhenschnitt, so halbirt der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises MH, d. h. M und H haben in Bezug auf diesen Kreis gleiche Potenz, oder es ist, da die Abschnitte der einen Höhe gleich $2x$ und $2x_1$ sind,

$$xx_1 = yy_1 = zz_1 = \frac{1}{2}AB,$$

also

$$xyz.x_1y_1z_1 = \frac{1}{8}A^3B^3.$$

Projiciren wir das Dreieck ABC, die Ellipse C^2 und den Umkreis auf eine andere Ebene, so bleibt die letztere Gleichung bestehen, d. h. sie gilt auch für die Projection. Gehen wir von dieser wieder aus, so erhalten wir für eine beliebige, dem Dreieck ABC einbeschriebene Ellipse die Relation:

$$\frac{xyz}{r} = \frac{1}{2}AB$$

oder mit Steiner:

Ist eine Ellipse einem Dreieck ABC einbeschrieben und sind deren Halbaxen A und B, die Entfernungen des Ellipsenmittelpunktes von den Seiten des Dreiecks xyz und r der Halbmesser des Umkreises des Dreiecks, so ist stets das Product dieser Entfernungen constant, nämlich $= \frac{1}{2}r.AB$. (Steiner gibt bei seiner Bezeichnung $\alpha\beta\gamma.r = \frac{1}{2}ab.a_1b_1$; da jedoch für diesen Fall $r = a = b$, so folgt daraus in Übereinstimmung mit uns $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}r.a_1b_1$.)

Überhaupt lassen sich alle weiteren von Steiner, S. 670—677, angegebenen Formeln durch Projection aus einfachern ableiten.

XXI. SITZUNG VOM 21. OCTOBER 1897.

Herr Eduard Mazelle, Adjunct am astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest, übersendet als Referent der Erdbeben-Commission einen »Bericht über die im Triester Gebiete beobachteten Erdbeben vom 15. Juli, 3. August und 21. September 1897«.

Herr Prof. Dr. Josef Schaffer in Wien überreicht den zweiten Theil seiner »Beiträge zur Histologie menschlicher Organe«.

SITZUNGSBERICHTE

DER

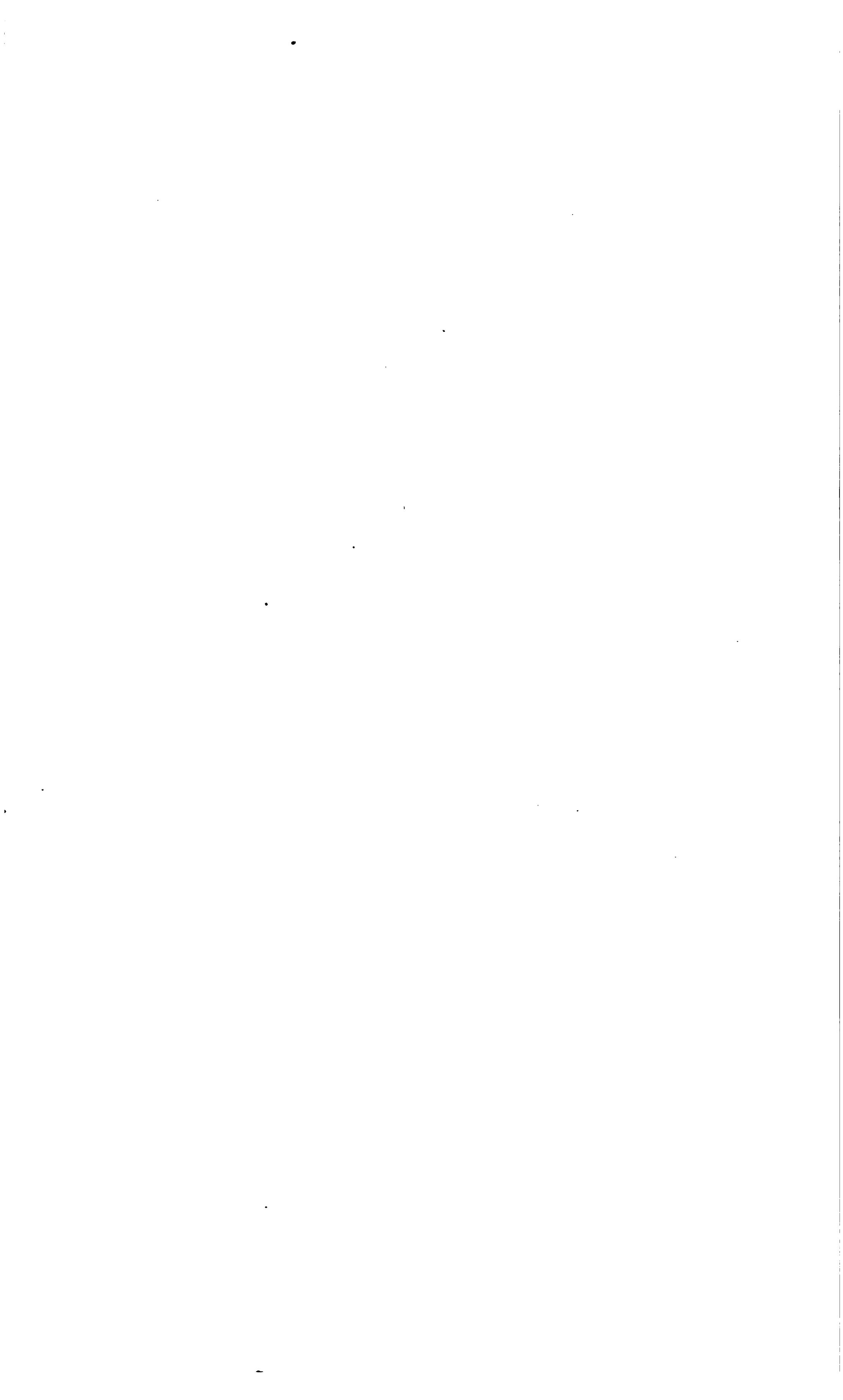
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXII. SITZUNG VOM 4. NOVEMBER 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. I, Heft VI—VII (April bis Juli 1897).

Die officielle Anzeige über das am 25. October l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie, Herrn Prof. Dr. Franz Hofmann in Wien, wurde bereits in der Gesammtsitzung am 28. October zur Kenntniss genommen und dem Beileide über diesen Verlust von Seite der Mitglieder Ausdruck gegeben.

Der prov. Secretär theilt mit, dass laut einer von der wissenschaftlichen Expedition im Rothen Meere an das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) eingelangten telegraphischen Nachricht S. M. Schiff »Pola« am 30. October zu dreitägigem Aufenthalt in Camaran eingelaufen ist, hierauf die Mission nach Massaua fortsetzen wird, und dass sich an Bord des Expeditionsschiffes Alles wohl befinde.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar: Sir Joseph Lister, Präsident der Royal Society in London für seine Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede, und Herr Geh. Regierungsrath Prof. Dr. Wilhelm v. Bezold in Berlin für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Herr Emil Reinhold in Wien übergibt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches die Aufschrift führt: »Bremse-Erfindung«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Franklin Institute of the State of Pennsylvania, The Journal of the Franklin Institute devoted to Science and the Mechanic Arts. Vol. CXLIV, No 859. July, 1897. I. Philadelphia; 8⁰.

U. S. Department of Agriculture (Weather Bureau, Washington), Monthly Weather Review. April, 1897, Washington; 4⁰.

Instituto Geológico de México, Boletin de la Commission Geológica de México, Nums. 1, 2 (1895); 7—9 (1897), México, D. F.; 4⁰.

XXIII. SITZUNG VOM 11. NOVEMBER 1897.

Der prov. Secretär theilt mit, dass laut Telegramm des Commandos S. M. Schiffes »Pola« aus Massaua das Expeditionsschiff am 5. November Mittags im dortigen Hafen zum acht- bis zehntägigen Aufenthalt eingelaufen sei und dass sich an Bord Alles wohl befinde.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (15. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: »Über eine zahlentheoretische Function«.

Ferner überreicht Herr Regierungsrath Mertens eine Abhandlung des Herrn Dr. R. Daublebsky v. Sterneck in Wien, betitelt: »Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function $\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$ im Intervalle von 0 bis 150000«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. H. Benndorf: »Über das Verhalten rotirender Isolatoren im Magnetfelde und eine darauf bezügliche Arbeit A. Campetti's«.

XXIV. SITZUNG VOM 18. NOVEMBER 1897.

Der prov. Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Dr. Julius Zellner in Ratibor: »Über die Gehaltsbestimmung der Fluorwasserstoffsäure« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Ernst Strassmann: »Über die Einwirkung von Cyanessigsäure auf Isovaler- und auf Propionaldehyd«.

Das w. M. Prof. Dr. H. Weidel überreicht zwei im I. chemischen Laboratorium der Universität Wien ausgeführte Arbeiten:

1. »Über das Morin und die Constitution der Flavon- und Flavonolderivate« von J. Herzig.
2. »Studien über die Bestandseite des Guajakharzes« (I. Abhandlung) von J. Herzig und F. Schiff.

Herr Prof. Dr. Carl Diener überreicht eine Abhandlung: »Die Äquivalente der Carbon- und Permformation im Himalaya«.

Herr Dr. Carl Graf Attems in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »System der Polydesmiden«.

Über eine zahlentheoretische Function

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

1.

Es sei $\mu(n)$ ein Symbol, welches für alle ganzen positiven Zahlen n folgendermassen definirt ist:

1. Es sei $\mu(n) = 1$, wenn $n = 1$ oder ein Product einer geraden Anzahl verschiedener Primfactoren ist.

2. Es sei $\mu(n) = -1$, wenn n eine Primzahl oder ein Product einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren ist.

3. Es sei $\mu(n) = 0$, wenn n einen von 1 verschiedenen quadratischen Theiler besitzt.

Wird

$$\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\ldots+\mu(n) = \sigma(n)$$

gesetzt, so spielt die zahlentheoretische Function $\sigma(n)$ in vielen auf Primzahlen sich beziehenden asymptotischen Aufgaben eine wichtige Rolle.

In der am Schlusse dieses Aufsatzes beigefügten Tafel findet man die Werthe von $\sigma(n)$ von $n = 1$ bis $n = 10000$ berechnet, und es ergibt sich aus derselben die merkwürdige Thatsache, dass der absolute Werth von $\sigma(n)$ — in dem Spielraum der Tafel mit Ausnahme des Werthes $n = 1$ — immer unter $\sqrt{n}$ liegt. Leider begegnet der allgemeine Beweis dieser Eigenschaft beinahe unübersteiglichen Schwierigkeiten.

In dem Folgenden sollen einige die Function $\sigma(n)$ betreffende Formeln mitgetheilt und eine asymptotische Aufgabe mit Hilfe dieser Function behandelt werden.

2.

Ich habe an einem anderen Orte[1] gezeigt, dass die über alle Theiler δ einer gegebenen Zahl m erstreckte Summe

$$\Sigma\,\mu(\delta)$$

den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $m > 1$ oder $m = 1$ ist.

Durch Addition aller solcher Summen, welche den Werthen $1, 2, 3, \ldots n$ von m entsprechen, ergibt sich die von Herrn Lipschitz aufgestellte Gleichung

$$\mu(1)E\left(\frac{n}{1}\right)+\mu(2)E\left(\frac{n}{2}\right)+\mu(3)E\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots+\mu(n)E\left(\frac{n}{n}\right)=1,$$

in welcher unter $E(x)$ nach Legendre die grösste in x enthaltene ganze Zahl zu verstehen ist.

Es sei g die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl und man greife aus der vorstehenden Gleichung die Glieder

$$\mu(g+1)E\left(\frac{n}{g+1}\right)+\mu(g+2)E\left(\frac{n}{g+2}\right)+\ldots+\mu(n)E\left(\frac{n}{n}\right) \qquad (2)$$

heraus, um sie nach den Werthen ihres zweiten Factors zu ordnen.

Man findet die Summe aller Glieder $\mu(k)E\left(\frac{n}{k}\right)$, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ den Werth 1 hat,

$$=\sigma(n)-\sigma\left(\frac{n}{2}\right),$$

die Summe aller Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ den Werth 2 hat

$$=2\sigma\left(\frac{n}{2}\right)-2\sigma\left(\frac{n}{3}\right)$$

u. s. f., die Summe aller Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ den Werth $g-1$ hat,

$$=(g-1)\sigma\left(\frac{n}{g-1}\right)-(g-1)\sigma\left(\frac{n}{g}\right).$$

[1] Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 78.

Der grösste Werth, welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ in den herausgegriffenen Gliedern annimmt, ist g oder $g-1$, je nachdem $\frac{n}{g+1} \geqq g$ oder $\frac{n}{g+1} < g$ ist. Ist $\frac{n}{g+1} \geqq g$, so wird $E\left(\frac{n}{k}\right) = g$ von $k = g+1$ bis $k = E\left(\frac{n}{g}\right)$ und die Summe der Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right) = g$ ist,

$$= g\left(\sigma\left(\frac{n}{g}\right) - \sigma(g)\right).$$

Aber auch in dem Falle, wo $\frac{n}{g+1} < g$ ist und wo es unter den herausgegriffenen Gliedern keine gibt, deren zweiter Factor den Werth g hat, kann man sagen, dass die Summe solcher Glieder $= g\left(\sigma\left(\frac{n}{g}\right) - \sigma(g)\right)$ ist, da in diesem Falle $E\left(\frac{n}{g}\right) = g$, also $\sigma\left(\frac{n}{g}\right) - \sigma(g) = 0$ ist.

Die Summe (2) ist demnach

$$= \sigma(n) - \sigma\left(\frac{n}{2}\right) + 2\sigma\left(\frac{n}{2}\right) - 2\sigma\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + (g-1)\sigma\left(\frac{n}{g-1}\right) - (g-1)\sigma\left(\frac{n}{g}\right)$$
$$+ g\sigma\left(\frac{n}{g}\right) - g\sigma(g)$$
$$= \sigma(n) + \sigma\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \sigma\left(\frac{n}{g}\right) - g\sigma(g)$$

und man hat

$$\mu(1)E\left(\frac{n}{1}\right) + \mu(2)E\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \mu(g)E\left(\frac{n}{g}\right)$$
$$+ \sigma\left(\frac{n}{1}\right) + \sigma\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \sigma\left(\frac{n}{g}\right)$$
$$- g\sigma(g) = 1.$$

Diese Formel diente als Controle bei der Berechnung der erwähnten Tafel der Werthe von $\sigma(n)$.

3.

Die Formel

$$\sigma(n) = 2\sigma(g) - \Sigma\mu(r)\mu(s)E\left(\frac{n}{rs}\right)$$
$$r, s = 1, 2, 3, \ldots g$$

gestattet $\sigma(n)$ zu berechnen, ohne die Zerlegung der Zahlen $g+1$ bis n in ihre Primfactoren zu kennen. Sie ist aber ebenso-wenig zu asymptotischen Zwecken verwendbar, wie die vorhergehende.

Man erhält dieselbe auf folgende Weise:

Nach (1) ist

$$\Sigma\mu(s)E\left(\frac{n}{rs}\right) = 1 - \Sigma\mu(s')E\left(\frac{n}{rs'}\right)$$
$$s = 1, 2, 3, \ldots g \qquad s' = g+1, g+2, \ldots n.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\mu(r)$ und summirt von $r = 1$ bis $r = g$, so folgt

$$\Sigma\mu(r)\mu(s)E\left(\frac{n}{rs}\right) = \sigma(g) - \Sigma\mu(r)\mu(s')E\left(\frac{n}{rs'}\right)$$
$$r, s = 1, 2, 3, \ldots g \qquad s' = g+1, g+2, \ldots n;$$

es ist aber nach (1)

$$\sum_{r}\mu(r)E\left(\frac{n}{rs'}\right) = 1,$$

weil $\frac{n}{s'} \leqq g$, und daher

$$\sum_{r,s'}\mu(r)\mu(s')E\left(\frac{n}{rs'}\right) = \sum_{s'}\mu(s')$$
$$= \sigma(n) - \sigma(g).$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\sum_{r,s}\mu(r)\mu(s)E\left(\frac{n}{rs}\right) = 2\sigma(g) - \sigma(n).$$

4.

Es sei

$$\Sigma\nu \log p = \Theta(x),$$

wo die Summe über alle die Grösse x nicht übersteigenden Primzahlen p zu erstrecken ist und ν den Exponenten der höchsten x nicht überschreitenden Potenz von p bezeichnet. Man hat dann

$$\Theta(n) = -\Sigma\,\mu(k)\,E\left(\frac{n}{k}\right) \log k \qquad (3)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Um diese Formel zu beweisen, braucht man nur in jedem Gliede der Summe den Logarithmus $\log k$ in die Summe der Logarithmen der Primfactoren von k zu zerlegen. Der Logarithmus einer bestimmten n nicht übersteigenden Primzahl p kommt dann ausschliesslich in den Ausdrücken

$$-\mu(p)E\left(\frac{n}{p}\right)\log p,\quad -\mu(2p)E\left(\frac{n}{2p}\right)\log p, \ldots$$
$$\ldots -\mu(n_1 p)E\left(\frac{n}{n_1 p}\right)$$

als Factor vor, wenn zur Abkürzung

$$E\left(\frac{n}{p^\pi}\right) = n_\pi$$

gesetzt wird. Die Summe dieser Ausdrücke ist

$$= \psi(n) \log p,$$

wo

$$\psi(n) = -\mu(p)E\left(\frac{n}{p}\right) - \mu(2p)E\left(\frac{n}{2p}\right) - \ldots$$
$$\ldots -\mu(n_1 p)E\left(\frac{n}{n_1 p}\right). \qquad (4)$$

Da aber $\mu(mp) = 0$ oder $= \mu(p)\mu(m) = -\mu(m)$ ist, je nachdem p in m aufgeht oder nicht, so wird

$$\psi(n) = E(n_1) + \mu(2)E\left(\frac{n_1}{2}\right) + \mu(3)E\left(\frac{n_1}{3}\right) + \ldots + \mu(n_1)E\left(\frac{n_1}{n_1}\right)$$
$$-\mu(p)E\left(\frac{n_1}{p}\right) - \mu(2p)E\left(\frac{n_1}{2p}\right) - \ldots - \mu(n_2 p)E\left(\frac{n_1}{n_2 p}\right).$$

Nach (1), (4) nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\psi(n) = 1 + \psi(n_1)$$

an und man hat

$$\psi(n) - \psi(n_1) = 1$$
$$\psi(n_1) - \psi(n_2) = 1$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\psi(n_\nu) - \psi(n_{\nu+1}) = 1.$$

Da $\psi(n_{\nu+1}) = 0$ ist, so folgt hieraus durch Addition

$$\psi(n) = \nu$$

und es wird

$$-\Sigma\mu(k)E\left(\frac{n}{k}\right)\log k = \Sigma\nu \log p$$
$$= \Theta(n),$$

w. z. b. w.

5.

Es sei h irgend eine n nicht übersteigende ganze positive Zahl und

$$E\left(\frac{n}{h}\right) = n'$$

$$E\left(n'^{\frac{2}{3}}\right) = E\left(\left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \lambda.$$

Zerlegt man die Summe

$$-\sum_{1}^{n'} \mu(k)E\left(\frac{n'}{k}\right)\log k$$

in die Theilsummen

$$\mathfrak{A} = -\sum_{1}^{\lambda} \mu(k)E\left(\frac{n'}{k}\right)\log k$$

und

$$\mathfrak{B} = -\sum_{\lambda+1}^{n} \mu(k) E\left(\frac{n'}{k}\right) \log k,$$

so wird nach (3)

$$\Theta\left(\frac{n}{h}\right) = \Theta(n') = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}. \tag{5}$$

Setzt man

$$E\left(\frac{n'}{k}\right) = \frac{n}{hk} - r_k$$

$$-\sum_{1}^{s} \mu(k) \frac{\log k}{k} = L(s),$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{n}{h} L(\lambda) + \sum_{1}^{\lambda} \mu(k) r_k \log k$$

$$= \frac{n}{h} L(n) + \frac{n}{h} (L(\lambda) - L(n)) + \sum_{1}^{\lambda} \mu(k) r_k \log k.$$

Es ist aber

$$L(\lambda) - L(n) = \mu(\lambda+1) \frac{\log(\lambda+1)}{\lambda+1} + \mu(\lambda+2) \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda+2} + \dots$$
$$\dots \mu(n) \frac{\log n}{n}$$

$$= (\sigma(\lambda+1) - \sigma(\lambda)) \frac{\log(\lambda+1)}{\lambda+1} +$$
$$+ (\sigma(\lambda+2) - \sigma(\lambda+1)) \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda+2}$$
$$+ \dots + (\sigma(n) - \sigma(n-1)) \frac{\log n}{n}$$

$$= -\sigma(\lambda) \frac{\log(\lambda+1)}{\lambda+1} + \sigma(n) \frac{\log n}{n}$$
$$+ \sigma(\lambda+1) \left[\frac{\log(\lambda+1)}{\lambda+1} - \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda+2}\right] +$$
$$+ \sigma(\lambda+2) \left[\frac{\log(\lambda+2)}{\lambda+2} - \frac{\log(\lambda+3)}{\lambda+3}\right]$$
$$+ \dots + \sigma(n-1) \left[\frac{\log(n-1)}{n-1} - \frac{\log n}{n}\right].$$

Nimmt man an, dass von $m = 2$ bis $m = n$

$$|\sigma(m)| < \sqrt{m}$$

ist, und erwägt, dass für Werthe von m, welche n nicht übersteigen und > 1 sind,

$$\frac{\log(m-1)}{m-1} - \frac{\log m}{m} = \log(m-1)\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) + \frac{\log(m-1) - \log m}{m}$$

$$= \frac{\log(m-1)}{(m-1)m} - \frac{1}{m}\log\left(1 + \frac{1}{m-1}\right),$$

also

$$\left|\frac{\log(m-1)}{m-1} - \frac{\log m}{m}\right| \leqq \frac{\log n}{m(m-1)}$$

ist, so wird

$$|L(\lambda) - L(n)| < \frac{\sqrt{\lambda}\log n}{\lambda+1} + \frac{\sqrt{n}\log n}{n}$$

$$+ \frac{\log n}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda+1}} + \frac{\log n}{(\lambda+3)\sqrt{\lambda+2}} + \cdots + \frac{\log n}{n\sqrt{n-1}}.$$

Der Ungleichung

$$\frac{1}{(m+1)\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{2}{\sqrt{m+1}}$$

zufolge ergibt sich dann

$$\frac{1}{(\lambda+2)\sqrt{\lambda+1}} + \frac{1}{(\lambda+3)\sqrt{\lambda+2}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n\sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda+2}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\lambda+2}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda+3}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$< \frac{2}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

und man hat

$$|L(\lambda)-L(n)| < \frac{\log n}{\sqrt{\lambda+1}} + \frac{\log n}{\sqrt{n}} + \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\log n$$

$$< \frac{3\log n}{\sqrt{\lambda+1}}$$

$$< \frac{3\log n}{n^{\frac{1}{3}}} h^{\frac{1}{3}}.$$

Ferner ist

$$\left|\sum_1^{\lambda} \mu(k) r_k \log k\right| \leqq \lambda \log \lambda$$

$$< \frac{2}{3} \frac{n^{\frac{2}{3}}\log n}{h^{\frac{2}{3}}}.$$

Es wird also

$$\mathfrak{A} = L(n)\cdot\frac{n}{h} + \omega,$$

wo

$$|\omega| < \frac{11}{3}\left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{2}{3}} \log n.$$

Um die Grösse $\mathfrak{B}$ abzuschätzen, setze man $-\mathfrak{B}$ in die Form

$$-\mathfrak{B} = (\sigma(\lambda+1)-\sigma(\lambda))E\left(\frac{n'}{\lambda+1}\right)\log(\lambda+1) +$$

$$+ (\sigma(\lambda+2)-\sigma(\lambda+1))E\left(\frac{n'}{\lambda+2}\right)\log(\lambda+2)$$

$$+ \ldots + (\sigma(n')-\sigma(n'-1))E\left(\frac{n'}{n'}\right)\log n'$$

$$= -\sigma(\lambda)E\left(\frac{n'}{\lambda+1}\right)\log(\lambda+1) + \sigma(n')E\left(\frac{n'}{n'}\right)\log n'$$

$$+ \sigma(\lambda+1)\left[E\left(\frac{n'}{\lambda+1}\right)\log(\lambda+1) - E\left(\frac{n'}{\lambda+2}\right)\log(\lambda+2)\right]$$

$$+ \sigma(\lambda+2)\left[E\left(\frac{n'}{\lambda+2}\right)\log(\lambda+2) - E\left(\frac{n'}{\lambda+3}\right)\log(\lambda+3)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \sigma(n'-1)\left[E\left(\frac{n'}{n'-1}\right)\log(n'-1) - E\left(\frac{n'}{n'}\right)\log n'\right].$$

Erwägt man, dass

$$\left|E\left(\frac{n'}{m}\right)\log m - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)\log(m+1)\right| =$$

$$= \left|\left(E\left(\frac{n'}{m}\right) - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)\right)\log m - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right|$$

$$< \left(E\left(\frac{n'}{m}\right) - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)\right)\log m + \frac{1}{m}E\left(\frac{n'}{m+1}\right)$$

$$< \left(E\left(\frac{n'}{m}\right) - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)\right)\log m + \frac{2n'}{\sqrt{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$$

ist, so ergibt sich

$$|\mathfrak{B}| < \sqrt{\lambda}\cdot\frac{n'\log(\lambda+1)}{\lambda+1} + \sqrt{n'}\log n'$$

$$+ \sqrt{\lambda+1}\left(E\left(\frac{n'}{\lambda+1}\right) - E\left(\frac{n'}{\lambda+2}\right)\right)\log(\lambda+1) +$$

$$+ 2n'\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda+2}}\right)$$

$$+ \sqrt{\lambda+2}\left(E\left(\frac{n'}{\lambda+2}\right) - E\left(\frac{n'}{\lambda+3}\right)\right)\log(\lambda+2) +$$

$$+ 2n'\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda+2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda+3}}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \sqrt{n'-1}\left(E\left(\frac{n'}{n'-1}\right) - E\left(\frac{n'}{n'}\right)\right)\log(n'-1) +$$

$$+ 2n'\left(\frac{1}{\sqrt{n'-1}} - \frac{1}{\sqrt{n'}}\right).$$

Da die Differenz $E\left(\frac{n'}{m}\right) - E\left(\frac{n'}{m+1}\right)$ hier nur für die Werthe

$$m = E\left(\frac{n'}{2}\right), E\left(\frac{n'}{3}\right), \ldots E\left(\frac{n'}{q}\right)$$

von Null verschieden und $= 1$ ist, wo $q = E\left(\frac{n'}{\lambda+1}\right)$, so wird demnach

$$|\mathfrak{B}| < \frac{n' \log n}{\sqrt{\lambda+1}} + \sqrt{n'} \log n + 2n' \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}} - \frac{1}{\sqrt{n'}}\right)$$

$$+ \log n \left(\sqrt{\frac{n'}{2}} + \sqrt{\frac{n'}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n'}{q}}\right);$$

es ist aber

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{q}} < 2\sqrt{q} \leqq \frac{2\sqrt{n'}}{\sqrt{\lambda+1}}$$

und daher

$$|\mathfrak{B}| < \frac{3n' \log n + 2n'}{\sqrt{\lambda+1}}$$

$$< (3 \log n + 2) \left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Aus (5) folgt dann

$$\Theta\left(\frac{n}{h}\right) = L(n) \cdot \frac{n}{h} + \Delta_h, \tag{6}$$

wo

$$|\Delta_h| < \left(\frac{20}{3} \log n + 2\right) \left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

6.

Um den Werth von $L(n)$ zu ermitteln, gehe man von der Formel Tschebischeff's

$$\Theta(n) + \Theta\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{3}\right) + \dots + \Theta\left(\frac{n}{n}\right) = \log(n!)$$

aus.

Setzt man in derselben

$$n_0 = E\left(\frac{n}{2}\right)$$

statt n und multiplicirt mit 2, so folgt

$$2\Theta\left(\frac{n}{2}\right) + 2\Theta\left(\frac{n}{4}\right) + 2\Theta\left(\frac{n}{6}\right) + \dots = 2 \log(n_0!)$$

und man erhält durch Subtraction

$$\Theta(n) - \Theta\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{3}\right) - \Theta\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots = \log \frac{n!}{n_0!\, n_0!}.$$

Es sei

$$\sum_1^m (-1)^{h-1} = \psi(m)$$

$$E\left(n^{\frac{1}{4}}\right) = g$$

und man fasse in der Summe

$$(-1)^g \Theta\left(\frac{n}{g+1}\right) + (-1)^{g+1} \Theta\left(\frac{n}{g+2}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \Theta\left(\frac{n}{n}\right)$$

alle Glieder $(-1)^{k-1} \Theta\left(\frac{n}{k}\right)$ in je eine Theilsumme zusammen, in welchen $\Theta\left(\frac{n}{k}\right)$ oder $E\left(\frac{n}{k}\right)$ denselben Werth hat. Setzt man

$$E\left(\frac{n}{g+1}\right) = g',$$

so ist

$$\left[\psi(n) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right] \Theta(1)$$

die Summe der Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ den Werth 1 hat,

$$\left[\psi\left(\frac{n}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{3}\right)\right] \Theta(2)$$

die Summe der Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right) = 2$ ist, u. s. f.

$$\left[\psi\left(\frac{n}{g'}\right) - \psi(g)\right] \Theta(g')$$

die Summe der Glieder, in welchen $E\left(\frac{n}{k}\right)$ den Werth g' hat, und man hat

$$\sum_{g+1}^{n}(-1)^{m-1}\Theta\left(\frac{n}{m}\right)=\psi\left(\frac{n}{2}\right)\Theta(2)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)(\Theta(3)-\Theta(2))+\dots$$

$$+\psi\left(\frac{n}{g'}\right)(\Theta(g')-\Theta(g'-1))-\psi(g)\Theta(g')$$

$$=\sum_{1}^{g'}\psi\left(\frac{n}{p^{\pi}}\right)\log p-\psi(g)\Theta(g'),$$

wo die Summe über alle g' nicht übersteigenden Primzahlpotenzen p^{π} zu erstrecken ist.

Hienach wird

$$\Theta(n)-\Theta\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta\left(\frac{n}{3}\right)-\dots\pm\Theta\left(\frac{n}{g}\right)$$

$$+\sum_{1}^{g'}\psi\left(\frac{n}{p^{\pi}}\right)\log p-\psi(g)\Theta(g')=\log\frac{n!}{n_0!\,n_0!}.$$

Setzt man in diese Gleichung den in (6) gefundenen Werth von $\Theta\left(\frac{n}{h}\right)$ ein, so ergibt sich

$$nL(n)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\pm\frac{1}{g}\right)+\Delta_1-\Delta_2+\dots\pm\Delta_g$$

$$+\sum_{1}^{g'}\psi\left(\frac{n}{p^{\pi}}\right)\log p-\psi(g)\Theta(g')=\log\frac{n!}{n_0!\,n_0!}.$$

Nun ist

$$\left|1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\pm\frac{1}{g}-\log 2\right|<\frac{1}{g+1}$$

$$<n^{-\frac{1}{4}}$$

$$|\Delta_1-\Delta_2+\dots\pm\Delta_g|<$$

$$<\left(\frac{20}{3}\log n+2\right)n^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}+\dots+\frac{1}{g^{\frac{2}{3}}}\right);$$

der Ungleichung

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} < 3\left(m^{\frac{1}{3}} - (m-1)^{\frac{1}{3}}\right)$$

zufolge wird aber

$$1 + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} + \ldots + \frac{1}{g^{\frac{2}{3}}} < 3\left(g^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$
$$< 3\, n^{\frac{1}{12}}$$

und daher

$$|\Delta_1 - \Delta_2 + \ldots \pm \Delta_g| < (20 \log n + 6)\, n^{\frac{3}{4}}.$$

Ferner ist, da $\psi\left(\frac{n}{p^\varkappa}\right) - \psi(g)$ nur die Werthe 0, 1, -1 haben kann,

$$\left|\sum_1^{g'} \psi\left(\frac{n}{p^\varkappa}\right) \log p - \psi(g)\,\Theta(g')\right| = \sum_1^{g'}\left(\psi\left(\frac{n}{p^\varkappa}\right) - \psi(g)\right) \log p$$
$$< 2 g' \,{}^{*}$$
$$< 2\, n^{\frac{3}{4}}$$

und nach der Stirling'schen Formel bis auf Grössen von der Ordnung $\log n$

$$\log \frac{n!}{n_0!\, n_0!} = n \log 2.$$

Man hat also bis auf Grössen von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}} \log n$

$$n\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{g}\right) L(n) = n \log 2$$

also bis auf Grössen von der Ordnung $n^{-\frac{1}{4}} \log n$

$$L(n) = \frac{\log 2}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{g}} \tag{7}$$
$$= 1.$$

* L. c.

7.

Wenn also die Bedingung

$$|\sigma(m)| < \sqrt{m}$$

für alle Zahlen m von $m = 2$ bis $m = n$ erfüllt ist, so erhält man aus (6), (7)

$$\Theta(n) = n + \Delta,$$

wo Δ von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}} \log n$ ist.

Mit Hilfe des Ausdruckes $\Theta(n)$ kann die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze n bis auf Grössen von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ leicht ermittelt werden.

Es sei p irgend eine die Grenze x nicht übersteigende Primzahl, p^ν die höchste Potenz von p, welche $\leqq x$ ist, und $\chi(x)$ die Summe aller Zahlen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu},$$

welche den einzelnen Primzahlen p entsprechen. Man hat dann

$$\begin{aligned}
\chi(n) &= \frac{\Theta(2) - \Theta(1)}{\log 2} + \frac{\Theta(3) - \Theta(2)}{\log 3} + \ldots + \frac{\Theta(n) - \Theta(n-1)}{\log n} \\
&= \Theta(2)\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3}\right) + \Theta(3)\left(\frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 4}\right) + \ldots \\
&\qquad \ldots + \Theta(n-1)\left(\frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log n}\right) \\
&\quad + \frac{\Theta(n)}{\log n} \\
&= 2\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3}\right) + 3\left(\frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 4}\right) + \ldots \\
&\qquad \ldots + (n-1)\left(\frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log n}\right) \\
&\quad + \frac{n}{\log n} + \mathfrak{R},
\end{aligned}$$

wo

$$\mathfrak{R} = (\Theta(2)-2)\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3}\right) + \\ +(\Theta(3)-3)\left(\frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 4}\right) + \dots \\ +(\Theta(n-1)-n+1)\left(\frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log n}\right) + \frac{\Theta(n)-n}{\log n}.$$

Da

$$|\mathfrak{R}| < \frac{|\Theta(2)-2|}{2(\log 2)^2} + \frac{|\Theta(3)-3|}{3(\log 3)^2} + \dots \\ \dots + \frac{|\Theta(n-1)-n+1|}{(n-1)(\log(n-1))^2} + \frac{|\Theta(n)-n|}{\log n}$$

und $\Theta(m)-m$ von der Ordnung $m^{\frac{3}{4}} \log m$ ist, so ist $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ und demzufolge

$$\chi(n) = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log n} + \omega,$$

wo ω von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ ist.

Nun ist

$$0 < \frac{1}{\log m} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{\log x} = \int_m^{m+1} \left(\frac{1}{\log m} - \frac{1}{\log x}\right) dx \\ = \int_m^{m+1} \frac{\log \frac{x}{m}}{\log m \log x} dx \\ < \int_m^{m+1} \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right) dx}{(\log m)^2} dx \\ < \frac{1}{m(\log m)^2}.$$

Setzt man daher

$$\alpha = \frac{1}{2(\log 2)^2} + \frac{1}{3(\log 3)^2} + \frac{1}{4(\log 4)^2} + \dots \text{in inf.},$$

so ergibt sich

$$0 < \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{1}{\log(n-1)} - \int_2^n \frac{dx}{\log x} < \alpha,$$

und es ist daher

$$\chi(n) = \int_2^n \frac{dx}{\log x} + \delta,$$

wo δ von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ ist.

Diese Formel gilt so lange, als die Bedingung

$$|\sigma(m)| < \sqrt{m}$$

keine Ausnahme erleidet. $\chi(n)$ fällt mit der Anzahl der bis zur Grenze n vorkommenden Primzahlen bis auf eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{n}$ zusammen.

8.

Gilt die Ungleichung

$$|\sigma(m)| < \sqrt{m}$$

für alle ganzen positiven Zahlen m ausser 1, so lässt sich die Convergenz der Reihe

$$f(z) = \frac{\mu(1)}{1^z} + \frac{\mu(2)}{2^z} + \frac{\mu(3)}{3^z} + \dots + \frac{\mu(n)}{n^z} + \dots$$

für alle Werthe von z darthun, deren reeller Bestandtheil über $\frac{1}{2}$ liegt. Denn man hat

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \frac{\mu(n+1)}{(n+1)^z} + \frac{\mu(n+2)}{(n+2)^z} + \dots + \frac{\mu(n+m)}{(n+m)^z} \\ &= \frac{\sigma(n+1)-\sigma(n)}{(n+1)^z} + \frac{\sigma(n+2)-\sigma(n+1)}{(n+2)^z} + \dots \\ &\qquad \dots + \frac{\sigma(n+m)-\sigma(n+m-1)}{(n+m)^z} \\ &= -\frac{\sigma(n)}{(n+1)^z} + \frac{\sigma(n+m)}{(n+m)^z}\end{aligned}$$

$$+\sigma(n+1)\left[\frac{1}{(n+1)^z}-\frac{1}{(n+2)^z}\right]+$$

$$+\sigma(n+2)\left[\frac{1}{(n+2)^z}-\frac{1}{(n+3)^z}\right]+\cdots$$

$$+\sigma(n+m-1)\left[\frac{1}{(n+m-1)^z}-\frac{1}{(n+m)^z}\right]. \tag{8}$$

Ist daher $z=a+ib$, so wird

$$|\mathfrak{R}|<\frac{1}{(n+1)^{a-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(n+m)^{a-\frac{1}{2}}}$$

$$+\sqrt{n+1}\left|\frac{1}{(n+1)^z}-\frac{1}{(n+2)^z}\right|+$$

$$+\sqrt{n+2}\left|\frac{1}{(n+2)^z}-\frac{1}{(n+3)^z}\right|+\cdots$$

$$+\sqrt{n+m-1}\left|\frac{1}{(n+m-1)^z}-\frac{1}{(n+m)^z}\right|.$$

Nach dem binomischen Satze ist aber, wenn $m>1$ angenommen und zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{e^{b\pi}+e^{-b\pi}}{2}}=A$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{(m-1)^z}-\frac{1}{m^z}=\frac{z}{m^{1+z}}+\frac{z(z+1)}{2!\,m^{2+z}}+\cdots$$

und es folgt hieraus

$$\left|\frac{1}{(m-1)^z}-\frac{1}{m^z}\right|\leqq\frac{a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}{m^{1+a}}+$$

$$+\frac{a(a+1)}{2!\,m^{2+a}}\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{(a+1)^2}\right)}+\cdots$$

$$<A\left(\frac{a}{m^{1+a}}+\frac{a(a+1)}{2!\,m^{2+a}}+\cdots\right)$$

$$<A\left(\frac{1}{(m-1)^a}-\frac{1}{m^a}\right), \tag{9}$$

also

$$\sqrt{m-1}\left|\frac{1}{(m-1)^z}-\frac{1}{m^z}\right|<A\left(\frac{1}{(m-1)^{a-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{m^{a-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{m^{a+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$<A\frac{a+\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(m-1)^{a-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{m^{a-\frac{1}{2}}}\right).$$

Daher wird

$$|\mathfrak{R}|<\frac{1}{(n+1)^{a-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(n+m)^{a-\frac{1}{2}}}+A\frac{a+\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)^{a-\frac{1}{2}}},$$

und es kann also $\mathfrak{R}$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden.

Da $f(z)$ für Werthe von z, deren reeller Bestandtheil über 1 liegt, mit dem reciproken Werthe der Riemann'schen Function

$$\zeta(z)=\sum_1^\infty\frac{1}{k^z}$$

zusammenfällt, wie aus der Entwicklung des über alle Primzahlen p zu erstreckenden Productes

$$\Pi\left(1-\frac{1}{p^z}\right)=\frac{1}{\zeta(z)}$$

hervorgeht, so ist also auch, wenn die Bedingung $|\sigma(m)|<\sqrt{m}$ besteht, für alle Werthe von z, deren reeller Bestandtheil über $\frac{1}{2}$ liegt,

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\sum_1^\infty\frac{\mu(k)}{k^z}.$$

Da die Ungleichung $|\sigma(m)|<\sqrt{m}$, wie die Induction lehrt, sehr wahrscheinlich ist, so ist auch die Riemann'sche

Behauptung sehr wahrscheinlich, dass die imaginären Wurzeln der Gleichung

$$\zeta(z) = 0$$

alle den reellen Bestandtheil $\frac{1}{2}$ haben.

9.

Man kann indirect schliessen, dass der Zahlenwerth des Ausdruckes

$$\frac{\sigma(n)}{\sqrt{n}} (\log n)^{1+\rho},$$

in welchem ρ irgend eine bestimmte positive Grösse bezeichnet, für unendlich viele Werthe von n jede gegebene Constante C überschreiten muss.

Wäre nämlich von $n = s$ an ohne Ausnahme

$$\frac{|\sigma(n)|(\log n)^{1+\rho}}{\sqrt{n}} \leqq C,$$

so hätte man

$$|\sigma(n)| \leqq \frac{C\sqrt{n}}{(\log n)^{1+\rho}}$$

und es wäre nach (8), (9) für $a \geqq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}| &< \frac{|\sigma(n)|}{\sqrt{n+1}} + \frac{|\sigma(n+m)|}{\sqrt{n+m}} \\ &\quad + A\left[|\sigma(n+1)|\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + |\sigma(n+2)|\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) + \dots\right] \\ &< \frac{C}{[\log(n+1)]^{1+\rho}} + \frac{C}{[\log(n+m)]^{1+\rho}} \\ &\quad + \frac{1}{2}AC\left[\frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)(\log(n+2))^{1+\rho}} + \dots\right].\end{aligned}$$

Die Reihe $f(z)$ wäre also für alle Werthe von z convergent, deren reeller Bestandtheil $\geqq \frac{1}{2}$ ist, und die Gleichung

$$\zeta(z) = 0$$

könnte keine imaginären Wurzeln haben.

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
1	1	1	51	1	−2	101	−1	0	151	−1	−1
2	−1	0	52	0		2	−1	−1	52	0	
3	−1	−1	53	−1	−3	3	−1	−2	53	0	
4	0		54	0		4	0		54	−1	−2
5	−1	−2	55	1	−2	5	−1	−3	55	1	−1
6	1	−1	56	0		6	1	−2	56	0	
7	−1	−2	57	1	−1	7	−1	−3	57	−1	−2
8	0		58	1	0	8	0		58	1	−1
9	0		59	−1	−1	9	−1	−4	59	1	0
10	1	−1	60	0		110	−1	−5	160	0	
11	−1	−2	61	−1	−2	11	1	−4	61	1	1
12	0		62	1	−1	12	0		62	0	
13	−1	−3	63	0		13	−1	−5	63	−1	0
14	1	−2	64	0		14	−1	−6	64	0	
15	1	−1	65	1	0	15	1	−5	65	−1	−1
16	0		66	−1	−1	16	0		66	1	0
17	−1	−2	67	−1	−2	17	0		67	−1	−1
18	0		68	0		18	1	−4	68	0	
19	−1	−3	69	1	−1	19	1	−3	69	0	
20	0		70	−1	−2	120	0		170	−1	−2
21	1	−2	71	−1	−3	21	0		71	0	
22	1	−1	72	0		22	1	−2	72	0	
23	−1	−2	73	−1	−4	23	1	−1	73	−1	−3
24	0		74	1	−3	24	0		74	−1	−4
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−1	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	1	−2	27	−1	−2	77	1	−3
28	0		78	−1	−3	28	0		78	1	−2
29	−1	−2	79	−1	−4	29	1	−1	79	−1	−3
30	−1	−3	80	0		130	−1	−2	180	0	
31	−1	−4	81	0		31	−1	−3	81	−1	−4
32	0		82	1	−3	32	0		82	−1	−5
33	1	−3	83	−1	−4	33	1	−2	83	1	−4
34	1	−2	84	0		34	1	−1	84	0	
35	1	−1	85	1	−3	35	0		85	1	−3
36	0		86	1	−2	36	0		86	−1	−4
37	−1	−2	87	1	−1	37	−1	−2	87	1	−3
38	1	−1	88	0		38	−1	−3	88	0	
39	1	0	89	−1	−2	39	−1	−4	89	0	
40	0		90	0		140	0		190	−1	−4
41	−1	−1	91	1	−1	41	1	−3	91	−1	−5
42	−1	−2	92	0		42	1	−2	92	0	
43	−1	−3	93	1	0	43	1	−1	93	−1	−6
44	0		94	1	1	44	0		94	1	−5
45	0		95	1	2	45	1	0	95	−1	−6
46	1	−2	96	0		46	1	1	96	0	
47	−1	−3	97	−1	1	47	0		97	−1	−7
48	0		98	0		48	0		98	0	
49	0		99	0		49	−1	0	99	−1	−8
50	0		100	0		150	0		200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
201	1	—7	251	—1	—2	301	1	—4	351	0	1
02	1	—6	52	0		02	1	—3	52	0	
03	1	—5	53	1	—1	03	1	—2	53	—1	0
04	0		54	1	0	04	0		54	—1	—1
05	1	—4	55	—1	—1	05	1	—1	55	1	0
06	1	—3	56	0		06	0		56	0	
07	0		57	—1	—2	07	—1	—2	57	—1	—1
08	0		58	—1	—3	08	0		58	1	0
09	1	—2	59	1	—2	09	1	—1	59	—1	—1
210	1	—1	260	0		310	—1	—2	360	0	
11	—1	—2	61	0		11	—1	—3	61	0	
12	0		62	1	—1	12	0		62	1	0
13	1	—1	63	—1	—2	13	—1	—4	63	0	
14	1	0	64	0		14	1	—3	64	0	
15	1	1	65	1	—1	15	0		65	1	1
16	0		66	—1	—2	16	0		66	—1	0
17	1	2	67	1	—1	17	—1	—4	67	—1	—1
18	1	3	68	0		18	—1	—5	68	0	
19	1	4	69	—1	—2	19	1	—4	69	0	
220	0		270	0		320	0		370	—1	—2
21	1	5	71	—1	—3	21	1	—3	71	1	—1
22	—1	4	72	0		22	—1	—4	72	0	
23	—1	3	73	—1	—4	23	1	—3	73	—1	—2
24	0		74	1	—3	24	0		74	—1	—3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	4	76	0		26	1	—2	76	0	
27	—1	3	77	—1	—4	27	1	—1	77	1	—2
28	0		78	1	—3	28	0		78	0	
29	—1	2	79	0		29	1	0	79	—1	—3
230	—1	1	280	0		330	1	1	380	0	
31	—1	0	81	—1	—4	31	—1	0	81	1	—2
32	0		82	—1	—5	32	0		82	1	—1
33	—1	—1	83	—1	—6	33	0		83	—1	—2
34	0		84	0		34	1	1	84	0	
35	1	0	85	—1	—7	35	1	2	85	—1	—3
36	0		86	—1	—8	36	0		86	1	—2
37	1	1	87	1	—7	37	—1	1	87	0	
38	—1	0	88	0		38	0		88	0	
39	—1	—1	89	0		39	1	2	89	—1	—3
240	0		290	—1	—8	340	0		390	1	—2
41	—1	—2	91	1	—7	41	1	3	91	1	—1
42	0		92	0		42	0		92	0	
43	0		93	—1	—8	43	0		93	1	0
44	0		94	0		44	0		94	1	1
45	0		95	1	—7	45	—1	2	95	1	2
46	—1	—3	96	0		46	1	3	96	0	
47	1	—2	97	0		47	—1	2	97	—1	1
48	0		98	1	—6	48	0		98	1	2
49	1	—1	99	1	—5	49	—1	1	99	—1	1
250	0		300	0		350	0		400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
401	—1	0	451	1	—6	501	1	—5	551	1	4
02	—1	—1	52	0		02	1	—4	52	0	
03	1	0	53	1	—5	03	—1	—5	53	1	5
04	0		54	1	—4	04	0		54	1	6
05	0		55	—1	—5	05	1	—4	55	—1	5
06	—1	—1	56	0		06	—1	—5	56	0	
07	1	0	57	—1	—6	07	0		57	—1	4
08	0		58	1	—5	08	0		58	0	
09	—1	—1	59	0		09	—1	—6	59	1	5
410	—1	—2	460	0		510	1	—5	560	0	
11	1	—1	61	—1	—6	11	1	—4	61	—1	4
12	0		62	1	—5	12	0		62	1	5
13	1	0	63	—1	—6	13	0		63	—1	4
14	0		64	0		14	1	—3	64	0	
15	1	1	65	—1	—7	15	1	—2	65	1	5
16	0		66	1	—6	16	0		66	1	6
17	1	2	67	—1	—7	17	1	—1	67	0	
18	—1	1	68	0		18	—1	—2	68	0	
19	—1	0	69	1	—6	19	1	—1	69	—1	5
420	0		470	—1	—7	520	0		570	1	6
21	—1	—1	71	1	—6	21	—1	—2	71	—1	5
22	1	0	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	1	—5	23	—1	—3	73	1	6
24	0		74	—1	—6	24	0		74	—1	5
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	—1	76	0		26	1	—2	76	0	
27	1	0	77	0		27	1	—1	77	—1	4
28	0		78	1	—5	28	0		78	0	
29	—1	—1	79	—1	—6	29	0		79	1	5
430	—1	—2	480	0		530	—1	—2	580	0	
31	—1	—3	81	1	—5	31	0		81	1	6
32	0		82	1	—4	32	0		82	—1	5
33	—1	—4	83	—1	—5	33	1	—1	83	1	6
34	—1	—5	84	0		34	—1	—2	84	0	
35	—1	—6	85	1	—4	35	1	—1	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	1	7
37	1	—5	87	—1	—5	37	1	0	87	—1	6
38	—1	—6	88	0		38	1	1	88	0	
39	—1	—7	89	1	—4	39	0		89	1	7
440	0		490	0		540	0		590	—1	6
41	0		91	—1	—5	41	—1	0	91	1	7
42	—1	—8	92	0		42	1	1	92	0	
43	—1	—9	93	1	—4	43	1	2	93	—1	6
44	0		94	—1	—5	44			94	0	
45	1	—8	95	0		45	1	3	95	—1	5
46	1	—7	96	0		46	1	4	96	0	
47	1	—6	97	1	—4	47	—1	3	97	1	6
48	0		98	—1	—5	48	0		98	—1	5
49	—1	—7	99	—1	—6	49	0		99	—1	4
450	0		500	0		550	0		600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
601	−1	3	651	−1	−7	701	−1	−5	751	−1	−3
02	−1	2	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	−1	−8	03	1	−4	53	1	−2
04	0		54	−1	−9	04	0		54	−1	−3
05	0		55	1	−8	05	−1	−5	55	1	−2
06	−1	1	56	0		06	1	−4	56	0	
07	−1	0	57	0		07	1	−3	57	−1	−3
08	0		58	−1	−9	08	0		58	1	−2
09	−1	−1	59	−1	−10	09	−1	−4	59	−1	−3
610	−1	−2	660	0		710	−1	−5	760	0	
11	1	−1	61	−1	−11	11	0		61	−1	−4
12	0		62	1	−10	12	0		62	−1	−5
13	−1	−2	63	−1	−11	13	1	−4	63	1	−4
14	1	−1	64	0		14	1	−3	64	0	
15	−1	−2	65	−1	−12	15	−1	−4	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	1	−3
17	−1	−3	67	1	−11	17	1	−3	67	1	−2
18	−1	−4	68	0		18	1	−2	68	0	
19	−1	−5	69	1	−10	19	−1	−3	69	−1	−3
620	0		670	−1	−11	720	0		770	1	−2
21	0		71	1	−10	21	1	−2	71	1	−1
22	1	−4	72	0		22	0		72	0	
23	1	−3	73	−1	−11	23	1	−1	73	−1	−2
24	0		74	1	−10	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−2	76	0		26	0		76	0	
27	−1	−3	77	−1	−11	27	−1	−2	77	−1	−3
28	0		78	−1	−12	28	0		78	1	−2
29	1	−2	79	1	−11	29	0		79	1	−1
630	0		680	0		730	−1	−3	780	0	
31	−1	−3	81	1	−10	31	1	−2	81	1	0
32	0		82	−1	−11	32	0		82	−1	−1
33	1	−2	83	−1	−12	33	−1	−3	83	0	
34	1	−1	84	0		34	1	−2	84	0	
35	1	0	85	1	−11	35	0		85	1	0
36	0		86	0		36	0		86	−1	−1
37	0		87	1	−10	37	1	−1	87	−1	−2
38	−1	−1	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	1	−9	39	−1	−2	89	1	−1
640	0		690	1	−8	740	0		790	−1	−2
41	−1	−2	91	−1	−9	41	−1	−3	91	1	−1
42	−1	−3	92	0		42	−1	−4	92	0	
43	−1	−4	93	0		43	−1	−5	93	1	0
44	0		94	1	−8	44	0		94	1	1
45	−1	−5	95	1	−7	45	1	−4	95	−1	0
46	−1	−6	96	0		46	1	−3	96	0	
47	−1	−7	97	1	−6	47	0		97	−1	−1
48	0		98	1	−5	48	0		98	1	0
49	1	−6	99	1	−4	49	1	−2	99	1	1
650	0		700	0		750	0		800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
801	0	1	851	1	1	901	1	2	951	1	3
02	1	2	52	0		02	—1	1	52	0	
03	1	3	53	—1	0	03	—1	0	53	—1	2
04	0		54	—1	—1	04	0		54	0	
05	—1	2	55	0		05	1	1	55	1	3
06	—1	1	56	0		06	—1	0	56	0	
07	1	2	57	—1	—2	07	—1	—1	57	—1	2
08	0		58	1	—1	08	0		58	1	3
09	—1	1	59	—1	—2	09	0		59	1	4
810	0		860	0		910	1	0	960	0	
11	—1	0	61	—1	—3	11	—1	—1	61	0	
12	0		62	1	—2	12	0		62	—1	3
13	1	1	63	—1	—3	13	1	0	63	0	
14	—1	0	64	0		14	1	1	64	0	
15	1	1	65	1	—2	15	—1	0	65	1	4
16	0		66	1	—1	16	0		66	1	5
17	1	2	67	0		17	1	1	67	—1	4
18	1	3	68	0		18	0		68	0	
19	0		69	1	0	19	—1	0	69	—1	3
820	0		870	1	1	920	0		970	—1	2
21	—1	2	71	1	2	21	1	1	71	—1	1
22	—1	1	72	0		22	1	2	72	0	
23	—1	0	73	0		23	1	3	73	1	2
24	0		74	—1	1	24	0		74	1	3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	—1	76	0		26	1	4	76	0	
27	—1	—2	77	—1	0	27	0		77	—1	2
28	0		78	1	1	28	0		78	—1	1
29	—1	—3	79	1	2	29	—1	3	79	1	2
830	—1	—4	880	0		930	1	4	980	0	
31	1	—3	81	—1	1	31	0		81	0	
32	0		82	0		32	0		82	1	3
33	0		83	—1	0	33	1	5	83	—1	2
34	—1	—4	84	0		34	1	6	84	0	
35	1	—3	85	—1	—1	35	—1	5	85	1	3
36	0		86	1	0	36	0		86	—1	2
37	0		87	—1	—1	37	—1	4	87	—1	1
38	1	—2	88	0		38	—1	3	88	0	
39	—1	—3	89	1	0	39	1	4	89	1	2
840	0		890	—1	—1	940	0		990	0	
41	0		91	0		41	—1	3	91	—1	1
42	1	—2	92	0		42	—1	2	92	0	
43	1	—1	93	1	0	43	1	3	93	1	2
44	0		94	—1	—1	44	0		94	—1	1
45	0		95	1	0	45	0		95	1	2
46	0		96	0		46	—1	2	96	0	
47	0		97	—1	—1	47	—1	1	97	—1	1
48	0		98	1	0	48	0		98	1	2
49	1	0	99	1	1	49	1	2	99	0	
850	0		900	0		950	0		1000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
1001	−1	1	1051	−1	−6	1101	1	−10	1151	−1	−6
02	−1	0	52	0		02	−1	−11	52	0	
03	1	1	53	0		03	−1	−12	53	−1	−7
04	0		54	−1	−7	04	0		54	1	−6
05	−1	0	55	1	−6	05	−1	−13	55	1	−5
06	1	1	56	0		06	−1	−14	56	0	
07	1	2	57	1	−5	07	0		57	1	−4
08	0		58	0		08	0		58	−1	−5
09	−1	1	59	1	−4	09	−1	−15	59	1	−4
1010	−1	0	1060	0		1110	1	−14	1160	0	
11	1	1	61	−1	−5	11	1	−13	61	0	
12	0		62	0		12	0		62	−1	−5
13	−1	0	63	−1	−6	13	−1	−14	63	−1	−6
14	0		64	0		14	1	−13	64	0	
15	−1	−1	65	−1	−7	15	1	−12	65	1	−5
16	0		66	−1	−8	16	0		66	−1	−6
17	0		67	1	−7	17	−1	−13	67	1	−5
18	1	0	68	0		18	−1	−14	68	0	
19	−1	−1	69	−1	−8	19	1	−13	69	1	−4
1020	0		1070	−1	−9	1120	0		1170	0	
21	−1	−2	71	0		21	1	−12	71	−1	−5
22	−1	−3	72	0		22	1	−11	72	0	
23	−1	−4	73	1	−8	23	−1	−12	73	−1	−6
24	0		74	−1	−9	24	0		74	1	−5
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	1	−11	76	0	
27	1	−3	77	1	−8	27	0		77	1	−4
28	0		78	0		28	0		78	−1	−5
29	0		79	1	−7	29	−1	−12	79	0	
1030	−1	−4	1080	0		1130	−1	−13	1180	0	
31	−1	−5	81	1	−6	31	−1	−14	81	−1	−6
32	0		82	1	−5	32	0		82	−1	−7
33	−1	−6	83	0		33	1	−13	83	0	
34	−1	−7	84	0		34	0		84	0	
35	0		85	−1	−6	35	1	−12	85	−1	−8
36	0		86	−1	−7	36	0		86	1	−7
37	1	−6	87	−1	−8	37	1	−11	87	−1	−8
38	−1	−7	88	0		38	1	−10	88	0	
39	−1	−8	89	0		39	1	−9	89	1	−7
1040	0		1090	−1	−9	1140	0		1190	1	−6
41	1	−7	91	−1	−10	41	1	−8	91	1	−5
42	1	−6	92	0		42	1	−7	92	0	
43	1	−5	93	−1	−11	43	0		93	−1	−6
44	0		94	1	−10	44	0		94	−1	−7
45	−1	−6	95	−1	−11	45	1	−6	95	1	−6
46	1	−5	96	0		46	−1	−7	96	0	
47	1	−4	97	−1	−12	47	1	−6	97	0	
48	0		98	0		48	0		98	1	−5
49	−1	−5	99	1	−11	49	1	−5	99	1	−4
1050	0		1100	0		1150	0		1200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
1201	—1	—5	1251	0	—3	1301	—1	—1	1351	1	6
02	1	—4	52	0		02	1	0	52	0	
03	1	—3	53	1	—2	03	—1	—1	53	—1	5
04	0		54	1	—1	04	0		54	1	6
05	1	—2	55	1	0	05	0		55	1	7
06	0		56	0		06	1	0	56	0	
07	1	—1	57	1	1	07	—1	—1	57	1	8
08	0		58	—1	0	08	0		58	—1	7
09	—1	—2	59	—1	—1	09	—1	—2	59	0	
1210	0		1260	0		1310	—1	—3	1360	0	
11	1	—1	61	1	0	11	—1	—4	61	—1	6
12	0		62	1	1	12	0		62	—1	5
13	—1	—2	63	1	2	13	1	—3	63	1	6
14	1	—1	64	0		14	0		64	0	
15	0		65	—1	1	15	1	—2	65	1	7
16	0		66	—1	0	16	0		66	1	8
17	—1	—2	67	1	1	17	1	—1	67	—1	7
18	1	—1	68	0		18	1	0	68	0	
19	1	0	69	0		19	—1	—1	69	0	
1220	0		1270	—1	0	1320	0		1370	—1	6
21	—1	—1	71	1	1	21	—1	—2	71	1	7
22	—1	—2	72	0		22	1	—1	72	0	
23	—1	—3	73	1	2	23	0		73	—1	6
24	0		74	0		24	0		74	—1	5
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	—2	76	0		26	1	0	76	0	
27	1	—1	77	—1	1	27	—1	—1	77	0	
28	0		78	0		28	0		78	—1	4
29	—1	—2	79	—1	0	29	1	0	79	1	5
1230	1	—1	1280	0		1330	1	1	1380	0	
31	—1	—2	81	—1	—1	31	0		81	—1	4
32	0		82	1	0	32	0		82	1	5
33	0		83	—1	—1	33	1	2	83	1	6
34	1	—1	84	0		34	—1	1	84	0	
35	—1	—2	85	1	0	35	—1	0	85	1	7
36	0		86	1	1	36	0		86	0	
37	—1	—3	87	0		37	1	1	87	1	8
38	1	—2	88	0		38	—1	0	88	0	
39	—1	—3	89	—1	0	39	1	1	89	1	9
1240	0		1290	1	1	1340	0		1390	—1	8
41	1	—2	91	—1	0	41	0		91	1	9
42	0		92	0		42	—1	0	92	0	
43	1	—1	93	1	1	43	1	1	93	1	10
44	0		94	1	2	44	0		94	—1	9
45	—1	—2	95	—1	1	45	1	2	95	0	
46	—1	—3	96	0		46	1	3	96	0	
47	1	—2	97	—1	0	47	1	4	97	1	10
48	0		98	—1	—1	48	0		98	—1	9
49	—1	—3	99	1	0	49	1	5	99	—1	8
1250	0		1300	0		1350	0		1400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n$	$\sigma(n)$
1401	1	9	1451	−1	3	1501	1	−2	1551	−1	−3
02	1	10	52	0		02	1	−1	52	0	
03	1	11	53	−1	2	03	0		53	−1	−4
04	0		54	1	3	04	0		54	1	−3
05	1	12	55	−1	2	05	−1	−2	55	1	−2
06	−1	11	56	0		06	−1	−3	56	0	
07	−1	10	57	1	3	07	1	−2	57	0	
08	0		58	0		08	0		58	−1	−3
09	−1	9	59	−1	2	09	1	−1	59	−1	−4
1410	1	10	1460	0		1510	−1	−2	1560	0	
11	1	11	61	1	3	11	−1	−3	61	1	−3
12	0		62	−1	2	12	0		62	−1	−4
13	0		63	−1	1	13	1	−2	63	1	−3
14	−1	10	64	0		14	1	−1	64	0	
15	1	11	65	1	2	15	−1	−2	65	1	−2
16	0		66	1	3	16	0		66	0	
17	1	12	67	0		17	1	−1	67	−1	−3
18	1	13	68	0		18	1	0	68	0	
19	−1	12	69	1	4	19	0		69	1	−2
1420	0		1470	0		1520	0		1570	−1	−3
21	0		71	−1	3	21	0		71	−1	−4
22	0		72	0		22	1	1	72	0	
23	−1	11	73	1	4	23	−1	0	73	0	
24	0		74	−1	3	24	0		74	1	−3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	10	76	0		26	−1	−1	76	0	
27	−1	9	77	1	4	27	1	0	77	1	−2
28	0		78	1	5	28	0		78	−1	−3
29	−1	8	79	−1	4	29	1	1	79	−1	−4
1430	1	9	1480	0		1530	0		1580	0	
31	0		81	−1	3	31	−1	0	81	−1	−5
32	0		82	1	4	32	0		82	−1	−6
33	−1	8	83	−1	3	33	−1	−1	83	−1	−7
34	−1	7	84	0		34	−1	−2	84	0	
35	−1	6	85	0		35	1	−1	85	1	−6
36	0		86	1	4	36	0		86	−1	−7
37	1	7	87	−1	3	37	1	0	87	0	
38	1	8	88	0		38	1	1	88	0	
39	−1	7	89	−1	2	39	0		89	1	−6
1440	0		1490	−1	1	1540	0		1590	1	−5
41	1	8	91	−1	0	41	1	2	91	1	−4
42	−1	7	92	0		42	−1	1	92	0	
43	−1	6	93	−1	−1	43	−1	0	93	0	
44	0		94	0		44	0		94	1	−3
45	0		95	−1	−2	45	−1	−1	95	−1	−4
46	−1	5	96	0		46	1	0	96	0	
47	−1	4	97	1	−1	47	−1	−1	97	−1	−5
48	0		98	−1	−2	48	0		98	−1	−6
49	0		99	−1	−3	49	−1	−2	99	−1	−7
1450	0		1500	0		1550	0		1600	0	

n	μ(*n*)	σ(*n*)	*n*	μ(*n*)	σ(*n*)	*n*	μ(*n*)	σ(*n*)	*n*	μ(*n*)	σ(*n*)
1601	—1	— 8	1651	1	—10	1701	0	—13	1751	1	—11
02	0		52	0		02	—1	—14	52	0	
03	1	— 7	53	—1	—11	03	1	—13	53	—1	—12
04	0		54	1	—10	04	0		54	1	—11
05	—1	— 8	55	1	— 9	05	—1	—14	55	0	
06	—1	— 9	56	0		06	1	—13	56	0	
07	—1	—10	57	—1	—10	07	1	—12	57	1	—10
08	0		58	1	— 9	08	0		58	—1	—11
09	—1	—11	59	—1	—10	09	—1	—13	59	—1	—12
1610	1	—10	1660	0		1710	0		1760	0	
11	0		61	1	— 9	11	1	—12	61	1	—11
12	0		62	—1	—10	12	0		62	1	—10
13	—1	—11	63	—1	—11	13	1	—11	63	1	— 9
14	—1	—12	64	0		14	1	—10	64	0	
15	—1	—13	65	0		15	0		65	1	— 8
16	0		66	0		16	0		66	1	— 7
17	0		67	—1	—12	17	1	— 9	67	—1	— 8
18	1	—12	68	0		18	1	— 8	68	0	
19	—1	—13	69	—1	—13	19	0		69	1	— 7
1620	0		1670	—1	—14	1720	0		1770	1	— 6
21	—1	—14	71	1	—13	21	—1	— 9	71	—1	— 7
22	1	—13	72	0		22	1	— 8	72	0	
23	1	—12	73	1	—12	23	—1	— 9	73	0	
24	0		74	0		24	0		74	1	— 6
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	—13	76	0		26	1	— 8	76	0	
27	—1	—14	77	—1	—13	27	1	— 7	77	—1	— 7
28	0		78	1	—12	28	0		78	—1	— 8
29	0		79	1	—11	29	—1	— 8	79	1	— 7
1630	—1	—15	1680	0		1730	—1	— 9	1780	0	
31	1	—14	81	0		31	1	— 8	81	1	— 6
32	0		82	0		32	0		82	0	
33	1	—13	83	0		33	—1	— 9	83	—1	— 7
34	—1	—14	84	0		34	0		84	0	
35	—1	—15	85	1	—10	35	1	— 8	85	1	— 6
36	0		86	—1	—11	36	0		86	—1	— 7
37	—1	—16	87	1	—10	37	0		87	—1	— 8
38	0		88	0		38	—1	— 9	88	0	
39	1	—15	89	1	— 9	39	1	— 8	89	—1	— 9
1640	0		1690	0		1740	0		1790	—1	—10
41	1	—14	91	1	— 8	41	—1	— 9	91	0	
42	1	—13	92	0		42	—1	—10	92	0	
43	1	—12	93	—1	— 9	43	—1	—11	93	1	— 9
44	0		94	0		44	0		94	1	— 8
45	—1	—13	95	—1	—10	45	1	—10	95	1	— 7
46	1	—12	96	0		46	0		96	0	
47	0		97	—1	—11	47	—1	—11	97	1	— 6
48	0		98	—1	—12	48	0		98	—1	— 7
49	1	—11	99	—1	—13	49	—1	—12	99	1	— 6
1650	0		1700	0		1750	0		1800	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
1801	—1	—7	1851	1	—1	1901	—1	—4	1951	—1	1
02	—1	—8	52	0		02	—1	—5	52	0	
03	1	—7	53	1	0	03	1	—4	53	0	
04	0		54	0		04	0		54	1	2
05	0		55	—1	—1	05	—1	—5	55	—1	1
06	1	—6	56	0		06	1	—4	56	0	
07	1	—5	57	1	0	07	—1	—5	57	1	2
08	0		58	1	1	08	0		58	—1	1
09	0		59	0		09	1	—4	59	1	2
1810	—1	—6	1860	0		1910	—1	—5	1960	0	
11	—1	—7	61	—1	0	11	0		61	1	3
12	0		62	0		12	0		62	0	
13	0		63	0		13	—1	—6	63	1	4
14	1	—6	64	0		14	1	—5	64	0	
15	0		65	1	1	15	1	—4	65	—1	3
16	0		66	—1	0	16	0		66	1	4
17	1	—5	67	—1	—1	17	0		67	1	5
18	0		68	0		18	—1	—5	68	0	
19	1	—4	69	—1	—2	19	1	—4	69	1	6
1820	0		1870	1	—1	1920	0		1970	—1	5
21	1	—3	71	—1	—2	21	1	—3	71	0	
22	1	—2	72	0		22	0		72	0	
23	—1	—3	73	—1	—3	23	1	—2	73	—1	4
24	0		74	1	—2	24	0		74	1	5
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	—4	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	—1	—3	27	1	—1	77	1	6
28	0		78	—1	—4	28	0		78	—1	5
29	1	—3	79	—1	—5	29	1	0	79	—1	4
1830	1	—2	1880	0		1930	—1	—1	1980	0	
31	—1	—3	81	0		31	—1	—2	81	1	5
32	0		82	1	—4	32	0		82	1	6
33	—1	—4	83	1	—3	33	—1	—3	83	1	7
34	—1	—5	84	0		34	1	—2	84	0	
35	1	—4	85	—1	—4	35	0		85	1	8
36	0		86	—1	—5	36	0		86	—1	7
37	1	—3	87	—1	—6	37	1	—1	87	—1	6
38	1	—2	88	0		38	1	0	88	0	
39	1	—1	89	—1	—7	39	1	1	89	0	
1840	0		1890	0		1940	0		1990	—1	5
41	1	0	91	1	—6	41	1	2	91	1	6
42	—1	—1	92	0		42	1	3	92	0	
43	1	0	93	1	—5	43	1	4	93	—1	5
44	0		94	1	—4	44	0		94	1	6
45	0		95	1	—3	45	1	5	95	1	7
46	—1	—1	96	0		46	—1	4	96	0	
47	—1	—2	97	1	—2	47	—1	3	97	—1	6
48	0		98	—1	—3	48	0		98	0	
49	0		99	0		49	—1	2	99	—1	5
1850	0		1900	0		1950	0		2000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
2001	—1	4	2051	1	9	2101	1	1	2151	0	—1
02	1	5	52	0		02	1	2	52	0	
03	—1	4	53	—1	8	03	1	3	53	—1	—2
04	0		54	—1	7	04	0		54	—1	—3
05	1	5	55	—1	6	05	1	4	55	1	—2
06	—1	4	56	0		06	0		56	0	
07	0		57	0		07	0		57	1	—1
08	0		58	0		08	0		58	—1	—2
09	0		59	1	7	09	—1	3	59	1	—1
2010	1	5	2060	0		2110	—1	2	2160	0	
11	—1	4	61	0		11	—1	1	61	—1	—2
12	0		62	1	8	12	0		62	—1	—3
13	—1	3	63	—1	7	13	—1	0	63	—1	—4
14	—1	2	64	0		14	—1	—1	64	0	
15	—1	1	65	—1	6	15	0		65	1	—3
16	0		66	1	7	16	0		66	0	
17	—1	0	67	—1	6	17	1	0	67	1	—2
18	1	1	68	0		18	—1	—1	68	0	
19	1	2	69	—1	5	19	1	0	69	0	
2020	0		2070	0		2120	0		2170	1	—1
21	1	3	71	1	6	21	—1	—1	71	1	0
22	—1	2	72	0		22	1	0	72	0	
23	0		73	1	7	23	1	1	73	1	1
24	0		74	—1	6	24	0		74	1	2
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	3	76	0		26	1	2	76	0	
27	—1	2	77	1	7	27	1	3	77	1	3
28	0		78	1	8	28	0		78	0	
29	—1	1	79	0		29	—1	2	79	—1	2
2030	1	2	2080	0		2130	1	3	2180	0	
31	1	3	81	—1	7	31	—1	2	81	1	3
32	0		82	—1	6	32	0		82	1	4
33	1	4	83	—1	5	33	0		83	1	5
34	0		84	0		34	—1	1	84	0	
35	—1	3	85	—1	4	35	—1	0	85	—1	4
36	0		86	—1	3	36	0		86	1	5
37	—1	2	87	—1	2	37	—1	—1	87	0	
38	1	3	88	0		38	1	0	88	0	
39	—1	2	89	—1	1	39	—1	—1	89	1	6
2040	0		2090	1	2	2140	0		2190	1	7
41	1	3	91	—1	1	41	—1	—2	91	1	8
42	1	4	92	0		42	0		92	0	
43	0		93	—1	0	43	—1	—3	93	—1	7
44	0		94	—1	—1	44	0		94	1	8
45	1	5	95	1	0	45	1	—2	95	1	9
46	1	6	96	0		46	—1	—3	96	0	
47	1	7	97	0		47	1	—2	87	0	
48	0		98	1	1	48	0		98	—1	8
49	1	8	99	—1	0	49	1	—1	99	1	9
2050	0		2100	0		2150	0		2200	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
2201	1	10	2251	—1	7	2301	—1	—3	2351	—1	—4
02	—1	9	52	0		02	1	—2	52	0	
03	—1	8	53	1	8	03	0		53	1	—3
04	0		54	0		04	0		54	—1	—4
05	0		55	—1	7	05	1	—1	55	—1	—5
06	1	9	56	0		06	1	0	56	0	
07	—1	8	57	1	8	07	1	1	57	—1	—6
08	0		58	1	9	08	0		58	0	
09	0		59	0		09	—1	0	59	1	—5
2210	1	9	2260	0		2310	—1	—1	2360	0	
11	—1	8	61	—1	8	11	—1	—2	61	1	—4
12	0		62	1	9	12	0		62	1	—3
13	—1	7	63	1	10	13	0		63	1	—2
14	0		64	0		14	—1	—3	64	0	
15	1	8	65	—1	9	15	1	—2	65	—1	—3
16	0		66	—1	8	16	0		66	0	
17	1	9	67	—1	7	17	1	—1	67	0	
18	1	10	68	0		18	—1	—2	68	0	
19	1	11	69	—1	6	19	1	—1	69	1	—2
2220	0		2270	—1	5	2320	0		2370	1	—1
21	—1	10	71	1	6	21	1	0	71	—1	—2
22	—1	9	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	—1	5	23	1	1	73	—1	—3
24	0		74	—1	4	24	0		74	1	—2
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	10	76	0		26	1	2	76	0	
27	1	11	77	0		27	1	3	77	—1	—3
28	0		78	—1	3	28	0		78	—1	—4
29	1	12	79	1	4	29	1	4	79	—1	—5
2230	—1	11	2280	0		2330	—1	3	2380	0	
31	1	12	81	—1	3	31	0		81	—1	—6
32	0		82	—1	2	32	0		82	—1	—7
33	—1	11	83	1	3	33	—1	2	83	—1	—8
34	1	12	84	0		34	—1	1	84	0	
35	—1	11	85	1	4	35	1	2	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	1	—7
37	—1	10	87	—1	3	37	—1	1	87	—1	—8
38	—1	9	88	0		38	—1	0	88	0	
39	—1	8	89	—1	2	39	—1	—1	89	—1	—9
2240	0		2290	—1	1	2340	0		2390	—1	—10
41	0		91	1	2	41	—1	—2	91	1	—9
42	—1	7	92	0		42	1	—1	92	0	
43	—1	6	93	—1	1	43	—1	—2	93	—1	—10
44	0		94	—1	0	44	0		94	0	
45	1	7	95	0		45	—1	—3	95	1	—9
46	1	8	96	0		46	1	—2	96	0	
47	—1	7	97	—1	—1	47	—1	—3	97	—1	—10
48	0		98	—1	—2	48	0		98	—1	—11
49	1	8	99	0		49	0		99	—1	—12
2250	0		2300	0		2350	0		2400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
2401	0	—12	2451	—1	—12	2501	1	0	2551	—1	—5
02	1	—11	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	1	—11	03	—1	—1	53	—1	—6
04	0		54	—1	—12	04	0		54	1	—5
05	—1	—12	55	1	—11	05	—1	—2	55	—1	—6
06	—1	—13	56	0		06	—1	—3	56	0	
07	1	—12	57	0		07	1	—2	57	—1	—7
08	0		58	1	—10	08	0		58	1	—6
09	—1	—13	59	—1	—11	09	1	—1	59	1	—5
2410	—1	—14	2460	0		2510	—1	—2	2560	0	
11	—1	—15	61	1	—10	11	0		61	1	—4
12	0		62	1	— 9	12	0		62	1	—3
13	1	—14	63	1	— 8	13	1	—1	63	1	—2
14	—1	—15	64	0		14	—1	—2	64	0	
15	1	—14	65	—1	— 9	15	1	—1	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	1	—1
17	—1	—15	67	—1	—10	17	1	0	67	1	0
18	1	—14	68	0		18	1	1	68	0	
19	1	—13	69	1	— 9	19	1	2	69	1	1
2420	0		2470	1	— 8	2520	0		2570	—1	0
21	0		71	1	— 7	21	—1	1	71	1	1
22	—1	—14	72	0		22	—1	0	72	0	
23	—1	—15	73	—1	— 8	23	0		73	1	2
24	0		74	1	— 7	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	—14	76	0		26	—1	—1	76	0	
27	1	—13	77	—1	— 8	27	0		77	1	3
28	0		78	1	— 7	28	0		78	1	4
29	1	—12	79	1	— 6	29	0		79	—1	3
2430	0		2480	0		2530	1	0	2580	0	
31	—1	—13	81	1	— 5	31	—1	—1	81	1	4
32	0		82	—1	— 6	32	0		82	1	5
33	1	—12	83	1	— 5	33	1	0	83	0	
34	1	—11	84	0		34	—1	—1	84	0	
35	1	—10	85	—1	— 6	35	0		85	—1	4
36	0		86	—1	— 7	36	0		86	—1	3
37	—1	—11	87	1	— 6	37	1	0	87	1	4
38	—1	—12	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	1	— 5	39	—1	—1	89	1	5
2440	0		2490	1	— 4	2540	0		2590	1	6
41	—1	—13	91	1	— 3	41	0		91	—1	5
42	1	—12	92	0		42	—1	—2	92	0	
43	1	—11	93	0		43	—1	—3	93	—1	4
44	0		94	—1	— 4	44	0		94	1	5
45	—1	—12	95	1	— 3	45	1	—2	95	—1	4
46	1	—11	96	0		46	—1	—3	96	0	
47	—1	—12	97	1	— 2	47	0		97	0	
48	0		98	1	— 1	48	0		98	—1	3
49	1	—11	99	0		49	—1	—4	99	1	4
2450	0		2500	0		2550	0		2600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
2601	0	4	2651	1	11	2701	1	—5	2751	—1	—14
02	1	5	52	0		02	—1	—6	52	0	
03	1	6	53	1	12	03	—1	—7	53	—1	—15
04	0		54	1	13	04	0		54	0	
05	1	7	55	0		05	1	—6	55	—1	—16
06	1	8	56	0		06	1	—5	56	0	
07	—1	7	57	—1	12	07	—1	—6	57	1	—15
08	0		58	—1	11	08	0		58	—1	—16
09	—1	6	59	—1	10	09	0		59	1	—15
2610	0		2660	0		2710	—1	—7	2760	0	
11	1	7	61	1	11	11	—1	—8	61	1	—14
12	0		62	0		12	0		62	1	—13
13	—1	6	63	—1	10	13	—1	—9	63	0	
14	1	7	64	0		14	—1	—10	64	0	
15	1	8	65	—1	9	15	—1	—11	65	—1	—14
16	0		66	—1	8	16	0		66	—1	—15
17	—1	7	67	—1	7	17	—1	—12	67	—1	—16
18	1	8	68	0		18	0		68	0	
19	0		69	1	8	19	—1	—13	69	—1	—17
2620	0		2670	1	9	2720	0		2770	—1	—18
21	—1	7	71	—1	8	21	1	—12	71	1	—17
22	1	8	72	0		22	1	—11	72	0	
23	1	9	73	0		23	1	—10	73	1	—16
24	0		74	—1	7	24	0		74	—1	—17
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	8	76	0		26	—1	—11	76	0	
27	1	9	77	—1	6	27	0		77	—1	—18
28	0		78	—1	5	28	0		78	—1	—19
29	1	10	79	—1	4	29	—1	—12	79	1	—18
2630	—1	9	2680	0		2730	—1	—13	2780	0	
31	1	10	81	1	5	31	—1	—14	81	0	
32	0		82	0		32	0		82	—1	—19
33	—1	9	83	—1	4	33	1	—13	83	0	
34	—1	8	84	0		34	1	—12	84	0	
35	—1	7	85	—1	3	35	1	—11	85	1	—18
36	0		86	—1	2	36	0		86	—1	—19
37	0		87	—1	1	37	—1	—12	87	1	—18
38	1	8	88	0		38	0		88	0	
39	—1	7	89	—1	0	39	—1	—13	89	—1	—19
2640	0		2690	—1	—1	2740	0		2790	0	
41	1	8	91	0		41	—1	—14	91	—1	—20
42	1	9	92	0		42	—1	—15	92	0	
43	1	10	93	—1	—2	43	1	—14	93	0	
44	0		94	—1	—3	44	0		94	—1	—21
45	0		95	0		45	0		95	—1	—22
46	0		96	0		46	1	—13	96	0	
47	—1	9	97	—1	—4	47	1	—12	97	—1	—23
48	0		98	—1	—5	48	0		98	1	—22
49	1	10	99	—1	—6	49	—1	—13	99	0	
2650	0		2700	0		2750	0		2800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
2801	—1	—23	2851	—1	—24	2901	1	—17	2951	1	—14
02	—1	—24	52	0		02	1	—16	52	0	
03	—1	—25	53	0		03	—1	—17	53	—1	—15
04	0		54	1	—23	04	0		54	—1	—16
05	1	—24	55	1	—22	05	—1	—18	55	—1	—17
06	—1	—25	56	0		06	1	—17	56	0	
07	1	—24	57	—1	—23	07	0		57	—1	—18
08	0		58	1	—22	08	0		58	1	—17
09	0		59	1	—21	09	—1	—18	59	1	—16
2810	—1	—25	2860	0		2910	1	—17	2960	0	
11	1	—24	61	—1	—22	11	1	—16	61	0	
12	0		62	0		12	0		62	1	—15
13	1	—23	63	1	—21	13	1	—15	63	—1	—16
14	1	—22	64	0		14	—1	—16	64	0	
15	1	—21	65	—1	—22	15	—1	—17	65	1	—15
16	0		66	1	—21	16	0		66	1	—14
17	0		67	1	—20	17	—1	—18	67	—1	—15
18	1	—20	68	0		18	1	—17	68	0	
19	—1	—21	69	1	—19	19	—1	—18	69	—1	—16
2820	0		2870	1	—18	2920	0		2970	0	
21	—1	—22	71	0		21	1	—17	71	—1	—17
22	—1	—23	72	0		22	—1	—18	72	0	
23	1	—22	73	0		23	1	—17	73	1	—16
24	0		74	—1	—19	24	0		74	1	—15
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	1	—16	76	0	
27	1	—21	77	—1	—20	27	—1	—17	77	1	—14
28	0		78	1	—19	28	0		78	1	—13
29	—1	—22	79	—1	—20	29	1	—16	79	0	
2830	—1	—23	2880	0		2930	—1	—17	2980	0	
31	1	—22	81	1	—19	31	1	—16	81	1	—12
32	0		82	—1	—20	32	0		82	1	—11
33	—1	—23	83	0		33	1	—15	83	1	—10
34	—1	—24	84	0		34	0		84	0	
35	0		85	1	—19	35	1	—14	85	—1	—11
36	0		86	1	—18	36	0		86	1	—10
37	—1	—25	87	—1	—19	37	—1	—15	87	1	— 9
38	1	—24	88	0		38	—1	—16	88	0	
39	1	—23	89	0		39	—1	—17	89	0	
2840	0		2890	0		2940	0		2990	1	— 8
41	1	—22	91	0		41	1	—16	91	1	— 7
42	0		92	0		42	1	—15	92	0	
43	—1	—23	93	1	—18	43	0		93	1	— 6
44	0		94	1	—17	44	0		94	—1	— 7
45	1	—22	95	—1	—18	45	—1	—16	95	1	— 6
46	1	—21	96	0		46	—1	—17	96	0	
47	—1	—22	97	—1	—19	47	1	—16	97	0	
48	0		98	0		48	0		98	1	— 5
49	—1	—23	99	1	—18	49	1	—15	99	—1	— 6
2850	0		2900	0		2950	0		3000	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
3001	—1	—7	3051	0	—3	3101	1	4	3151	1	9
02	—1	—8	52	0		02	1	5	52	0	
03	1	—7	53	1	—2	03	1	6	53	1	10
04	0		54	—1	—3	04	0		54	—1	9
05	1	—6	55	—1	—4	05	0		55	1	10
06	0		56	0		06	1	7	56	0	
07	1	—5	57	1	—3	07	1	8	57	—1	9
08	0		58	—1	—4	08	0		58	1	10
09	—1	—6	59	—1	—5	09	—1	7	59	0	
3010	1	—5	3060	0		3110	—1	6	3160	0	
11	—1	—6	61	—1	—6	11	—1	5	61	1	11
12	0		62	1	—5	12	0		62	1	12
13	1	—5	63	1	—4	13	1	6	63	—1	11
14	—1	—6	64	0		14	0		64	0	
15	0		65	1	—3	15	—1	5	65	—1	10
16	0		66	1	—2	16	0		66	1	11
17	1	—5	67	—1	—3	17	1	6	67	—1	10
18	—1	—6	68	0		18	1	7	68	0	
19	—1	—7	69	0		19	—1	6	69	—1	9
3020	0		3070	—1	—4	3120	0		3170	—1	8
21	—1	—8	71	1	—3	21	—1	5	71	—1	7
22	1	—7	72	0		22	—1	4	72	0	
23	—1	—8	73	1	—2	23	0		73	1	8
24	0		74	—1	—3	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	—9	76	0		26	—1	3	76	0	
27	1	—8	77	1	—2	27	1	4	77	0	
28	0		78	0		28	0		78	—1	7
29	1	—7	79	—1	—3	29	—1	3	79	0	
3030	1	—6	3080	0		3130	—1	2	3180	0	
31	1	—5	81	—1	—4	31	1	3	81	—1	6
32	0		82	—1	—5	32	0		82	—1	5
33	0		83	—1	—6	33	1	4	83	1	6
34	—1	—6	84	0		34	1	5	84	0	
35	1	—5	85	1	—5	35	1	6	85	0	
36	0		86	1	—4	36	0		86	0	
37	—1	—6	87	0		37	—1	5	87	—1	5
38	0		88	0		38	—1	4	88	0	
39	1	—5	89	—1	—5	39	1	5	89	1	6
3040	0		3090	1	—4	3140	0		3190	1	7
41	—1	—6	91	1	—3	41	0		91	—1	6
42	0		92	0		42	1	6	92	0	
43	1	—5	93	1	—2	43	1	7	93	1	7
44	0		94	1	—1	44	0		94	1	8
45	1	—4	95	1	0	45	—1	6	95	0	
46	1	—3	96	0		46	0		96	0	
47	1	—2	97	1	1	47	1	7	97	1	9
48	0		98	1	2	48	0		98	1	10
49	—1	—3	99	1	3	49	1	8	99	1	11
3050	0		3100	0		3150	0		3200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
3201	—1	10	3251	—1	16	3301	—1	19	3351	1	17
02	1	11	52	0		02	—1	18	52	0	
03	—1	10	53	—1	15	03	0		53	1	18
04	0		54	1	16	04	0		54	1	19
05	1	11	55	1	17	05	1	19	55	—1	18
06	—1	10	56	0		06	1	20	56	0	
07	1	11	57	—1	16	07	—1	19	57	0	
08	0		58	0		08	0		58	—1	17
09	—1	10	59	—1	15	09	1	20	59	—1	16
3210	1	11	3260	0		3310	—1	19	3360	0	
11	0		61	1	16	11	—1	18	61	—1	15
12	0		62	—1	15	12	0		62	0	
13	0		63	1	16	13	—1	17	63	—1	14
14	1	12	64	0		14	1	18	64	0	
15	1	13	65	1	17	15	1	19	65	1	15
16	0		66	—1	16	16	0		66	0	
17	—1	12	67	0		17	1	20	67	—1	14
18	1	13	68	0		18	1	21	68	0	
19	—1	12	69	1	17	19	—1	20	69	1	15
3220	0		3270	1	18	3320	0		3370	—1	14
21	—1	11	71	—1	17	21	0		71	—1	13
22	0		72	0		22	—1	19	72	0	
23	1	12	73	1	18	23	—1	18	73	—1	12
24	0		74	1	19	24	0		74	—1	11
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	13	76	0		26	1	19	76	0	
27	1	14	77	1	20	27	1	20	77	1	12
28	0		78	—1	19	28	0		78	—1	11
29	—1	13	79	1	20	29	—1	19	79	1	12
3230	1	14	3280	0		3330	0		3380	0	
31	0		81	1	21	31	—1	18	81	0	
32	0		82	—1	20	32	0		82	—1	11
33	1	15	83	0		33	—1	17	83	1	12
34	0		84	0		34	1	18	84	0	
35	1	16	85	0		35	—1	17	85	1	13
36	0		86	—1	19	36	0		86	1	14
37	—1	15	87	1	20	37	1	18	87	1	15
38	1	16	88	0		38	1	19	88	0	
39	1	17	89	—1	19	39	0		89	—1	14
3240	0		3290	1	20	3340	0		3390	1	15
41	1	18	91	1	21	41	1	20	91	—1	14
42	1	19	92	0		42	—1	19	92	0	
43	—1	18	93	1	22	43	—1	18	93	0	
44	0		94	0		44	0		94	1	15
45	—1	17	95	1	23	45	—1	17	95	—1	14
46	—1	16	96	0		46	—1	16	96	0	
47	1	17	97	—1	22	47	—1	15	97	1	15
48	0		98	—1	21	48	0		98	1	16
49	0		99	—1	20	49	1	16	99	—1	15
3250	0		3300	0		3350	0	,	3400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
3401	1	16	3451	−1	14	3501	0	12	3551	1	6
02	0		52	0		02	−1	11	52	0	
03	1	17	53	1	15	03	1	12	53	−1	5
04	0		54	−1	14	04	0		54	1	6
05	−1	16	55	1	15	05	1	13	55	0	
06	−1	15	56	0		06	1	14	56	0	
07	−1	14	57	−1	14	07	−1	13	57	−1	5
08	0		58	1	15	08	0		58	−1	4
09	1	15	59	1	16	09	0		59	−1	3
3410	1	16	3460	0		3510	0		3560	0	
11	0		61	−1	15	11	−1	12	61	1	4
12	0		62	−1	14	12	0		62	−1	3
13	−1	15	63	−1	13	13	1	13	63	1	4
14	−1	14	64	0		14	−1	12	64	0	
15	1	15	65	0		15	−1	11	65	−1	3
16	0		66	1	14	16	0		66	1	4
17	−1	14	67	−1	13	17	−1	10	67	−1	3
18	1	15	68	0		18	1	11	68	0	
19	1	16	69	−1	12	19	0		69	1	4
3420	0		3470	−1	11	3520	0		3570	−1	3
21	1	17	71	−1	10	21	1	12	71	−1	2
22	−1	16	72	0		22	−1	11	72	0	
23	−1	15	73	1	11	23	1	12	73	0	
24	0		74	0		24	0		74	1	3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	14	76	0		26	−1	11	76	0	
27	1	15	77	−1	10	27	−1	10	77	0	
28	0		78	−1	9	28	0		78	1	4
29	0		79	0		29	−1	9	79	1	5
3430	0		3480	0		3530	−1	8	3580	0	
31	1	16	81	0		31	−1	7	81	−1	4
32	0		82	1	10	32	0		82	0	
33	−1	15	83	0		33	−1	6	83	−1	3
34	−1	14	84	0		34	1	7	84	0	
35	−1	13	85	−1	9	35	−1	6	85	−1	2
36	0		86	1	10	36	0		86	−1	1
37	1	14	87	1	11	37	0		87	1	2
38	0		88	0		38	−1	5	88	0	
39	1	15	89	1	12	39	−1	4	89	1	3
3440	0		3490	−1	11	3540	0		3590	−1	2
41	−1	14	91	−1	10	41	−1	3	91	0	
42	1	15	92	0		42	1	4	92	0	
43	1	16	93	1	11	43	1	5	93	−1	1
44	0		94	1	12	44	0		94	−1	0
45	−1	15	95	−1	11	45	1	6	95	1	1
46	1	16	96	0		46	0		96	0	
47	0		97	1	12	47	−1	5	97	−1	0
48	0		98	1	13	48	0		98	−1	−1
49	−1	15	99	−1	12	49	0		99	1	0
3450	0		3500	0		3550	0		3600	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
3601	1	1	3651	1	−4	3701	−1	−8	3751	0	−7
02	1	2	52	0		02	−1	−9	52	0	
03	1	3	53	1	−3	03	0		53	0	
04	0		54	0		04	0		54	1	−6
05	−1	2	55	−1	−4	05	1	−8	55	1	−5
06	−1	1	56	0		06	−1	−9	56	0	
07	−1	0	57	−1	−5	07	1	−8	57	0	
08	0		58	−1	−6	08	0		58	1	−4
09	0		59	−1	−7	09	−1	−9	59	−1	−5
3610	0		3660	0		3710	1	−8	3760	0	
11	1	1	61	1	−6	11	1	−7	61	−1	−6
12	0		62	1	−5	12	0		62	0	
13	−1	0	63	0		13	1	−6	63	1	−5
14	−1	−1	64	0		14	−1	−7	64	0	
15	−1	−2	65	1	−4	15	1	−6	65	−1	−6
16	0		66	1	−3	16	0		66	−1	−7
17	−1	−3	67	1	−2	17	0		67	−1	−8
18	0		68	0		18	0		68	0	
19	−1	−4	69	1	−1	19	−1	−7	69	−1	−9
3620	0		3670	−1	−2	3720	0		3770	1	−8
21	−1	−5	71	−1	−3	21	0		71	0	
22	1	−4	72	0		22	1	−6	72	0	
23	−1	−5	73	−1	−4	23	−1	−7	73	0	
24	0		74	−1	−5	24	0		74	1	−7
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	0		76	0	
27	0		77	−1	−6	27	−1	−8	77	1	−6
28	0		78	−1	−7	28	0		78	1	−5
29	1	−4	79	1	−6	29	−1	−9	79	−1	−6
3630	0		3680	0		3730	−1	−10	3780	0	
31	−1	−5	81	0		31	−1	−11	81	1	−5
32	0		82	−1	−7	32	0		82	−1	−6
33	−1	−6	83	1	−6	33	−1	−12	83	−1	−7
34	−1	−7	84	0		34	1	−11	84	0	
35	1	−6	85	−1	−7	35	0		85	1	−6
36	0		86	−1	−8	36	0		86	−1	−7
37	−1	−7	87	1	−7	37	1	−10	87	1	−6
38	−1	−8	88	0		38	1	−9	88	0	
39	1	−7	89	−1	−8	39	−1	−10	89	0	
3640	0		3690	0		3740	0		3790	−1	−7
41	1	−6	91	−1	−9	41	−1	−11	91	1	−6
42	−1	−7	92	0		42	1	−10	92	0	
43	−1	−8	93	1	−8	43	1	−9	93	−1	−7
44	0		94	1	−7	44	0		94	−1	−8
45	0		95	1	−6	45	−1	−10	95	1	−7
46	1	−7	96	0		46	1	−9	96	0	
47	1	−6	97	−1	−7	47	1	−8	97	−1	−8
48	0		98	0		48	0		98	0	
49	1	−5	99	0		49	1	−7	99	1	−7
3650	0		3700	0		3750	0		3800	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
3801	-1	-8	3851	-1	-8	3901	1	-8	3951	0	-15
02	1	-7	52	0		02	1	-7	52	0	
03	-1	-8	53	-1	-9	03	1	-6	53	1	-14
04	0		54	-1	-10	04	0		54	-1	-15
05	1	-7	55	-1	-11	05	-1	-7	55	-1	-16
06	-1	-8	56	0		06	0		56	0	
07	0		57	-1	-12	07	-1	-8	57	1	-15
08	0		58	-1	-13	08	0		58	1	-14
09	1	-7	59	1	-12	09	1	-7	59	1	-13
3810	1	-6	3860	0		3910	1	-6	3960	0	
11	1	-5	61	0		11	-1	-7	61	1	-12
12	0		62	1	-11	12	0		62	-1	-13
13	-1	-6	63	-1	-12	13	-1	-8	63	1	-12
14	1	-5	64	0		14	-1	-9	64	0	
15	-1	-6	65	1	-11	15	0		65	-1	-13
16	0		66	1	-10	16	0		66	-1	-14
17	1	-5	67	1	-9	17	-1	-10	67	-1	-15
18	-1	-6	68	0		18	-1	-11	68	0	
19	-1	-7	69	1	-8	19	-1	-12	69	0	
3820	0		3870	0		3920	0		3970	-1	-16
21	-1	-8	71	0		21	1	-11	71	0	
22	0		72	0		22	-1	-12	72	0	
23	-1	-9	73	1	-7	23	-1	-13	73	1	-15
24	0		74	-1	-8	24	0		74	1	-14
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	-8	76	0		26	-1	-14	76	0	
27	1	-7	77	-1	-9	27	1	-13	77	1	-13
28	0		78	-1	-10	28	0		78	0	
29	1	-6	79	0		29	-1	-14	79	1	-12
3830	-1	-7	3880	0		3930	1	-13	3980	0	
31	1	-6	81	-1	-11	31	-1	-14	81	1	-11
32	0		82	-1	-12	32	0		82	-1	-12
33	-1	-7	83	1	-11	33	0		83	1	-11
34	0		84	0		34	-1	-15	84	0	
35	-1	-8	85	1	-10	35	1	-14	85	1	-10
36	0		86	-1	-11	36	0		86	1	-9
37	1	-7	87	0		37	1	-13	87	0	
38	-1	-8	88	0		38	-1	-14	88	0	
39	1	-7	89	-1	-12	39	-1	-15	89	-1	-10
3840	0		3890	-1	-13	3940	0		3990	-1	-11
41	1	-6	91	1	-12	41	1	-14	91	1	-10
42	-1	-7	92	0		42	0		92	0	
43	0		93	1	-11	43	-1	-15	93	0	
44	0		94	1	-10	44	0		94	1	-9
45	1	-6	95	-1	-11	45	-1	-16	95	-1	-10
46	-1	-7	96	0		46	1	-15	96	0	
47	-1	-8	97	0		47	-1	-16	97	1	-9
48	0		98	1	-10	48	0		98	1	-8
49	1	-7	99	1	-9	49	1	-15	99	-1	-9
3850	0		3900	0		3950	0		4000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
4001	—1	—10	4051	—1	—14	4101	1	—19	4151	1	—13
02	1	— 9	52	0		02	—1	—20	52	0	
03	—1	—10	53	—1	—15	03	1	—19	53	—1	—14
04	0		54	1	—14	04	0		54	—1	—15
05	0		55	1	—13	05	1	—18	55	—1	—16
06	1	— 9	56	0		06	1	—17	56	0	
07	—1	—10	57	—1	—14	07	0		57	—1	—17
08	0		58	1	—13	08	0		58	0	
09	1	— 9	59	0		09	1	—16	59	—1	—18
4010	—1	—10	4060	0		4110	1	—15	4160	0	
11	—1	—11	61	1	—12	11	—1	—16	61	—1	—19
12	0		62	—1	—13	12	0		62	1	—18
13	—1	—12	63	1	—12	13	0		63	1	—17
14	0		64	0		14	0		64	0	
15	—1	—13	65	—1	—13	15	1	—15	65	0	
16	0		66	—1	—14	16	0		66	1	—16
17	—1	—14	67	0		17	1	—14	67	0	
18	0		68	0		18	—1	—15	68	0	
19	—1	—15	69	1	—13	19	1	—14	69	1	—15
4020	0		4070	1	—12	4120	0		4170	1	—14
21	—1	—16	71	—1	—13	21	1	—13	71	1	—13
22	1	—15	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	—1	—14	23	—1	—14	73	—1	—14
24	0		74	1	—13	24	0		74	1	—13
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	—14	76	0		26	1	—13	76	0	
27	—1	—15	77	0		27	—1	—14	77	—1	—14
28	0		78	1	—12	28	0		78	1	—13
29	—1	—16	79	—1	—13	29	—1	—15	79	—1	—14
4030	1	—15	4080	0		4130	1	—14	4180	0	
31	1	—14	81	—1	—14	31	0		81	1	—13
32	0		82	—1	—15	32	0		82	1	—12
33	1	—13	83	1	—14	33	—1	—15	83	1	—11
34	1	—12	84	0		34	1	—14	84	0	
35	—1	—13	85	—1	—15	35	1	—13	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	1	—10
37	1	—12	87	1	—14	37	—1	—14	87	1	— 9
38	—1	—13	88	0		38	1	—13	88	0	
39	1	—12	89	—1	—15	39	—1	—14	89	1	— 8
4040	0		4090	—1	—16	4140	0		4190	—1	— 9
41	0		91	—1	—17	41	1	—13	91	—1	—10
42	—1	—13	92	0		42	—1	—14	92	0	
43	1	—12	93	—1	—18	43	1	—13	93	1	— 9
44	0		94	—1	—19	44	[illegible]		94	0	
45	1	—11	95	0		45		—12	95	1	— 8
46	0		96	0		46	—1	—13	96	0	
47	—1	—12	97	1	—18	47	—1	—14	97	1	— 7
48	0		98	—1	—19	48	0		98	1	— 6
49	—1	—13	99	—1	—20	49	0		99	—1	— 7
4050	0		4100	0		4150	0		4200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
4201	−1	− 8	4251	−1	−15	4301	−1	−13	4351	1	− 9
02	−1	− 9	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	−1	−16	03	1	−12	53	1	− 8
04	0		54	−1	−17	04	0		54	−1	− 9
05	0		55	−1	−18	05	1	−11	55	−1	−10
06	−1	−10	56	0		06	1	−10	56	0	
07	1	− 9	57	0		07	1	− 9	57	−1	−11
08	0		58	1	−17	08	0		58	1	−10
09	−1	−10	59	−1	−18	09	1	− 8	59	1	− 9
4210	−1	−11	4260	0		4310	−1	− 9	4360	0	
11	−1	−12	61	−1	−19	11	0		61	0	
12	0		62	1	−18	12	0		62	−1	−10
13	1	−11	63	0		13	1	− 8	63	−1	−11
14	0		64	0		14	−1	− 9	64	0	
15	−1	−12	65	1	−17	15	1	− 8	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	−1	−12
17	−1	−13	67	1	−16	17	1	− 7	67	1	−11
18	1	−12	68	0		18	−1	− 8	68	0	
19	−1	−13	69	1	−15	19	1	− 7	69	1	−10
4220	0		4270	1	−14	4320	0		4370	1	− 9
21	0		71	−1	−15	21	1	− 6	71	−1	−10
22	1	−12	72	0		22	1	− 5	72	0	
23	1	−11	73	−1	−16	23	−1	− 6	73	−1	−11
24	0		74	1	−15	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−10	76	0		26	1	− 5	76	0	
27	1	− 9	77	−1	−16	27	−1	− 6	77	1	−10
28	0		78	1	−15	28	0		78	−1	−11
29	−1	−10	79	1	−14	29	0		79	1	−10
4230	0		4280	0		4330	−1	− 7	4380	0	
31	−1	−11	81	1	−13	31	1	− 6	81	1	− 9
32	0		82	1	−12	32	0		82	−1	−10
33	−1	−12	83	−1	−13	33	1	− 5	83	0	
34	−1	−13	84	0		34	−1	− 6	84	0	
35	0		85	1	−12	35	0		85	1	− 9
36	0		86	1	−11	36	0		86	1	− 8
37	1	−12	87	1	−10	37	−1	− 7	87	1	− 7
38	−1	−13	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	−1	−11	39	−1	− 8	89	1	− 6
40	0		4290	−1	−12	4340	0		4390	−1	− 7
4241	−1	−14	91	1	−11	41	1	− 7	91	−1	− 8
42	1	−13	92	0		42	−1	− 8	92	0	
43	−1	−14	93	0		43	1	− 7	93	1	− 7
44	0		94	−1	−12	44	0		94	0	
45	−1	−15	95	1	−11	45	−1	− 8	95	−1	− 8
46	−1	−16	96	0		46	−1	− 9	96	0	
47	1	−15	97	−1	−12	47	0		97	−1	− 9
48	0		98	−1	−13	48	0		98	−1	−10
49	1	−14	99	1	−12	49	−1	−10	99	1	− 9
4250	0		4300	0		4350	0		4400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
4401	0	—9	4451	—1	—8	4501	1	—3	4551	—1	—5
02	—1	—10	52	0		02	1	—2	52	0	
03	—1	—11	53	1	—7	03	—1	—3	53	1	—4
04	0		54	—1	—8	04	0		54	0	
05	1	—10	55	0		05	—1	—4	55	1	—3
06	1	—9	56	0		06	—1	—5	56	0	
07	—1	—10	57	—1	—9	07	—1	—6	57	0	
08	0		58	—1	—10	08	0		58	—1	—4
09	—1	—11	59	0		09	0		59	1	—3
4410	0		4460	0		4510	1	—5	4560	0	
11	1	—10	61	1	—9	11	1	—4	61	—1	—4
12	0		62	—1	—10	12	0		62	1	—3
13	1	—9	63	—1	—11	13	—1	—5	63	0	
14	1	—8	64	0		14	—1	—6	64	0	
15	1	—7	65	—1	—12	15	1	—5	65	—1	—4
16	0		66	1	—11	16	0		66	—1	—5
17	1	—6	67	1	—10	17	—1	—6	67	—1	—6
18	0		68	0		18	0		68	0	
19	0		69	1	—9	19	—1	—7	69	1	—5
4420	0		4470	1	—8	4520	0		4570	—1	—6
21	—1	—7	71	1	—7	21	—1	—8	71	1	—5
22	1	—6	72	0		22	1	—7	72	0	
23	—1	—7	73	0		23	—1	—8	73	1	—4
24	0		74	1	—6	24	0		74	1	—3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	—6	76	0		26	—1	—9	76	0	
27	1	—5	77	0		27	0		77	1	—2
28	0		78	1	—5	28	0		78	1	—1
29	1	—4	79	1	—4	29	1	—8	79	1	0
4430	—1	—5	4480	0		4530	1	—7	4580	0	
31	—1	—6	81	—1	—5	31	1	—6	81	0	
32	0		82	0		32	0		82	—1	—1
33	—1	—7	83	—1	—6	33	1	—5	83	—1	—2
34	—1	—8	84	0		34	1	—4	84	0	
35	1	—7	85	1	—5	35	1	—3	85	—1	—3
36	0		86	1	—4	36	0		86	1	—2
37	0		87	1	—3	37	1	—2	87	—1	—3
38	—1	—8	88	0		38	1	—1	88	0	
39	1	—7	89	0		39	—1	—2	89	1	—2
4440	0		4490	—1	—4	4540	0		4590	0	
41	—1	—8	91	0		41	1	—1	91	—1	—3
42	1	—7	92	0		42	—1	—2	92	0	
43	1	—6	93	—1	—5	43	—1	—3	93	1	—2
44	0		94	1	—4	44	0		94	1	—1
45	—1	—7	95	—1	—5	45	0		95	1	0
46	0		96	0		46	1	—2	96	0	
47	—1	—8	97	1	—4	47	—1	—3	97	—1	—1
48	0		98	—1	—5	48	0		98	0	
49	1	—7	99	1	—4	49	—1	—4	99	0	
4450	0		4500	0		4550	0		4600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
4601	1	0	4651	−1	−4	4701	1	−1	4751	−1	3
02	1	1	52	0		02	1	0	52	0	
03	−1	0	53	0		03	−1	−1	53	0	
04	0		54	−1	−5	04	0		54	1	4
05	−1	−1	55	0		05	1	0	55	−1	3
06	0		56	0		06	−1	−1	56	0	
07	1	0	57	−1	−6	07	0		57	1	4
08	0		58	−1	−7	08	0		58	1	5
09	1	1	59	1	−6	09	1	0	59	−1	4
4610	−1	0	4660	0		4710	1	1	4760	0	
11	−1	−1	61	1	−5	11	1	2	61	0	
12	0		62	0		12	0		62	1	5
13	1	0	63	−1	−6	13	1	3	63	1	6
14	−1	−1	64	0		14	1	4	64	0	
15	−1	−2	65	−1	−7	15	−1	3	65	1	7
16	0		66	1	−6	16	0		66	1	8
17	0		67	1	−5	17	1	4	67	−1	7
18	1	−1	68	0		18	−1	3	68	0	
19	1	0	69	−1	−6	19	0		69	1	8
4620	0		4670	−1	−7	4720	0		4770	0	
21	−1	−1	71	0		21	−1	2	71	1	9
22	1	0	72	0		22	−1	1	72	0	
23	−1	−1	73	−1	−8	23	−1	0	73	−1	8
24	0		74	1	−7	24	0		74	1	9
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	−1	−1	76	0	
27	1	0	77	1	−6	27	1	0	77	1	10
28	0		78	1	−5	28	0		78	1	11
29	1	1	79	−1	−6	29	−1	−1	79	0	
4630	−1	0	4680	0		4730	1	0	4780	0	
31	1	1	81	1	−5	31	−1	−1	81	1	12
32	0		82	1	−4	32	0		82	−1	11
33	1	2	83	−1	−5	33	−1	−2	83	−1	10
34	−1	1	84	0		34	0		84	0	
35	0		85	1	−4	35	1	−1	85	1	11
36	0		86	1	−3	36	0		86	1	12
37	−1	0	87	1	−2	37	1	0	87	−1	11
38	−1	−1	88	0		38	−1	−1	88	0	
39	−1	−2	89	0		39	1	0	89	−1	10
4640	0		4690	1	−1	4740	0		4790	−1	9
41	1	−1	91	−1	−2	41	1	1	91	1	10
42	−1	−2	92	0		42	1	2	92	0	
43	−1	−3	93	0		43	0		93	−1	9
44	0		94	1	−1	44	0		94	1	10
45	1	−2	95	−1	−2	45	−1	1	95	−1	9
46	−1	−3	96	0		46	1	2	96	0	
47	1	−2	97	−1	−3	47	1	3	97	0	
48	0		98	0		48	0		98	1	10
49	−1	−3	99	1	−2	49	1	4	99	−1	9
4650	0		4700	0		4750	0		4800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
4801	—1	8	4851	0	17	4901	0	19	4951	—1	11
02	0		52	0		02	1	20	52	0	
03	1	9	53	1	18	03	—1	19	53	—1	10
04	0		54	—1	17	04	0		54	1	11
05	0		55	1	18	05	0		55	1	12
06	0		56	0		06	—1	18	56	0	
07	—1	8	57	1	19	07	1	19	57	—1	11
08	0		58	—1	18	08	0		58	—1	10
09	—1	7	59	1	19	09	—1	18	59	0	
4810	1	8	4860	0		4910	—1	17	4960	0	
11	1	9	61	—1	18	11	1	18	61	0	
12	0		62	1	19	12	0		62	—1	9
13	—1	8	63	1	20	13	0		63	1	10
14	—1	7	64	0		14	0		64	0	
15	0		65	—1	19	15	1	19	65	—1	9
16	0		66	—1	18	16	0		66	—1	8
17	—1	6	67	1	19	17	—1	18	67	—1	7
18	1	7	68	0		18	1	19	68	0	
19	1	8	69	0		19	—1	18	69	—1	6
4820	0		4870	—1	18	4920	0		4970	1	7
21	1	9	71	—1	17	21	—1	17	71	1	8
22	1	10	72	0		22	—1	16	72	0	
23	—1	9	73	1	18	23	0		73	—1	7
24	0		74	1	19	24	0		74	—1	6
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	8	76	0		26	—1	15	76	0	
27	1	9	77	—1	18	27	1	16	77	0	
28	0		78	0		28	0		78	—1	5
29	1	10	79	—1	17	29	—1	15	79	1	6
4830	—1	9	4880	0		4930	1	16	4980	0	
31	—1	8	81	1	18	31	—1	15	81	1	7
32	0		82	1	19	32	0		82	—1	6
33	0		83	1	20	33	—1	14	83	—1	5
34	1	9	84	0		34	1	15	84	0	
35	1	10	85	1	21	35	1	16	85	1	6
36	0		86	—1	20	36	0		86	0	
37	1	11	87	0		37	—1	15	87	—1	5
38	—1	10	88	0		38	—1	14	88	0	
39	1	11	89	—1	19	39	1	15	89	1	6
4840	0		4890	1	20	4940	0		4990	—1	5
41	1	12	91	1	21	41	0		91	—1	4
42	0		92	0		42	—1	14	92	0	
43	1	13	93	—1	20	43	—1	13	93	—1	3
44	0		94	1	21	44	0		94	—1	2
45	1	14	95	—1	20	45	—1	12	95	0	
46	1	15	96	0		46	1	13	96	0	
47	1	16	97	1	21	47	—1	12	97	1	3
48	0		98	—1	20	48	0		98	0	
49	1	17	99	—1	19	49	0		99	—1	2
4850	0		4900	0		4950	0		5000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
5001	1	3	5051	−1	−5	5101	−1	−2	5151	−1	−3
02	−1	2	52	0		02	1	−1	52	0	
03	−1	1	53	1	−4	03	0		53	−1	−4
04	0		54	0		04	0		54	−1	−5
05	1	2	55	−1	−5	05	1	0	55	1	−4
06	1	3	56	0		06	1	1	56	0	
07	1	4	57	1	−4	07	−1	0	57	0	
08	0		58	0		08	0		58	1	−3
09	−1	3	59	−1	−5	09	−1	−1	59	−1	−4
5010	1	4	5060	0		5110	1	0	5160	0	
11	−1	3	61	−1	−6	11	1	1	61	1	−3
12	0		62	1	−5	12	0		62	−1	−4
13	0		63	1	−4	13	−1	0	63	1	−3
14	−1	2	64	0		14	1	1	64	0	
15	−1	1	65	1	−3	15	1	2	65	1	−2
16	0		66	−1	−4	16	0		66	0	
17	1	2	67	0		17	−1	1	67	−1	−3
18	−1	1	68	0		18	−1	0	68	0	
19	−1	0	69	1	−3	19	−1	−1	69	1	−2
5020	0		5070	0		5120	0		5170	1	−1
21	−1	−1	71	1	−2	21	0		71	−1	−2
22	0		72	0		22	−1	−2	72	0	
23	−1	−2	73	−1	−3	23	1	−1	73	1	−1
24	0		74	−1	−4	24	0		74	−1	−2
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	−3	76	0		26	−1	−2	76	0	
27	1	−2	77	−1	−5	27	1	−1	77	1	−1
28	0		78	1	−4	28	0		78	−1	−2
29	1	−1	79	1	−3	29	1	0	79	−1	−3
5030	−1	−2	5080	0		5130	0		5180	0	
31	0		81	−1	−4	31	1	1	81	−1	−4
32	0		82	0		32	0		82	1	−3
33	1	−1	83	−1	−5	33	−1	0	83	1	−2
34	−1	−2	84	0		34	−1	−1	84	0	
35	−1	−3	85	0		35	−1	−2	85	−1	−3
36	0		86	1	−4	36	0		86	1	−2
37	−1	−4	87	−1	−5	37	1	−1	87	1	−1
38	−1	−5	88	0		38	−1	−2	88	0	
39	−1	−6	89	1	−4	39	0		89	−1	−2
5040	0		5090	−1	−5	5140	0		5190	1	−1
41	0		91	1	−4	41	1	−1	91	1	0
42	1	−5	92	0		42	−1	−2	92	0	
43	0		93	1	−3	43	1	−1	93	0	
44	0		94	0		44	0		94	0	
45	1	−4	95	1	−2	45	0		95	1	1
46	0		96	0		46	−1	−2	96	0	
47	0		97	1	−1	47	−1	−3	97	−1	0
48	0		98	1	0	48	0		98	−1	−1
49	0		99	−1	−1	49	1	−2	99	1	0
5050	0		5100	0		5150	0		5200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
5201	1	1	5251	1	1	5301	0	—2	5351	—1	2
02	0		52	0		02	—1	—3	52	0	
03	0		53	—1	0	03	—1	—4	53	1	3
04	0		54	—1	—1	04	0		54	1	4
05	—1	0	55	1	0	05	1	—3	55	0	
06	—1	—1	56	0		06	—1	—4	56	0	
07	1	0	57	1	1	07	—1	—5	57	1	5
08	0		58	—1	0	08	0		58	1	6
09	—1	—1	59	1	1	09	—1	—6	59	1	7
5210	—1	—2	5260	0		5310	0		5360	0	
11	0		61	—1	0	11	1	—5	61	1	8
12	0		62	—1	—1	12	0		62	—1	7
13	1	—1	63	1	0	13	1	—4	63	1	8
14	1	0	64	0		14	1	—3	64	0	
15	—1	—1	65	0		15	1	—2	65	—1	7
16	0		66	1	1	16	0		66	1	8
17	—1	—2	67	1	2	17	1	—1	67	1	9
18	1	—1	68	0		18	1	0	68	0	
19	1	0	69	1	3	19	0		69	—1	8
5220	0		5270	1	4	5320	0		5370	1	9
21	1	1	71	—1	3	21	1	1	71	1	10
22	—1	0	72	0		22	—1	0	72	0	
23	1	1	73	—1	2	23	—1	—1	73	0	
24	0		74	0		24	0		74	1	11
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	2	76	0		26	1	0	76	0	
27	—1	1	77	1	3	27	1	1	77	1	12
28	0		78	1	4	28	0		78	1	13
29	0		79	—1	3	29	0		79	—1	12
5230	—1	0	5280	0		5330	1	2	5380	0	
31	—1	—1	81	—1	2	31	1	3	81	—1	11
32	0		82	—1	1	32	0		82	0	
33	—1	—2	83	0		33	—1	2	83	1	12
34	1	—1	84	0		34	1	3	84	0	
35	—1	—2	85	—1	0	35	—1	2	85	—1	11
36	0		86	—1	—1	36	0		86	1	12
37	—1	—3	87	1	0	37	0		87	—1	11
38	0		88	0		38	—1	1	88	0	
39	0		89	—1	—1	39	1	2	89	1	12
5240	0		5290	0		5340	0		5390	0	
41	1	—2	91	—1	—2	41	0		91	0	
42	1	—1	92	0		42	1	3	92	0	
43	0		93	1	—1	43	—1	2	93	—1	11
44	0		94	1	0	44	0		94	1	12
45	1	0	95	—1	—1	45	1	3	95	—1	11
46	—1	—1	96	0		46	0		96	0	
47	0		97	—1	—2	47	—1	2	97	—1	10
48	0		98	—1	—3	48	0		98	1	11
49	1	0	99	1	—2	49	1	3	99	—1	10
5250	0		5300	0		5350	0		5400	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
5401	1	11	5451	—1	7	5501	—1	9	5551	—1	8
02	—1	10	52	0		02	1	10	52	0	
03	1	11	53	—1	6	03	—1	9	53	0	
04	0		54	0		04	0		54	1	9
05	—1	10	55	1	7	05	—1	8	55	—1	8
06	1	11	56	0		06	1	9	56	0	
07	—1	10	57	—1	6	07	—1	8	57	—1	7
08	0		58	1	7	08	0		58	—1	6
09	0		59	1	8	09	1	9	59	—1	5
5410	—1	9	5460	0		5510	1	10	5560	0	
11	1	10	61	1	9	11	—1	9	61	1	6
12	0		62	1	10	12	0		62	0	
13	—1	9	63	0		13	1	10	63	—1	5
14	1	10	64	0		14	—1	9	64	0	
15	0		65	1	11	15	1	10	65	1	6
16	0		66	—1	10	16	0		66	0	
17	—1	9	67	—1	9	17	0		67	1	7
18	0		68	0		18	—1	9	68	0	
19	—1	8	69	1	10	19	—1	8	69	—1	6
5420	0		5470	—1	9	5520	0		5570	—1	5
21	—1	7	71	—1	8	21	—1	7	71	0	
22	1	8	72	0		22	—1	6	72	0	
23	—1	7	73	1	9	23	—1	5	73	—1	4
24	0		74	1	10	24	0		74	—1	3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	8	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	—1	9	27	—1	4	77	0	
28	0		78	1	10	28	0		78	1	4
29	1	9	79	—1	9	29	—1	3	79	1	5
5430	1	10	5480	0		5530	1	4	5580	0	
31	—1	9	81	0		31	—1	3	81	—1	4
32	0		82	1	10	32	0		82	1	5
33	1	10	83	—1	9	33	1	4	83	1	6
34	1	11	84	0		34	1	5	84	0	
35	1	12	85	1	10	35	0		85	1	7
36	0		86	—1	9	36	0		86	0	
37	—1	11	87	—1	8	37	0		87	1	8
38	1	12	88	0		38	1	6	88	0	
39	0		89	1	9	39	1	7	89	0	
5440	0		5490	0		5540	0		5590	1	9
41	—1	11	91	0		41	1	8	91	—1	8
42	—1	10	92	0		42	—1	7	92	0	
43	—1	9	93	1	10	43	1	8	93	—1	7
44	0		94	—1	9	44	0		94	1	8
45	0		95	—1	8	45	1	9	95	—1	7
46	—1	8	96	0		46	—1	8	96	0	
47	1	9	97	1	9	47	0		97	1	8
48	0		98	1	10	48	0		98	0	
49	—1	8	99	0		49	1	9	99	1	9
5450	0		5500	0		5550	0		5600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
5601	1	10	5651	—1	13	5701	—1	6	5751	0	2
02	1	11	52	0		02	1	7	52	0	
03	1	12	53	—1	12	03	1	8	53	1	3
04	0		54	—1	11	04	0		54	1	4
05	—1	11	55	1	12	05	—1	7	55	1	5
06	1	12	56	0		06	0		56	0	
07	0		57	—1	11	07	1	8	57	—1	4
08	0		58	1	12	08	0		58	1	5
09	1	13	59	—1	11	09	—1	7	59	1	6
5610	—1	12	5660	0		5710	—1	6	5760	0	
11	1	13	61	0		11	—1	5	61	1	7
12	0		62	—1	10	12	0		62	—1	6
13	1	14	63	1	11	13	1	6	63	—1	5
14	—1	13	64	0		14	1	7	64	0	
15	1	14	65	—1	10	15	0		65	1	6
16	0		66	1	11	16	0		66	0	
17	1	15	67	1	12	17	—1	6	67	1	7
18	0		68	0		18	—1	5	68	0	
19	1	16	69	—1	11	19	—1	4	69	0	
5620	0		5670	0		5720	0		5770	—1	6
21	—1	15	71	1	12	21	1	5	71	1	7
22	—1	14	72	0		22	1	6	72	0	
23	—1	13	73	—1	11	23	1	7	73	1	8
24	0		74	1	12	24	0		74	1	9
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	12	76	0		26	—1	6	76	0	
27	1	13	77	1	13	27	—1	5	77	1	10
28	0		78	—1	12	28	0		78	0	
29	1	14	79	0		29	1	6	79	—1	9
5630	—1	13	5680	0		5730	1	7	5780	0	
31	1	14	81	—1	11	31	1	8	81	—1	8
32	0		82	—1	10	32	0		82	0	
33	1	15	83	—1	9	33	0		83	—1	7
34	0		84	0		34	—1	7	84	0	
35	0		85	—1	8	35	—1	6	85	—1	6
36	0		86	1	9	36	0		86	—1	5
37	1	16	87	0		37	—1	5	87	0	
38	1	17	88	0		38	—1	4	88	0	
39	—1	16	89	—1	8	39	1	5	89	1	6
5640	0		5690	—1	7	5740	0		5790	1	7
41	—1	15	91	—1	6	41	—1	4	91	—1	6
42	1	16	92	0		42	0		92	0	
43	0		93	—1	5	43	—1	3	93	1	7
44	0		94	1	6	44	0		94	1	8
45	1	17	95	—1	5	45	—1	2	95	—1	7
46	—1	16	96	0		46	0		96	0	
47	—1	15	97	0		47	1	3	97	—1	6
48	0		98	1	6	48	0		98	—1	5
49	—1	14	99	1	7	49	—1	2	99	1	6
5650	0		5700	0		5750	0		5800	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
5801	-1	5	5851	-1	-1	5901	-1	-10	5951	1	-2
02	-1	4	52	0		02	-1	-11	52	0	
03	1	5	53	1	0	03	-1	-12	53	-1	-3
04	0		54	1	1	04	0		54	-1	-4
05	0		55	1	2	05	1	-11	55	-1	-5
06	1	6	56	0		06	1	-10	56	0	
07	-1	5	57	-1	1	07	-1	-11	57	-1	-6
08	0		58	-1	0	08	0		58	0	
09	1	6	59	0		09	1	-10	59	1	-5
5810	1	7	5860	0		5910	1	-9	5960	0	
11	-1	6	61	-1	-1	11	1	-8	61	1	-4
12	0		62	-1	-2	12	0		62	-1	-5
13	-1	5	63	-1	-3	13	0		63	1	-4
14	0		64	0		14	1	-7	64	0	
15	1	6	65	1	-2	15	0		65	1	-3
16	0		66	-1	-3	16	0		66	-1	-4
17	-1	5	67	-1	-4	17	1	-6	67	0	
18	1	6	68	0		18	-1	-7	68	0	
19	0		69	-1	-5	19	1	-6	69	1	-3
5820	0		5870	-1	-6	5920	0		5970	1	-2
21	-1	5	71	-1	-7	21	1	-5	71	1	-1
22	-1	4	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	1	-6	23	-1	-6	73	-1	-2
24	0		74	1	-5	24	0		74	-1	-3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	-1	3	76	0		26	1	-5	76	0	
27	-1	2	77	0		27	-1	-6	77	1	-2
28	0		78	1	-4	28	0		78	0	
29	-1	1	79	-1	-5	29	0		79	1	-1
5830	1	2	5880	0		5930	-1	-7	5980	0	
31	0		81	-1	-6	31	0		81	-1	-2
32	0		82	-1	-7	32	0		82	-1	-3
33	1	3	83	-1	-8	33	1	-6	83	1	-2
34	1	4	84	0		34	1	-5	84	0	
35	-1	3	85	-1	-9	35	1	-4	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	-1	-3
37	1	4	87	0		37	1	-3	87	-1	-4
38	1	5	88	0		38	1	-2	88	0	
39	-1	4	89	-1	-10	39	-1	-3	89	1	-3
5840	0		5890	1	-9	5940	0		5990	-1	-4
41	0		91	1	-8	41	1	-2	91	1	-3
42	-1	3	92	0		42	1	-1	92	0	
43	-1	2	93	1	-7	43	-1	-2	93	1	-2
44	0		94	-1	-8	44	0		94	0	
45	-1	1	95	0		45	-1	-3	95	-1	-3
46	-1	0	96	0		46	-1	-4	96	0	
47	1	1	97	-1	-9	47	1	-3	97	1	-2
48	0		98	-1	-10	48	0		98	1	-1
49	-1	0	99	1	-9	49	0		99	1	0
5850	0		5900	0		5950	0		6000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
6001	1	1	6051	1	6	6101	—1	—6	6151	—1	— 8
02	1	2	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	—1	5	03	1	—5	53	—1	— 9
04	0		54	—1	4	04	0		54	—1	—10
05	1	3	55	—1	3	05	1	—4	55	1	— 9
06	—1	2	56	0		06	—1	—5	56	0	
07	—1	1	57	0		07	1	—4	57	1	— 8
08	0		58	—1	2	08	0		58	1	— 7
09	1	2	59	1	3	09	1	—3	59	1	— 6
6010	—1	1	6060	0		6110	1	—2	6160	0	
11	—1	0	61	—1	2	11	0		61	1	— 5
12	0		62	—1	1	12	0		62	1	— 4
13	1	1	63	—1	0	13	—1	—3	63	—1	— 5
14	—1	0	64	0		14	—1	—4	64	0	
15	—1	—1	65	1	1	15	1	—3	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	1	— 4
17	1	0	67	—1	0	17	1	—2	67	1	— 3
18	1	1	68	0		18	1	—1	68	0	
19	1	2	69	0		19	1	0	69	1	— 2
6020	0		6070	—1	—1	6120	0		6170	—1	— 3
21	0		71	1	0	21	—1	—1	71	0	
22	1	3	72	0		22	1	0	72	0	
23	1	4	73	—1	—1	23	—1	—1	73	—1	— 4
24	0		74	1	0	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	3	76	0		26	—1	—2	76	0	
27	0		77	1	1	27	1	—1	77	—1	— 5
28	0		78	—1	0	28	0		78	1	— 4
29	—1	2	79	—1	—1	29	0		79	1	— 3
6030	0		6080	0		6130	—1	—2	6180	0	
31	1	3	81	1	0	31	—1	—3	81	1	— 2
32	0		82	1	1	32	0		82	—1	— 3
33	1	4	83	—1	0	33	—1	—4	83	0	
34	—1	3	84	0		34	1	—3	84	0	
35	—1	2	85	1	1	35	—1	—4	85	1	— 2
36	0		86	—1	0	36	0		86	—1	— 3
37	—1	1	87	1	1	37	0		87	1	— 2
38	1	2	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	—1	0	39	1	—3	89	1	— 1
6040	0		6090	—1	—1	6140	0		6190	—1	— 2
41	1	3	91	—1	—2	41	—1	—4	91	1	— 1
42	1	4	92	0		42	—1	—5	92	0	
43	—1	3	93	0		43	—1	—6	93	1	0
44	0		94	—1	—3	44	0		94	—1	— 1
45	1	4	95	—1	—4	45	1	—5	95	1	0
46	1	5	96	0		46	—1	—6	96	0	
47	—1	4	97	—1	—5	47	0		97	—1	— 1
48	0		98	1	—4	48	0		98	—1	— 2
49	1	5	99	—1	—5	49	—1	—7	99	—1	— 3
6050	0		6100	0		6150	0		6200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
6201	0	−3	6251	−1	−7	6301	−1	−14	6351	−1	−17
02	−1	−4	52	0		02	−1	−15	52	0	
03	−1	−5	53	0		03	−1	−16	53	−1	−18
04	0		54	−1	−8	04	0		54	0	
05	−1	−6	55	0		05	−1	−17	55	−1	−19
06	−1	−7	56	0		06	−1	−18	56	0	
07	1	−6	57	−1	−9	07	−1	−19	57	−1	−20
08	0		58	1	−8	08	0		58	0	
09	1	−5	59	1	−7	09	0		59	−1	−21
6210	0		6260	0		6310	−1	−20	6360	0	
11	−1	−6	61	1	−6	11	−1	−21	61	−1	−22
12	0		62	−1	−7	12	0		62	1	−21
13	−1	−7	63	−1	−8	13	1	−20	63	0	
14	−1	−8	64	0		14	1	−19	64	0	
15	−1	−9	65	−1	−9	15	−1	−20	65	−1	−22
16	0		66	−1	−10	16	0		66	−1	−23
17	−1	−10	67	1	−9	17	−1	−21	67	−1	−24
18	1	−9	68	0		18	0		68	0	
19	0		69	−1	−10	19	1	−20	69	−1	−25
6220	0		6270	−1	−11	6320	0		6370	0	
21	−1	−10	71	−1	−12	21	0		71	1	−24
22	1	−9	72	0		22	−1	−21	72	0	
23	0		73	0		23	−1	−22	73	−1	−25
24	0		74	1	−11	24	0		74	1	−24
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	−10	76	0		26	1	−21	76	0	
27	1	−9	77	−1	−12	27	0		77	1	−23
28	0		78	−1	−13	28	0		78	−1	−24
29	−1	−10	79	1	−12	29	−1	−22	79	−1	−25
6230	1	−9	6280	0		6330	1	−21	6380	0	
31	−1	−10	81	1	−11	31	1	−20	81	0	
32	0		82	0		32	0		82	1	−24
33	1	−9	83	1	−10	33	1	−19	83	1	−23
34	−1	−10	84	0		34	1	−18	84	0	
35	−1	−11	85	−1	−11	35	−1	−19	85	1	−22
36	0		86	−1	−12	36	0		86	−1	−23
37	0		87	−1	−13	37	−1	−20	87	1	−22
38	1	−10	88	0		38	1	−19	88	0	
39	1	−9	89	1	−12	39	1	−18	89	−1	−23
6240	0		6290	1	−11	6340	0		6390	0	
41	0		91	0		41	1	−17	91	−1	−24
42	1	−8	92	0		42	1	−16	92	0	
43	1	−7	93	−1	−12	43	−1	−17	93	1	−23
44	0		94	−1	−13	44	0		94	−1	−24
45	1	−6	95	1	−12	45	0		95	1	−23
46	0		96	0		46	−1	−18	96	0	
47	−1	−7	97	1	−11	47	1	−17	97	−1	−24
48	0		98	−1	−12	48	0		98	−1	−25
49	1	−6	99	−1	−13	49	1	−16	99	0	
6250	0		6300	0		6350	0		6400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
6401	1	−24	6451	−1	−16	6501	−1	−17	6551	−1	−13
02	1	−23	52	0		02	1	−16	52	0	
03	1	−22	53	0		03	1	−15	53	−1	−14
04	0		54	−1	−17	04	0		54	−1	−15
05	1	−21	55	1	−16	05	1	−14	55	1	−14
06	1	−20	56	0		06	1	−13	56	0	
07	1	−19	57	1	−15	07	0		57	1	−13
08	0		58	1	−14	08	0		58	−1	−14
09	−1	−20	59	1	−13	09	1	−12	59	1	−13
6410	−1	−21	6460	0		6510	−1	−13	6560	0	
11	1	−20	61	−1	−14	11	1	−12	61	0	
12	0		62	0		12	0		62	−1	−14
13	0		63	1	−13	13	−1	−13	63	−1	−15
14	−1	−21	64	0		14	1	−12	64	0	
15	1	−20	65	−1	−14	15	1	−11	65	−1	−16
16	0		66	−1	−15	16	0		66	0	
17	0		67	1	−14	17	0		67	−1	−17
18	1	−19	68	0		18	1	−10	68	0	
19	0		69	−1	−15	19	−1	−11	69	−1	−18
6420	0		6470	−1	−16	6520	0		6570	0	
21	−1	−20	71	0		21	−1	−12	71	−1	−19
22	0		72	0		22	−1	−13	72	0	
23	1	−19	73	−1	−17	23	1	−12	73	−1	−20
24	0		74	1	−16	24	0		74	−1	−21
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	−1	−13	76	0	
27	−1	−20	77	−1	−17	27	1	−12	77	−1	−22
28	0		78	−1	−18	28	0		78	1	−21
29	1	−19	79	−1	−19	29	−1	−13	79	0	
6430	−1	−20	6480	0		6530	−1	−14	6580	0	
31	1	−19	81	−1	−20	31	−1	−15	81	−1	−22
32	0		82	−1	−21	32	0		82	−1	−23
33	1	−18	83	1	−20	33	1	−14	83	1	−22
34	1	−17	84	0		34	0		84	0	
35	0		85	1	−19	35	1	−13	85	−1	−23
36	0		86	1	−18	36	0		86	−1	−24
37	1	−16	87	1	−17	37	1	−12	87	1	−23
38	1	−15	88	0		38	−1	−13	88	0	
39	1	−14	89	0		39	1	−12	89	1	−22
6440	0		6490	1	−16	6540	0		6590	−1	−23
41	−1	−15	91	−1	−17	41	1	−11	91	0	
42	1	−14	92	0		42	1	−10	92	0	
43	1	−13	93	1	−16	43	0		93	1	−22
44	0		94	−1	−17	44	0		94	1	−21
45	1	−12	95	−1	−18	45	1	−9	95	1	−20
46	−1	−13	96	0		46	−1	−10	96	0	
47	−1	−14	97	1	−17	47	−1	−11	97	0	
48	0		98	0		48	0		98	1	−19
49	−1	−15	99	1	−16	49	−1	−12	99	−1	−20
6450	0		6500	0		6550	0		6600	0	

n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)	n	μ(n)	σ(n)
6601	−1	−21	6651	0	−12	6701	−1	−16	6751	1	−14
02	1	−20	52	0		02	−1	−17	52	0	
03	−1	−21	53	−1	−13	03	−1	−18	53	1	−13
04	0		54	−1	−14	04	0		54	−1	−14
05	1	−20	55	0		05	0		55	−1	−15
06	0		56	0		06	−1	−19	56	0	
07	−1	−21	57	−1	−15	07	1	−18	57	1	−14
08	0		58	1	−14	08	0		58	−1	−15
09	1	−20	59	−1	−15	09	−1	−19	59	0	
6610	−1	−21	6660	0		6710	1	−18	6760	0	
11	1	−20	61	−1	−16	11	1	−17	61	−1	−16
12	0		62	1	−15	12	0		62	0	
13	1	−19	63	1	−14	13	0		63	−1	−17
14	1	−18	64	0		14	0		64	0	
15	0		65	−1	−15	15	−1	−18	65	1	−16
16	0		66	1	−14	16	0		66	−1	−17
17	1	−17	67	1	−13	17	1	−17	67	1	−16
18	−1	−18	68	0		18	1	−16	68	0	
19	−1	−19	69	0		19	−1	−17	69	1	−15
6620	0		6670	1	−12	6720	0		6770	−1	−16
21	1	−18	71	1	−11	21	−1	−18	71	−1	−17
22	1	−17	72	0		22	1	−17	72	0	
23	1	−16	73	−1	−12	23	0		73	1	−16
24	0		74	−1	−13	24	0		74	−1	−17
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−15	76	0		26	1	−16	76	0	
27	0		77	1	−12	27	0		77	0	
28	0		78	0		28	0		78	1	−16
29	1	−14	79	−1	−13	29	1	−15	79	−1	−17
6630	−1	−15	6680	0		6730	−1	−16	6780	0	
31	1	−14	81	−1	−14	31	1	−15	81	−1	−18
32	0		82	−1	−15	32	0		82	1	−17
33	0		83	1	−14	33	−1	−16	83	1	−16
34	−1	−15	84	0		34	1	−15	84	0	
35	1	−14	85	−1	−15	35	−1	−16	85	−1	−17
36	0		86	1	−14	36	0		86	0	
37	−1	−15	87	0		37	−1	−17	87	1	−16
38	1	−14	88	0		38	−1	−18	88	0	
39	1	−13	89	−1	−15	39	1	−17	89	−1	−17
6640	0		6690	1	−14	6740	0		6790	1	−16
41	1	−12	91	−1	−15	41	0		91	−1	−17
42	0		92	0		42	1	−16	92	0	
43	−1	−13	93	−1	−16	43	1	−15	93	−1	−18
44	0		94	1	−15	44	0		94	−1	−19
45	−1	−14	95	−1	−16	45	−1	−16	95	0	
46	1	−13	96	0		46	1	−15	96	0	
47	0		97	1	−15	47	−1	−16	97	1	−18
48	0		98	−1	−16	48	0		98	1	−17
49	1	−12	99	1	−15	49	1	−15	99	1	−16
6650	0		6700	0		6750	0		6800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
6801	1	−15	6851	−1	−15	6901	1	−17	6951	−1	−17
02	−1	−16	52	0		02	1	−16	52	0	
03	−1	−17	53	−1	−16	03	0		53	1	−16
04	0		54	−1	−17	04	0		54	1	−15
05	1	−16	55	−1	−18	05	1	−15	55	−1	−16
06	−1	−17	56	0		06	−1	−16	56	0	
07	1	−16	57	−1	−19	07	−1	−17	57	0	
08	0		58	0		08	0		58	0	
09	1	−15	59	0		09	0		59	−1	−17
6810	1	−14	6860	0		6910	−1	−18	6960	0	
11	0		61	1	−18	11	−1	−19	61	−1	−18
12	0		62	−1	−19	12	0		62	0	
13	0		63	−1	−20	13	1	−18	63	−1	−19
14	1	−13	64	0		14	1	−17	64	0	
15	−1	−14	65	1	−19	15	−1	−18	65	−1	−20
16	0		66	1	−18	16	0		66	0	
17	1	−13	67	0		17	−1	−19	67	−1	−21
18	−1	−14	68	0		18	−1	−20	68	0	
19	1	−13	69	−1	−19	19	−1	−21	69	−1	−22
6820	0		6870	1	−18	6920	0		6970	1	−21
21	1	−12	71	−1	−19	21	0		71	−1	−22
22	0		72	0		22	1	−20	72	0	
23	−1	−13	73	−1	−20	23	−1	−21	73	1	−21
24	0		74	−1	−21	24	0		74	−1	−22
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−12	76	0		26	1	−20	76	0	
27	−1	−13	77	0		27	1	−19	77	−1	−23
28	0		78	−1	−22	28	0		78	−1	−24
29	−1	−14	79	1	−21	29	0		79	1	−23
6830	−1	−15	6880	0		6930	0		6980	0	
31	0		81	1	−20	31	1	−18	81	−1	−24
32	0		82	1	−19	32	0		82	1	−23
33	−1	−16	83	−1	−20	33	1	−17	83	−1	−24
34	1	−15	84	0		34	1	−16	84	0	
35	1	−14	85	0		35	−1	−17	85	−1	−25
36	0		86	−1	−21	36	0		86	−1	−26
37	−1	−15	87	1	−20	37	1	−16	87	−1	−27
38	−1	−16	88	0		38	1	−15	88	0	
39	1	−15	89	0		39	0		89	1	−26
6840	0		6890	1	−19	6940	0		6990	1	−25
41	−1	−16	91	1	−18	41	1	−14	91	−1	−26
42	−1	−17	92	0		42	1	−13	92	0	
43	1	−16	93	1	−17	43	1	−12	93	0	
44	0		94	0		44	0		94	−1	−27
45	0		95	−1	−18	45	−1	−13	95	1	−26
46	1	−15	96	0		46	−1	−14	96	0	
47	1	−14	97	0		47	−1	−15	97	−1	−27
48	0		98	1	−17	48	0		98	1	−26
49	0		99	−1	−18	49	−1	−16	99	1	−25
6850	0		6900	0		6950	0		7000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
7001	−1	−26	7051	1	−25	7101	0	−14	7151	−1	−6
02	0		52	0		02	−1	−15	52	0	
03	1	−25	53	1	−24	03	−1	−16	53	1	−5
04	0		54	1	−23	04	0		54	0	
05	−1	−26	55	−1	−24	05	0		55	0	
06	−1	−27	56	0		06	1	−15	56	0	
07	0		57	−1	−25	07	−1	−16	57	1	−4
08	0		58	1	−24	08	0		58	−1	−5
09	1	−26	59	−1	−25	09	−1	−17	59	−1	−6
7010	−1	−27	7060	0		7110	0		7160	0	
11	0		61	1	−24	11	1	−16	61	1	−5
12	0		62	1	−23	12	0		62	1	−4
13	−1	−28	63	1	−22	13	1	−15	63	−1	−5
14	1	−27	64	0		14	1	−14	64	0	
15	−1	−28	65	0		15	1	−13	65	1	−4
16	0		66	1	−21	16	0		66	1	−3
17	1	−27	67	1	−20	17	1	−12	67	1	−2
18	0		68	0		18	1	−11	68	0	
19	−1	−28	69	−1	−21	19	0		69	1	−1
7020	0		7070	1	−20	7120	0		7170	1	0
21	−1	−29	71	1	−19	21	−1	−12	71	1	1
22	1	−28	72	0		22	−1	−13	72	0	
23	1	−27	73	1	−18	23	1	−12	73	0	
24	0		74	0		24	0		74	−1	0
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	−28	76	0		26	−1	−13	76	0	
27	−1	−29	77	−1	−19	27	−1	−14	77	−1	−1
28	0		78	1	−18	28	0		78	−1	−2
29	0		79	−1	−19	29	−1	−15	79	1	−1
7030	1	−28	7080	0		7130	1	−14	7180	0	
31	1	−27	81	1	−18	31	1	−13	81	1	0
32	0		82	1	−17	32	0		82	0	
33	1	−26	83	0		33	1	−12	83	1	1
34	1	−25	84	0		34	1	−11	84	0	
35	1	−24	85	−1	−18	35	1	−10	85	−1	0
36	0		86	−1	−19	36	0		86	1	1
37	1	−23	87	1	−18	37	0		87	−1	0
38	0		88	0		38	−1	−11	88	0	
39	−1	−24	89	−1	−19	39	0		89	−1	−1
7040	0		7090	−1	−20	7140	0		7190	−1	−2
41	1	−23	91	1	−19	41	1	−10	91	0	
42	−1	−24	92	0		42	1	−9	92	0	
43	−1	−25	93	1	−18	43	1	−8	93	−1	−3
44	0		94	1	−17	44	0		94	1	−2
45	1	−24	95	1	−16	45	1	−7	95	1	−1
46	−1	−25	96	0		46	0		96	0	
47	0		97	1	−15	47	1	−6	97	1	0
48	0		98	0		48	0		98	−1	−1
49	−1	−26	99	1	−14	49	1	−5	99	1	0
7050	0		7100	0		7150	0		7200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
7201	1	1	7251	1	4	7301	0	7	7351	−1	4
02	−1	0	52	0		02	−1	6	52	0	
03	0		53	−1	3	03	1	7	53	0	
04	0		54	0		04	0		54	1	5
05	−1	−1	55	1	4	05	−1	6	55	1	6
06	−1	−2	56	0		06	−1	5	56	0	
07	−1	−3	57	−1	3	07	−1	4	57	1	7
08	0		58	−1	2	08	0		58	−1	6
09	0		59	−1	1	09	−1	3	59	−1	5
7210	1	−2	7260	0		7310	1	4	7360	0	
11	−1	−3	61	1	2	11	1	5	61	1	6
12	0		62	1	3	12	0		62	0	
13	−1	−4	63	0		13	1	6	63	1	7
14	1	−3	64	0		14	1	7	64	0	
15	1	−2	65	1	4	15	1	8	65	−1	6
16	0		66	1	5	16	0		66	−1	5
17	1	−1	67	0		17	0		67	1	6
18	0		68	0		18	1	9	68	0	
19	−1	−2	69	1	6	19	1	10	69	−1	5
7220	0		7270	−1	5	7320	0		7370	1	6
21	−1	−3	71	1	6	21	−1	9	71	0	
22	−1	−4	72	0		22	−1	8	72	0	
23	1	−3	73	1	7	23	1	9	73	1	7
24	0		74	1	8	24	0		74	−1	6
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−2	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	1	9	27	1	10	77	1	7
28	0		78	−1	8	28	0		78	1	8
29	−1	−3	79	1	9	29	−1	9	79	1	9
7230	1	−2	7280	0		7330	−1	8	7380	0	
31	1	−1	81	0		31	−1	7	81	0	
32	0		82	−1	8	32	0		82	1	10
33	1	0	83	−1	7	33	−1	6	83	−1	9
34	1	1	84	0		34	−1	5	84	0	
35	1	2	85	−1	6	35	0		85	−1	8
36	0		86	1	7	36	0		86	−1	7
37	−1	1	87	−1	6	37	−1	4	87	1	8
38	1	2	88	0		38	−1	3	88	0	
39	−1	1	89	1	7	39	1	4	89	0	
7240	0		7290	0		7340	0		7390	−1	7
41	1	2	91	1	8	41	1	5	91	1	8
42	1	3	92	0		42	1	6	92	0	
43	−1	2	93	1	9	43	1	7	93	−1	7
44	0		94	−1	8	44	0		94	1	8
45	0		95	1	9	45	−1	6	95	1	9
46	1	3	96	0		46	1	7	96	0	
47	−1	2	97	−1	8	47	−1	6	97	1	10
48	0		98	−1	7	48	0		98	0	
49	1	3	99	0		49	−1	5	99	0	
7250	0		7300	0		7350	0		7400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
7401	1	11	7451	—1	16	7501	1	16	7551	0	8
02	1	12	52	0		02	0		52	0	
03	1	13	53	1	17	03	—1	15	53	—1	7
04	0		54	1	18	04	0		54	—1	6
05	1	14	55	1	19	05	—1	14	55	1	7
06	0		56	0		06	0		56	0	
07	0		57	—1	18	07	—1	13	57	—1	6
08	0		58	1	19	08	0		58	1	7
09	1	15	59	—1	18	09	1	14	59	—1	6
7410	—1	14	7460	0		7510	—1	13	7560	0	
11	—1	13	61	0		11	—1	12	61	—1	5
12	0		62	1	19	12	0		62	—1	4
13	—1	12	63	1	20	13	1	13	63	1	5
14	—1	11	64	0		14	0		64	0	
15	1	12	65	1	21	15	0		65	—1	4
16	0		66	1	22	16	0		66	1	5
17	—1	11	67	—1	21	17	—1	12	67	—1	4
18	1	12	68	0		18	1	13	68	0	
19	1	13	69	—1	20	19	1	14	69	0	
7420	0		7470	0		7520	0		7570	—1	3
21	1	14	71	1	21	21	—1	13	71	1	4
22	—1	13	72	0		22	1	14	72	0	
23	1	14	73	—1	20	23	—1	13	73	—1	3
24	0		74	—1	19	24	0		74	—1	2
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	13	76	0		26	—1	12	76	0	
27	1	14	77	—1	18	27	—1	11	77	—1	1
28	0		78	1	1	28	0		78	0	
29	—1	13	79	0		29	—1	10	79	—1	0
7430	—1	12	7480	0		7530	1	11	7580	0	
31	1	13	81	—1	18	31	1	12	81	0	
32	0		82	1	19	32	0		82	—1	—1
33	—1	12	83	1	20	33	0		83	—1	—2
34	0		84	0		34	1	13	84	0	
35	1	13	85	—1	19	35	—1	12	85	—1	—3
36	0		86	—1	18	36	0		86	1	—2
37	—1	12	87	—1	17	37	—1	11	87	0	
38	1	13	88	0		38	1	12	88	0	
39	1	14	89	—1	16	39	—1	11	89	—1	—3
7440	0		7490	1	17	7540	0		7590	—1	—4
41	1	15	91	—1	16	41	—1	10	91	—1	—5
42	0		92	0		42	0		92	0	
43	0		93	1	17	43	1	11	93	1	—4
44	0		94	—1	16	44	0		94	1	—3
45	1	16	95	1	17	45	—1	10	95	0	
46	1	17	96	0		46	0		96	0	
47	1	18	97	0		47	—1	9	97	1	—2
48	0		98	—1	16	48	0		98	—1	—3
49	—1	17	99	—1	15	49	—1	8	99	—1	—4
7450	0		7500	0		7550	0		7600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
7601	1	-3	7651	1	3	7701	-1	-6	7751	1	-5
02	1	-2	52	0		02	1	-5	52	0	
03	-1	-3	53	1	4	03	-1	-6	53	-1	-6
04	0		54	-1	3	04	0		54	1	-5
05	0		55	1	4	05	-1	-7	55	1	-4
06	1	-2	56	0		06	1	-6	56	0	
07	-1	-3	57	-1	3	07	-1	-7	57	-1	-5
08	0		58	-1	2	08	0		58	0	
09	1	-2	59	0		09	1	-6	59	-1	-6
7610	-1	-3	7660	0		7710	1	-5	7760	0	
11	-1	-4	61	1	3	11	1	-4	61	-1	-7
12	0		62	-1	2	12	0		62	1	-6
13	1	-3	63	1	3	13	0		63	1	-5
14	0		64	0		14	1	-3	64	0	
15	1	-2	65	1	4	15	1	-2	65	1	-4
16	0		66	1	5	16	0		66	-1	-5
17	1	-1	67	-1	4	17	-1	-3	67	0	
18	-1	-2	68	0		18	-1	-4	68	0	
19	1	-1	69	-1	3	19	-1	-5	69	1	-4
7620	0		7670	1	4	7720	0		7770	-1	-5
21	-1	-2	71	1	5	21	1	-4	71	1	-4
22	-1	-3	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	-1	4	23	-1	-5	73	1	-3
24	0		74	-1	3	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	-2	76	0		26	1	-4	76	0	
27	1	-1	77	0		27	-1	-5	77	-1	-4
28	0		78	-1	2	28	0		78	1	-3
29	1	0	79	1	3	29	1	-4	79	1	-2
7630	1	1	7680	0		7730	-1	-5	7780	0	
31	1	2	81	-1	2	31	0		81	1	-1
32	0		82	-1	1	32	0		82	-1	-2
33	1	3	83	-1	0	33	-1	-6	83	1	-1
34	-1	2	84	0		34	-1	-7	84	0	
35	-1	1	85	-1	-1	35	1	-6	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	-1	-2
37	1	2	87	-1	-2	37	1	-5	87	1	-1
38	1	3	88	0		38	-1	-6	88	0	
39	-1	2	89	-1	-3	39	1	-5	89	-1	-2
7640	0		7690	-1	-4	7740	0		7790	1	-1
41	0		91	-1	-5	41	-1	-6	91	0	
42	1	3	92	0		42	0		92	0	
43	-1	2	93	0		43	-1	-7	93	-1	-2
44	0		94	1	-4	44	0		94	0	
45	-1	1	95	0		45	1	-6	95	1	-1
46	1	2	96	0		46	-1	-7	96	0	
47	1	3	97	1	-3	47	1	-6	97	-1	-2
48	0		98	-1	-4	48	0		98	-1	-3
49	-1	-2	99	-1	-5	49	0		99	1	-2
7650	0		7700	0		7750	0		7800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
7801	1	−1	7851	1	1	7901	−1	0	7951	−1	−5
02	−1	−2	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	−1	0	03	1	1	53	−1	−6
04	0		54	−1	−1	04	0		54	−1	−7
05	−1	−3	55	1	0	05	1	2	55	−1	−8
06	−1	−4	56	0		06	−1	1	56	0	
07	1	−3	57	0		07	−1	0	57	1	−7
08	0		58	1	1	08	0		58	−1	−8
09	−1	−4	59	1	2	09	1	1	59	−1	−9
7810	1	−3	7860	0		7910	1	2	7960	0	
11	1	−2	61	1	3	11	0		61	1	−8
12	0		62	1	4	12	0		62	−1	−9
13	1	−1	63	1	5	13	1	3	63	−1	−10
14	1	0	64	0		14	−1	2	64	0	
15	−1	−1	65	0		15	1	3	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	−1	−11
17	−1	−2	67	−1	4	17	1	4	67	1	−10
18	−1	−3	68	0		18	−1	3	68	0	
19	1	−2	69	−1	3	19	−1	2	69	1	−9
7820	0		7870	−1	2	7920	0		7970	−1	−10
21	0		71	1	3	21	0		71	1	−9
22	1	−1	72	0		22	−1	1	72	0	
23	−1	−2	73	−1	2	23	−1	0	73	−1	−10
24	0		74	−1	1	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−1	76	0		26	−1	−1	76	0	
27	1	0	77	−1	0	27	−1	−2	77	1	−9
28	0		78	1	1	28	0		78	1	−8
29	−1	−1	79	−1	0	29	0		79	1	−7
7830	0		7880	0		7930	1	−1	7980	0	
31	1	0	81	−1	−1	31	−1	−2	81	1	−6
32	0		82	−1	−2	32	0		82	−1	−7
33	−1	−1	83	−1	−3	33	−1	−3	83	0	
34	1	0	84	0		34	1	−2	84	0	
35	1	1	85	−1	−4	35	0		85	1	−6
36	0		86	1	−3	36	0		86	0	
37	1	2	87	−1	−4	37	−1	−3	87	0	
38	1	3	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	0		39	1	−2	89	1	−5
7840	0		7890	1	−3	7940	0		7990	1	−4
41	−1	2	91	1	−2	41	1	−1	91	1	−3
42	−1	1	92	0		42	0		92	0	
43	−1	0	93	0		43	0		93	−1	−4
44	0		94	1	−1	44	0		94	−1	−5
45	−1	−1	95	1	0	45	−1	−2	95	1	−4
46	1	0	96	0		46	−1	−3	96	0	
47	−1	−1	97	1	1	47	0		97	1	−3
48	0		98	−1	0	48	0		98	1	−2
49	1	0	99	1	1	49	−1	−4	99	1	−1
7850	0		7900	0		7950	0		8000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
8001	0	—1	8051	1	11	8101	1	12	8151	1	20
02	1	0	52	0		02	1	13	52	0	
03	1	1	53	—1	10	03	—1	12	53	1	21
04	0		54	1	11	04	0		54	0	
05	1	2	55	0		05	1	13	55	—1	20
06	1	3	56	0		06	1	14	56	0	
07	—1	2	57	1	12	07	0		57	1	21
08	0		58	1	13	08	0		58	1	22
09	—1	1	59	—1	12	09	0		59	1	23
8010	0		8060	0		8110	—1	13	8160	0	
11	—1	0	61	1	13	11	—1	12	61	—1	22
12	0		62	—1	12	12	0		62	1	23
13	1	1	63	1	13	13	—1	11	63	0	
14	1	2	64	0		14	1	12	64	0	
15	—1	1	65	1	14	15	—1	11	65	—1	22
16	0		66	—1	13	16	0		66	—1	21
17	—1	0	67	1	14	17	—1	10	67	—1	20
18	—1	—1	68	0		18	0		68	0	
19	0		69	—1	13	19	1	11	69	—1	19
8020	0		8070	1	14	8120	0		8170	1	20
21	1	0	71	1	15	21	1	12	71	—1	19
22	1	1	72	0		22	—1	11	72	0	
23	1	2	73	0		23	—1	10	73	1	20
24	0		74	—1	14	24	0		74	—1	19
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	3	76	0		26	—1	9	76	0	
27	1	4	77	1	15	27	0		77	—1	18
28	0		78	—1	14	28	0		78	1	19
29	—1	3	79	1	15	29	1	10	79	—1	18
8030	1	4	8080	0		8130	1	11	8180	0	
31	1	5	81	—1	14	31	1	12	81	0	
32	0		82	0		32	0		82	1	19
33	1	6	83	1	15	33	1	13	83	0	
34	1	7	84	0		34	0		84	0	
35	1	8	85	0		35	1	14	85	1	20
36	0		86	—1	14	36	0		86	1	21
37	0		87	—1	13	37	1	15	87	1	22
38	1	9	88	0		38	—1	14	88	0	
39	—1	8	89	—1	12	39	1	15	89	1	23
8040	0		8090	—1	11	8140	0		8190	0	
41	—1	7	91	0		41	1	16	91	—1	22
42	1	8	92	0		42	1	17	92	0	
43	—1	7	93	—1	10	43	1	18	93	1	23
44	0		94	1	11	44	0		94	—1	22
45	1	8	95	1	12	45	0		95	—1	21
46	0		96	0		46	1	19	96	0	
47	1	9	97	1	13	47	—1	18	97	1	22
48	0		98	1	14	48	0		98	1	23
49	1	10	99	—1	13	49	1	19	99	0	
8050	0		8100	0		8150	0		8200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
8201	1	24	8251	1	14	8301	1	16	8351	1	22
02	−1	23	52	0		02	−1	15	52	0	
03	1	24	53	0		03	0		53	−1	21
04	0		54	1	15	04	0		54	1	22
05	−1	23	55	−1	14	05	−1	14	55	−1	21
06	−1	22	56	0		06	1	15	56	0	
07	1	23	57	1	15	07	0		57	1	22
08	0		58	1	16	08	0		58	1	23
09	−1	22	59	1	17	09	1	16	59	1	24
8210	−1	21	8260	0		8310	1	17	8360	0	
11	1	22	61	1	18	11	−1	16	61	0	
12	0		62	0		12	0		62	−1	23
13	1	23	63	−1	17	13	−1	15	63	−1	22
14	0		64	0		14	1	16	64	0	
15	−1	22	65	1	18	15	1	17	65	−1	21
16	0		66	1	19	16	0		66	−1	20
17	0		67	1	20	17	−1	16	67	1	21
18	−1	21	68	0		18	1	17	68	0	
19	−1	20	69	−1	19	19	−1	16	69	−1	20
8220	0		8270	−1	18	8320	0		8370	0	
21	−1	19	71	0		21	1	17	71	1	21
22	1	20	72	0		22	1	18	72	0	
23	1	21	73	−1	17	23	−1	17	73	1	22
24	0		74	1	18	24	0		74	−1	21
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	−1	16	76	0	
27	1	22	77	−1	17	27	1	17	77	−1	20
28	0		78	1	18	28	0		78	−1	19
29	−1	21	79	1	19	29	−1	16	79	0	
8230	−1	20	8280	0		8330	0		8380	0	
31	−1	19	81	0		31	1	17	81	0	
32	0		82	−1	18	32	0		82	1	20
33	−1	18	83	−1	17	33	1	18	83	1	21
34	−1	17	84	0		34	0		84	0	
35	0		85	1	18	35	1	19	85	1	22
36	0		86	−1	17	36	0		86	−1	21
37	−1	16	87	−1	16	37	−1	18	87	−1	20
38	−1	15	88	0		38	−1	17	88	0	
39	−1	14	89	0		39	1	18	89	−1	19
8240	0		8290	−1	15	8340	0		8390	−1	18
41	−1	13	91	−1	14	41	1	19	91	−1	19
42	−1	12	92	0		42	−1	18	92	0	
43	−1	11	93	−1	13	43	0		93	−1	18
44	0		94	1	14	44	0		94	−1	17
45	−1	10	95	1	15	45	1	19	95	−1	16
46	1	11	96	0		46	1	20	96	0	
47	1	12	97	−1	14	47	1	21	97	0	
48	0		98	0		48	0		98	1	17
49	1	13	99	1	15	49	0		99	1	18
8250	0		8300	0		8350	0		8400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
8401	1	19	8451	0	17	8501	−1	28	8551	1	33
02	1	20	52	0		02	1	29	52	0	
03	1	21	53	1	18	03	1	30	53	1	34
04	0		54	−1	17	04	0		54	1	35
05	0		55	−1	16	05	0		55	−1	34
06	0		56	0		06	1	31	56	0	
07	1	22	57	1	17	07	1	32	57	1	35
08	0		58	1	18	08	0		58	−1	34
09	1	23	59	1	19	09	1	33	59	0	
8410	0		8460	0		8510	1	34	8560	0	
11	1	24	61	−1	18	11	1	35	61	1	35
12	0		62	1	19	12	0		62	−1	34
13	1	25	63	1	20	13	−1	34	63	−1	33
14	−1	24	64	0		14	0		64	0	
15	0		65	1	21	15	−1	33	65	−1	32
16	0		66	1	22	16	0		66	1	33
17	1	25	67	−1	21	17	−1	32	67	1	34
18	1	26	68	0		18	1	33	68	0	
19	−1	25	69	0		19	1	34	69	−1	33
8420	0		8470	0		8520	0		8570	−1	32
21	−1	24	71	1	22	21	−1	33	71	1	33
22	1	25	72	0		22	1	34	72	0	
23	−1	24	73	1	23	23	0		73	−1	32
24	0		74	−1	22	24	0		74	−1	31
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	23	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	0		27	−1	33	77	0	
28	0		78	0		28	0		78	1	32
29	−1	22	79	1	23	29	1	34	79	1	33
8430	1	23	8480	0		8530	−1	33	8580	0	
31	−1	22	81	−1	22	31	1	34	81	−1	32
32	0		82	1	23	32	0		82	−1	31
33	0		83	1	24	33	−1	33	83	1	32
34	1	23	84	0		34	−1	32	84	0	
35	−1	22	85	1	25	35	−1	31	85	−1	31
36	0		86	1	26	36	0		86	0	
37	−1	21	87	0		37	−1	30	87	1	32
38	1	22	88	0		38	−1	29	88	0	
39	−1	21	89	1	27	39	−1	28	89	−1	31
8440	0		8490	1	28	8540	0		8590	−1	30
41	1	22	91	1	29	41	0		91	0	
42	0		92	0		42	1	29	92	0	
43	−1	21	93	−1	28	43	−1	28	93	1	31
44	0		94	−1	27	44	0		94	1	32
45	−1	20	95	1	28	45	1	29	95	0	
46	−1	19	96	0		46	1	30	96	0	
47	−1	18	97	1	29	47	1	31	97	−1	31
48	0		98	−1	28	48	0		98	−1	30
49	−1	17	99	1	29	49	1	32	99	−1	29
8450	0		8500	0		8550	0		8600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
8601	−1	28	8651	1	23	8701	−1	17	8751	1	18
02	1	29	52	0		02	−1	16	52	0	
03	1	30	53	1	24	03	0		53	−1	17
04	0		54	1	25	04	0		54	−1	16
05	1	31	55	−1	24	05	1	17	55	−1	15
06	−1	30	56	0		06	−1	16	56	0	
07	−1	29	57	1	25	07	−1	15	57	0	
08	0		58	0		08	0		58	−1	14
09	−1	28	59	1	26	09	1	16	59	1	15
8610	−1	27	8660	0		8710	1	17	8760	0	
11	1	28	61	1	27	11	1	18	61	−1	14
12	0		62	−1	26	12	0		62	−1	13
13	0		63	−1	25	13	−1	17	63	−1	12
14	−1	27	64	0		14	1	18	64	0	
15	1	28	65	1	26	15	1	19	65	1	13
16	0		66	−1	25	16	0		66	0	
17	1	29	67	0		17	1	20	67	1	14
18	−1	28	68	0		18	−1	19	68	0	
19	0		69	−1	24	19	−1	18	69	−1	13
8620	0		8670	0		8720	0		8770	−1	12
21	1	29	71	−1	23	21	0		71	0	
22	0		72	0		22	0		72	0	
23	−1	28	73	0		23	−1	17	73	1	13
24	0		74	1	24	24	0		74	−1	12
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	27	76	0		26	1	18	76	0	
27	−1	26	77	−1	23	27	1	19	77	1	13
28	0		78	1	24	28	0		78	−1	12
29	−1	25	79	−1	23	29	−1	18	79	−1	11
8630	−1	24	8680	0		8730	0		8780	0	
31	0		81	−1	22	31	−1	17	81	1	12
32	0		82	−1	21	32	0		82	1	13
33	1	25	83	1	22	33	−1	16	83	−1	12
34	−1	24	84	0		34	−1	15	84	0	
35	−1	23	85	0		35	1	16	85	−1	11
36	0		86	−1	21	36	0		86	−1	10
37	1	24	87	−1	20	37	−1	15	87	−1	9
38	−1	23	88	0		38	−1	14	88	0	
39	1	24	89	−1	19	39	0		89	−1	8
8640	0		8690	1	20	8740	0		8790	1	9
41	−1	23	91	1	21	41	−1	13	91	1	10
42	−1	22	92	0		42	1	14	92	0	
43	−1	21	93	−1	20	43	1	15	93	0	
44	0		94	0		44	0		94	1	11
45	1	22	95	−1	19	45	1	16	95	1	12
46	1	23	96	0		46	1	17	96	0	
47	−1	22	97	−1	18	47	−1	16	97	1	13
48	0		98	1	19	48	0		98	−1	12
49	0		99	1	18	49	1	17	99	−1	11
8650	0		8700	0		8750	0		8800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
8801	1	12	8851	1	4	8901	0	5	8951	—1	6
02	0		52	0		02	1	6	52	0	
03	—1	11	53	—1	3	03	1	7	53	1	7
04	0		54	—1	2	04	0		54	0	
05	—1	10	55	1	3	05	—1	6	55	0	
06	1	11	56	0		06	—1	5	56	0	
07	—1	10	57	1	4	07	1	6	57	0	
08	0		58	—1	3	08	0		58	—1	6
09	1	11	59	1	4	09	1	7	59	0	
8810	—1	10	8860	0		8910	0		8960	0	
11	0		61	—1	3	11	—1	6	61	—1	5
12	0		62	1	4	12	0		62	1	6
13	1	11	63	—1	3	13	1	7	63	—1	5
14	1	12	64	0		14	1	8	64	0	
15	—1	11	65	0		15	1	9	65	—1	4
16	0		66	1	4	16	0		66	1	5
17	1	12	67	—1	3	17	1	10	67	0	
18	1	13	68	0		18	0		68	0	
19	—1	12	69	0		19	0		69	—1	4
8820	0		8870	—1	2	8920	0		8970	—1	3
21	—1	11	71	1	3	21	1	11	71	—1	2
22	—1	10	72	0		22	—1	10	72	0	
23	—1	9	73	1	4	23	—1	9	73	0	
24	0		74	0		24	0		74	—1	1
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	—1	8	76	0		26	1	10	76	0	
27	—1	7	77	—1	3	27	1	11	77	1	2
28	0		78	—1	2	28	0		78	0	
29	0		79	1	3	29	—1	10	79	—1	1
8830	—1	6	8880	0		8930	1	11	8980	0	
31	—1	5	81	1	4	31	—1	10	81	1	2
32	0		82	1	5	32	0		82	0	
33	0		83	0		33	—1	9	83	1	3
34	—1	4	84	0		34	—1	8	84	0	
35	1	5	85	1	6	35	1	9	85	—1	2
36	0		86	—1	5	36	0		86	1	3
37	—1	4	87	—1	4	37	0		87	—1	2
38	0		88	0		38	—1	8	88	0	
39	—1	3	89	1	5	39	1	9	89	1	3
8840	0		8890	1	6	8940	0		8990	1	4
41	—1	2	91	1	7	41	—1	8	91	0	
42	1	3	92	0		42	—1	7	92	0	
43	1	4	93	—1	6	43	—1	6	93	0	
44	0		94	1	7	44	0		94	—1	3
45	—1	3	95	—1	6	45	1	7	95	—1	2
46	1	4	96	0		46	0		96	0	
47	0		97	—1	5	47	1	8	97	1	3
48	0		98	—1	4	48	0		98	—1	2
49	—1	3	99	1	5	49	—1	7	99	—1	1
8850	0		8900	0		8950	0		9000	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
9001	—1	0	9051	—1	2	9101	1	4	9151	—1	2
02	—1	—1	52	0		02	1	5	52	0	
03	1	0	53	1	3	03	—1	4	53	0	
04	0		54	0		04	0		54	—1	1
05	1	1	55	1	4	05	—1	3	55	1	2
06	1	2	56	0		06	—1	2	56	0	
97	—1	1	57	1	5	07	1	3	57	—1	1
08	0		58	—1	4	08	0		58	—1	0
09	0		59	—1	3	09	—1	2	59	—1	—1
9010	1	2	9060	0		9110	—1	1	9160	0	
11	—1	1	61	—1	2	11	1	2	61	—1	—2
12	0		62	—1	1	12	0		62	0	
13	—1	0	63	0		13	1	3	63	0	
14	1	1	64	0		14	0		64	0	
15	—1	0	65	0		15	1	4	65	1	—1
16	0		66	—1	0	16	0		66	1	0
17	1	1	67	—1	—1	17	0		67	1	1
18	0		68	0		18	—1	3	68	0	
19	1	2	69	1	0	19	1	4	69	1	2
9020	0		9070	—1	—1	9120	0		9170	1	3
21	—1	1	71	1	0	21	1	5	71	0	
22	—1	0	72	0		22	1	6	72	0	
23	1	1	73	1	1	23	1	7	73	—1	2
24	0		74	—1	0	24	0		74	1	3
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	2	76	0		26	0		76	0	
27	0		77	1	1	27	—1	6	77	1	4
28	0		78	1	2	28	0		78	—1	3
29	—1	1	79	1	3	29	—1	5	79	1	4
9030	—1	0	9080	0		9130	1	6	9180	0	
31	1	1	81	0		31	1	7	81	—1	3
32	0		82	—1	2	32	0		82	1	4
33	1	2	83	1	3	33	—1	6	83	1	5
34	1	3	84	0		34	1	7	84	0	
35	—1	2	85	—1	2	35	0		85	—1	4
36	0		86	1	3	36	0		86	—1	3
37	1	3	87	—1	2	37	—1	6	87	—1	2
38	1	4	88	0		38	—1	5	88	0	
39	—1	3	89	1	3	39	—1	4	89	0	
9040	0		9090	0		9140	0		9190	—1	1
41	—1	2	91	—1	2	41	—1	3	91	—1	0
42	1	3	92	0		42	—1	2	92	0	
43	—1	2	93	—1	1	43	1	3	93	1	1
44	0		94	1	2	44	0		94	1	2
45	0		95	—1	1	45	—1	2	95	—1	1
46	1	3	96	0		46	—1	1	96	0	
47	1	4	97	1	2	47	1	2	97	1	2
48	0		98	1	3	48	0		98	0	
49	—1	3	99	0		49	1	3	99	—1	1
9050	0		9100	0		9150	0		9200	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
9201	1	2	9251	0	1	9301	1	−4	9351	0	−5
02	−1	1	52	0		02	1	−3	52	0	
03	−1	0	53	1	2	03	−1	−4	53	1	−4
04	0		54	−1	1	04	0		54	−1	−5
05	−1	−1	55	−1	0	05	1	−3	55	1	−4
06	1	0	56	0		06	0		56	0	
07	0		57	−1	−1	07	1	−2	57	1	−3
08	0		58	−1	−2	08	0		58	1	−2
09	−1	−1	59	1	−1	09	−1	−3	59	0	
9210	1	0	9260	0		9310	0		9360	0	
11	1	1	61	0		11	−1	−4	61	−1	−3
12	0		62	−1	−2	12	0		62	−1	−4
13	−1	0	63	1	−1	13	1	−3	63	1	−3
14	−1	−1	64	0		14	1	−2	64	0	
15	−1	−2	65	−1	−2	15	0		65	1	−2
16	0		66	−1	−3	16	0		66	1	−1
17	1	−1	67	1	−2	17	0		67	−1	−2
18	−1	−2	68	0		18	−1	−3	68	0	
19	−1	−3	69	−1	−3	19	−1	−4	69	0	
9220	0		9270	0		9320	0		9370	−1	−3
21	−1	−4	71	1	−2	21	−1	−5	71	−1	−4
22	1	−3	72	0		22	−1	−6	72	0	
23	1	−2	73	−1	−3	23	−1	−7	73	−1	−5
24	0		74	1	−2	24	0		74	−1	−6
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	−3	76	0		26	1	−6	76	0	
27	−1	−4	77	−1	−3	27	1	−5	77	−1	−7
28	0		78	1	−2	28	0		78	0	
29	1	−3	79	0		29	1	−4	79	1	−6
9230	1	−2	9280	0		9330	1	−3	9380	0	
31	−1	−3	81	−1	−3	31	−1	−4	81	−1	−7
32	0		82	−1	−4	32	0		82	1	−6
33	1	−2	83	−1	−5	33	0		83	1	−5
34	0		84	0		34	−1	−5	84	0	
35	1	−1	85	−1	−6	35	1	−4	85	1	−4
36	0		86	1	−5	36	0		86	0	
37	1	0	87	1	−4	37	−1	−5	87	0	
38	−1	−1	88	0		38	1	−4	88	0	
39	−1	−2	89	1	−3	39	−1	−5	89	1	−3
9240	0		9290	−1	−4	9340	0		9390	1	−2
41	−1	−3	91	−1	−5	41	−1	−6	91	−1	−3
42	1	−2	92	0		42	0		92	0	
43	0		93	−1	−6	43	−1	−7	93	−1	−4
44	0		94	−1	−7	44	0		94	1	−3
45	0		95	0		45	1	−6	95	1	−2
46	1	−1	96	0		46	1	−5	96	0	
47	1	0	97	0		47	1	−4	97	−1	−3
48	0		98	1	−6	48	0		98	−1	−4
49	1	1	99	1	−5	49	−1	−5	99	−1	−5
9250	0		9300	0		9350	0		9400	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
9401	−1	−6	9451	1	−14	9501	1	−23	9551	−1	−25
02	−1	−7	52	0		02	1	−22	52	0	
03	−1	−8	53	−1	−15	03	−1	−23	53	1	−24
04	0		54	−1	−16	04	0		54	−1	−25
05	0		55	−1	−17	05	1	−22	55	0	
06	1	−7	56	0		06	0		56	0	
07	1	−6	57	0		07	1	−21	57	1	−24
08	0		58	1	−16	08	0		58	0	
09	0		59	0		09	1	−20	59	0	
9410	−1	−7	9460	0		9510	1	−19	9560	0	
11	1	−6	61	−1	−17	11	−1	−20	61	1	−23
12	0		62	1	−16	12	0		62	−1	−24
13	−1	−7	63	−1	−17	13	0		63	1	−23
14	0		64	0		14	−1	−21	64	0	
15	−1	−8	65	−1	−18	15	−1	−22	65	1	−22
16	0		66	1	−17	16	0		66	1	−21
17	−1	−9	67	−1	−18	17	1	−21	67	0	
18	−1	−10	68	0		18	1	−20	68	0	
19	−1	−11	69	1	−17	19	−1	−21	69	1	−20
9420	0		9470	−1	−18	9520	0		9570	−1	−21
21	−1	−12	71	1	−17	21	−1	−22	71	1	−20
22	−1	−13	72	0		22	0		72	0	
23	0		73	−1	−18	23	1	−21	73	1	−19
24	0		74	−1	−19	24	0		74	1	−18
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	−1	−14	76	0		26	−1	−22	76	0	
27	1	−13	77	0		27	1	−21	77	1	−17
28	0		78	−1	−20	28	0		78	1	−16
29	−1	−14	79	−1	−21	29	1	−20	79	−1	−17
9430	1	−13	9480	0		9530	−1	−21	9580	0	
31	−1	−14	81	1	−20	31	0		81	−1	−18
32	0		82	−1	−21	32	0		82	−1	−19
33	−1	−15	83	−1	−22	33	−1	−22	83	0	
34	−1	−16	84	0		34	1	−21	84	0	
35	1	−15	85	−1	−23	35	1	−20	85	0	
36	0		86	0		36	0		86	1	−18
37	−1	−16	87	1	−22	37	0		87	−1	−19
38	0		88	0		38	−1	−21	88	0	
39	−1	−17	89	1	−21	39	−1	−22	89	1	−18
9440	0		9490	1	−20	9540	0		9590	1	−17
41	0		91	−1	−21	41	−1	−23	91	−1	−18
42	1	−16	92	0		42	−1	−24	92	0	
43	−1	−17	93	1	−20	43	1	−23	93	1	−17
44	0		94	−1	−21	44	0		94	0	
45	1	−16	95	0		45	−1	−24	95	−1	−18
46	1	−15	96	0		46	1	−23	96	0	
47	−1	−16	97	−1	−22	47	−1	−24	97	−1	−19
48	0		98	−1	−23	48	0		98	1	−18
49	1	−15	99	−1	−24	49	0		99	1	−17
9450	0		9500	0		9550	0		9600	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
9601	−1	−18	9651	1	−18	9701	1	−26	9751	0	−36
02	1	−17	52	0		02	0		52	0	
03	0		53	0		03	1	−25	53	1	−35
04	0		54	−1	−19	04	0		54	1	−34
05	−1	−18	55	1	−18	05	−1	−26	55	1	−33
06	−1	−19	56	0		06	−1	−27	56	0	
07	1	−18	57	0		07	1	−26	57	1	−32
08	0		58	−1	−19	08	0		58	1	−31
09	1	−17	59	1	−18	09	−1	−27	59	1	−30
9610	0		9660	0		9710	−1	−28	9760	0	
11	1	−16	61	−1	−19	11	0		61	1	−29
12	0		62	1	−18	12	0		62	−1	−30
13	−1	−17	63	1	−17	13	1	−27	63	1	−29
14	1	−16	64	0		14	−1	−28	64	0	
15	−1	−17	65	1	−16	15	−1	−29	65	0	
16	0		66	0		16	0		66	−1	−30
17	1	−16	67	1	−15	17	−1	−30	67	−1	−31
18	1	−15	68	0		18	−1	−31	68	0	
19	−1	−16	69	−1	−16	19	−1	−32	69	−1	−32
9620	0		9670	−1	−17	9720	0		9770	−1	−33
21	0		71	1	−16	21	−1	−33	71	1	−32
22	−1	−17	72	0		22	1	−32	72	0	
23	−1	−18	73	1	−15	23	−1	−33	73	1	−31
24	0		74	−1	−16	24	0		74	0	
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	1	−17	76	0		26	−1	−34	76	0	
27	1	−16	77	−1	−17	27	1	−33	77	1	−30
28	0		78	−1	−18	28	0		78	1	−29
29	−1	−17	79	−1	−19	29	0		79	−1	−30
9630	0		9680	0		9730	1	−32	9780	0	
31	−1	−18	81	−1	−20	31	1	−31	81	−1	−31
32	0		82	−1	−21	32	0		82	−1	−32
33	0		83	1	−20	33	−1	−32	83	0	
34	1	−17	84	0		34	−1	−33	84	0	
35	−1	−18	85	−1	−21	35	1	−32	85	−1	−33
36	0		86	−1	−22	36	0		86	1	−32
37	1	−17	87	1	−21	37	−1	−33	87	−1	−33
38	−1	−18	88	0		38	0		88	0	
39	0		89	−1	−22	39	−1	−34	89	−1	−34
9640	0		9690	−1	−23	9740	0		9790	1	−33
41	1	−17	91	1	−22	41	−1	−35	91	−1	−34
42	−1	−18	92	0		42	1	−34	92	0	
43	−1	−19	93	0		43	−1	−35	93	1	−33
44	0		94	−1	−23	44	0		94	−1	−34
45	−1	−20	95	−1	−24	45	1	−34	95	−1	−35
46	1	−19	96	0		46	−1	−35	96	0	
47	1	−18	97	−1	−25	47	0		97	1	−34
48	0		98	−1	−26	48	0		98	1	−33
49	−1	−19	99	−1	−27	49	−1	−36	99	1	−32
9650	0		9700	0		9750	0		9800	0	

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
9801	0		9851	—1	—41	9901	—1	—38	9951	—1	—36
02	0		52	0		02	1	—37	52	0	
03	—1	—33	53	1	—40	03	1	—36	53	1	—35
04	0		54	—1	—41	04	0		54	0	
05	—1	—34	55	0		05	—1	—37	55	—1	—36
06	1	—33	56	0		06	1	—36	56	0	
07	—1	—34	57	—1	—42	07	—1	—37	57	1	—35
08	0		58	1	—41	08	0		58	—1	—36
09	1	—33	59	—1	—42	09	0		59	1	—35
9810	0		9860	0		9910	—1	—38	9960	0	
11	—1	—34	61	—1	—43	11	—1	—39	61	1	—34
12	0		62	1	—42	12	0		62	—1	—35
13	1	—33	63	1	—41	13	1	—38	63	0	
14	—1	—34	64	0		14	1	—37	64	0	
15	—1	—35	65	1	—40	15	—1	—38	65	1	—34
16	0		66	1	—39	16	0		66	1	—33
17	—1	—36	67	1	—38	17	1	—37	67	—1	—34
18	1	—35	68	0		18	0		68	0	
19	0		69	1	—37	19	—1	—38	69	1	—33
9820	0		9870	—1	—38	9920	0		9970	—1	—34
21	—1	—36	71	—1	—39	21	1	—37	71	0	
22	—1	—37	72	0		22	0		72	0	
23	—1	—38	73	0		23	—1	—38	73	—1	—35
24	0		74	1	—38	24	0		74	1	—34
25	0		75	0		25	0		75	0	
26	0		76	0		26	—1	—39	76	0	
27	1	—37	77	—1	—39	27	0		77	1	—33
28	0		78	—1	—40	28	0		78	—1	—34
29	—1	—38	79	—1	—41	29	—1	—40	79	1	—33
9830	—1	—39	9880	0		9930	1	—39	9980	0	
31	—1	—40	81	1	—40	31	—1	—40	81	0	
32	0		82	0		32	0		82	1	—32
33	—1	—41	83	—1	—41	33	1	—39	83	1	—31
34	1	—40	84	0		34	1	—38	84	0	
35	—1	—41	85	—1	—42	35	1	—37	85	1	—30
36	0		86	1	—41	36	0		86	1	—29
37	0		87	—1	—42	37	1	—36	87	1	—28
38	1	—40	88	0		38	1	—35	88	0	
39	—1	—41	89	—1	—43	39	1	—34	89	1	—27
9840	0		9890	1	—42	9940	0		9990	0	
41	1	—40	91	0		41	—1	—35	91	1	—26
42	1	—39	92	0		42	—1	—36	92	0	
43	—1	—40	93	1	—41	43	1	—35	93	1	—25
44	0		94	1	—40	44	0		94	—1	—26
45	—1	—41	95	1	—39	45	0		95	1	—25
46	0		96	0		46	1	—34	96	0	
47	1	—40	97	1	—38	47	0		97	1	—24
48	0		98	0		48	0		98	1	—23
49	0		99	1	—37	49	—1	—35	99	0	
9850	0		9900	0		9950	0		10000	0	

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. X. HEFT.



JAHRGANG 1897. — DECEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 8 TAFELN UND 28 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1897.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes December 1897 des CVI. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 3 fl. 85 kr. = 7 Mk. 70 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVI. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXV. SITZUNG VOM 2. DECEMBER 1897.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. b, Heft VII (Juli 1897).

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 29. November l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn k. k. Universitätsprofessors Dr. Albrecht Schrauf in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Laut telegraphischer Nachricht ist S. M. Schiff »Pola« am 30. November in Assab zu dreitägigem Aufenthalte eingelaufen. An Bord Alles wohl.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien dankt für die ihm von der kaiserlichen Akademie zur Ausführung einer Reihe abschliessender Untersuchungen auf dem Gebiete der atmosphärischen Elektricität aus den Erträgnissen der Erbschaft Treitl gewährte Subvention.

Herr Prof. Dr. Ludwig v. Graff in Graz dankt für die ihm von der Akademie zur Vollendung seines Werkes: »Monographie der Turbellarien« aus dem Legate Wedl bewilligte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Herrn Prof. Dr. Victor Schiffner, betitelt: »Expositio plantarum in itinere suo Indico annis 1893/94 suscepto collectarum«. Series prima.

Herr Dr. Carl Auer v. Welsbach in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Experimentaluntersuchungen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Einiges über die Äther des Phloroglucins und eine Synthese des Hydrocotoins«, von Dr. J. Pollak.

Der prov. Secretär theilt den auszugsweisen Inhalt eines von dem Leiter der wissenschaftlichen Arbeiten der Expedition S. M. Schiff »Pola« im Rothen Meere, w. M. Hofrath Dr. Steindachner, ddo. Massaua, 6. November 1897 eingelangten Berichtes mit.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Archives du Musée Teyler. Série II. Vol. V. Troisième partie. Haarlem, 1897; 4°.

Bashforth Francis, A mathematical treatise on the motion of projectiles, founded chiefly on the results of experiments made with the author's chronograph. London, 1873; 8°.

— Tables of remaining velocity, time of flight, and energy of various projectiles, calculated from the results of experiments made with the Bashforth chronograph, 1865—1870. London, 1871; 8°.

— A Supplement to a revised account of the experiments made with the Bashforth chronograph. Cambridge, 1895.

Drozda J., Grundzüge einer rationellen Phthiseotherapie (Heilung der Tuberculose). Wien, 1897.

Seynes J. de, Recherches pour servir à l'histoire naturelle et la flore des Champignons du Congo français. I. Paris, 1897; 4°.

Woldřich J. N., Wirbelthierfauna des Pfahlbaues von Ripač bei Bihać. Wien, 1897, 4°.

Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function $\sigma(n)=\sum_{x=1}^{x=n}\mu(x)$ im Intervalle von 0 bis 150000

von

Dr. **R. Daublebsky v. Sterneck** in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. November 1897.)

Mit $\mu(x)$ bezeichnen wir die in der Zahlentheorie sehr bekannte Function, deren Werth ± 1 ist, wenn das (ganzzahlige) Argument x das Product einer geraden, respective ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren ist, während für alle durch eine Quadratzahl (grösser als 1) theilbaren Argumente der Functionswerth gleich null ist.

Die aus ihr durch Summirung entstehende Function

$$\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$$

ist für die Ermittlung asymptotischer Gesetze der Zahlentheorie von besonderer Bedeutung[1]; es ist jedoch bis jetzt nicht gelungen, eine hinreichend niedrige obere Grenze für den absoluten Betrag dieser Function zu ermitteln, wie dies für die Anwendungen in der Zahlentheorie nothwendig wäre. In dieser Hinsicht erschien es mir wünschenswerth, den Verlauf der Function $\sigma(n)$ in einem grösseren endlichen Intervalle empirisch kennen zu lernen und erlaube ich mir, die Resultate einer diesbezüglichen Untersuchung in der folgenden Tabelle mitzutheilen.

---

[1] Man vergleiche die Abhandlung »Über eine zahlentheoretische Function« von Prof. F. Mertens. Diese Sitzungsber. Bd. 106, November 1897.

Dieselbe enthält die Werthe $\sigma(n)$ für die Argumente von 1 bis 150000. Von der Wiedergabe der Werthe $\mu(n)$ wurde abgesehen, da sich an jeder Stelle der Werth $\mu(n)$ als Differenz zweier aufeinanderfolgender Werthe $\sigma(n)$ unmittelbar entnehmen lässt. Die Tabelle ist so eingerichtet, dass sich das Argument an jeder Stelle aus dem ober der Seite stehenden Vielfachen von 1000, aus dem am Kopfe der betreffenden Colonne stehenden Vielfachen von 50 und aus der links von der betreffenden Zeile stehenden, 50 nicht erreichenden Zahl additiv zusammensetzt. Im Drucke wurden ferner die Werthe $\sigma(n)$ nur dort angesetzt, wo sie sich von den vorhergehenden unterscheiden, so dass die leeren Stellen jenen Argumenten zugehören, für welche $\mu(n) = 0$ ist. Nur der erste und der letzte Functionswerth jeder Colonne wurde in allen Fällen eingetragen.

Der Verlauf der Function $\sigma(n)$ ist in der am Schlusse beigefügten Tafel zum Zwecke grösserer Übersichtlichkeit graphisch dargestellt. Bei der Herstellung dieser graphischen Darstellung wurden die Functionswerthe $\sigma(n)$ in Distanzen von je 100 Einheiten des n verwendet. Eine Durchsicht der vollständigen Tabelle zeigt, dass die Schwankungen innerhalb 100 Einheiten nur gering sind, so dass in der erhaltenen Curve kein wesentliches Detail fehlt. In die Tafel ist ferner auch der positive und negative Werth der $\sqrt{n}$ zum Zwecke der Vergleichung eingezeichnet.

Eine Durchsicht der Tabelle oder auch der Anblick dieser Tafel lassen als Resultat der ganzen Untersuchung unmittelbar die bereits für kleinere Intervalle bekannte[1] Thatsache erkennen, dass der absolute Betrag der Function $\sigma(n)$ die $\sqrt{n}$ niemals erreicht. Nur für $n = 1$ erleidet dieses Gesetz eine Ausnahme, indem $\sigma(1) = 1$ ist. Dieses für die Zahlentheorie sehr wichtige Gesetz ist somit bis $n = 150000$ strenge richtig. Die Function $\sigma(n)$ oscillirt in immer grösseren Wellen um die Abscissenaxe. Ein Gesetz der Zunahme dieser Wellen liesse sich schwer aufstellen; doch ist es bemerkenswerth, dass der Quotient $\frac{\sigma(n)}{\sqrt{n}}$ seinem absoluten Betrage nach für die einzelnen extremen Werthe der

[1] Prof. Mertens hat am Schlusse der citirten Abhandlung eine Tabelle der Werthe $\sigma(n)$ bis 10000 veröffentlicht.

Function $\sigma(n)$ ziemlich constant bleibt. Um dies deutlicher zu zeigen, seien hier die Werthe dieses Quotienten für jene Stellen besonders angegeben, für welche die Function $\sigma(n)$ ihre auffallendsten Maxima, beziehungsweise Minima erreicht; man findet:

$$\frac{\sigma(8511)}{\sqrt{8511}} = 0\cdot38$$

$$\frac{\sigma(9861)}{\sqrt{9861}} = -0\cdot43$$

$$\frac{\sigma(11773)}{\sqrt{11773}} = 0\cdot39$$

$$\frac{\sigma(16142)}{\sqrt{16142}} = -0\cdot33$$

$$\frac{\sigma(19286)}{\sqrt{19286}} = 0\cdot36$$

$$\frac{\sigma(24185)}{\sqrt{24185}} = -0\cdot46$$

$$\frac{\sigma(31990)}{\sqrt{31990}} = 0\cdot41$$

$$\frac{\sigma(42842)}{\sqrt{42842}} = -0\cdot41$$

$$\frac{\sigma(48433)}{\sqrt{48433}} = 0\cdot44$$

$$\frac{\sigma(59577)}{\sqrt{59577}} = -0\cdot46$$

$$\frac{\sigma(69619)}{\sqrt{69619}} = 0\cdot36$$

$$\frac{\sigma(82423)}{\sqrt{82423}} = -0\cdot22$$

$$\frac{\sigma(86061)}{\sqrt{86061}} = 0\cdot23$$

$$\frac{\sigma(96014)}{\sqrt{96014}} = -0\cdot43$$

$$\frac{\sigma(119545)}{\sqrt{119545}} = 0\cdot 38$$

$$\frac{\sigma(141869)}{\sqrt{141869}} = -0\cdot 36$$

Wie man sieht, erreicht die Function $\sigma(n)$ in dem untersuchten Intervalle ihrem absoluten Betrage nach nicht einmal die Grenze $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.[1] Wenn demnach überhaupt einer Vermuthung über das Verhalten der Function $\sigma(n)$ ausserhalb der Grenzen des untersuchten Intervalles Raum gegeben werden darf, so scheint die Relation

$$|\sigma(n)| < \sqrt{n}$$

eine allgemein giltige zu sein.[2]

---

[1] Bloss ganz im Anfange, in der Umgebung von $n = 200$ finden sich einige Stellen, an denen $|\sigma(n)| > \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ist. Aber auch an diesen bleibt die Relation $|\sigma(n)| < \sqrt{n}$ richtig.

[2] Vergleicht man die Reihe der von 0 verschiedenen Werthe $\mu(n)$ mit einer rein zufälligen Aufeinanderfolge positiver und negativer Einheiten (wie man sich eine solche etwa mittelst eines Würfels verschaffen könnte, der auf 3 Seiten mit $+1$ und auf den 3 übrigen mit -1 bezeichnet wäre), so zeigt sich, dass der absolute Betrag von $\sigma(n)$ in dem untersuchten Intervalle hinter der bei einer solchen zufälligen Vertheilung zu erwartenden Differenz der Anzahlen der positiven und negativen Einheiten zurückbleibt. Der wahrscheinlichste Werth dieser Differenz ist nämlich leicht anzugeben, wenn wir hiefür das arithmetische Mittel der absoluten Beträge dieser Abweichung für alle überhaupt denkbaren Vertheilungen annehmen. Es sei etwa m die Anzahl der mit ± 1 besetzten Stellen; da es dann offenbar $\binom{m}{k}$ Vertheilungen gibt, bei welchen k Stellen mit -1 und $m-k$ Stellen mit $+1$ besetzt sind, bei welchen die Abweichung also $|m-2k|$ beträgt, ist die gesuchte mittlere Abweichung M offenbar gleich:

$$M = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} |m-2k|,$$

welchen Ausdruck man unter der (unwesentlichen) Voraussetzung eines geraden m leicht in folgender Weise transformiren kann:

Es sei gestattet, kurz die Methode der Herstellung der Tabelle zu besprechen, obwohl dieselbe sehr nahe liegt und daher kaum viel Interesse bieten dürfte.

Ich liess mir Formulare lithographiren, deren jedes in 10 Spalten zu je 50 Zeilen 500 aufeinanderfolgende Argumente n vorgedruckt enthielt, während neben jeder mit den Argumentwerthen gefüllten Spalte zwei leere Columnen für die Aufnahme der Werthe $\mu(n)$ und $\sigma(n)$ bestimmt waren. Die Nummer des betreffenden Tausends wurde oben auf dem Blatte angeschrieben, so dass die für die Argumente bestimmte

---

$$M = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{0}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{k} (m-2k) = \frac{1}{2^{m-1}} \left[m \sum_{0}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{k} - 2 \sum_{0}^{\frac{m}{2}} k \binom{m}{k} \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \left[m\, 2^{m-1} + \frac{m}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}} - 2m \sum_{0}^{\frac{m}{2}-1} \binom{m-1}{k} \right] = \frac{m}{2^m} \binom{m}{\frac{m}{2}}.$$

Verwendet man die in Bachmann, Analytische Zahlentheorie, S. 354, angegebene Näherungsformel:

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} = \frac{2^m}{\sqrt{\frac{m}{2}\pi}},$$

so ergibt sich:

$$M = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Ist n die betrachtete Stelle unserer Tabelle, so finden sich bis dahin circa $\frac{6}{\pi^2} n$ Stellen, an welchen $\mu(x)$ von Null verschieden ist; es ist also

$$m = \frac{6}{\pi^2} n;$$

man erhält durch Einsetzen dieses Werthes:

$$M = \sqrt{\frac{12}{\pi^3}} \sqrt{n} = 0{\cdot}62211 . \sqrt{n}.$$

Wie man sieht, ist die Grössenordnung der zu erwartenden Abweichung bei einer rein zufälligen Vertheilung ebenfalls $\sqrt{n}$. Der Coëfficient ist jedoch

Spalte nur die drei Endziffern derselben zu enthalten hatte. Ich benöthigte demnach zweierlei Typen dieser Formulare, solche, welche die Argumente von 0 bis 449 und solche, welche jene von 500 bis 999 vorgedruckt enthielten.

In der Spalte der Werthe $\mu(n)$ liess ich ferner neben alle durch 4 theilbaren Argumente gleich im Drucke den Werth 0 ansetzen, ebenso bei allen durch 25 theilbaren Argumenten.

Es war nun sehr leicht, aus dem »Cribrum arithmeticum« von Chernac, welches die Primzahlzerlegungen aller nicht durch 2, 3 oder 5 theilbaren Zahlen der ersten Million enthält, an diesen betreffenden Stellen den Werth $\mu(n)$ einzutragen. Es wurde jedoch aus weiter unten ersichtlichen Gründen statt $+1$ und -1 eine andere Bezeichnung verwendet, und zwar bezeichnete ich den Werth $+1$ dadurch, dass in die rechte Hälfte des zur Aufnahme des Functionswerthes $\mu(n)$ bestimmten Feldes ein Punkt gesetzt wurde, -1 dadurch, dass der Punkt in die linke Hälfte des betreffenden Feldes gesetzt wurde. Die den nicht durch 2, 3 oder 5 theilbaren Argumenten entsprechenden Stellen wurden ferner mit Hilfe eines aus dunklem Papier hergestellten Siebes, welches alle anderen Stellen des Blattes verdeckte, zum Zwecke der leichteren Eintragung fixirt.

Nachdem so an allen diesen Stellen die Functionswerthe $\mu(n)$ eingetragen waren, handelte es sich zunächst darum, dieselben für alle geraden Argumente nachzutragen. Da an allen Stellen, an denen das Argument durch 4 theilbar war, bereits in dem vorgedruckten Formulare eine Null stand, konnte für die übrigen geraden Argumente die Formel

$$\mu(n) = -\mu\left(\frac{n}{2}\right)$$

verwendet werden. Es handelte sich also bloss darum, an allen Stellen $n = 4k+2$ den negativen Functionswerth der Stelle $2k+1$ einzusetzen. Hiezu erwies sich die Bezeichnung der Functionswerthe durch rechts, beziehungsweise links gelegene Punkte oder Nullen als sehr praktisch, da durch blosses Um-

---

grösser als selbst die Maximalwerthe von $\frac{|\sigma(n)|}{\sqrt{n}}$, und umsomehr bei weitem grösser als der mittlere Werth dieses Quotienten.

kehren des Blattes jeder rechte Punkt sich in einen linken verwandelte und umgekehrt, so dass durch rein mechanisches Ablesen die negativen Functionswerthe entnommen werden konnten. Das in Arbeit befindliche Blatt wurde mit einem Siebe verdeckt, welches nur jene Stellen frei liess, bei denen das Argument die Form $4k+2$ hatte. Indem ich mir die bereits in früheren Theilen der Tabelle fertigen Functionswerthe für die Argumente $2k+1$ (wobei, wie erwähnt, das fertige Blatt beim Ablesen verkehrt gehalten wurde) dictiren liess, konnten die Functionswerthe für die Argumente $4k+2$ mit grosser Schnelligkeit und Sicherheit eingetragen werden.

Ähnlich wurden die Functionswerthe an den Stellen $n = 3k$ hergestellt. Es wurde zunächst an allen durch 9 theilbaren Stellen Nullen angeschrieben, was wieder mittelst eines entsprechenden Siebes ohne Mühe durchführbar war. Nachdem dies geschehen war, konnten die übrigen Stellen nach der Formel

$$\mu(n) = -\mu\left(\frac{n}{3}\right),$$

ganz analog dem früheren Falle der geraden Argumente, behandelt werden.

Und endlich wurde dasselbe Verfahren auch bei den durch 5 theilbaren Argumenten verwendet. Indem bereits im Drucke des Formulares bei den durch 25 theilbaren Argumenten Nullen angesetzt waren, konnte bei den übrigen die Formel

$$\mu(n) = -\mu\left(\frac{n}{5}\right)$$

in Anwendung kommen.[1]

Hiemit waren alle Functionswerthe $\mu(n)$ hergestellt. Da Fehler natürlich nicht ausgeschlossen waren, wurde die ganze

---

[1] Die ganze Arbeit war so eingerichtet, dass bei der Herstellung der Functionswerthe $\mu(n)$ zwei Personen beschäftigt waren, deren eine die Werthe dictirte, während die andere die Eintragungen in die Tabelle besorgte. Ich benöthigte daher eine Hilfskraft und fand dieselbe in Herrn Josef Allmayer, Bediensteten der k. k. Universitäts-Bibliothek, dem ich für seine ausdauernde Mitarbeit meinen besten Dank sage. Derselbe hat auch durch Ausfüllung der Colonne mit den Werthen $\sigma(n)$ das Manuscript für den Druck fertig gestellt.

Tabelle vollständig unabhängig in zwei Exemplaren hergestellt. Durch Vergleichung der beiden fertigen Exemplare waren die Fehler sehr leicht zu constatiren.

Zum Zwecke einer weiteren Controle wurde die Formel

$$\left.\begin{array}{r}\sigma(n)+\sigma\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots+\sigma\left(\frac{n}{g}\right)\\ +\mu(1)\left[\frac{n}{1}\right]+\mu(2)\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\mu(g)\left[\frac{n}{g}\right]\\ -g\sigma(g)\end{array}\right\} = 1,$$

wobei $g = [\sqrt{n}]$ ist, verwendet, auf welche mich Herr Prof. Mertens aufmerksam zu machen die Güte hatte. Diese Formel gestattet nämlich, den Functionswerth an der Stelle n durch lauter Functionswerthe auszudrücken, deren Argumente $\frac{n}{2}$ nicht übersteigen. Da die Anzahl der Glieder dieser Formel nur $2[\sqrt{n}]+1$ beträgt, so ist eine solche Controlrechnung nicht besonders umfangreich, obwohl z. B. für $n = 150000$ $[\sqrt{n}] = 387$ ist, also immerhin 775 Glieder berechnet und summirt werden mussten. Solche Proben wurden ausgeführt für $n = 20000$, 40000, 50000, 60000, 80000, 100000, 120000 und 150000. Da die nach dieser Formel berechneten Functionswerthe $\sigma(n)$ immer mit den durch Addition der Werthe μ gefundenen übereinstimmten, ist eine sehr grosse Sicherheit für die Richtigkeit der Tabelle erreicht.

0000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	*	−3	1	0	−8	−1	−5	1	1	−7	−6	3	4	−6	−4	−2	1
1	1	−2	0	−1	−7	−2	−4	»	0	−6	−5	4	3	−7	−5	−3	»
2	0	»	−1	»	−6	»	−3	»	−1	»	−4	»	2	»	»	»	2
3	−1	−3	−2	»	−5	−1	−2	0	0	−5	−5	5	»	−8	−4	−2	3
4	»	»	»	−2	»	0	»	−1	»	−4	»	6	»	−9	»	−3	»
5	−2	−2	−3	−1	−4	−1	−1	0	»	−5	−4	5	»	−8	−5	−2	2
6	−1	»	−2	»	−3	»	»	»	−1	»	−5	»	1	»	−4	»	1
7	−2	−1	−3	−2	»	−2	−2	−1	0	−6	»	4	0	»	−3	−3	2
8	»	0	»	−1	»	−3	»	0	»	−5	»	»	»	−9	»	−2	»
9	»	−1	−4	0	−2	−2	−1	−1	−1	»	−6	5	−1	−10	−4	−3	1
10	−1	»	−5	»	−1	»	−2	»	−2	»	−5	»	−2	»	−5	»	»
11	−2	−2	−4	1	−2	»	−3	»	−1	−6	−4	4	−1	−11	»	−4	0
12	»	−1	»	»	»	−1	»	0	»	−5	»	5	»	−10	»	−5	»
13	−3	»	−5	0	−1	−2	−4	»	0	−6	»	4	−2	−11	−4	−4	1
14	−2	»	−6	»	0	»	−3	»	»	»	−3	»	−1	»	−3	»	0
15	−1	0	−5	−1	1	−1	»	1	1	−7	−2	5	−2	−12	−4	»	1
16	»	−1	»	0	»	−2	»	0	»	−6	»	6	»	»	»	−3	»
17	−2	−2	»	−1	2	−1	−4	−1	2	−7	−1	»	−3	−11	−3	−2	2
18	»	»	−4	»	3	»	−5	»	1	»	−2	»	−4	»	−2	»	3
19	−3	−1	−3	»	4	−2	−4	»	0	−6	−1	5	−5	−10	−3	−3	»
20	»	−2	»	−2	»	»	»	−2	»	−7	»	6	»	−11	»	−2	»
21	−2	−3	»	»	5	−3	−3	−1	−1	−6	−2	5	»	−10	−2	−1	2
22	−1	»	−2	»	4	»	−4	»	0	»	»	»	−4	»	»	»	1
23	−2	−4	−1	−3	3	−4	−3	−2	»	−5	−3	6	−3	−11	−1	−2	0
24	»	−3	»	−4	»	−3	»	−3	»	−6	»	5	»	−10	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−1	»	»	»	4	»	−2	»	−1	»	−2	»	−2	»	»	»	−1
27	»	−2	−2	−3	3	−4	−1	−2	0	»	−1	4	−3	−11	−2	−3	−2
28	»	−3	»	−2	»	−3	»	»	»	−5	»	»	»	−12	»	−2	»
29	−2	−4	−1	−3	2	»	0	−3	−1	−6	»	5	−2	−11	»	−1	−3
30	−3	»	−2	»	1	»	1	»	−2	»	−2	»	»	»	−3	»	−4
31	−4	»	−3	−4	0	−4	0	−2	−3	−5	»	6	−3	−10	−2	0	−3
32	»	−3	»	−5	»	−5	»	−1	»	−4	»	5	»	−11	»	−1	»
33	−3	−4	−2	−4	−1	−6	»	−2	−4	−5	−1	6	−2	−12	−3	»	»
34	−2	»	−1	»	»	»	1	»	−5	»	−2	»	−1	»	−2	»	−4
35	−1	−3	»	−3	0	−7	2	−3	−6	−4	−1	»	0	−11	»	0	−3
36	»	−2	»	−4	»	−8	»	−2	»	»	»	7	»	»	»	−1	»
37	−2	−1	−2	−3	1	−7	1	»	−5	−5	0	6	»	−10	−1	−2	»
38	−1	»	−3	»	0	»	»	»	−6	»	1	»	−1	»	»	»	−2
39	0	−2	−4	»	−1	»	2	−3	−7	−4	»	7	»	−9	−2	−1	−3
40	»	»	»	−4	»	−8	»	−2	»	»	»	6	»	−8	»	−2	»
41	−1	−1	−3	−5	−2	−7	3	−1	»	−5	0	7	−2	−9	−3	−1	»
42	−2	»	−2	»	»	»	»	»	−8	»	1	»	−3	»	−4	»	−2
43	−3	0	−1	−6	»	−8	»	0	−9	−4	2	6	−4	»	−5	0	−1
44	»	1	»	−5	»	»	»	1	»	−5	»	»	»	−8	»	1	»
45	»	2	0	−6	»	−7	2	2	−8	»	3	5	−5	−7	−4	0	»
46	−2	»	1	»	−3	»	3	»	−7	»	4	»	−6	»	−3	»	»
47	−3	1	»	−7	−2	»	2	1	−6	−4	3	6	−7	−6	»	−1	»
48	»	»	»	»	»	−6	»	2	»	−5	»	5	»	−5	»	0	»
49	−3	1	0	−8	−1	−5	1	1	−7	−6	3	4	−6	−4	−2	1	0

1000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	0	1	2	2	−5	−11	−5	−4	−3	0	5	8	4	−3	−2	−7	−11
1	1	2	3	1	−6	−10	−6	−5	»	−1	6	9	3	−2	−3	−8	−10
2	»	1	»	0	»	−11	»	−4	»	0	»	10	»	−1	»	»	»
3	0	0	2	1	»	−12	−7	−3	−2	−1	5	11	2	»	−4	−7	−11
4	−1	»	»	»	−7	»	−6	»	−1	»	6	»	3	»	−3	»	−10
5	»	1	3	0	−6	−13	−5	−2	0	»	7	12	2	−2	−2	−8	−9
6	»	0	»	1	»	−14	»	»	»	0	»	11	»	−3	»	−9	»
7	−2	−1	2	2	−5	»	−4	−1	1	−1	8	10	3	−2	»	−10	−10
8	−1	»	3	»	»	»	−5	»	0	»	7	»	»	»	−3	»	−9
9	−2	»	4	1	−4	−15	−4	−2	−1	−2	»	9	2	−1	−4	−11	−10
10	»	0	»	0	»	−14	»	»	»	−3	»	10	»	−2	»	−10	»
11	−3	−1	»	1	−5	−13	»	−1	0	−4	6	11	3	−3	−3	»	−9
12	−2	»	3	»	»	»	−5	»	1	»	5	»	2	»	−4	»	−10
13	−3	0	»	0	−6	−14	−6	−2	2	−3	6	»	1	−2	−3	−11	−11
14	»	1	»	»	»	−13	»	−1	»	»	»	10	»	−1	»	−12	»
15	−2	0	4	−1	−7	−12	−5	»	1	−2	7	11	2	−2	−2	−13	»
16	−1	»	5	»	−8	»	−6	»	0	»	8	»	3	»	»	»	»
17	»	1	4	»	−7	−13	−5	−2	1	−1	7	12	»	−1	−3	»	−12
18	»	»	»	0	»	−14	»	−1	»	0	»	13	»	0	»	−12	»
19	0	0	3	−1	−8	−13	−4	0	»	−1	»	12	4	»	−2	−13	−13
20	1	»	2	»	−9	»	»	»	0	»	6	»	»	»	−3	»	−14
21	2	1	1	−2	»	−12	−5	−1	1	−2	7	»	3	»	−4	−14	−13
22	»	2	»	−3	»	−11	»	−2	»	−1	»	»	»	1	»	−13	»
23	»	3	2	−4	−8	−12	−6	−3	2	»	6	11	4	0	»	−12	−12
24	1	»	3	»	−9	»	−5	»	»	»	5	»	3	»	−3	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	4	»	»	»	−11	»	−2	»	0	»	10	»	−1	»	−13	»
27	0	»	2	−3	−8	»	−4	−1	1	−1	»	9	4	0	−2	−14	−13
28	1	»	1	»	»	»	−5	»	»	»	4	»	5	»	−3	»	−12
29	2	3	2	»	−7	−12	»	−2	0	0	5	8	4	1	−4	»	−11
30	»	4	»	−4	»	−13	»	−1	»	1	»	9	»	»	»	−15	»
31	1	»	»	−5	−6	−14	−6	−2	−1	»	4	»	3	0	−5	−14	»
32	»	»	3	»	−5	»	−7	»	0	»	5	»	4	»	−6	»	»
33	0	5	2	−6	»	−13	»	»	−1	2	6	8	3	−1	−7	−13	»
34	»	6	»	−7	»	»	»	−1	»	1	»	7	»	−2	»	−14	»
35	−1	5	3	»	−6	−12	−8	−2	0	0	7	6	»	−1	−6	−15	−10
36	0	»	2	»	−7	»	−7	»	1	»	»	»	4	»	−7	»	−11
37	−1	4	1	−6	−8	−11	−8	−3	»	1	8	7	3	0	»	−16	−10
38	»	3	»	−7	»	−10	»	−2	»	0	»	8	»	1	»	»	»
39	0	4	2	−8	»	−9	−7	−3	0	1	9	7	2	»	−6	−15	−9
40	−1	»	»	»	−9	»	−6	»	1	»	8	»	1	»	−5	»	»
41	»	3	1	−7	−10	−8	−5	−2	0	»	9	8	0	2	−4	−14	−8
42	»	2	»	−6	»	−7	»	»	»	0	»	7	»	1	»	−13	»
43	0	3	2	−5	−11	»	−6	−1	1	1	10	6	−1	0	»	−12	−9
44	−1	»	1	»	−10	»	−7	»	2	»	9	»	»	»	−3	»	»
45	0	»	2	−6	−11	−6	−6	−2	1	2	»	»	−2	−1	−4	−13	−10
46	»	2	»	−5	»	−7	»	−3	»	3	»	5	»	0	»	−12	»
47	−1	1	1	−4	−12	−6	»	−2	0	4	10	4	−1	−1	−5	»	−11
48	0	»	2	»	»	»	−5	»	−1	»	9	»	−2	»	−6	»	−12
49	1	2	2	−5	−11	−5	−4	−3	0	5	8	4	−3	−2	−7	−11	−13

2000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	−13	−12	−6	−2	−3	2	5	8	0	−1	9	8	−2	−3	−12	−11	−1
1	»	−11	−7	−1	−4	1	4	9	1	»	10	7	−3	−4	»	−12	0
2	−14	»	−8	»	−5	»	5	»	2	»	9	»	−2	»	−11	»	»
3	−13	−12	−7	0	−4	»	4	8	3	−2	8	8	»	−3	»	−11	−1
4	»	−11	»	»	»	2	»	7	»	−3	»	»	»	−4	»	−12	»
5	−14	»	»	−1	−5	1	5	6	4	−2	»	7	−1	−5	−12	−11	−2
6	−13	»	−6	»	−4	»	4	»	»	»	9	»	0	»	−13	»	−3
7	−12	−10	−5	0	−5	2	»	»	»	−1	8	8	1	−6	−12	»	−2
8	»	−11	»	1	»	1	»	»	»	−2	»	9	»	»	»	−10	»
9	−13	−12	»	»	−4	2	»	7	3	−1	»	»	0	−5	−13	−11	−1
10	»	»	−6	»	−5	»	5	»	2	»	9	»	−1	»	−14	»	−2
11	−12	−11	−7	0	»	3	4	»	1	−2	8	8	−2	−4	−15	−10	»
12	»	−10	»	»	»	»	»	8	»	−3	»	9	»	−3	»	−9	»
13	−11	−9	»	»	−6	4	3	7	0	−4	7	10	»	−2	−14	−8	−1
14	−10	»	−6	»	−5	»	2	»	−1	»	»	»	−3	»	−15	»	−2
15	»	−8	»	1	−4	3	1	6	»	−3	8	9	−2	−3	−14	−9	−1
16	»	−7	»	0	»	4	»	7	»	»	»	8	»	»	»	»	»
17	−9	−8	−5	−1	»	5	0	6	0	−2	9	7	−1	»	−15	−10	0
18	−8	»	»	»	−5	»	1	»	−1	»	10	»	−2	»	−14	»	1
19	»	−7	−4	−2	−4	6	2	5	0	»	11	6	−1	−2	−13	−9	2
20	»	−6	»	−1	»	5	»	»	»	−1	»	5	»	−1	»	−8	»
21	−9	−7	−3	−2	−3	»	3	6	−1	0	10	6	0	−2	»	−7	1
22	−8	»	−2	»	»	»	2	»	0	»	9	»	»	»	−14	»	0
23	−9	»	−3	−3	−2	4	»	7	1	1	»	5	1	−3	−15	−8	»
24	»	−6	»	−2	»	5	»	6	»	2	»	4	»	−2	»	−7	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−8	»	−4	»	»	»	3	»	2	»	10	»	2	»	−14	»	−1
27	−7	−7	»	−3	−1	6	2	7	3	3	11	»	3	−3	−13	−8	»
28	»	−8	»	−4	»	5	»	8	»	»	»	3	»	−4	»	−7	»
29	−8	−7	−3	−5	0	4	1	»	2	2	12	4	4	−5	−12	−6	»
30	−9	»	−2	»	−1	»	2	»	3	»	11	»	3	»	»	»	0
31	−8	−6	−3	»	−2	5	3	7	2	3	12	3	»	−6	−13	−5	−1
32	»	»	»	−4	»	6	»	6	»	4	»	2	»	−7	»	−6	»
33	−9	−7	−4	−3	−3	7	4	5	»	5	11	3	2	−8	−12	−5	0
34	»	»	−5	»	−2	»	»	»	1	»	12	»	1	»	−11	»	−1
35	−8	−6	−4	−4	»	8	3	4	0	4	11	4	2	»	−10	−6	»
36	»	−7	»	−5	»	7	»	3	»	5	»	»	»	−7	»	−7	»
37	»	−8	−3	−6	−1	6	2	2	−1	»	10	3	1	−8	−11	−6	0
38	−9	»	−2	»	0	»	3	»	0	»	9	»	0	»	−12	»	»
39	−8	−9	−1	−7	1	»	2	1	−1	6	8	2	−1	−9	»	−5	−1
40	»	−10	»	»	»	5	»	2	»	7	»	1	»	−10	»	−4	»
41	−9	»	0	−6	2	6	3	1	−2	8	»	2	−2	−9	−13	−3	»
42	−10	»	−1	»	3	»	4	»	»	»	7	»	−1	»	−12	»	−2
43	−11	−9	0	−5	4	5	»	0	−3	7	6	1	−2	−10	−11	»	−3
44	»	−8	»	−4	»	6	»	−1	»	8	»	0	»	»	»	−4	»
45	−10	−7	»	−3	5	7	5	0	−2	9	7	»	−3	−9	−12	−3	−2
46	»	»	−1	»	4	»	6	»	−3	»	8	»	−2	»	−11	»	−3
47	−11	−6	−2	−2	3	6	7	»	−2	»	7	−1	−3	−10	−12	−2	»
48	»	−7	»	−3	»	»	»	1	»	8	»	−2	»	−11	»	−1	»
49	−12	−6	−2	−3	2	5	8	0	−1	9	8	−2	−3	−12	−11	−1	−4

3000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	−4	4	10	− 6	−13	−22	−23	−18	−15	−6	−3	3	8	11	17	20	16
1	−5	»	11	− 5	−14	−23	−24	−17	−14	−7	»	4	9	10	16	19	17
2	»	5	»	− 6	»	−24	»	−16	»	−8	»	5	»	11	»	18	»
3	−6	6	12	− 7	−15	−25	»	−17	−15	−7	−2	6	10	10	15	»	18
4	−5	»	13	»	»	»	−23	»	−16	»	−3	»	9	»	16	»	19
5	−6	7	»	− 6	−16	−24	−22	−18	−17	−6	−4	»	10	11	17	19	18
6	»	8	»	− 5	»	−25	»	−17	»	»	»	7	»	10	»	20	»
7	−7	7	12	− 6	−15	−24	−23	»	−18	−5	−3	8	9	11	16	19	»
8	−6	»	11	»	−16	»	−22	»	−17	»	−4	»	10	»	»	»	17
9	−5	6	10	»	−15	»	−21	−18	−16	−6	−5	7	»	10	15	20	16
10	»	»	»	− 7	»	−25	»	−17	»	−5	»	6	»	11	»	19	»
11	−4	7	11	− 8	−14	−24	−22	−16	»	−6	−6	5	11	»	16	18	15
12	−3	»	»	»	−13	»	»	»	−15	»	−5	»	12	»	15	»	»
13	−2	6	10	− 9	»	−23	−21	−15	−16	−5	−4	6	11	»	16	17	14
14	»	7	»	−10	»	−22	»	−16	»	−6	»	»	»	12	»	18	»
15	»	8	9	−11	−14	−21	−22	−17	−15	»	−3	5	10	13	17	19	15
16	−1	»	8	»	−15	»	−21	»	−14	»	−2	»	11	»	16	»	»
17	0	7	7	−12	−16	»	−20	−18	−15	−5	−3	6	10	12	»	20	14
18	»	8	»	»	»	−20	»	−17	»	−6	»	7	»	13	»	21	»
19	1	»	8	−13	−17	−21	−19	−18	−16	−7	»	6	9	12	17	20	15
20	0	»	9	»	−18	»	−18	»	»	»	−4	»	8	»	18	»	14
21	1	7	8	−12	−17	−22	»	−17	−17	−8	−3	5	7	11	17	»	13
22	»	8	»	−11	»	−23	»	−18	»	−7	»	4	»	»	»	19	»
23	2	9	»	−10	−16	−22	»	−17	−16	−8	−2	»	8	12	18	18	12
24	»	»	7	»	−17	»	−19	»	−15	»	−3	»	»	»	19	»	11
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	8	»	−11	»	»	»	−16	»	−9	»	3	»	13	»	19	»
27	3	9	6	»	−18	−21	−20	−17	−14	−8	−2	4	»	14	20	20	12
28	4	»	5	»	−19	»	−19	»	−13	»	»	»	7	»	19	»	11
29	3	10	4	−12	−18	−22	−20	−16	»	−7	−3	3	»	13	20	19	12
30	»	9	»	−13	»	−23	»	−17	»	−6	»	2	»	14	»	»	»
31	4	10	5	−14	»	−22	−19	−16	−12	−5	−4	3	6	»	21	18	»
32	5	»	»	»	−19	»	−20	»	−11	»	−5	»	5	»	20	»	11
33	»	9	4	−13	»	−23	»	−15	−10	»	−6	4	6	15	»	17	12
34	»	8	»	−12	»	−24	»	»	»	−6	»	5	»	»	»	18	»
35	4	7	3	−11	−18	»	−19	−14	−11	−5	−5	6	»	16	»	17	13
36	3	»	2	»	−19	»	−18	»	−10	»	−4	»	»	»	19	»	14
37	4	»	1	−12	−18	−25	−19	−15	− 9	−6	»	5	5	15	20	18	15
38	»	8	»	»	»	−24	»	−16	»	»	»	4	»	16	»	19	»
39	5	7	0	−13	−19	−23	»	−17	»	−5	−5	5	6	17	19	»	14
40	6	»	− 1	»	»	»	»	»	−8	»	−4	»	7	»	20	»	15
41	5	8	»	−14	−20	−22	»	−16	−7	−6	−3	»	6	18	21	20	14
42	»	9	»	−15	»	»	»	−15	»	»	»	6	»	19	»	19	»
43	4	10	− 2	−14	»	−23	−18	»	−6	−5	−2	7	7	18	22	18	»
44	5	»	− 3	»	−21	»	−17	»	−7	»	−1	»	8	»	»	»	15
45	4	»	»	»	−22	−22	−18	−16	−6	−4	0	6	»	17	23	17	14
46	»	»	»	−13	»	−21	»	−17	»	−3	»	»	»	16	»	16	»
47	»	9	− 4	−12	−23	−22	−19	−16	»	−2	1	7	9	17	22	15	15
48	3	»	− 5	»	−22	»	»	»	−5	»	2	»	10	»	21	»	16
49	4	10	− 6	−13	−22	−23	−18	−15	−6	−3	3	8	11	17	20	16	15

4000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	15	15	12	5	0	−5	−7	−7	−7	−7	−9	−15	−9	−13	−20	−14	−7
1	16	14	»	6	1	−4	−8	»	−8	−8	−8	»	−10	−14	−19	−13	−8
2	»	»	11	»	2	»	−9	»	−7	»	−7	»	−9	»	−20	»	−9
3	17	15	12	5	3	−3	»	»	−8	−9	−6	−14	−10	−15	−19	−14	»
4	»	14	»	6	»	»	»	−6	»	−10	»	−15	»	−14	»	−15	»
5	16	15	13	»	2	−4	−8	−5	−7	−11	−7	−16	»	−13	−18	−16	»
6	15	»	14	»	1	»	−9	»	−8	»	»	»	−9	»	−17	»	−10
7	14	14	13	5	0	−5	−8	»	»	−12	−8	−15	−10	−14	»	−17	−9
8	»	15	»	4	»	−6	»	−4	»	−13	»	−14	»	−13	»	»	»
9	15	16	»	3	»	−7	−9	−5	−7	−12	−7	−13	−9	»	−16	−18	−10
10	16	»	»	»	»	»	−8	»	−6	»	−6	»	−10	»	−15	»	−11
11	»	15	12	4	1	−6	−7	−6	−5	»	−7	−12	−11	−12	−16	−19	−12
12	»	14	»	3	»	−5	»	»	»	−11	»	−13	»	−13	»	−18	»
13	15	13	13	4	0	»	−6	−5	−6	−12	−8	−12	−12	−12	»	−17	−11
14	14	»	12	»	−1	»	−7	»	−5	»	−9	»	»	»	»	»	»
15	15	»	11	3	−2	−4	−6	−6	−6	−11	»	−13	−13	−13	−15	»	−12
16	»	14	»	4	»	−3	»	−7	»	−10	»	−14	»	−14	»	−16	»
17	14	13	10	3	−3	−2	»	−8	−5	−9	−10	−15	−14	»	−14	»	−13
18	15	»	11	»	»	»	»	»	−6	»	−11	»	»	»	−15	»	−12
19	16	12	»	4	−4	−1	−7	−9	−7	−8	−12	»	−15	−13	−14	−15	−13
20	»	11	»	3	»	−2	»	−8	»	»	»	−16	»	−12	»	−14	»
21	17	10	12	2	−5	−3	»	»	−8	»	−11	»	−16	−13	−13	−13	»
22	16	»	11	»	−4	»	−6	»	»	»	−12	»	−15	»	»	»	−12
23	15	11	12	»	−5	−4	−7	»	−9	−7	−13	−15	»	−14	−14	−14	−11
24	»	»	»	3	»	−5	»	−7	»	−8	»	−14	»	−13	»	−13	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	14	»	11	»	»	»	»	»	−8	»	−14	»	−14	»	−13	»	−10
27	15	10	10	»	»	−6	−8	−6	−7	−9	−13	−13	−15	»	−14	−14	−9
28	»	9	»	4	»	−7	»	−5	»	−10	»	»	»	−12	»	−13	»
29	»	»	9	5	−4	−6	−9	−6	−6	»	−14	−12	−16	−13	−15	−14	−10
30	»	»	8	»	»	»	−10	»	−7	»	−13	»	−15	»	−14	»	»
31	16	»	7	4	−5	»	−11	−5	−6	−11	−14	−11	−14	−14	»	−13	−11
32	»	10	»	»	»	−7	»	−6	»	−12	»	−12	»	−15	»	−12	»
33	15	»	6	3	−6	−6	−12	−7	−7	−11	»	−11	−13	−14	−15	−11	−12
34	14	»	7	»	−7	»	−11	»	»	»	−15	»	−12	»	−14	»	−13
35	13	9	6	2	−6	−7	»	−6	−8	−10	−14	−10	−13	−15	−13	»	»
36	»	10	»	1	»	−8	»	−7	»	−11	»	−9	»	»	»	−10	»
37	14	11	»	2	−7	−7	−10	−6	−7	»	−13	»	−12	−14	−14	−9	−12
38	»	»	5	»	−8	»	−9	»	−8	»	−14	»	−13	»	−13	»	−13
39	15	12	4	3	−7	−8	−10	»	−7	−12	−15	−10	−12	−15	−14	−8	»
40	»	11	»	2	»	»	»	−7	»	−13	»	−11	»	−16	»	−9	»
41	14	10	3	»	−6	−9	−11	−6	−6	−12	−14	−10	»	−17	−13	−10	−14
42	15	»	4	»	−7	»	−10	»	−7	»	»	»	−13	»	−14	»	−13
43	16	11	5	1	−8	−8	−9	−7	»	−11	−15	»	−12	−18	−13	−9	−14
44	»	12	»	0	»	−7	»	−8	»	−10	»	−9	»	−19	»	»	»
45	15	11	6	1	»	−6	−10	−7	−6	−11	−16	−10	−11	»	−12	−8	−15
46	16	»	»	»	−7	»	−9	»	−7	»	−15	»	»	»	−13	»	−16
47	»	12	5	0	−6	−7	−8	−8	−8	»	−16	−9	−12	−18	−14	−7	−15
48	»	13	»	−1	»	»	»	»	»	−10	»	−8	»	−19	»	−6	»
49	15	12	5	0	−5	−7	−7	−7	−7	−9	−15	−9	−13	−20	−14	−7	−14

5000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	−14	−12	−10	− 9	− 7	−4	−4	−1	−3	−2	4	9	17	19	12	2	−4
1	−15	−13	− 9	»	− 8	−3	−5	0	−4	−1	3	8	»	»	11	3	−5
2	»	»	»	−10	»	−2	»	1	»	0	»	»	»	20	»	2	»
3	−16	−12	− 8	−11	− 7	−3	−4	0	»	−1	»	9	18	19	10	1	−4
4	−17	»	− 9	»	− 8	»	»	»	−5	»	4	»	17	»	11	»	»
5	−18	−11	−10	−10	»	−4	−3	−1	»	0	3	»	18	»	12	2	−5
6	»	−10	»	− 9	»	−5	»	»	»	−1	»	»	»	18	»	3	»
7	»	− 9	−11	−10	− 9	−6	»	0	−6	»	4	8	19	19	11	4	−4
8	−17	»	−10	»	−10	»	−4	»	−7	»	5	»	18	»	10	»	»
9	−18	− 8	− 9	−11	»	»	−3	1	−6	0	4	7	19	18	»	3	−5
10	»	− 9	»	»	»	−5	»	0	»	1	»	8	»	17	»	4	»
11	−19	»	»	−10	− 9	−4	−4	−1	−5	2	»	9	18	18	»	3	−6
12	−18	»	−10	»	−10	»	−3	»	»	»	5	»	19	»	9	»	−5
13	»	− 8	−11	− 9	−11	−5	»	0	−6	3	6	8	20	»	10	»	−4
14	»	− 9	»	− 8	»	−6	»	−1	»	4	»	7	»	»	»	2	»
15	−17	− 8	»	− 7	−12	−5	−4	−2	−7	3	7	»	19	19	9	1	−3
16	»	»	−12	»	−11	»	−5	»	−6	»	8	»	18	»	8	»	−4
17	−16	− 7	−11	− 6	−10	−6	−6	»	−5	4	7	6	19	18	7	2	»
18	»	− 8	»	»	»	»	»	−1	»	3	»	7	»	19	»	1	»
19	−15	− 7	−10	»	− 9	−7	−5	0	−6	»	8	8	»	18	6	0	−3
20	−14	»	− 9	»	− 8	»	−6	»	−7	»	»	»	18	»	7	»	»
21	−15	− 6	−10	− 7	− 7	−8	−5	−1	»	2	9	9	17	17	8	−1	−2
22	»	− 5	»	− 6	»	−7	»	0	»	1	»	10	»	16	»	»	»
23	−16	− 6	−11	− 7	»	−8	−4	−1	−8	0	8	9	18	»	7	−2	−3
24	−15	»	»	»	− 6	»	−3	»	−7	»	9	»	19	»	6	»	−4
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	− 5	»	− 6	»	−9	»	»	»	−1	»	8	»	15	»	−3	»
27	−16	− 6	−10	− 5	»	»	−2	0	−6	0	10	9	18	16	»	−2	−5
28	−15	»	−11	»	− 5	»	−1	»	−5	»	11	»	»	»	5	»	−4
29	−14	»	−10	− 4	− 4	−8	0	1	−6	−1	»	10	17	15	6	−1	−3
30	»	− 7	»	− 5	»	−7	»	0	»	0	»	9	»	16	»	−2	»
31	−13	− 6	− 9	− 6	− 5	−6	»	1	−5	−1	12	8	18	15	7	»	−4
32	−12	»	−10	»	»	»	−1	»	−4	»	11	»	19	»	6	»	»
33	−13	− 5	»	− 7	− 6	−5	−2	2	−5	−2	10	»	20	14	5	−1	−5
34	»	− 6	»	− 8	»	−4	»	1	»	»	»	9	»	15	»	−2	»
35	−12	»	− 9	− 7	− 5	−3	−3	»	−4	−1	11	10	21	16	6	−3	»
36	−11	»	− 8	»	− 4	»	−2	»	−3	»	12	»	20	»	»	»	−4
37	−10	− 7	− 7	»	− 3	−2	−3	0	−2	0	11	11	»	15	5	−4	−5
38	»	»	»	− 8	»	−1	»	−1	»	−1	»	10	»	14	»	−5	»
39	−11	− 8	− 6	− 7	»	−2	−2	−2	»	0	10	11	19	15	6	−6	−4
40	−12	»	− 7	»	− 4	»	»	»	−1	»	9	»	20	»	5	»	−5
41	−11	− 7	− 8	− 8	»	−1	−3	−1	−2	1	10	12	21	»	4	»	−4
42	»	− 8	»	− 7	»	−2	»	−2	»	2	»	»	»	14	»	−5	»
43	»	− 7	− 7	− 6	− 5	−3	−2	−3	»	»	9	13	20	13	3	»	−3
44	−12	»	»	»	− 4	»	−1	»	−1	»	10	»	21	»	2	»	»
45	−11	− 8	− 8	− 7	− 5	»	0	−2	−2	1	9	14	20	12	»	−4	−2
46	»	− 9	»	»	»	−2	»	−3	»	2	»	15	»	13	»	»	»
47	−12	»	− 9	− 8	− 4	−3	−1	−2	−3	3	»	16	21	12	3	»	−1
48	−13	»	−10	»	− 5	»	»	»	»	»	10	»	20	»	»	»	0
49	−12	−10	− 9	− 7	4	−4	−1	−3	−2	4	9	17	19	12	2	−4	−1

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	−1	−2	0	0	−2	3	10	8	10	9	9	14	7	2	6	0	−9
1	−2	−3	1	1	»	2	11	7	9	8	10	13	6	»	5	−1	−10
2	−1	»	»	»	−3	»	10	»	10	»	11	»	7	»	4	»	−11
3	»	−4	»	0	−4	3	11	6	9	»	12	12	8	3	5	0	−12
4	»	−5	»	−1	»	4	»	»	»	9	»	11	»	4	»	1	»
5	0	−4	0	0	−3	»	10	7	8	8	11	12	7	5	»	2	−11
6	1	»	−1	»	−4	»	11	»	9	»	12	»	»	»	6	»	−10
7	0	»	0	1	−5	5	10	6	8	7	»	11	8	4	5	1	−11
8	»	−3	»	0	»	6	»	7	»	6	»	12	»	5	»	0	»
9	−1	−4	−1	1	−6	7	»	8	9	5	13	11	7	6	6	»	−10
10	0	»	−2	»	»	»	9	»	10	»	12	»	6	»	7	»	−9
11	1	−3	»	0	−5	8	10	9	9	6	13	»	5	7	6	−1	−8
12	»	−4	»	−1	»	7	»	10	»	»	»	10	»	6	»	−2	»
13	0	−3	−1	0	−4	8	9	»	10	5	14	11	6	5	5	−3	»
14	1	»	0	»	−3	»	10	»	9	»	13	»	7	»	»	»	−7
15	2	−2	−1	»	−2	7	»	11	10	6	14	10	»	6	6	−2	»
16	»	»	»	1	»	8	»	10	»	»	»	11	»	»	»	−3	»
17	1	−3	−2	2	−1	9	9	9	»	7	15	12	6	7	5	−4	−6
18	0	»	−1	»	0	»	»	»	9	»	»	»	5	»	6	»	−7
19	−1	−2	0	3	»	8	8	10	8	6	16	11	4	»	»	−5	−6
20	»	−1	»	4	»	9	»	9	»	5	»	»	»	6	»	−6	»
21	»	−2	1	3	1	10	7	8	7	»	15	12	5	7	5	−7	−5
22	−2	»	0	»	0	»	8	»	6	»	14	»	6	»	4	»	»
23	−1	−1	1	2	−1	»	7	9	5	4	13	11	7	8	»	−6	−6
24	»	−2	»	»	»	11	»	10	»	3	»	12	»	9	»	−5	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−2	»	2	»	0	»	8	»	»	»	12	»	6	»	3	»	−5
27	−1	−1	1	3	1	12	»	9	4	»	13	13	5	10	2	»	−6
28	»	−2	»	4	»	13	»	10	»	4	»	12	»	»	»	−4	»
29	0	−3	»	3	»	12	9	9	3	5	14	»	6	9	1	−5	»
30	»	»	0	»	2	»	10	»	4	»	13	»	7	»	2	»	−7
31	1	−4	−1	2	3	11	9	»	3	4	14	11	8	8	»	−6	»
32	»	−3	»	1	»	»	»	10	»	5	»	10	»	»	»	−7	»
33	0	−2	−2	»	2	12	10	9	4	6	15	9	»	7	3	−8	−6
34	−1	»	−1	»	3	»	11	»	5	»	»	»	7	»	4	»	−5
35	−2	−3	−2	0	2	11	12	10	»	7	»	8	6	6	3	−9	−4
36	»	−2	»	−1	»	12	»	9	»	»	»	9	»	5	»	»	»
37	−1	−1	−3	0	»	11	11	8	»	8	16	»	5	»	4	»	−3
38	−2	»	»	»	1	»	12	»	6	»	17	»	4	»	5	»	−2
39	»	−2	»	−1	2	12	»	9	7	»	16	8	5	6	4	−10	−3
40	»	−1	»	»	»	»	»	»	»	9	»	7	»	7	»	−9	»
41	−1	0	−2	−2	»	»	11	»	8	8	15	6	4	6	»	−8	−2
42	−2	»	−1	»	3	»	10	»	7	»	16	»	»	»	3	»	−1
43	−1	»	»	−1	2	11	9	10	8	7	»	5	3	7	2	−7	−2
44	»	»	»	0	»	12	»	9	»	8	»	6	»	8	»	−8	»
45	»	1	0	−1	3	11	»	8	9	7	17	5	2	7	1	»	−3
46	−2	»	−1	»	»	»	8	»	8	»	16	»	»	»	0	»	−4
47	−3	0	»	−2	2	10	9	9	»	8	15	»	3	6	1	−9	−3
48	»	−1	»	−3	»	11	»	10	»	»	»	6	»	5	»	−10	»
49	−2	0	0	−2	3	10	8	10	9	9	14	7	2	6	0	−9	−3

6000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	−3	0	5	−5	−7	−3	−6	−13	−16	−25	−15	−16	−12	−20	−12	−15	−15
1	−2	1	6	−6	−8	»	−7	−14	−17	−24	−16	−17	−13	−21	»	−16	−14
2	»	2	»	»	»	−4	»	−15	»	−23	»	−16	»	−20	»	−17	»
3	−3	»	5	−5	−9	−5	»	−16	−18	−22	»	−15	−14	−21	−13	−18	−13
4	−4	»	4	»	−10	»	−8	»	»	»	−17	»	−15	»	−14	»	−14
5	−5	3	3	−4	−9	−6	»	−17	−19	−21	−16	−14	−14	−20	»	»	−15
6	»	2	»	−5	»	−7	»	−18	»	−20	»	−13	»	»	»	−19	»
7	−6	1	»	−4	−8	−6	−9	−19	−20	−19	−15	»	−13	−21	−15	−18	−14
8	»	»	2	»	−7	»	−8	»	»	»	−14	»	−14	»	−14	»	−15
9	−5	2	3	−3	−6	−5	−7	»	−21	−20	−13	−12	−13	−20	−15	−19	»
10	»	1	»	−2	»	»	»	−20	»	−21	»	−13	»	−21	»	−18	»
11	−4	0	2	»	−5	−6	−6	−21	−22	−20	−14	−12	»	−20	−16	−17	−16
12	−5	»	1	»	−4	»	−7	»	−21	»	»	»	−14	»	−15	»	»
13	−4	1	0	−3	−5	−7	−8	−20	»	»	−13	−13	−15	−19	−14	»	−17
14	»	0	»	−4	»	−8	»	−19	»	−21	»	−12	»	−18	»	»	»
15	−3	−1	1	−3	»	−9	−9	−20	−22	−20	−14	−11	−16	»	−15	−18	−16
16	−4	»	»	»	−4	»	−10	»	−23	»	−15	»	»	»	−14	»	−17
17	»	0	0	−2	−3	−10	−9	−21	−24	»	−14	»	−17	−17	−13	−17	−16
18	»	1	»	−1	»	−9	»	»	»	−19	»	−10	»	−18	»	−16	»
19	−3	2	»	0	−2	»	−10	−20	−25	»	−15	−11	−18	−19	»	−17	−15
20	−2	»	−1	»	−3	»	−11	»	»	»	−16	»	»	»	−12	»	−16
21	−1	»	0	−1	»	−10	−12	»	−24	−20	»	−12	−19	−18	−11	−18	−17
22	»	3	»	0	»	−9	»	−21	»	»	»	−13	»	−17	»	−17	»
23	−2	4	−1	−1	−4	»	»	−22	−25	−19	−17	−12	−20	−16	−12	»	−16
24	−3	»	0	»	»	»	−11	»	−24	»	−16	»	−21	»	−13	»	−17
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	3	»	−2	»	−10	»	−21	»	»	»	−13	»	−15	»	−16	»
27	−2	»	1	−1	−5	−9	−12	»	−23	−20	−17	−12	−22	»	−12	»	»
28	»	»	0	»	−4	»	−13	»	−24	»	−18	»	−21	»	»	»	−16
29	−1	2	−1	»	−3	−10	−12	−22	−25	−19	−19	−13	»	−14	−13	−15	−17
30	»	»	»	−2	»	−9	»	−21	»	−20	»	−14	»	−15	»	−16	»
31	−2	3	0	−3	−2	−10	−11	−20	»	−19	−20	−15	−22	−14	−14	−15	−18
32	−3	»	1	»	−3	»	»	»	−24	»	−21	»	−23	»	−15	»	−17
33	−2	4	0	−4	»	−9	−10	−19	−23	−18	−20	−14	−22	»	−14	−16	−16
34	»	3	»	−3	»	−10	»	−18	»	−17	»	»	»	−15	»	−15	»
35	»	2	1	−4	−2	−11	−11	−19	−22	»	−19	−13	−23	−14	−15	−16	−17
36	−3	»	0	»	−3	»	−12	»	−23	»	−18	»	−24	»	−14	»	»
37	−4	1	1	»	−2	»	−13	−20	−22	−16	−17	−12	−23	−15	»	−17	−16
38	»	2	»	»	»	−10	»	−19	»	−15	»	−13	»	−14	»	−18	»
39	−3	»	0	−3	−1	−9	−12	−18	−23	−14	»	−12	−22	−13	−15	−17	−17
40	−4	»	−1	»	−2	»	−11	»	»	»	−16	»	−23	»	−14	»	−16
41	−3	3	−2	−4	−1	»	»	−17	−24	−15	−17	−11	»	−12	−15	»	−17
42	»	4	»	−5	»	−8	»	−16	»	−14	»	−10	»	»	»	−16	»
43	−2	3	»	−6	0	−7	−12	−17	−23	−13	−16	»	−22	−13	−16	−15	−18
44	»	»	−3	»	−1	»	−13	»	−24	»	−17	»	−21	»	−15	»	−19
45	−3	4	−4	−5	0	−6	−12	»	−23	−12	−18	−9	−20	−14	−16	−16	»
46	»	5	»	−6	»	»	»	−18	»	−13	»	−10	»	−13	»	−15	»
47	−2	4	−5	»	−1	−7	−11	−17	−24	−14	−17	−11	»	»	−15	−16	−18
48	−1	»	−4	»	−2	»	−12	»	−25	»	»	»	−19	»	−16	»	−17
49	0	5	−5	−7	−3	−6	−13	−16	−25	−15	−16	−12	−20	−12	−15	−15	−16

7000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-16	-14	-18	-16	-25	-26	-14	-5	0	3	7	5	10	17	15	8	-4
1	-15	-15	-17	-17	-26	-25	»	-6	1	4	»	4	11	16	16	»	-3
2	-16	»	-16	»	»	»	-15	»	0	»	6	»	12	»	»	»	-2
3	-17	-16	»	-16	-25	-24	-16	-5	»	3	7	»	13	17	15	7	-3
4	»	-17	»	-15	»	-23	»	»	»	»	»	5	»	18	»	6	»
5	-16	-18	-15	-16	-26	-24	»	»	-1	4	6	6	14	19	14	7	»
6	-17	»	-16	»	-27	»	-15	»	-2	»	5	»	»	»	»	»	-2
7	-16	-19	-17	»	»	-25	-16	-4	-3	3	4	7	»	18	13	6	-3
8	»	»	»	»	»	-24	»	-5	»	2	»	6	»	19	»	7	»
9	-15	»	»	-17	-26	-25	-17	-6	»	1	3	5	15	18	14	6	-2
10	-14	»	-18	»	-27	»	»	»	-2	»	4	»	14	»	13	»	-3
11	»	-18	-19	-18	»	-24	-16	-5	-3	2	5	6	13	»	12	5	-4
12	»	-19	»	»	»	-23	»	-4	»	3	»	»	»	19	»	4	»
13	»	-20	-18	-19	-28	-22	-15	-5	-4	»	6	7	12	20	13	5	-3
14	-13	»	-17	»	-27	»	-14	»	-3	»	7	»	11	»	»	»	»
15	-14	-19	-18	-20	-28	»	-13	-4	-2	4	8	6	12	21	»	4	-2
16	»	-18	»	»	»	-21	»	-3	»	5	»	5	»	22	»	5	»
17	-13	»	-19	-21	-27	-20	-12	-2	-1	»	»	6	11	21	12	4	-1
18	-14	»	-20	»	»	»	-11	»	»	»	9	»	12	»	13	»	-2
19	-13	-19	-21	-22	-28	-21	»	-1	-2	6	10	5	13	20	14	»	-1
20	»	-18	»	-21	»	-20	»	0	»	5	»	6	»	»	»	3	»
21	-12	-19	»	-22	-29	-19	-12	1	-3	6	9	»	14	21	13	4	-2
22	»	»	-20	»	-28	»	-13	»	-4	»	8	»	13	»	14	»	-3
23	-13	-20	-21	-21	-27	-18	-12	»	-3	7	9	7	14	20	13	3	»
24	»	-21	»	-22	»	»	»	0	»	8	»	6	»	19	»	2	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-12	»	-20	»	-28	»	-13	»	-2	»	»	»	13	»	12	»	-2
27	-13	»	-19	-23	-29	-19	-14	-1	»	9	10	7	14	18	11	1	-1
28	»	-22	»	-24	»	-18	»	-2	»	8	»	8	»	19	»	»	»
29	-14	-21	»	-23	»	-19	-15	-1	-3	9	9	9	13	»	10	0	0
30	-15	»	»	»	-28	»	-14	»	-2	»	8	»	12	»	11	»	1
31	»	-20	-18	-24	-27	-18	-13	0	-1	»	7	»	13	18	12	»	2
32	»	-19	»	-23	»	-17	»	»	»	8	»	10	»	19	»	-1	»
33	-16	-20	-17	-24	-26	»	-12	1	0	7	6	9	12	20	»	-2	3
34	-15	»	-16	»	-25	»	-11	»	1	»	5	»	»	»	13	»	2
35	-14	»	-17	-25	-24	-18	-10	0	2	6	»	8	13	19	12	-3	1
36	»	-21	»	-26	»	-19	»	1	»	7	»	7	»	18	»	-2	»
37	-15	-20	-16	-27	-23	-18	»	0	1	6	4	8	12	17	11	»	2
38	-16	»	-15	»	»	»	-11	»	2	»	3	»	13	»	12	»	3
39	-15	»	»	-26	-24	-19	»	-1	1	7	4	»	14	16	11	-3	2
40	»	-19	»	-25	»	-20	»	-2	»	»	»	7	»	17	»	-4	»
41	-16	-18	-14	-26	-23	-19	-10	»	2	8	5	8	15	16	10	-5	»
42	-17	»	-13	»	-24	»	-9	»	3	»	6	»	»	»	»	»	3
43	-16	-17	-12	»	-25	-18	-8	-3	2	9	7	7	»	17	11	-4	2
44	»	»	»	-27	»	-17	»	-2	»	8	»	8	»	16	»	-3	»
45	»	-18	-13	-26	-24	-16	-7	-1	»	9	6	9	16	17	10	»	1
46	-15	»	-14	»	-25	»	»	»	3	»	7	»	17	»	»	»	2
47	-14	»	-15	-27	»	-15	-6	0	2	8	6	10	18	»	9	-2	3
48	»	-17	»	-26	»	»	»	-1	»	7	»	»	»	16	»	-3	»
49	-14	-18	-16	-25	-26	-14	-5	0	3	7	5	10	17	15	8	-4	2

8000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	2	−5	−6	−2	0	1	−4	−1	10	13	19	23	13	15	21	18	17
1	3	−6	−5	−1	1	0	−5	»	11	12	20	24	14	16	22	19	»
2	»	−5	»	−2	»	»	»	0	»	13	»	23	»	15	»	20	»
3	4	−6	−6	»	0	1	−6	1	10	12	21	24	»	»	21	21	18
4	3	»	−5	»	−1	»	−7	»	11	»	»	»	15	»	22	»	17
5	4	−7	−4	−3	0	2	−8	2	»	13	20	23	14	14	21	»	16
6	»	−6	»	−4	»	1	»	3	»	14	»	22	»	15	»	»	»
7	3	−7	−5	−3	»	0	−7	2	12	»	21	23	15	»	22	22	17
8	2	»	»	»	1	»	−8	»	13	»	22	»	16	»	23	»	18
9	»	−6	−6	−4	2	1	−9	1	12	»	23	22	17	16	24	23	19
10	»	−5	»	−3	»	2	»	»	»	13	»	21	»	17	»	»	»
11	3	−4	−7	−2	3	»	−8	0	13	12	22	22	18	16	»	24	18
12	2	»	−6	»	4	»	−9	»	12	»	23	»	»	»	23	»	19
13	3	»	−5	−1	5	3	−10	1	13	11	»	23	17	15	22	25	20
14	»	−3	»	0	»	2	»	2	»	12	»	»	»	16	»	24	
15	4	−2	−4	−1	»	3	»	1	14	11	22	22	18	17	21	»	21
16	5	»	−5	»	»	»	−11	»	13	»	21	»	19	»	20	»	22
17	4	−3	»	−2	4	4	−10	0	14	10	20	»	20	16	21	25	21
18	»	−4	»	−3	»	3	»	−1	»	»	»	21	»	17	»	26	»
19	3	−5	−4	−2	3	2	−9	»	13	11	19	20	19	16	20	25	»
20	4	»	−5	»	2	»	−10	»	14	»	20	»	18	»	»	»	
21	5	−4	−4	»	3	»	−9	0	15	12	19	19	»	17	21	24	22
22	»	»	»	−1	»	1	»	1	»	11	»	20	»	18	»	25	»
23	4	−5	−3	−2	2	0	−10	2	»	10	20	21	17	17	22	24	23
24	3	»	»	»	1	»	»	»	14	»	19	»	18	»	21	»	22
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−4	»	−1	»	−1	»	3	»	9	»	»	»	16	»	23	
27	»	−5	−4	0	0	−2	−9	4	15	»	18	22	17	17	20	»	»
28	2	»	−3	»	1	»	−8	»	14	»	19	»	18	»	19	»	»
29	3	−4	−2	−1	0	»	−7	3	15	10	18	21	19	16	»	22	23
30	»	−5	»	»	»	−1	»	4	»	11	»	20	»	»	»	23	
31	2	»	−1	0	−1	−2	−6	5	14	12	»	19	»	17	»	22	22
32	1	»	−2	»	−2	»	−7	»	»	»	19	»	18	»	20	»	23
33	0	−6	−1	−1	−3	−3	»	6	15	13	»	18	17	18	21	»	24
34	»	−7	»	0	»	−2	»	7	»	»	»	17	»	»	»	23	»
35	−1	−6	»	1	−4	»	−6	8	»	14	20	»	18	19	22	22	25
36	»	»	−2	»	−3	»	»	»	14	»	21	»	17	»	21	»	26
37	−2	−5	−1	2	−4	−3	»	»	13	15	22	16	16	18	20	21	»
38	»	−6	»	3	»	»	»	9	»	14	»	15	»	17	»	22	»
39	−3	−5	−2	»	»	−2	−5	8	12	15	23	14	»	18	19	21	27
40	−4	»	−1	»	−3	»	−4	»	11	»	»	»	15	»	18	»	28
41	−5	−6	»	2	−2	−1	−3	7	»	16	22	13	14	19	19	22	29
42	»	»	»	1	»	»	»	8	»	17	»	12	»	18	»	»	»
43	»	−7	−2	0	»	»	4	7	10	18	23	11	13	»	18	21	28
44	−4	»	»	»	−1	»	−5	»	11	»	22	»	14	»	17	»	27
45	»	−6	−1	−1	0	−2	−4	8	12	»	21	10	15	19	16	20	28
46	»	−7	»	0	»	−3	»	»	»	19	»	11	»	20	»	19	
47	−3	−6	−2	−1	1	»	−3	9	13	18	22	12	14	21	»	18	29
48	−4	»	−3	»	0	»	−2	»	14	»	23	»	»	»	17	»	28
49	−5	−6	−2	0	1	−4	1	10	13	19	23	13	15	21	18	17	29

9000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	29	32	29	22	18	17	11	3	5	7	1	3	3	3	1	1	−5
1	28	33	28	23	17	18	12	4	»	6	0	2	4	2	2	»	−4
2	29	»	29	»	16	»	»	»	6	»	−1	»	5	»	1	»	−3
3	30	34	30	24	»	17	11	3	7	7	0	3	4	»	0	2	−4
4	»	35	»	25	»	16	»	2	»	»	»	»	»	1	»	1	»
5	»	34	31	24	17	15	10	3	6	»	1	4	3	2	−1	0	−3
6	31	»	30	»	16	»	11	»	5	»	2	»	2	»	0	»	»
7	32	35	29	25	15	»	10	4	6	»	1	5	3	1	»	−1	−2
8	»	34	»	»	»	14	»	3	»	6	»	4	»	0	»	−2	»
9	33	»	28	26	16	15	11	4	7	»	»	3	2	−1	−1	−1	−3
10	34	»	27	»	17	»	10	»	»	»	2	»	1	»	0	»	»
11	35	35	28	27	18	14	»	3	6	5	1	2	2	−2	1	»	−4
12	»	34	»	26	»	13	»	4	»	6	»	1	»	»	»	−2	»
13	34	33	»	25	17	12	11	3	7	5	0	»	3	»	0	−1	−3
14	»	»	27	»	18	»	12	»	8	»	1	»	»	»	−1	»	−2
15	33	32	28	26	19	13	11	»	9	4	0	»	4	−1	−2	−2	»
16	»	33	»	25	»	»	»	4	»	5	»	0	»	0	»	−3	»
17	32	34	29	»	20	14	12	3	10	»	1	−1	»	1	−1	−2	»
18	33	»	28	»	19	»	13	»	»	»	»	»	3	»	−2	»	−3
19	34	33	»	24	18	13	12	»	»	4	2	0	4	2	−3	−3	−4
20	»	32	»	»	»	12	»	2	»	3	»	−1	»	3	»	»	»
21	33	33	29	23	»	»	11	3	11	2	1	0	5	»	−4	−2	−5
22	34	»	»	»	»	»	10	»	10	»	0	»	6	»	−3	»	−6
23	»	32	28	»	17	13	9	4	9	»	1	1	7	2	−2	−3	−7
24	»	31	»	24	»	12	»	»	»	1	»	0	»	3	»	−2	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	27	»	18	»	8	»	10	»	2	»	»	»	−3	»	−6
27	33	»	26	23	19	13	7	3	11	2	»	1	6	4	−4	−3	−5
28	»	32	»	24	»	12	»	2	»	»	»	2	»	3	»	−2	»
29	34	33	25	23	18	11	»	3	10	1	1	3	5	4	−3	»	−4
30	33	»	24	»	»	»	6	»	11	»	0	»	6	»	−2	»	−3
31	34	32	»	22	17	12	5	4	10	2	1	»	7	3	−3	−3	−4
32	»	31	»	21	»	13	»	5	»	»	»	2	»	4	»	−4	»
33	33	32	25	22	16	12	»	»	9	3	2	3	6	5	−2	−5	»
34	32	»	24	»	15	»	4	»	8	»	3	»	7	»	»	»	−5
35	31	31	23	»	16	11	5	6	9	2	2	2	»	4	−1	−6	−4
36	»	»	»	21	»	10	»	5	»	3	»	3	»	3	»	−5	»
37	30	32	24	20	15	9	4	4	»	2	3	2	6	2	0	−4	−5
38	29	»	23	»	14	»	»	»	8	»	4	»	5	»	−1	»	−4
39	28	31	24	19	»	8	3	5	9	3	3	3	4	»	−2	−3	−5
40	»	30	»	20	»	9	»	6	»	4	»	»	»	1	»	−4	»
41	»	»	23	21	13	10	2	7	8	»	2	2	3	0	−3	−5	−6
42	29	»	22	»	14	»	3	»	7	»	3	»	2	»	−2	»	»
43	28	31	21	20	15	»	4	6	6	»	2	1	3	1	»	−6	−7
44	»	32	»	»	»	11	»	7	»	3	»	2	»	2	»	−7	»
45	29	»	22	19	16	12	3	6	7	2	»	1	2	1	»	»	−6
46	30	»	23	»	17	»	4	»	»	»	3	»	1	»	−1	»	−5
47	31	31	22	18	16	13	»	5	8	3	4	2	2	2	0	»	−4
48	»	30	»	19	»	12	»	4	»	2	»	3	»	»	»	−6	»
49	32	29	22	18	17	11	3	5	7	1	3	3	3	1	1	−5	−5

10000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	-5	-5	-15	-24	-24	-17	-19	-27	-36	-32	-40	-37	-35	-23	-16	-17	-17
1	»	-6	-14	-23	-25	-18	-18	-26	»	»	-41	-38	-36	-22	»	-16	-18
2	»	-7	»	-22	»	-17	»	»	»	»	»	-37	»	-23	»	-15	»
3	-4	-8	-15	-23	-24	»	»	-25	-35	-33	-40	-36	-35	-22	»	-16	-19
4	-5	»	-16	»	-25	»	-19	»	-34	»	-41	»	»	»	-17	»	-18
5	-4	»	-17	-22	»	-18	-18	-26	-33	-34	»	-37	-36	-21	-16	-17	-19
6	»	-7	»	»	»	-19	»	-27	»	-33	»	-36	»	-20	»	-18	»
7	-3	-6	»	-21	-24	-18	»	-26	-32	-34	-42	-37	-35	-21	-15	»	-18
8	-2	»	-16	»	»	»	-19	»	-31	»	-41	»	-36	»	-16	»	-19
9	»	»	»	-20	»	-17	-18	-27	-30	-33	-42	»	-35	-22	-17	-17	-20
10	»	-7	»	-19	»	»	»	-28	»	»	»	-38	»	-23	»	-16	»
11	-3	-6	-17	-20	-23	-16	-19	»	-29	-34	-43	-39	-34	-24	-18	17	»
12	-4	»	-16	»	-24	»	-18	»	-30	»	-42	»	-35	»	»	»	-19
13	-3	-7	-17	»	-23	-17	-17	-27	-29	-33	-41	-38	»	-25	-17	-16	-20
14	»	»	»	-21	»	-16	»	-28	»	-34	»	-37	»	-26	»	-17	»
15	-2	-8	-18	-22	-22	-17	-16	-29	»	-35	-40	-38	-34	-25	-16	»	-21
16	-1	»	-17	»	-21	»	»	»	-30	»	-39	»	-33	»	-17	»	-20
17	-2	-9	-18	-21	»	-16	-15	-30	-31	-36	-38	-37	-34	»	-18	-16	-19
18	»	-10	»	-20	»	-15	»	-31	»	-35	»	»	»	-24	»	-15	»
19	»	-11	-17	-21	-20	-16	-16	-32	-32	»	-37	-38	-33	-23	-19	-14	-20
20	-3	»	-18	»	-21	»	-17	»	-33	»	-38	»	-34	»	-18	»	»
21	-4	-12	-17	-22	-20	»	-16	-33	-32	-36	-39	-37	»	-22	»	-13	-19
22	»	-13	»	»	»	-17	»	-32	»	-37	»	»	»	-21	»	-12	»
23	-5	»	-18	-21	-19	-18	-15	-33	31	-38	»	-38	-35	-22	-17	-11	-18
24	-6	»	-19	»	-18	»	-16	»	»	»	-38	»	-34	»	-16	»	-17
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-14	»	-22	»	-17	»	-34	»	»	»	-39	»	»	»	-12	»
27	-7	-13	»	-21	-17	-16	-17	-33	-30	-37	-39	»	-33	-21	-15	-13	-18
28	»	»	-20	»	-16	»	-18	»	-29	»	-40	»	-34	»	-14	»	-19
29	-6	-14	-21	-20	-17	-17	19	»	-30	-38	-41	-40	-33	-20	-15	-12	»
30	»	-13	»	21	»	»	»	-32	»	-39	»	-39	»	-19	»	-13	»
31	-7	-14	-20	»	-18	-18	-20	-31	31	-40	-40	-40	»	-18	-14	-14	-20
32	-6	»	-21	»	-19	»	-21	»	-32	»	»	»	-32	»	»	»	-21
33	5	-15	-22	-22	»	»	-20	-32	»	-41	-41	-39	-31	-17	-13	-15	-20
34	»	-16	»	-21	»	-17	»	-33	»	-40	»	-38	»	-18	»	»	»
35	-4	-15	-23	-20	»	-18	-21	-32	33	-41	-42	-37	-30	»	-12	-14	-19
36	»	»	»	»	-18	»	-22	»	-32	»	-41	»	-29	»	»	»	-20
37	»	-16	-22	»	-19	-17	-21	-33	-33	»	-42	-36	-28	-19	-13	-15	-19
38	»	»	»	-21	»	-18	»	»	»	-40	»	-35	»	-18	»	-16	»
39	-3	-17	-21	-22	-18	»	22	34	34	-41	-43	-34	-27	-16	»	-17	-18
40	-2	»	-20	»	-17	»	-23	»	-33	»	42	»	»	»	-14	»	-19
41	-3	»	-21	-23	-18	-17	-22	35	34	-40	»	-35	-26	-18	-15	-18	-20
42	»	-16	»	-24	»	-18	»	-34	»	-39	»	-36	»	-17	»	-19	»
43	-4	-17	20	-23	-17	-19	»	-35	-33	-40	-41	-35	-25	»	-16	»	-21
44	-3	»	21	»	»	»	-23	»	-34	»	-40	»	-26	»	»	»	-22
45	-2	-16	»	-24	-18	-20	24	-34	-35	-41	39	»	-25	»	-17	-18	-21
46	»	-15	»	-23	»	-19	»	-35	»	»	»	-34	»	-16	»	-17	»
47	-3	-16	-22	-24	-19	-18	25	»	-34	-40	-38	»	-24	-17	-16	-16	»
48	-4	»	-23	»	-18	»	-26	»	-33	»	»	»	-23	»	»	»	-20
49	-5	15	24	24	-17	-19	-27	-30	-32	-40	-37	-35	-23	-16	-17	-17	-21

11000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	-21	-19	-29	-33	-31	-24	-21	-23	-17	-20	-16	-20	-19	- 7	- 9	-12	- 9
1	»	»	-30	-32	-30	-23	-22	-22	-18	-21	»	-19	-18	- 6	- 8	-11	-10
2	-20	»	-29	»	-31	»	-23	»	»	»	-15	»	-19	»	- 7	»	- 9
3	-21	-20	-30	-31	-30	-24	»	-21	-17	-22	-16	-20	-20	- 7	- 8	»	-10
4	»	-21	»	-32	»	-23	»	-22	»	-23	»	-21	»	»	»	-10	»
5	-22	-22	»	-33	-29	-22	-24	-21	-16	-22	-15	»	-19	- 8	- 9	-11	-11
6	»	»	-29	»	»	»	-23	»	-15	»	-16	»	-20	»	- 8	»	-10
7	-21	-23	-28	-34	-28	-23	-24	»	-16	-23	-17	-20	-19	- 7	- 7	-12	»
8	»	-24	»	-33	»	»	»	-20	»	»	»	-19	»	- 8	»	-11	»
9	-22	-25	»	»	-27	-24	-25	-21	»	-22	-18	-20	»	- 9	- 8	-12	- 9
10	-23	»	-29	»	-26	»	-26	»	-17	»	»	»	-18	»	- 9	»	- 8
11	-24	-24	-30	-32	-25	-25	-25	-20	»	-21	-19	-21	-17	-10	- 8	-11	»
12	»	-25	»	-31	»	-24	»	-19	»	-22	»	-20	»	- 9	»	»	»
13	-23	-26	-31	-30	»	-25	-26	-20	-18	-23	-18	-19	-16	»	- 7	-10	- 7
14	-22	»	»	»	-26	»	-27	»	-17	»	-19	»	-15	»	- 6	»	- 6
15	»	-25	-30	-31	-25	-24	-28	-19	-18	»	-18	-18	-14	-10	- 7	- 9	- 5
16	»	-24	»	-32	»	-23	»	»	»	-22	»	-19	»	-11	»	- 8	»
17	-21	-25	-31	-31	-24	»	-27	-20	-17	-23	-17	-20	-13	-12	»	- 7	- 4
18	-20	»	-30	»	-23	»	-28	»	-16	»	-18	»	»	»	- 8	»	- 5
19	-19	»	-29	-32	-24	»	-27	-21	-17	-22	»	»	-12	-11	- 7	- 6	- 4
20	»	-24	»	-31	»	-22	»	-20	»	-21	»	-19	»	-12	»	- 7	»
21	-18	-25	-30	-30	-23	-21	»	»	-18	-20	-17	-20	-11	-11	- 6	»	- 3
22	-19	»	-31	»	»	»	-26	»	-19	»	-18	»	-12	»	- 7	»	- 2
23	-20	-26	»	-31	-22	-20	-25	-19	-18	-19	-19	»	-11	-10	- 8	- 8	- 1
24	»	-27	»	-32	»	-19	»	-20	»	»	»	-19	»	- 9	»	- 7	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-19	»	-32	»	-23	»	-26	»	-19	»	-20	»	-10	»	»	»	- 2
27	-20	-26	-31	»	-24	-20	»	-19	-20	-18	-19	-18	»	- 8	»	- 6	- 3
28	»	»	»	-31	»	»	»	-18	»	-19	»	-19	»	»	»	- 7	»
29	-19	-25	-32	-30	-25	-21	-27	-17	»	-18	-20	-18	»	- 9	- 7	- 8	- 2
30	-20	»	-33	»	-24	»	»	»	-21	»	-19	»	»	»	- 8	»	- 3
31	-19	-26	-34	-29	»	-20	-28	-16	-22	-17	»	-19	-11	»	- 7	- 7	- 2
32	»	-27	»	-30	»	-21	»	-15	»	»	»	»	»	- 8	»	»	»
33	»	-28	-35	-29	-25	-20	-27	-14	»	»	-20	-18	-12	- 9	»	- 8	- 3
34	-18	»	-34	»	-24	»	-28	»	-23	»	-21	»	-11	»	- 6	»	»
35	-19	»	-33	-30	-23	»	»	-15	-24	-16	-22	-19	-12	-10	»	»	- 2
36	»	-29	»	»	»	»	»	-16	»	-15	»	-18	»	- 9	»	- 9	»
37	-18	»	-34	-31	»	-21	-27	-15	-23	-16	»	-19	-13	-10	- 7	-10	- 3
38	-17	»	-35	»	-24	»	-28	»	»	»	-21	»	-12	»	- 8	»	- 2
39	-16	-30	»	-30	-25	-20	»	-16	-24	-17	-22	-20	-11	-11	- 9	»	- 3
40	»	»	»	-31	»	-21	»	-15	»	-18	»	-19	»	»	»	- 9	»
41	»	-29	»	-32	-24	-22	-27	-16	-23	-19	-21	»	-10	-12	-10	- 8	- 2
42	»	»	-34	»	-25	»	-26	»	-24	»	-22	»	- 9	»	- 9	»	- 1
43	-17	-30	-35	-31	»	-21	-25	»	-23	»	-21	-18	- 8	-11	- 8	- 9	»
44	»	-29	»	-30	»	»	»	-15	»	-18	»	-17	»	-12	»	-10	»
45	-18	-30	-34	»	-24	-20	-24	-16	-22	-17	-22	-18	»	-11	- 9	-11	»
46	-19	»	-35	»	-25	»	-23	»	-21	»	»	»	- 7	»	-10	»	0
47	-20	-29	-34	-29	-24	-19	-22	-17	»	-16	-21	-19	- 8	-10	-11	-10	- 1
48	»	-30	»	-30	»	-20	»	-18	»	-17	»	-18	»	- 9	»	»	»
49	-19	-29	-33	-31	-24	-21	-23	-17	-20	-16	-20	-19	- 7	- 9	-12	- 9	- 2

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	−2	−6	−2	1	2	−3	5	10	10	12	8	15	16	24	32	41	27
1	−1	−5	»	2	1	−2	4	11	9	11	7	»	17	23	33	40	28
2	»	−4	»	1	»	−1	»	12	»	»	»	16	»	24	»	41	»
3	0	−3	−1	2	»	0	3	»	10	10	8	17	18	23	32	40	»
4	1	»	»	»	0	»	2	»	11	»	7	»	19	»	»	»	29
5	2	−2	−2	»	1	1	1	13	10	11	8	16	»	24	33	39	30
6	»	»	»	1	»	2	»	12	»	10	»	15	»	23	»	40	»
7	1	−1	−1	2	0	3	2	11	»	11	7	14	18	24	34	39	31
8	2	»	−2	»	−1	»	»	»	9	»	8	»	19	»	35	»	»
9	1	»	−3	3	»	4	3	12	10	12	9	13	20	»	36	»	30
10	»	0	»	4	»	3	»	13	»	11	»	»	»	23	»	38	»
11	»	1	−4	3	−2	2	2	12	11	»	10	14	»	»	37	37	31
12	2	»	−3	»	−3	»	3	»	10	»	11	»	»	»	38	»	»
13	1	0	»	2	−2	»	4	13	11	12	12	»	21	22	»	36	30
14	»	1	»	»	»	3	»	12	»	13	»	15	»	23	»	37	»
15	2	»	−2	3	−3	2	5	11	12	»	»	14	22	24	37	36	31
16	1	»	−3	»	−4	»	6	»	»	»	13	»	21	»	38	»	30
17	2	0	−2	4	−3	1	»	»	11	12	14	13	22	23	»	»	29
18	»	1	»	3	»	2	»	12	»	11	»	12	»	»	»	35	»
19	1	0	»	4	−2	»	5	13	12	10	15	»	23	22	39	36	28
20	»	»	−3	»	»	»	6	»	13	»	16	»	24	»	40	»	27
21	0	−1	−4	»	»	1	7	»	12	11	17	11	25	23	41	35	»
22	»	−2	»	3	»	»	»	14	»	10	»	12	»	24	»	34	»
23	1	»	−5	»	−3	»	6	13	11	9	18	13	»	25	42	33	28
24	»	»	−6	»	−4	»	»	»	12	»	»	»	24	»	»	»	27
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−1	»	2	»	0	»	12	»	10	»	14	»	26	»	»	»
27	0	0	−7	3	»	1	7	11	13	9	17	13	23	»	41	32	26
28	−1	»	»	»	−3	»	8	»	12	»	16	»	24	»	42	»	27
29	»	1	−6	2	−4	0	9	12	13	»	15	14	23	27	41	33	28
30	»	0	»	1	»	1	»	»	»	8	»	13	»	26	»	»	»
31	0	−1	−5	2	−3	»	10	11	12	9	16	14	22	25	»	32	»
32	−1	»	−4	»	−2	»	11	»	13	»	17	»	»	»	40	»	27
33	−2	»	−3	3	−1	2	10	10	12	10	»	13	23	26	39	31	26
34	»	−2	»	2	»	1	»	11	»	9	»	14	»	27	»	30	»
35	−3	−3	−2	3	−2	2	»	12	13	8	16	13	24	28	40	»	27
36	−4	»	−1	»	»	»	11	»	14	»	15	»	25	»	39	»	28
37	−5	−4	»	4	−3	3	12	11	13	9	14	»	24	»	40	29	27
38	»	−3	»	3	»	4	»	12	»	»	»	»	»	29	»	28	»
39	−4	−4	0	2	−4	3	13	»	12	10	15	14	23	30	39	27	»
40	−5	»	1	»	−5	»	14	»	13	»	16	»	24	»	»	»	28
41	−4	−3	»	»	−4	4	15	13	12	11	17	15	»	31	40	28	27
42	»	»	»	3	»	3	»	12	»	10	»	16	»	32	»	27	»
43	−5	−2	2	2	−3	2	14	11	»	9	16	17	25	31	41	28	28
44	»	»	1	»	−2	»	»	»	11	»	17	»	24	»	42	»	27
45	−6	−3	2	1	»	3	13	12	»	10	16	16	25	»	41	27	28
46	»	−2	»	2	»	4	»	11	»	9	»	»	»	30	»	28	»
47	»	−1	1	1	−3	5	12	10	10	»	15	17	24	31	42	27	27
48	−7	»	0	»	−2	»	11	»	11	»	14	»	25	»	41	»	»
49	−6	−2	1	2	−3	5	10	10	12	8	15	16	24	32	41	27	28

12000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	28	22	15	14	19	15	22	22	22	16	14	17	10	4	−1	2	2
1	29	21	16	»	18	16	»	21	21	15	13	16	»	3	−2	3	3
2	28	»	15	»	17	»	23	»	22	»	»	»	11	»	−1	»	4
3	27	20	16	15	»	17	22	20	»	16	14	15	10	2	0	2	3
4	»	19	»	»	»	16	»	19	»	17	»	14	»	3	»	»	»
5	28	18	»	16	»	17	23	20	21	16	13	13	9	»	1	3	»
6	29	»	»	»	18	»	22	»	22	»	14	»	»	»	2	»	4
7	»	19	15	17	17	16	21	19	23	»	15	12	8	4	3	4	5
8	»	18	»	18	»	17	»	»	»	15	»	13	»	3	»	5	»
9	28	17	16	19	16	»	22	18	22	16	14	14	9	4	»	4	6
10	29	»	15	»	17	»	21	»	21	»	15	»	»	»	4	»	7
11	30	»	14	20	16	16	20	17	22	17	»	15	8	3	3	5	6
12	»	18	»	19	»	15	»	18	»	16	»	16	»	2	»	4	»
13	»	19	15	20	15	14	»	17	23	15	14	»	7	3	2	»	5
14	31	»	16	»	»	»	19	»	22	»	13	»	8	»	3	»	6
15	32	20	»	19	16	13	18	16	21	16	12	»	9	2	»	3	7
16	»	19	»	18	»	14	»	17	»	»	»	15	»	1	»	2	»
17	33	20	17	19	15	»	19	»	22	17	13	14	8	0	2	3	»
18	32	»	16	»	14	»	18	»	21	»	12	»	7	»	»	»	8
19	31	19	15	»	13	15	19	16	22	18	13	15	»	−1	1	2	7
20	»	»	»	20	»	14	»	17	»	17	»	16	»	0	»	3	»
21	30	18	16	19	12	15	»	18	»	18	12	17	8	1	0	2	6
22	29	»	17	»	13	»	»	»	21	»	13	»	7	»	1	»	7
23	28	17	18	18	»	14	20	19	20	17	12	16	8	»	2	1	8
24	»	18	»	19	»	13	»	»	»	16	»	»	»	2	»	2	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	27	»	17	»	14	»	21	»	21	»	13	»	9	»	1	»	»
27	26	17	16	20	15	»	20	18	20	15	»	17	8	1	»	3	7
28	»	16	»	»	»	14	»	17	»	14	»	16	»	0	»	2	»
29	27	»	17	21	14	15	21	18	19	13	»	15	7	−1	2	3	8
30	26	»	18	»	13	»	20	»	»	»	14	»	8	»	3	»	9
31	25	15	19	22	14	16	»	17	18	14	15	16	9	0	4	»	10
23	»	14	»	21	»	17	»	18	»	13	»	»	»	»	»	2	»
33	24	15	»	22	15	16	21	19	19	12	14	»	10	−1	5	3	9
34	»	»	18	»	16	»	20	»	18	»	15	»	9	»	6	»	10
35	25	16	17	23	15	17	21	»	19	13	14	15	8	−2	»	2	»
36	»	15	»	24	»	»	»	20	»	12	»	14	»	−1	»	3	»
37	24	14	16	»	16	18	22	21	»	13	13	13	»	0	5	4	11
38	23	»	15	»	»	»	21	»	18	»	»	»	9	»	4	»	12
39	22	15	16	23	17	17	20	20	»	14	14	12	8	−1	3	3	11
40	»	16	»	22	»	18	»	19	»	13	»	11	»	−2	»	»	»
41	21	15	15	23	»	19	19	18	17	12	15	10	7	»	2	»	10
42	20	»	»	»	16	»	20	»	»	»	16	»	8	»	»	»	9
43	»	16	14	22	15	20	21	19	16	»	17	»	7	»	3	4	8
44	»	15	»	23	»	21	»	»	»	13	»	11	»	−3	»	3	»
45	21	16	15	22	14	»	20	20	15	12	16	»	6	−4	»	4	9
46	22	»	14	»	15	»	21	»	16	»	»	»	»	»	4	»	10
47	23	»	15	21	16	20	22	21	15	»	»	10	5	−3	3	3	9
48	»	15	»	20	»	21	»	22	»	13	»	9	»	−2	»	2	»
49	22	15	14	19	15	22	22	22	16	14	17	10	4	1	2	2	8

13000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	8	14	7	4	−4	−9	−13	−10	−8	−11	−15	−17	−13	−3	0	−2	2
1	9	13	8	3	»	−10	−12	−11	−9	−10	−16	−10	»	»	−1	−1	3
2	»	12	»	4	»	−9	»	−10	»	−9	»	»	»	−2	»	−2	»
3	»	11	7	5	−5	−10	−13	−11	−8	»	−15	−15	−12	−1	0	−3	2
4	8	»	8	»	−4	»	−14	»	−7	»	»	»	−13	»	»	»	»
5	9	10	7	4	−3	»	−15	−10	−8	−10	−16	−16	−12	−2	»	−4	3
6	»	9	»	»	»	−11	»	−9	»	−9	»	−15	»	−1	»	−5	»
7	8	»	6	3	−4	−12	−14	−10	−7	−8	»	−14	»	−2	−1	−4	4
8	9	»	5	»	−3	»	−13	»	»	»	−17	»	−11	»	−2	»	5
9	10	8	4	2	−4	−13	»	−11	−8	−7	−18	−15	−12	−3	−1	»	4
10	»	7	»	1	»	−14	»	−12	»	−8	»	»	»	»	»	−3	»
11	11	8	»	0	−3	−13	−12	−11	−9	−7	−17	»	−11	−4	−2	−2	5
12	»	»	3	»	−2	»	−11	»	−8	»	−18	»	−10	»	−3	»	6
13	10	9	4	1	−3	»	−12	»	−9	−6	−17	−16	−11	−5	−4	−3	»
14	»	8	»	0	»	»	»	−12	»	−5	»	−15	»	−6	»	−4	»
15	11	7	3	»	−2	−14	−11	−13	−8	−6	−18	−14	»	−5	−3	−3	7
16	10	»	2	»	−3	»	−12	»	−9	»	»	»	−12	»	−2	»	6
17	11	8	3	−1	−4	−13	−11	−12	»	−7	−19	−15	−13	−6	»	−2	5
18	»	9	»	−2	»	−14	»	−13	»	−8	»	−14	»	−5	»	»	»
19	»	10	4	−3	»	−13	−10	−12	−8	−9	−18	−13	−12	»	−3	−1	6
20	10	»	»	»	−5	»	−11	»	−7	»	−19	»	−11	»	−2	»	7
21	»	9	5	−4	−6	−12	−10	−13	−8	»	−18	−14	−10	−6	−1	0	8
22	»	8	»	−3	»	−13	»	»	»	−10	»	−13	»	−7	»	1	»
23	11	7	4	−4	−7	»	−9	−12	−7	−9	−17	−12	−9	−6	»	0	»
24	10	»	3	»	−8	»	−10	»	−8	»	−16	»	»	»	0	»	7
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	−5	»	−12	»	−11	»	−10	»	−13	»	»	»	1	»
27	11	8	4	−6	−7	−11	»	−12	−9	−9	−17	−14	»	−5	−1	»	6
28	12	»	3	»	»	»	−11	»	−10	»	−18	»	−8	»	−2	»	7
29	13	7	»	−5	−8	−12	−12	−11	−11	−10	»	»	−7	−4	−1	2	8
30	»	6	»	−4	»	−13	»	−10	»	»	»	−13	»	−3	»	1	»
31	12	7	4	−3	−7	−12	−11	»	»	−9	−19	−14	−8	»	−2	2	»
32	13	»	5	»	−6	»	−12	»	»	»	−20	»	−7	»	»	»	9
33	14	8	6	»	−7	−13	»	−9	−12	−10	−19	−13	»	−4	−1	1	»
34	»	»	»	−4	»	»	»	−8	»	−11	»	−14	»	−5	»	0	»
35	15	7	5	−5	»	−12	−11	−9	»	−10	−18	−13	−6	−4	0	1	10
36	14	»	4	»	−8	»	»	»	−13	»	−17	»	−5	»	−1	»	11
37	15	6	»	−4	»	−13	−10	−10	−14	−11	−18	−14	−4	»	−2	0	10
38	»	»	»	−3	»	−12	»	−9	»	−10	»	»	»	−3	»	−1	»
39	»	7	3	−4	−7	−13	−9	−8	»	»	−17	−15	−3	−2	−3	0	11
40	14	»	2	»	−6	»	−10	»	−15	»	−16	»	−2	»	−2	»	»
41	13	6	3	−5	−5	»	−11	−7	−14	−11	−17	−14	−1	−3	»	1	10
42	»	7	»	»	»	−12	»	−6	»	−12	»	−15	»	−2	»	2	»
43	14	»	2	»	−6	−13	−12	−7	−13	−13	»	−14	0	−1	−1	3	9
44	15	»	3	»	−7	»	−11	»	»	»	»	»	−1	»	0	»	8
45	14	6	4	−6	−8	−12	»	−8	−12	−14	−16	−15	0	0	1	»	9
46	»	5	»	−5	»	13	»	−7	»	−15	»	−14	»	»	»	2	»
47	15	6	»	»	−7	−12	−10	−8	−13	−14	−17	»	−1	−1	0	1	8
48	»	»	5	»	−8	»	−9	»	−12	»	−18	»	−2	»	−1	»	7
49	14	7	4	−4	−9	−13	−10	−8	−11	−15	−17	−13	−3	0	−2	2	7

14000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	7	5	2	2	−2	5	−5	2	13	18	14	16	16	18	18	7	18
1	6	4	3	1	−1	»	−6	3	12	17	15	15	17	17	»	8	17
2	5	»	4	»	−2	»	−5	»	13	»	14	»	»	»	19	»	16
3	6	»	5	2	−3	6	−6	4	12	16	»	14	18	18	18	9	17
4	»	5	»	»	»	5	»	5	»	17	»	15	»	19	»	10	»
5	5	6	6	3	−4	4	»	6	13	16	15	14	17	20	19	»	16
6	6	»	7	»	»	»	−7	»	12	»	14	»	18	»	18	»	»
7	7	7	»	2	−5	3	−8	7	13	15	13	»	17	21	17	»	15
8	»	8	»	1	»	»	»	6	»	»	»	15	»	22	»	9	»
9	8	7	6	0	−4	2	−7	»	12	16	14	14	18	»	18	10	»
10	7	»	7	»	−5	»	−6	»	13	»	15	»	»	»	»	»	16
11	6	8	6	»	−4	3	−5	7	12	15	16	»	»	23	19	11	15
12	»	»	»	−1	»	2	»	8	»	14	»	13	»	22	»	10	»
13	5	9	5	−2	−3	3	−6	7	»	»	17	14	19	23	18	11	14
14	4	»	6	»	−2	»	»	»	»	»	18	»	20	»	17	»	15
15	3	8	5	−1	»	2	»	»	13	13	17	15	21	»	16	»	»
16	»	9	»	0	»	1	»	8	»	12	»	»	»	22	»	10	»
17	»	10	4	−1	−1	»	−5	7	14	»	18	16	20	23	17	11	16
18	2	»	»	»	»	»	−4	»	13	»	19	»	21	»	18	»	»
19	1	9	3	»	0	»	−3	8	14	13	20	17	22	24	»	10	15
20	»	8	»	»	»	2	»	9	»	12	»	18	»	23	»	11	»
21	2	»	2	0	−1	1	−4	10	15	11	»	19	21	22	17	12	16
22	»	»	1	»	0	»	−3	»	»	»	19	»	20	»	16	»	17
23	1	»	0	1	1	0	»	11	16	12	20	18	19	23	15	»	16
24	»	9	»	0	»	−1	»	12	»	11	»	17	»	»	»	13	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	1	»	0	»	−2	»	17	»	19	»	18	»	16	»	17
27	0	8	0	1	−1	−2	−1	»	»	12	18	16	19	24	15	14	»
28	»	7	»	»	»	»	»	11	»	13	»	17	»	»	»	15	»
29	1	6	−1	»	−2	−3	0	12	16	»	19	18	»	25	14	16	18
30	2	»	−2	»	−1	»	1	»	17	»	»	»	18	»	13	»	17
31	3	5	−3	0	−2	−4	0	11	»	12	20	17	17	24	12	17	16
32	»	6	»	−1	»	−5	»	12	»	11	»	16	»	23	»	»	»
33	2	7	−2	−2	»	−6	−1	11	16	10	19	17	18	»	13	18	15
34	1	»	»	»	−1	»	0	»	15	»	18	»	17	»	12	»	14
35	»	8	−3	−3	0	−5	−1	12	14	»	17	18	18	24	11	19	15
36	»	7	»	−4	»	−6	»	»	»	11	»	17	»	23	»	20	»
37	2	6	−4	−3	1	»	−2	13	15	10	18	18	19	22	»	19	14
38	1	»	−3	»	2	»	−1	»	16	»	19	»	»	»	10	»	15
39	2	»	−2	−4	1	−7	0	14	17	11	»	19	20	21	11	18	16
40	»	»	»	−3	»	−6	»	13	»	10	»	18	»	20	»	17	»
41	3	5	−3	−2	0	−5	»	14	18	11	20	19	19	21	10	»	17
42	2	»	−2	»	»	»	1	»	19	»	19	»	20	»	9	»	18
43	3	4	»	−1	1	−6	2	15	18	12	18	»	19	20	8	18	17
44	»	3	»	»	»	−5	»	16	»	»	»	18	»	19	»	17	»
45	4	4	−1	−2	2	−6	3	»	»	13	19	17	20	18	7	18	»
46	5	»	0	»	3	»	2	»	17	»	18	»	19	»	»	»	16
47	6	3	1	»	4	−5	3	15	18	12	17	16	»	»	6	19	15
48	»	»	»	−1	»	−4	»	14	»	13	»	15	»	17	»	18	»
49	5	2	2	−2	5	−5	2	13	18	14	16	16	18	18	7	18	14

15000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	14	16	8	5	2	5	− 4	− 8	−14	−19	−20	−10	0	2	5	6	6
1	15	17	7	4	»	6	»	»	−15	−18	−21	− 9	−1	1	6	»	7
2	»	16	»	»	»	7	»	− 9	»	−17	»	−10	»	»	»	5	»
3	16	15	»	5	1	»	− 5	− 8	−14	−16	−20	»	−2	2	7	6	8
4	»	»	6	»	0	»	− 6	»	−15	»	−19	»	−1	»	8	»	7
5	»	14	5	4	−1	6	− 7	»	−14	−17	−20	− 9	0	3	7	7	»
6	»	15	»	3	»	»	»	− 9	»	−18	»	− 8	»	4	»	8	»
7	15	16	4	»	−2	5	− 6	−10	−13	−17	−21	− 7	»	3	8	7	6
8	16	»	3	»	−1	»	− 7	»	−12	»	»	»	1	»	9	»	5
9	17	17	2	4	0	6	− 8	− 9	»	−16	−20	− 6	»	4	8	8	4
10	»	16	»	5	»	5	»	−10	»	−17	»	− 5	»	3	»	»	»
11	16	15	1	6	»	6	− 7	− 9	−13	−18	−19	− 4	0	»	7	7	5
12	15	»	»	»	1	»	»	»	−14	»	−18	»	−1	»	»	»	4
13	»	16	0	7	0	5	− 6	−10	−13	»	−17	− 5	0	2	8	6	3
14	»	17	»	8	»	4	»	»	»	−17	»	− 4	»	3	»	7	»
15	14	18	−1	7	−1	»	− 5	− 9	−14	−18	−18	− 5	−1	4	»	6	2
16	13	»	0	»	0	»	− 4	»	−13	»	−19	»	»	»	9	»	1
17	12	»	1	8	1	3	− 5	−10	−14	−17	»	− 6	−2	5	10	5	0
18	»	19	»	9	»	4	»	−11	»	−16	»	− 7	»	6	»	4	»
19	13	18	2	8	0	5	»	−12	−15	−15	−20	− 6	−1	7	9	»	−1
20	12	»	3	»	»	»	− 4	»	−16	»	−19	»	0	»	10	»	0
21	13	19	»	7	1	4	− 5	−13	−15	−14	−18	»	1	6	9	5	−1
22	»	18	»	6	»	3	»	−12	»	»	»	− 5	»	7	»	6	»
23	14	17	2	7	0	2	− 6	»	−14	−15	−17	− 4	0	»	8	7	»
24	15	»	3	»	1	»	− 7	»	−13	»	−16	»	1	»	»	»	−2
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	6	»	1	»	−11	»	−16	»	− 5	»	6	»	6	»
27	16	18	2	5	2	2	− 6	−12	»	−17	−15	− 4	0	7	9	5	−3
28	17	»	1	»	1	»	»	»	−14	»	−14	»	1	»	10	»	−2
29	16	17	2	4	»	1	− 7	−11	−15	−18	−13	− 5	2	»	11	6	−3
30	»	16	»	3	»	2	»	−12	»	−19	»	»	»	8	»	5	»
31	»	17	3	4	2	1	− 8	−13	−14	»	−12	− 6	1	7	10	6	−4
32	15	»	2	»	1	»	− 9	»	−15	»	−11	»	2	»	11	»	»
33	16	16	3	3	0	»	−10	−14	»	−18	−12	− 5	1	8	»	5	−5
34	»	»	»	»	»	0	»	−13	»	−17	»	− 4	»	9	»	4	»
35	17	»	4	4	1	−1	− 9	−12	−16	−18	»	− 5	0	8	12	3	−6
36	18	»	3	»	0	»	− 8	»	»	»	−13	»	−1	»	11	»	−5
37	17	15	4	5	1	−2	»	−11	−17	−19	−12	− 4	−2	7	10	»	−6
38	»	14	»	4	»	−1	»	−12	»	−18	»	− 5	»	»	»	2	»
39	16	13	»	3	2	»	− 7	−13	−18	−19	−11	»	−1	6	9	»	−7
40	»	»	3	»	3	»	− 8	»	−19	»	−12	»	0	»	»	»	−6
41	17	12	2	»	2	−2	− 7	»	−20	−18	−13	»	−1	»	10	1	»
42	»	11	»	4	»	»	»	−14	»	−19	»	− 4	»	5	»	2	»
43	18	10	1	»	3	−1	− 6	−15	−19	−20	−14	»	»	6	9	3	−5
44	19	»	2	»	4	»	− 7	»	−20	»	»	»	0	»	8	»	−6
45	18	11	3	3	5	−2	− 8	−14	»	»	−13	− 3	1	5	7	4	−5
46	»	10	»	2	»	−3	»	−15	»	−19	»	− 2	»	6	»	»	»
47	17	9	4	3	»	−4	− 9	»	−21	−20	−12	− 1	2	»	6	5	−4
48	16	»	»	»	6	»	»	»	−20	»	−11	»	3	»	7	»	−3
49	16	8	5	2	5	−4	− 8	−14	−19	−20	−10	0	2	5	6	6	−4

16000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	-4	-9	-9	-6	-12	-15	-16	-22	-22	-27	-28	-28	-22	-18	-28	-24	-33
1	-5	-8	-10	-7	-11	-16	-17	»	-21	-26	-29	»	-23	-19	-29	-23	»
2	-6	»	-9	»	-12	»	-18	»	-22	»	-28	»	-22	»	»	»	-34
3	-5	-7	-8	»	-11	-15	-19	-21	-21	-27	-29	-27	»	-20	-28	-22	-35
4	»	»	»	-6	»	-14	»	-22	»	-26	»	-26	»	-21	»	-23	»
5	-4	-8	-7	-7	-12	-13	-18	-23	»	-27	-30	-25	-21	-20	-27	»	-34
6	-5	»	-6	»	-11	»	»	»	-20	»	-31	»	-20	»	-28	»	-33
7	-6	-7	-7	-8	»	-12	-19	-24	-19	-26	-32	-24	-21	»	-29	-24	-32
8	»	-8	»	-9	»	-13	»	-23	»	-25	»	»	»	-21	»	-23	»
9	»	-9	-6	-8	-10	-14	»	-22	-18	»	-33	-25	-20	-22	-28	-24	-31
10	-7	»	-5	»	-11	»	-18	»	-19	»	-34	»	-19	»	-29	»	»
11	-6	-10	-6	-9	-12	»	-17	-23	-18	-26	-33	-26	-18	-21	»	-25	-32
12	»	-9	»	»	»	-15	»	-24	»	-25	»	-25	»	-22	»	-26	»
13	-7	»	-7	»	-11	-14	-16	-25	-17	-24	»	-24	-19	-23	-28	-27	-33
14	-6	»	-6	»	-10	»	-17	»	»	»	-32	»	-20	»	-27	»	-34
15	-7	-10	-5	-10	-11	-15	»	-26	-18	-25	-31	-25	-21	-24	-26	»	-35
16	»	-9	»	-9	»	-16	»	-25	»	-24	»	-24	»	»	»	-28	»
17	»	»	»	-10	-10	-15	-18	-26	»	-25	-32	»	-20	-23	-27	-29	-34
18	»	»	-6	»	-9	»	-17	»	-19	»	-33	»	-19	»	-26	»	-33
19	-8	-10	-5	-9	-10	-16	-18	»	-18	-24	-32	-23	-20	-22	-25	-30	»
20	»	-9	»	-10	»	»	»	-27	»	-23	»	»	»	-23	»	-31	»
21	-7	-8	-4	»	-11	-15	-19	-28	-17	-24	-31	-22	»	-24	-24	-32	»
22	-8	»	-5	»	-10	»	-20	»	-18	»	»	»	-21	»	-23	»	-34
23	-9	-9	-6	-11	»	-16	-19	-27	»	-25	-32	-21	-22	-25	»	-33	-33
24	»	-8	»	-12	»	-17	»	-28	»	-24	»	-20	»	»	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-10	»	»	»	-11	»	-20	»	-19	»	-33	»	-21	»	-24	»	-34
27	»	-9	-7	-11	-12	-16	-19	-27	-20	»	»	-21	-20	-24	-25	-34	-35
28	»	-8	»	-12	»	-15	»	»	»	»	»	-22	»	-25	»	-33	»
29	-11	»	-8	-11	-11	»	-20	-28	»	-23	-32	-23	-19	»	»	-32	»
30	-12	»	-9	»	-12	»	-19	»	»	»	-33	»	»	»	-24	»	-36
31	-13	»	-8	-10	-13	-16	»	-27	-21	-22	»	-24	-18	-26	-25	-31	-37
32	»	-7	»	-9	»	»	»	-26	»	-23	»	-25	»	-27	»	-30	»
33	-14	-8	-9	-10	»	-17	»	-27	-22	-22	-32	-24	-19	-26	-26	»	-38
34	-13	»	-8	»	»	»	-18	»	-21	»	-33	»	-20	»	-25	»	-39
35	-12	-9	»	-11	-14	-18	-19	-26	-22	-21	-32	»	-19	-27	-26	-29	-40
36	»	»	»	-10	»	-17	»	-25	»	»	»	»	»	-26	»	-28	»
37	»	-10	-7	-9	-13	-18	-18	»	-23	-22	-31	-25	-20	»	-27	-29	»
38	-11	»	-6	»	-14	»	-19	»	-22	»	-30	»	-21	»	»	»	-39
39	-10	-9	-7	»	-13	-19	-20	-24	-23	-23	-29	-26	»	-25	-26	-30	-40
40	»	»	»	-10	»	-20	»	-23	»	-24	»	-25	»	-26	»	-31	»
41	»	-10	-6	-9	-14	-19	-21	-24	»	-25	-30	-24	-20	-27	-25	-32	-41
42	-11	»	-7	»	-15	»	»	»	-24	»	»	»	-21	»	-26	»	-42
43	-10	-11	-8	-10	»	-18	-22	-23	-25	-24	-29	-23	-20	»	-25	»	-41
44	»	-12	»	-11	»	-17	»	-22	»	-25	»	»	»	-28	»	-33	»
45	»	-11	-7	-12	-14	-16	-21	-23	-26	»	-28	»	-21	-29	-24	-32	-40
46	-9	»	-6	»	-15	»	-20	»	-25	»	-27	»	-20	»	-25	»	»
47	-8	-10	-7	-13	-14	»	-21	-22	-26	-26	-28	-24	-19	-28	»	-33	-39
48	»	-9	»	»	»	-17	»	-23	»	-27	»	-23	»	-29	»	-34	»
49	-9	-9	-6	-12	-15	-16	-22	-22	-27	-28	-28	-22	-18	-28	-24	-33	-40

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	-40	-37	-35	-34	-32	-32	-30	-27	-28	-20	-20	-25	-22	-15	-22	-14	-20
1	-39	-36	-34	-35	-31	-31	-31	-26	»	-19	-21	-26	-21	-14	-23	-15	-21
2	»	-35	»	-36	»	-32	»	-27	»	-20	»	-27	»	-15	»	»	»
3	-38	-36	-35	-37	»	-31	-32	-26	-29	-21	-20	-28	-20	»	-22	-16	-20
4	-39	»	»	»	-30	»	-33	»	-28	»	-21	»	-19	»	»	»	»
5	»	-37	-34	-38	-29	-32	-34	-25	-27	»	-20	-29	-20	-14	-21	»	-19
6	»	-36	»	-39	»	-33	»	»	»	»	»	-28	»	-15	»	-17	»
7	-38	-35	-33	-38	-28	»	-33	-24	-26	-22	-21	-27	-19	»	»	-18	-18
8	-39	»	-34	»	-27	»	-32	»	-27	»	-20	»	»	»	-20	»	-19
9	-40	»	-33	-37	-26	-32	-31	-23	-26	-21	»	»	-20	-16	-19	-17	-18
10	»	-36	»	-36	»	-31	»	-22	»	-20	»	-26	»	»	»	-16	»
11	-39	-37	-34	-35	-27	-32	»	-23	-27	»	-21	-25	-21	-17	-18	»	-17
12	-38	»	-35	»	»	»	-30	»	»	»	-22	»	»	»	-17	»	-16
13	-37	-36	»	-34	-28	-31	-29	»	-26	-19	-21	»	-22	-18	-16	-15	-17
14	»	»	»	-35	»	-32	»	-24	»	»	»	-26	»	-19	»	-16	»
15	-38	-35	-34	-36	-29	»	-30	»	-25	-18	-20	-25	-23	-18	-15	-17	»
16	-39	»	-35	»	»	»	-29	»	-24	»	-21	»	-24	»	»	»	-18
17	-40	-36	-36	»	-28	-33	-30	-23	-25	-19	-20	-24	»	-17	-14	-16	»
18	»	»	»	-37	»	-32	»	-24	»	-20	»	-25	»	-18	»	-17	»
19	-41	»	-35	-38	-29	-33	-29	-25	»	-21	-19	-24	-23	»	-13	-16	-17
20	»	»	-36	»	-30	»	»	»	-26	»	-20	»	-24	»	-12	»	-18
21	-40	-35	-35	-37	»	-34	-30	-24	-25	-20	-19	-23	-23	»	-13	-17	-17
22	»	-34	»	-36	»	-35	»	-25	»	-19	»	»	»	-19	»	-16	»
23	»	-35	-36	-35	-29	-34	»	-26	-26	»	-20	-22	-22	-20	-12	-15	-16
24	-39	»	-37	»	-30	»	-29	»	-25	»	-19	»	-21	»	-11	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-34	»	»	»	-35	»	-25	»	-18	»	-21	»	-21	»	-16	»
27	-38	»	-36	-34	-31	-36	-30	-26	»	-17	»	-20	-20	-22	-10	-17	-15
28	-37	»	-37	»	-32	»	-29	»	»	»	-20	»	-19	»	- 9	»	-16
29	-36	-35	-36	-33	-31	-35	»	-27	-24	-18	-19	-21	-18	-23	-10	»	-17
30	»	-34	»	-32	»	-34	»	-28	»	-19	»	-20	»	»	»	-18	»
31	-35	-35	»	-31	-32	-33	-30	-27	-23	-20	-18	»	-17	-24	-11	-19	-18
32	»	»	-37	»	-31	»	-29	»	-22	»	-19	»	-18	»	-12	»	-19
33	-36	-36	-36	-32	-32	-34	-28	»	-23	-21	-20	-19	-17	-25	-13	-20	»
34	»	-35	»	-31	»	»	»	-28	»	-20	»	-20	»	-26	»	-19	»
35	-35	-36	-35	»	-33	-35	-27	-27	-24	-21	-21	-19	»	-25	-14	-20	-20
36	-34	»	-36	»	-34	»	-26	»	-23	»	»	»	-16	»	-13	»	-19
37	-35	-35	-37	»	-33	-34	-27	-26	»	-20	-22	-20	-17	-24	-14	-21	-20
38	»	-36	»	-30	»	-33	»	-25	»	-19	»	-19	»	-23	»	»	»
39	-36	-35	-38	-31	»	-32	-26	-26	-22	-18	-21	-18	-16	»	-15	-20	-21
40	-37	»	»	»	-32	»	-25	»	-23	»	-22	»	-15	»	-14	»	-22
41	»	-34	-37	-32	-31	-31	-26	-27	-22	»	-23	-19	-16	-22	-15	-19	-21
42	»	-35	»	-31	»	-30	»	»	»	-19	»	-20	»	-21	»	-20	»
43	-38	-34	-36	-30	»	»	-27	-26	-21	-20	-24	-19	-15	-22	»	-21	-22
44	-39	»	-35	»	-32	»	-28	»	-20	»	-25	»	»	»	-14	»	-23
45	-40	»	-34	-31	-33	-29	-27	-27	-19	-19	»	-20	-14	-23	-15	-20	-22
46	»	-33	»	-32	»	-30	»	-26	»	-18	»	-21	»	-22	»	-21	»
47	-39	-34	-33	-31	-32	-31	»	-27	-18	-19	-24	-22	-15	-21	-14	»	-21
48	-38	»	-34	»	»	»	-28	»	-19	»	»	»	-16	»	-13	»	-22
49	-37	-35	-34	-32	-32	-30	-27	-28	-20	-20	-25	-22	-15	-22	-14	-20	-21

17000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	-21	-25	-20	-21	-24	-20	-16	-19	-14	-18	-22	-20	-17	-10	-1	-5	-4
1	»	»	»	-20	-23	-19	-17	-20	-15	»	-23	-21	-16	-9	0	-6	-3
2	-20	»	-21	»	-22	»	-18	»	-14	»	-24	»	-17	»	-1	»	»
3	»	-26	-20	-19	-23	»	»	-21	-13	-17	-23	-20	-16	-8	»	-5	-2
4	»	-25	»	»	»	-18	»	-20	»	-18	»	-21	»	-7	»	-4	»
5	-21	»	-21	-20	-22	-17	-17	-19	»	-17	»	-20	-17	-6	0	-5	-3
6	-22	»	-22	»	-23	»	-18	»	»	»	-22	»	-16	»	1	»	-4
7	-21	-24	-23	-19	-24	-18	»	-18	»	»	-23	-19	-15	-7	0	»	-5
8	»	-25	»	-20	»	-17	»	-17	»	-16	»	-18	»	»	»	-6	»
9	-20	-24	»	-21	-25	-18	-17	-18	-14	-17	-24	»	-16	-8	1	-7	-4
10	»	»	-22	»	-26	»	-16	»	-15	»	-23	»	-15	»	0	»	-3
11	-21	»	-21	»	-25	-17	-15	»	-14	-16	-24	-17	-14	»	1	-8	»
12	»	-25	»	-20	»	»	»	-17	»	-15	»	-18	»	-7	»	-9	»
13	-22	-24	-20	»	-24	-16	-16	-16	-13	-14	-23	-19	»	-6	0	-10	-2
14	-23	»	-21	»	-23	»	-17	»	-12	»	»	»	-13	»	-1	»	-3
15	-24	-23	-20	-19	-24	-17	-16	-17	»	-15	-24	-20	-14	-5	-2	-9	-4
16	»	-22	»	-20	»	-18	»	-18	»	-14	»	-19	»	»	»	»	»
17	-23	-21	-21	-21	»	-17	-17	-19	-13	-15	-23	-18	-13	»	-1	-8	-3
18	-24	»	»	»	-23	»	-18	»	-14	»	-24	»	-14	»	-2	»	-4
19	»	»	-22	-22	-22	-16	-19	-18	-15	»	-25	-19	-15	-6	-3	-7	-3
20	»	-20	»	-21	»	-15	»	»	»	-16	»	-18	»	-7	»	-8	»
21	-25	-19	-23	-22	-21	»	-20	-17	-14	-17	-24	-17	-14	-6	»	-7	-2
22	-26	»	-24	»	-22	»	-21	»	-15	»	-23	»	»	»	-2	»	-1
23	-25	»	-25	-21	-21	-14	-20	-16	-16	-16	»	-18	-15	-7	-1	-6	-2
24	»	-18	»	-22	»	-15	»	-15	»	-15	»	-17	»	-6	»	-5	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-24	»	-24	»	»	»	-19	»	-15	»	-22	»	-16	»	0	»	-3
27	-25	-19	»	-21	-22	-16	-20	-16	-16	-16	-21	»	-17	-5	-1	-4	-4
28	»	-18	»	-20	»	-17	»	-15	»	»	»	-16	»	-4	»	-5	»
29	-26	-17	-23	-19	-21	-16	-21	»	-15	-17	-20	-17	»	-5	-2	-4	»
30	-25	»	-22	»	-22	»	-22	»	-16	»	-21	»	-16	»	»	»	-5
31	-26	-18	-21	»	-23	-15	-23	-16	-17	-16	-20	-18	»	-6	-3	-3	-4
32	»	»	»	»	»	-14	»	-17	»	-15	»	-19	»	-5	»	-4	»
33	-27	-17	-20	-20	-22	-15	-24	-18	»	-16	-19	-18	-17	-6	-4	-5	-3
34	-26	»	-21	»	-23	»	»	»	-18	»	-20	»	-18	»	-3	»	-4
35	-25	-16	-22	-21	»	-14	-23	-17	-19	-17	-19	-17	-17	»	-2	-4	-3
36	»	-15	»	-22	»	-13	»	-16	»	-18	»	»	»	-7	»	-3	»
37	»	-14	-23	-23	-22	-12	-22	-17	-20	»	-20	-16	-16	-6	-3	»	-4
38	-26	»	-22	»	»	»	-21	»	-19	»	-19	»	-15	»	»	»	»
39	-25	-13	-23	-24	-23	»	-20	-18	-18	-19	-20	-15	-14	»	»	-4	-5
40	»	-14	»	»	»	-13	»	-17	»	-20	»	-16	»	-5	»	-3	»
41	-26	»	-22	-25	-24	-14	-21	-16	-17	-21	»	»	-15	-4	-2	-4	-6
42	-25	»	-23	»	-25	»	-20	»	»	»	»	»	-14	»	-3	»	-7
43	-24	-15	-24	-26	-24	-15	»	-17	-18	»	-19	-15	-13	-3	-2	»	-6
44	»	-16	»	-25	»	-14	»	-16	»	-20	»	-16	»	»	»	-3	»
45	-25	-17	»	-26	-23	-15	-19	»	-19	-19	»	»	-12	-2	»	-2	-7
46	»	»	-23	»	-22	»	»	»	-18	»	-20	»	-11	»	-3	»	-6
47	-26	-18	-22	-25	-21	»	-20	»	-17	-20	-19	-17	-10	-3	-4	»	»
48	»	-19	»	-24	»	»	»	-15	»	-21	»	-16	»	-2	»	-3	»
49	-25	-20	-21	-24	-20	-16	-19	-14	-18	-22	-20	-17	-10	-1	-5	-4	-5

18000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	-5	1	-5	-11	-12	-14	-18	-14	-23	-18	-21	-21	-19	-22	-24	-20	-6
1	-6	»	-4	-10	-13	-13	-17	-13	-24	-19	»	-22	-20	-23	-23	-21	-5
2	»	2	»	-9	»	-12	»	-14	»	-18	»	-23	»	»	»	-22	»
3	-7	1	-3	-10	-12	-11	»	-13	-25	-17	-22	-24	-19	-24	-24	»	-4
4	-8	»	-4	»	»	»	-18	»	-24	»	-23	»	-18	»	-23	»	-5
5	-7	2	»	-11	-13	-10	-17	-14	-25	-18	-22	»	-17	-23	-24	»	-4
6	»	1	»	-12	»	-11	»	-13	»	»	»	-23	»	-24	»	-21	»
7	-6	0	-5	-11	-14	-10	-16	»	-26	-19	-23	-22	-18	-25	-25	-20	»
8	-5	»	-4	»	-13	»	-17	»	-25	»	-24	»	-19	»	»	»	-5
9	-4	-1	-5	»	-14	-11	-16	-12	»	-20	-23	-21	»	-24	-24	-19	-4
10	»	»	»	-12	»	-12	»	-11	»	-21	»	-20	»	-23	»	-20	»
11	-3	-2	-4	-13	-15	-11	-17	-12	»	-22	-24	»	-20	-22	-25	19	-5
12	-2	»	5	»	-16	»	»	»	-26	»	-23	»	-19	»	-24	-	-4
13	-3	-3	-6	-14	»	-10	-16	-13	-25	-23	-22	-21	-18	»	-23	-18	-3
14	»	»	»	-13	»	-11	»	-11	»	-22	»	»	»	-21	»	-19	»
15	»	-2	-5	-14	-15	10	15	-13	-26	»	-21	-22	-19	»	-24	18	-2
16	-2	»	-6	»	10	»	-16	»	25	»	-22	»	-20	»	-23	»	»
17	-1	-3	-7	-13	-17	»	-15	-14	-24	-24	-23	-23	-19	-22	»	-19	-1
18	»	»	»	»	»	-9	»	-13	»	-20	»	-22	»	-23	»	-18	»
19	0	»	-8	-12	-18	-10	-16	-12	-25	-19	»	-21	-20	-22	-22	-17	»
20	-1	»	-7	»	-17	»	-15	»	»	»	-22	»	-21	»	-21	»	-2
21	0	-4	-8	-11	-16	-11	»	-13	»	-20	-23	»	-22	-23	»	»	-
22	»	-3	»	-10	»	-10	»	-14	»	-19	»	-22	»	»	»	-16	»
23	1	-4	»	-9	-17	-11	-14	-15	-24	-18	-22	»	»	-24	-22	-15	-2
24	»	»	-7	»	-18	»	-13	»	-23	»	-21	»	-23	»	-23	»	-1
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-3	»	-8	»	»	»	-16	»	»	»	-21	»	-25	»	-16	»
27	0	-4	-8	»	-19	-12	-14	-15	»	-19	-22	-22	»	-24	-22	-17	0
28	-1	»	-9	»	-18	»	-15	»	-22	»	»	»	-22	»	-23	»	1
29	0	-5	10	»	-17	-11	»	-16	»	-20	-23	-21	-21	-23	-24	-16	0
30	»	-4	»	-7	»	»	»	-17	»	-21	»	-20	»	-22	»	»	»
31	-1	-5	-11	-8	»	-12	-16	-18	-21	-20	-24	-19	-22	»	-23	-15	-1
32	0	»	»	»	-16	»	-15	»	-20	»	-23	»	-21	»	-22	»	0
33	»	-4	»	-7	»	-13	-14	-19	-19	»	-22	-20	-22	-21	-23	-14	-1
34	»	»	»	-8	»	-12	»	»	»	-21	»	-21	»	-22	»	»	»
35	»	-5	-10	-7	-15	»	-13	-20	-18	-22	-21	-22	-21	-23	»	-13	-2
36	1	»	»	»	-14	»	-12	»	-19	»	-22	»	»	»	-22	»	-1
37	2	»	-11	-6	-13	-11	-11	-19	-20	-21	»	-21	-22	-24	-23	-14	0
38	»	-4	»	-7	»	-12	»	-20	»	-22	»	-20	»	-23	»	-13	
39	1	-5	-12	-8	-14	-13	»	-21	-21	-21	-23	-21	-21	-24	-22	»	1
40	0	»	-11	»	»	»	-10	»	-20	»	-22	»	»	»	»	»	0
41	-1	-6	»	-9	-13	-12	-11	-22	-19	-22	-21	»	»	-25	-21	-12	-1
42	»	-5	»	-8	»	-13	»	23	»	»	»	-20	»	-20	»	-11	»
43	0	-4	-10	-9	-14	-14	-12	»	-18	-23	-20	-21	-22	-27	-22	-10	»
44	-1	»	-11	»	15	»	13	»	-19	»	-21	»	-23	»	»	»	-2
45	-2	5	-12	»	-14	-15	-14	-24	-18	-24	-22	-20	»	-26	-21	-9	-1
46	»	»	»	-10	»	-16	»	-25	»	-23	»	-21	»	-25	»	-8	»
47	-1	-4	-13	-11	-15	-17	-13	-24	»	-22	-23	-20	-22	-24	-20	-7	0
48	0	»	-12	»	-14	»	»	»	-19	»	-22	»	-23	»	-21	»	1
49	1	-5	11	-12	-14	-18	-14	-23	-18	-21	-21	-19	-22	-24	-20	-6	0

19000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	0	−3	1	15	26	31	39	42	44	40	48	43	49	40	44	43	33
1	−1	−2	»	16	27	32	38	41	45	41	47	»	48	41	43	44	32
2	»	»	2	»	26	»	37	»	46	»	48	»	47	»	42	»	»
3	0	−1	1	17	27	33	38	»	47	42	47	44	48	42	41	»	»
4	»	0	»	16	»	»	»	40	»	41	»	43	»	43	»	43	»
5	1	»	2	»	26	32	39	39	48	40	46	44	»	»	42	42	31
6	0	»	3	»	27	»	40	»	47	»	»	»	»	»	41	»	30
7	1	−1	4	17	26	31	41	38	»	39	45	»	49	44	42	41	29
8	»	−2	»	18	»	32	»	37	»	40	»	45	»	45	»	»	»
9	2	»	5	17	»	31	40	38	48	»	44	44	48	»	43	40	28
10	1	»	»	»	27	»	39	»	»	»	45	»	47	»	44	»	27
11	»	−1	6	18	26	32	40	»	49	»	44	43	46	46	43	39	28
12	»	0	»	19	»	31	»	»	»	41	»	44	»	47	»	38	»
13	0	1	7	20	25	»	39	39	48	40	43	45	45	»	»	37	27
14	−1	»	6	»	»	»	38	»	47	»	42	»	»	»	42	»	26
15	−2	»	5	»	26	32	39	40	48	41	»	46	46	46	41	36	25
16	»	0	»	21	»	33	»	41	»	»	»	»	»	45	»	37	»
17	−3	»	6	20	25	34	»	42	49	42	43	45	45	46	40	»	26
18	»	»	»	»	»	»	38	»	»	»	42	»	44	»	41	»	25
19	−4	»	»	19	24	35	39	41	50	43	41	»	43	47	42	36	26
20	»	−1	»	18	»	36	»	40	»	»	»	46	»	48	»	35	»
21	−3	0	5	19	25	37	40	»	49	44	40	47	»	47	41	34	»
22	−2	»	4	»	26	»	41	»	48	»	39	»	44	»	»	»	25
23	»	−1	5	»	27	36	40	39	49	45	40	46	»	46	40	35	26
24	»	»	»	20	»	35	»	»	»	46	»	45	»	45	»	36	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−3	»	6	»	28	»	»	»	48	»	41	»	43	»	39	»	25
27	−2	−2	7	21	»	36	41	40	49	47	42	46	42	»	38	35	24
28	»	−3	»	22	»	35	»	41	»	46	»	»	»	46	»	36	»
29	»	−2	8	23	29	34	42	40	48	»	41	47	41	45	37	35	25
30	−3	»	9	»	30	»	43	»	47	»	42	»	40	»	38	»	»
31	−4	−1	10	24	31	»	42	39	46	45	41	48	41	44	»	»	24
32	»	0	»	»	»	35	»	40	»	46	»	47	»	43	»	36	»
33	−5	»	11	25	32	36	43	41	»	45	»	48	40	44	37	35	23
34	−4	»	12	»	33	»	42	»	»	»	40	»	39	»	38	»	24
35	−5	»	13	24	32	37	»	40	45	44	41	49	38	45	»	»	25
36	»	1	»	25	»	36	»	39	»	43	»	50	»	»	»	36	»
37	−4	0	»	24	33	37	41	38	46	44	40	»	39	44	39	37	26
38	»	»	14	»	32	»	42	»	45	»	41	»	40	»	40	»	27
39	−3	1	13	25	31	38	43	»	44	45	»	49	41	43	41	36	»
40	»	0	»	24	»	»	»	39	»	46	»	50	»	44	»	35	»
41	−2	−1	14	»	30	39	42	40	43	47	42	51	»	43	40	34	26
42	−1	»	15	»	29	»	43	»	42	»	»	»	40	»	41	»	25
43	−2	−2	14	25	30	38	44	41	»	48	43	50	»	42	42	35	24
44	»	−1	»	26	»	39	»	42	»	49	»	49	»	43	»	»	»
45	−3	0	15	27	»	38	43	43	41	48	42	48	39	»	43	34	23
46	−2	»	»	»	31	»	42	»	40	»	43	»	38	»	44	»	22
47	»	−1	16	28	30	»	41	»	41	»	44	49	39	42	43	33	23
48	»	0	»	27	»	39	»	»	»	47	»	50	»	43	»	34	»
49	−3	1	15	26	31	39	42	44	40	48	43	49	40	44	43	33	24

20000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	24	27	41	46	47	43	47	38	38	26	22	26	23	24	19	25	25
1	»	28	42	»	46	42	46	39	39	25	21	25	»	23	18	24	26
2	»	»	»	47	»	43	»	40	»	24	»	»	»	22	»	25	»
3	23	27	43	46	45	44	45	41	»	25	22	26	24	23	17	26	25
4	22	»	42	»	46	»	»	»	38	»	21	»	23	»	18	»	26
5	23	26	43	45	»	43	»	40	37	26	22	27	22	»	19	25	27
6	»	27	»	44	»	42	»	39	»	25	»	»	»	24	»	26	»
7	»	28	44	45	47	43	46	40	38	»	23	26	23	»	20	25	26
8	24	»	45	»	48	»	47	»	37	»	22	»	24	»	19	»	»
9	23	27	46	44	47	»	48	41	38	24	23	27	25	25	»	26	25
10	»	28	»	»	»	44	»	42	»	23	»	26	»	26	»	27	»
11	24	»	45	45	46	45	47	43	37	22	»	»	24	27	18	28	24
12	25	»	46	»	45	»	48	»	»	»	22	»	23	»	19	»	25
13	26	29	»	46	44	44	»	42	36	21	21	25	24	26	20	»	26
14	»	30	»	47	»	45	»	41	»	22	»	24	»	»	»	27	»
15	27	31	»	48	43	44	47	40	»	23	22	»	23	25	21	26	27
16	»	»	47	»	44	»	46	»	35	»	21	»	22	»	22	»	26
17	28	30	48	47	43	43	45	»	36	24	22	23	21	24	23	27	»
18	»	29	»	48	»	»	»	39	»	25	»	24	»	23	»	28	»
19	27	30	47	»	44	42	44	38	37	26	21	23	»	22	22	27	25
20	28	»	48	»	45	»	43	»	36	»	»	»	20	»	21	»	24
21	27	31	47	47	46	43	44	39	»	25	20	22	21	23	20	28	25
22	»	32	»	48	»	44	»	38	»	26	»	23	»	24	»	»	»
23	»	31	48	»	»	45	43	37	35	25	21	22	20	»	19	27	26
24	28	»	»	»	47	»	42	»	34	»	22	»	21	»	20	»	25
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	30	»	47	»	44	»	»	»	26	»	21	»	23	»	28	»
27	27	31	47	46	46	»	41	36	35	27	23	22	20	24	»	27	24
28	28	»	48	»	47	»	40	»	34	»	24	»	»	»	21	»	23
29	29	»	49	47	46	45	41	37	33	26	»	21	21	23	22	28	24
30	»	32	»	46	»	46	»	36	»	25	»	20	»	»	»	29	»
31	28	33	48	47	47	47	»	37	32	24	25	21	»	22	23	»	25
32	29	»	47	»	»	»	42	»	31	»	24	»	22	»	24	»	26
33	28	34	»	48	48	46	43	38	32	23	23	»	21	21	25	28	25
34	»	35	»	47	»	45	»	39	»	»	»	22	»	20	»	27	»
35	29	34	46	48	47	46	42	»	31	24	24	23	20	21	26	»	»
36	28	»	47	»	46	»	41	»	30	»	»	»	21	»	»	»	26
37	29	35	46	»	47	47	40	38	29	25	25	24	»	»	25	28	25
38	»	»	»	47	»	48	»	37	»	24	»	25	»	20	»	29	»
39	30	36	47	46	46	47	39	38	»	25	24	»	22	21	26	»	24
40	31	»	48	»	45	»	»	»	28	»	»	»	23	»	25	»	23
41	30	37	47	47	»	46	38	»	27	»	23	26	24	»	26	28	22
42	»	38	»	48	»	45	»	»	»	24	»	»	»	20	»	27	»
43	»	39	48	49	44	44	37	»	26	»	24	25	23	21	25	28	21
44	29	»	47	»	43	»	»	»	25	»	25	»	22	»	24	»	»
45	30	40	48	48	42	»	36	39	26	23	26	26	21	22	»	27	22
46	»	41	»	»	»	45	»	40	»	24	»	25	»	21	»	26	»
47	29	»	47	»	43	46	37	39	25	23	»	24	22	20	23	25	21
48	28	»	»	»	42	»	38	»	»	»	25	»	23	»	24	»	22
49	27	41	46	47	43	47	38	38	26	22	26	23	24	19	25	25	21

21000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	21	22	30	26	33	43	47	41	45	38	39	35	37	38	39	35	29
1	22	21	29	25	»	44	48	42	44	39	40	34	36	»	38	36	28
2	»	»	»	»	34	»	47	»	43	»	39	»	37	»	37	»	29
3	»	22	28	26	35	45	46	41	44	»	38	35	38	39	38	35	28
4	»	23	»	25	»	44	»	»	»	40	»	36	»	»	»	34	»
5	23	24	27	26	34	»	45	40	45	39	37	37	39	40	»	35	29
6	24	»	28	»	35	»	44	»	44	»	38	»	»	»	37	»	28
7	23	»	27	27	36	43	43	41	43	38	»	38	40	41	36	34	29
8	»	23	»	26	»	44	»	40	»	39	»	39	»	42	»	33	»
9	24	24	26	27	37	45	»	39	42	38	37	38	39	41	35	»	30
10	25	»	27	»	»	»	44	»	41	»	36	»	40	»	34	»	29
11	24	23	»	28	36	44	45	40	40	39	37	»	39	40	33	34	28
12	»	22	»	29	»	45	»	39	»	»	»	37	»	41	»	33	»
13	25	21	28	28	37	44	44	»	41	40	38	36	38	42	34	32	»
14	24	»	29	»	36	»	45	»	40	»	39	»	39	»	»	»	29
15	23	22	28	»	37	45	44	40	39	41	38	35	»	41	33	33	30
16	»	»	»	29	»	46	»	39	»	42	»	34	»	40	»	32	»
17	24	23	27	30	38	»	43	40	»	41	39	33	38	39	34	33	»
18	25	»	28	»	»	»	»	»	38	»	40	»	39	»	35	»	»
19	26	24	»	31	»	47	42	41	39	42	39	34	38	»	»	32	29
20	»	25	»	»	»	46	»	42	»	41	»	»	»	»	»	33	»
21	»	26	27	32	39	47	43	41	40	»	38	35	»	40	34	34	28
22	27	»	26	»	40	»	42	»	39	»	39	»	37	»	33	»	»
23	28	27	27	33	41	»	41	40	38	40	»	36	36	41	»	35	29
24	»	26	»	»	»	48	»	41	»	»	»	37	»	40	»	34	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	27	»	28	»	42	»	40	»	»	»	40	»	37	»	34	»	30
27	26	25	29	»	41	47	»	42	39	41	41	38	36	41	35	»	29
28	»	24	»	34	»	»	»	41	»	42	»	37	»	»	»	35	»
29	27	23	»	35	»	46	41	42	38	41	40	»	37	42	36	34	28
30	»	»	28	»	40	»	42	»	37	»	39	»	38	»	35	»	29
31	26	24	»	36	»	45	41	»	38	40	40	36	37	43	34	35	»
32	»	»	»	35	»	»	»	43	»	39	»	37	»	42	»	36	»
33	»	23	27	»	41	44	42	44	39	40	»	36	»	43	35	35	30
34	25	»	28	»	42	»	41	»	38	»	»	»	36	»	36	»	29
35	24	22	»	34	43	45	42	45	»	41	39	35	35	44	35	34	28
36	»	23	»	35	»	46	»	44	»	»	»	34	»	43	»	»	»
37	25	24	29	34	»	47	43	»	39	40	38	35	36	»	36	33	29
38	24	»	»	»	42	»	44	»	40	»	»	»	35	»	37	»	30
39	»	25	28	35	41	48	43	43	39	»	37	36	36	42	36	32	31
40	»	26	»	36	»	47	»	»	»	39	»	35	»	41	»	33	»
41	23	27	27	37	40	»	44	44	40	40	38	36	37	40	»	32	32
42	22	»	28	»	41	»	43	»	39	»	37	»	»	»	»	»	33
43	21	»	27	36	40	46	42	43	40	41	»	37	38	39	35	31	32
44	»	28	»	35	»	45	»	42	»	40	»	36	»	38	»	32	»
45	22	29	26	34	41	46	»	43	39	41	36	37	39	39	36	»	31
46	23	»	27	»	»	»	43	»	38	»	35	»	38	»	35	»	30
47	22	30	»	35	42	47	42	44	39	40	34	»	39	»	36	31	29
48	»	29	»	34	»	46	»	45	»	»	»	38	»	40	»	30	»
49	22	30	26	33	43	47	41	45	38	39	35	37	38	39	35	29	29

22000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	29	33	28	22	23	22	15	11	1	3	3	2	-3	-2	-6	-5	-8
1	30	32	27	21	24	»	16	10	0	2	2	»	-4	»	»	»	-9
2	»	33	»	»	»	21	»	9	»	1	»	1	»	-3	»	-4	»
3	31	»	28	22	25	20	17	8	1	2	»	0	»	»	-5	-5	8
4	32	»	27	»	24	»	16	»	»	»	1	»	»	»	-6	»	-7
5	33	34	28	21	23	21	»	7	0	1	0	»	-3	-4	-5	»	8
6	»	35	»	22	»	22	»	8	»	2	»	1	»	»	»	-4	»
7	34	34	»	21	24	21	15	7	1	»	-1	»	-2	-3	-6	-3	-9
8	»	»	27	»	25	»	14	»	»	»	0	»	-3	»	-5	»	-10
9	35	35	26	22	24	22	13	»	»	3	1	2	-4	-4	-4	-2	
10	»	34	»	21	»	»	»	6	»	4	»	3	»	-3	»	-1	»
11	34	35	27	»	25	»	14	5	0	5	2	4	»	-4	-5	0	-9
12	35	»	26	»	»	»	15	»	1	»	»	»	-5	»	-6	»	-10
13	36	34	27	»	»	21	14	4	»	4	3	3	-6	-3	-5	-1	-11
14	»	35	»	22	»	20	»	3	»	3	»	2	»	-2	»	»	»
15	37	»	28	23	»	19	13	4	0	2	2	3	-5	»	-6	0	-12
16	»	»	»	»	26	»	12	»	1	»	3	»	»	»	-5	»	11
17	»	34	29	»	25	18	13	3	2	»	2	2	-6	-3	-4	-1	-12
18	»	33	»	24	»	19	»	»	»	3	»	3	»	-2	»	-2	»
19	36	32	28	23	26	»	12	4	1	4	3	2	-5	-1	»	-1	-11
20	37	»	27	»	27	»	13	»	2	»	4	»	»	»	»	»	-12
21	38	»	26	24	26	18	12	5	3	3	»	1	-6	0	-3	»	-13
22	»	31	»	25	»	19	»	4	»	4	»	0	»	-1	»	»	»
23	37	30	25	24	27	18	»	5	2	3	3	1	-7	0	-4	»	-14
24	36	»	26	»	»	»	13	»	3	»	4	»	-6	»	-3	»	-13
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	31	»	23	»	17	»	4	»	»	»	0	»	-1	»	-2	»
27	35	32	25	24	28	16	12	»	4	2	5	-1	-5	0	-4	-3	»
28	36	»	26	»	29	»	13	»	3	»	6	»	-4	»	»	»	-12
29	35	31	25	»	30	15	14	5	2	3	7	0	»	-1	-3	-4	-13
30	»	»	»	23	»	14	»	4	»	4	»	1	»	-2	»	-5	»
31	36	32	26	24	29	15	15	5	»	5	8	0	-5	-3	-4	-6	-12
32	35	»	27	»	28	»	»	»	1	»	9	»	-4	»	-5	»	-13
33	34	31	26	23	»	16	16	6	0	6	8	1	-3	»	-6	-5	-14
34	»	32	»	22	»	17	»	5	»	7	»	»	»	-4	»	-6	»
35	»	31	27	21	29	16	15	6	1	»	9	0	-4	-5	-5	-5	-15
36	33	»	»	»	28	»	14	»	0	»	8	»	-5	»	-4	»	»
37	34	32	28	20	27	»	13	5	1	6	7	-1	-4	-6	»	-6	-14
38	»	31	»	»	»	»	»	4	»	5	»	-2	»	-7	»	-7	»
39	35	»	29	21	28	15	12	5	»	4	»	-3	-5	-8	-3	-8	-15
40	34	»	28	»	29	»	13	»	»	»	6	»	-4	»	-2	»	»
41	33	30	27	20	28	16	»	4	2	5	5	-4	-3	-7	-3	»	-16
42	»	29	»	19	»	17	»	3	»	4	»	-5	»	»	»	-9	»
43	34	30	»	20	27	16	12	4	1	5	4	»	-4	-8	-2	-10	-17
44	»	»	26	»	26	»	13	»	2	»	3	»	-3	»	-3	»	-16
45	35	29	25	21	25	15	12	»	3	6	2	-6	-4	-9	-4	-9	»
46	»	28	»	22	»	»	»	3	»	5	»	-5	»	-8	»	-10	»
47	34	27	24	»	24	16	11	2	4	4	3	-4	»	-7	-5	-9	-15
48	33	»	23	»	23	»	12	»	3	»	»	»	-3	»	-6	»	-14
49	33	28	22	23	22	15	11	1	3	3	2	-3	-2	-6	-5	-8	-14

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	-14	-21	-18	-17	-18	-18	-28	-27	-24	-22	-16	-18	-24	-20	-21	-20	-24
1	-15	-20	·	-16	-17	-19	·	-28	-25	-21	-15	-19	-23	-21	·	·	-25
2	-16	·	-19	·	·	·	-29	·	-24	·	-16	·	-22	·	-22	·	-24
3	·	21	·	·	18	-18	-28	-29	-25	-20	-15	·	-21	-20	-23	-21	-23
4	·	-20	·	-17	·	-17	·	-30	·	·	·	-20	·	-21	·	-20	·
5	-15	-19	-18	-16	-19	-18	-27	·	-26	-21	-14	-21	-22	-20	-22	-21	·
6	-16	·	19	·	-20	·	-28	·	·	·	-15	·	-21	·	·	·	-24
7	-15	-20	-18	·	-21	-17	-27	-29	-25	-22	-16	-20	·	-19	-23	-22	-25
8	·	·	·	-17	·	18	·	-28	·	-21	·	-19	·	-20	·	-23	·
9	-16	21	-19	-18	-20	-19	28	-27	·	-20	-15	-18	-22	-19	-22	-24	-24
10	-17	·	-20	·	-19	·	·	·	-26	·	-16	·	-21	·	-23	·	-23
11	-18	-22	-21	-17	·	18	-27	-26	27	-21	-15	-19	-20	·	-24	-25	-24
12	·	-23	·	-16	·	-19	·	-27	·	-22	·	·	·	-20	·	-24	·
13	·	-22	-20	-17	18	-20	-28	-26	-26	·	-16	-18	-21	-21	-23	-23	-23
14	-17	·	-21	·	-19	·	29	·	-25	·	-17	·	-22	·	-22	·	·
15	-16	-21	-22	-18	-18	·	-28	-25	-24	-21	-16	-19	-21	-22	·	-24	-22
16	·	20	·	·	·	-21	·	-26	·	-22	·	-20	·	-21	·	-23	·
17	-15	·	21	-17	-19	-22	-27	-25	-25	-23	·	-19	-22	-20	-23	-22	-21
18	-14	·	·	·	-18	·	-28	·	·	·	-17	·	-23	·	-24	·	-22
19	-15	-19	-20	-18	-17	-23	·	-26	-24	-22	-18	-20	-22	-21	-23	·	-23
20	·	18	·	-17	·	-24	·	-27	·	-21	·	-21	·	·	·	-23	·
21	-14	-19	·	-18	-18	-23	-27	-26	-23	-22	-19	·	-23	-20	-22	-24	-24
22	·	·	-21	·	-17	·	-26	·	-22	·	-18	·	22	·	-21	·	-25
23	-15	-20	-20	-19	-18	-22	-25	·	-21	-23	-17	-22	-21	-19	-20	-23	·
24	·	-19	·	-18	·	·	·	-27	·	-22	·	-23	·	-20	·	-22	·
25	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
26	-14	·	-19	·	·	·	24	·	22	·	·	·	-22	·	-21	·	-26
27	-15	-18	-20	-19	17	-21	-23	·	·	-21	·	-22	-23	-21	-22	-23	-25
28	·	19	·	18	·	22	·	-26	·	-20	·	-21	·	-22	·	·	·
29	-16	-18	-21	-19	·	23	-22	-27	-21	-19	-18	-22	-24	·	-21	-22	-24
30	-17	·	·	·	-18	·	-23	·	20	·	-17	·	-25	·	-20	·	25
31	·	17	-22	20	-17	-24	-22	-28	-21	·	-18	-21	-24	-23	·	-23	24
32	·	-18	·	-21	·	·	·	·	·	20	·	-22	·	-24	·	-24	·
33	-18	-17	21	-22	-16	·	-23	-29	-20	-19	-17	-21	-23	-25	·	·	-25
34	-19	·	-20	·	-17	·	-24	·	-21	·	-16	·	·	·	·	·	-24
35	-20	·	-19	-21	-18	·	-25	-30	-20	-18	·	-22	-22	·	-19	-25	-23
36	·	-16	·	-22	·	25	·	-29	·	-19	·	-21	·	-24	·	-24	·
37	-21	-15	-18	-21	-17	-24	·	-28	19	18	-17	·	-21	-25	-18	·	24
38	-20	·	-17	·	·	·	-20	·	-20	·	·	·	-20	·	-19	·	25
39	·	-16	·	20	-16	25	25	27	21	·	-18	·	-21	-24	-20	-23	26
40	·	-15	·	-19	·	-26	·	-20	·	·	·	22	·	-23	·	-24	·
41	-19	-16	-16	-20	17	-27	26	·	-22	19	-17	-23	-22	-24	21	-23	·
42	-18	·	-15	·	-16	·	·	·	·	·	-16	·	-23	·	·	·	25
43	·	-17	-16	·	17	·	-25	25	-23	-20	-17	-22	·	-23	20	-24	26
44	·	·	·	-21	·	26	·	24	·	-19	·	-23	·	-22	·	-23	·
45	-19	18	-17	·	18	-27	·	-25	·	-18	-18	-22	-22	-23	-21	-24	27
46	-20	·	·	·	-17	·	·	·	-22	·	·	·	-21	·	-20	·	-26
47	-21	·	-18	-20	·	-28	-26	-24	-21	-17	-17	-23	·	·	-21	-23	-25
48	·	-19	·	-19	·	-29	·	-25	·	-16	·	·	·	-22	·	·	·
49	-21	-18	-17	-18	18	-28	-27	-24	-22	-16	-18	-24	20	-21	-20	-24	24

23000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	-24	-22	-27	-34	-35	-34	28	-28	-38	-33	-32	-31	-33	-40	-34	-36	-38
1	-23	-21	-28	-33	-34	-35	-29	»	-37	-32	-31	-30	-32	-39	-33	-35	»
2	»	-20	»	-32	»	»	»	29	»	-31	»	-31	»	-38	»	-36	»
3	-24	-21	29	»		36	30	-28	»	-32	-30	-30	»	-39	-34	-35	39
4	-25	»	-28	»	33	»	29	»	-36	»	»	»	31	»	-33	»	38
5	-24	-22	-27	31	-34	-37	-28	-29	»	33	-29	-31	-32	-38	-32	-36	-37
6	»	-21	»	-32	»	-38	»	-30	»	32	»	-30	»	37	»	»	»
7	-23	-20	-28	-31	»	-37	-27	-31	-37	-31	-30	-29	-33	»	-31	-35	-36
8	-24	»	»	»	33	»	-28	»	-36	»	-31	»	-32	»	-32	»	-37
9	»	-21	-29	30	34	-38	-27	-32	-37	»	-32	-30	-31	-38	31	36	-36
10	»	-22	»	-31	»	-37	»	»	»	-32	»	-31	»	-37	»	-37	»
11	-25	-23	-28	»	-35	»	-26	-33	-38	-31	-31	-32	-32	-36	»	-36	-37
12	-24	»	-29	»	-36	»	-27	»	-37	»	-30	»	»	»	-30	»	»
13	-25	»	-30	-30	-37	-36	-26	-34	-36	-30	»	-31	-33	-37	-31	-35	»
14	»	-24	»	-29	»	-35	»	-33	»	-31	»	-32	»	-36	»	-36	»
15	-26	-23	-31	-28	-38	-34	»	-32	-35	-30	»	-31	-34	-35	-30	»	»
16	-25	»	32	»	»	»	-25	»	-36	»	31	»	-33	»	-29	»	-36
17	-26	24	»	29	-39	-35	-24	-31	-35	-31	-30	»	-34	-36	»	35	-37
18	»	-25	»	-30	»	34	»	-32	»	»	»	-32	»	»	»	-34	»
19	-25	-24	-33	-29	-38	-35	-25	»	-36	30	-29	-31	»	-35	-30	-35	»
20	-26	»	-32	»	-37	»	-24	»	-37	»	-30	»	-35	»	»	»	-38
21	-25	-25	-33	»	-38	-34	-23	-33	-38	31	»	-30	»	-36	-31	-34	-37
22	»	»	»	30	»	-35	»	»	»	»	»	-31	»	-35	»	-35	»
23	-26	-24	-32	-29	-39	-34	»	32	»	-30	-31	-30	-34	-36	-32	-34	-38
24	-25	»	-33	»	-38	»	»	»	-37	»	»	»	-35	»	-31	»	-37
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-25	»	-30	»	»	»	-33	»	-29	»	»	»	-35	»	-33	»
27	»	26	-32	-31	»	-35	-22	-34	-36	»	-30	-29	-36	-36	-32	-34	-38
28	-24	»	-33	»	-39	»	-23	»	-35	»	-31	»	-35	»	-31	»	»
29	-23	-27	»	30	-38	»	-24	-33	-34	28	-30	-28	-36	-37	»	-33	-39
30	»	»	»	»	»	-34	»	34	»	29	»	-27	»	36	»	-34	»
31	»	»	-34	-31	-37	-33	23	-33	-33	-30	»	-28	-37	-35	-32	-33	-38
32	-22	»	-35	»	-38	»	24	»	»	»	-31	»	-38	»	-33	»	-37
33	-23	26	-34	-32	-37	-32	»	-34	-32	31	-30	-27	-39	-36	-32	»	-36
34	»	-25	»	33	»	-31	»	35	»	30	»	»	»	»	»	-32	»
35	-22	-26	»	-34	-36	-32	23	-36	33	-31	-29	»	-40	-37	-33	-33	-37
36	»	»	-33	»	35	»	-24	»	34	»	-28	»	-41	»	34	»	-38
37	-21	-27	-34	33	-36	31	-25	»	-35	-30	-27	-28	-40	-36	-35	-32	»
38	»	-26	»	34	»	»	»	37	»	-29	»	-29	»	-37	»	-31	»
39	-22	-27	-33	»	37	30	-26	38	34	-30	-26	-30	»	-38	-36	32	-39
40	»	»	-34	»	-36	»	-25	»	-35	»	»	»	39	»	-35	»	-40
41	21	-28	35	33	35	-31	-26	37	»	-29	»	-29	-38	-37	-36	33	-39
42	»	-29	»	-34	»	-30	»	38	»	-30	»	-30	»	-36	»	»	»
43	-22	-28	-34	-35	»	-29	-27	-39	-34	31	27	-29	-39	»	-37	-34	-38
44	-21	»	»	»	-34	»	-28	»	-33	»	-28	»	-40	»	-36	»	-37
45	»	-29	-35	-36	33	28	29	-38	32	»	-29	-30	»	35	37	-35	-36
46	»	-28	»	-37	»	-29	»	»	»	32	»	-31	»	-34		-36	»
47	-22	-27	-34	-36	34	»	30	-37	-33	33	-30	-32	-39	-35	»	-37	-35
48	-23	»	-33	»	-35	»	-29	»	-32	»	-31	»	»	»	»	»	-36
49	-22	-27	34	-35	-34	-28	28	-38	-33	32	31	-33	-40	-34	-36	-38	-35

24000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-35	-38	-41	-41	-44	-50	-57	-66	-68	-66	-57	-49	-53	-58	-60	-53	-50
1	-36	-39	-42	-40	-45	-49	-58	-67	»	-67	-56	-48	-52	»	-59	-54	-49
2	-37	»	-41	»	-46	»	»	»	-67	»	-57	»	»	»	-58	»	-48
3	-36	-38	-42	-39	»	-48	-59	-68	-68	-66	-56	»	-51	»	-57	-53	-49
4	»	-37	»	-38	»	-47	»	-69	»	-67	»	»	»	-57	»	-52	»
5	»	-38	-43	-39	-45	-48	-60	-68	-69	»	-55	-47	-52	-58	»	-53	-48
6	-35	»	-42	»	-46	»	-61	»	»	»	-56	»	-51	»	-56	»	»
7	-36	-39	-43	-40	-47	»	-62	»	-68	-66	-55	-48	-52	-57	»	-52	-47
8	»	-40	»	»	»	-49	»	-69	»	-65	»	-49	»	-58	»	-53	»
9	-35	»	-44	-41	-48	»	-63	-68	-67	-64	»	-50	-53	-59	-57	-52	-48
10	-36	»	-43	»	»	»	-64	»	»	»	-56	»	-54	»	-58	»	-47
11	-35	-39	-44	»	-47	-50	»	-67	-68	-63	-57	-49	-55	-58	-57	»	-48
12	»	-38	»	-40	»	-51	»	-68	»	-64	»	-50	»	»	»	-51	»
13	-36	»	»	-39	-48	-52	-65	-67	-69	-63	-56	»	-56	-57	-56	»	-47
14	»	»	-45	»	-47	»	-66	»	-68	»	-55	»	-55	»	-55	»	-48
15	-37	-37	-44	-38	-48	-51	-65	»	-69	-64	-56	-51	-56	-56	-54	»	»
16	»	-36	»	-39	»	»	»	-68	»	-65	»	-50	»	-57	»	-52	»
17	-38	-35	-45	»	-49	-50	-64	»	-68	-64	-57	»	»	-56	-55	-53	47
18	-37	»	-44	»	-50	»	-65	»	-67	»	»	»	-57	»	-54	»	-46
19	-38	-36	-43	-38	-51	-51	-64	-69	»	-63	-56	-49	-58	-57	-55	-52	-45
20	»	-37	»	-39	»	-50	»	-70	»	-62	»	-50	»	-58	»	»	»
21	-39	-38	42	-40	»	-51	-65	-71	-66	-61	»	-51	-59	»	-56	-53	-46
22	-40	»	»	»	-50	»	-66	»	-65	»	-55	»	-58	»	-55	»	-47
23	»	-39	-41	-41	-51	-52	-65	-70	-66	»	-54	-52	-59	-59	-54	-52	-48
24	»	-38	»	-40	»	-51	»	»	»	-62	»	-53	»	-60	»	-53	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	-42	»	-52	»	-66	»	-65	»	-53	»	»	»	-53	»	-49
27	-41	»	-41	-41	-51	-52	-65	-69	-64	-61	»	-52	-58	-61	-54	-52	-48
28	»	-37	»	-42	»	-53	»	-68	»	-62	»	-51	»	-60	»	-51	»
29	»	-38	-42	-41	-52	»	»	-69	-65	-61	-54	-52	-59	-61	-53	»	-47
30	-42	»	-43	»	»	»	-64	»	-66	»	-53	»	-58	»	-52	»	-46
31	-43	-39	»	-42	-51	-54	-63	-70	-67	-62	-52	»	-57	-62	-51	-50	-47
32	»	-38	»	-41	»	-53	»	-71	»	»	»	-53	»	-61	»	-49	»
33	-44	-39	-44	-40	-50	-54	-64	»	-66	-61	-51	-52	-56	-60	-52	-50	»
34	-45	»	-45	»	-51	»	-65	»	-65	»	»	»	-57	»	»	»	-48
35	-44	-40	-44	»	-50	-53	-66	-72	-66	-62	-52	-51	»	-61	-53	-49	-49
36	»	»	»	-41	»	-52	»	-71	»	-61	»	-52	»	-62	»	-50	»
37	»	-41	-45	»	»	-51	-67	»	»	-60	-53	-53	-56	-61	-52	-49	-48
38	-43	»	-44	»	-49	»	»	»	-65	»	-54	»	-57	»	-51	»	-49
39	-42	-40	-43	-42	»	-52	-66	-72	-66	-59	-53	»	-58	»	-50	-48	-50
40	»	-41	»	-43	»	-53	»	-71	»	-58	»	»	»	-60	»	-49	»
41	»	-40	-42	-44	-48	-54	-67	-70	-65	»	-52	-54	-57	-59	-51	-50	-49
42	-41	»	-41	»	-49	»	-66	»	-64	»	-53	»	»	»	-52	»	»
43	-40	-41	-42	-45	-50	»	-65	-69	-63	-57	-52	-55	-58	-58	»	-51	-48
44	»	-42	»	»	»	-55	»	-68	»	-58	»	-54	»	-59	»	-52	»
45	-41	»	-41	-44	-49	-56	-66	-69	-64	-59	»	-53	-57	-58	-51	-51	-47
46	-40	»	-40	»	-50	»	-65	»	»	»	-51	»	-58	»	-52	»	-46
47	-39	-41	-41	-45	-49	-57	»	-70	-65	-58	-50	-52	-59	-59	-53	»	»
48	»	-40	»	»	»	-56	»	-69	»	-57	»	-53	»	»	»	»	»
49	-38	-41	-41	44	-50	-57	-66	-68	-66	-57	-49	-53	58	-60	-53	-50	46

25000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	-46	-41	-34	-31	-27	-25	-22	-21	-17	-8	-8	-4	-6	1	-1	1	-2
1	»	-40	-33	-32	-28	-24	-21	-20	-18	»	-7	-5	-7	0	0	2	-1
2	»	-39	»	-31	»	-23	»	»	»	-7	»	-4	»	-1	»	1	»
3	-45	-38	-34	-30	-27	»	-22	-19	-19	-6	-8	-5	-8	-2	»	0	-2
4	44	»	33	»	»	»	-23	»	-18	»	-7	»	»	»	-1	»	1
5	-43	»	-32	»	-28	-24	-22	-20	-17	-5	»	»	-7	-1	-2	1	-2
6	»	-39	»	-31	»	-23	»	-19	»	-4	»	-6	»	0	»	2	»
7	-42	-38	-31	-30	-29	-24	»	-18	-18	-3	-6	-7	-6	-1	-3	»	-3
8	-41	»	-30	»	»	»	-21	»	-17	»	-5	»	-7	»	-4	»	-4
9	-42	-39	»	-31	-30	»	-20	-17	-16	-4	-4	»	-8	-2	-5	1	-3
10	»	-38	»	-30	»	-23	»	-16	»	»	»	-8	»	-3	»	»	»
11	-43	-37	-29	-29	-29	-22	-19	»	-15	-5	-3	-7	-9	2	-4	0	»
12	-42	»	-30	»	-30	»	-20	»	-16	»	-4	»	-10	»	»	»	-4
13	-41	-36	-31	»	»	-21	-21	-17	-15	-6	-5	-6	»	-1	-3	-1	-5
14	»	»	»	-30	»	-20	»	-16	»	-7	»	-7	»	-2	»	-2	»
15	-40	-35	-30	-31	-29	-19	-20	-15	»	-6	-6	»	-11	-3	-2	-1	-6
16	-41	»	-29	»	-28	»	»	»	-16	»	-5	»	-12	»	-3	»	-5
17	-40	-34	-30	-32	»	-20	-21	-16	-15	-7	-4	-6	-11	»	-4	0	-6
18	»	-35	»	-31	»	-21	»	-17	»	-8	»	»	»	-2	»	-1	»
19	»	-34	-31	-30	-27	-22	-20	-16	-16	»	-5	-7	-10	-1	-3	-2	-7
20	-41	»	-32	»	-26	»	-19	»	-15	»	-4	»	»	»	-2	»	»
21	-42	-33	-33	-31	-25	»	-20	-15	-16	-9	-5	-8	-9	-2	»	-1	-8
22	»	-34	»	»	»	-23	»	-14	»	-8	»	-7	»	-3	»	0	»
23	-41	»	-32	-30	-24	-24	-21	-15	-17	-9	»	-6	-8	-4	-3	-1	-9
24	»	»	-33	»	-23	»	-20	»	»	»	-6	»	-7	»	-4	»	-10
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-33	»	-29	»	»	»	-14	»	-10	»	-5	»	»	»	0	»
27	-42	-32	»	-30	-24	-25	-21	-13	-18	-11	-5	»	-8	-5	-5	1	-9
28	»	»	-34	»	-25	»	-20	»	-17	»	-4	»	-7	»	-4	»	-8
29	-43	-31	-33	-29	-24	-24	-21	»	-16	-10	-3	-6	-6	-4	-3	2	»
30	»	-32	»	-28	»	»	»	-14	»	-9	»	»	»	-3	»	1	»
31	-44	-31	-34	»	-23	-23	-22	-15	-15	-8	»	-5	»	-2	-2	»	-7
32	-43	»	-33	»	-24	»	-21	»	-14	»	»	»	-5	»	»	»	-6
33	-44	-32	-34	-27	-23	-22	-22	-16	»	-7	-4	-6	-4	»	-1	2	-5
34	»	-33	»	-28	»	-21	»	-15	»	-6	»	-5	»	-3	»	»	»
35	-43	-32	-33	-27	»	-20	-23	-16	-15	-7	-3	»	-5	»	0	3	-6
36	-42	»	»	»	-24	»	»	»	-14	»	»	»	-6	»	-1	»	-5
37	»	-31	-32	-28	-23	-19	-22	-17	-15	»	-2	-6	-5	-2	0	2	-6
38	»	-32	»	-29	»	-20	»	»	»	-6	»	-5	»	-1	»	3	»
39	-41	-33	-31	-28	-24	»	-23	»	-14	-5	-3	-6	»	-2	»	2	-5
40	-40	»	-30	»	-23	»	»	»	-13	»	-2	»	»	»	-1	»	-6
41	-41	»	-29	-29	-22	»	-22	-18	-12	-4	»	-5	-4	-1	-2	1	-7
42	»	-34	»	-28	»	-21	»	-19	»	-5	»	-4	»	0	»	2	»
43	-40	-33	-30	»	-23	-22	»	-18	-11	»	-3	-5	-3	-1	-1	»	-8
44	-39	»	»	»	»	»	-21	»	-10	»	-4	»	-2	»	0	»	-7
45	-40	»	»	-27	-24	-23	-20	-17	-9	-6	-3	»	-1	-2	-1	1	-6
46	»	-32	»	-26	»	-22	»	-18	»	»	»	-6	»	-1	»	0	»
47	-41	-33	-29	-27	-25	-23	-19	»	-10	-7	-4	-7	0	0	0	-1	»
48	-42	»	-30	»	-26	»	-20	»	-9	»	-5	»	1	»	»	»	-5
49	-41	-34	-31	-27	-25	-22	-21	-17	-8	-8	-4	-6	1	-1	1	-2	-4

26000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	−4	− 6	−10	−12	−14	−13	−15	−8	−5	−3	−7	−4	5	2	3	3	2
1	−3	»	−11	−11	−15	−12	−16	−9	−4	−4	»	−3	6	1	2	2	1
2	−4	»	−10	»	−16	»	−15	»	»	»	−6	»	5	»	3	»	2
3	−3	− 7	−11	−12	−17	−13	»	−8	−5	−5	−7	−4	6	0	2	»	3
4	»	− 8	»	−13	»	−14	»	−7	»	−6	»	−5	»	»	»	3	»
5	−2	− 9	»	−14	−18	−13	−16	−6	−4	−7	−8	»	5	1	1	2	4
6	»	»	−10	»	−17	»	−17	»	−3	»	−7	»	6	»	2	»	3
7	−1	−10	− 9	−15	−16	−12	−16	»	−2	−6	−6	−4	5	2	3	»	»
8	»	−11	»	−14	»	»	»	−7	»	−5	»	−3	»	3	»	1	»
9	−2	−10	−10	»	−15	−13	−17	−6	−1	−6	−5	−4	»	2	2	2	2
10	−3	»	− 9	»	−14	»	−16	»	−2	»	»	»	6	»	1	»	3
11	−2	−11	− 8	−13	−13	−14	−15	−5	»	−5	»	−3	5	1	2	1	4
12	»	−10	»	−14	»	−15	»	−6	»	−6	»	−4	»	0	»	»	»
13	−1	− 9	− 7	−13	»	−16	−14	−7	−3	−5	−4	−3	4	»	3	0	»
14	0	»	»	»	−12	»	−13	»	−2	»	−3	»	3	»	4	»	3
15	»	− 8	− 8	−12	−13	−15	−14	−8	−3	»	»	−4	2	1	»	1	2
16	»	− 9	»	−13	»	−16	»	»	»	−4	»	−3	»	»	»	0	»
17	−1	− 8	− 7	−14	−14	»	−13	−9	−4	−3	−4	−2	»	2	»	−1	1
18	−2	»	− 6	»	−13	»	−12	»	−3	»	−3	»	»	»	5	»	2
19	»	»	− 7	−15	−12	−15	−13	−8	−4	−4	»	−1	1	3	6	0	1
20	»	− 9	»	−14	»	−14	»	−7	»	»	»	−2	»	2	»	1	»
21	−3	−10	− 8	−15	»	−15	»	−6	»	−5	−4	»	2	1	7	»	0
22	−4	»	− 9	»	»	»	−12	»	−5	»	−5	»	1	»	6	»	1
23	−5	− 9	»	−16	−11	»	»	−7	−4	−4	−4	»	2	2	7	0	2
24	»	−10	»	−15	»	»	»	−8	»	»	»	−1	»	1	»	1	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−4	»	−10	»	−12	»	−13	»	−3	»	»	»	3	»	»	»	3
27	−5	−11	»	»	−11	−14	−12	−7	−2	−5	−3	0	»	0	0	0	4
28	»	»	»	−16	»	−13	»	−6	»	−6	»	1	»	−1	»	−1	»
29	»	−12	− 9	−17	−10	−14	−11	−5	»	−5	−4	2	2	0	5	0	5
30	−6	»	− 8	»	− 9	»	»	»	−3	»	−3	»	1	»	6	»	4
31	»	−11	»	−16	»	−15	−10	−4	−4	−6	−2	3	2	»	7	1	3
32	»	−10	»	−15	»	−16	»	−3	»	−7	»	»	»	1	»	0	»
33	»	−11	− 9	−16	−10	−17	−11	−4	−5	»	−1	2	1	0	8	1	4
34	−7	»	−10	»	−11	»	−10	»	−4	»	−2	»	0	»	7	»	»
35	−6	−10	−11	−17	−10	»	− 9	−5	−5	−6	−3	3	1	1	»	0	3
36	»	−11	»	»	»	−16	»	»	»	−5	»	4	»	2	»	1	»
37	−7	»	−10	−16	−11	−15	− 8	−4	−4	−4	»	5	2	3	6	2	4
38	»	»	−11	»	−12	»	− 7	»	»	»	−4	»	1	»	5	»	3
39	−6	−12	−12	−15	−11	−16	»	−5	−5	−3	−3	6	2	2	6	»	2
40	»	−11	»	−14	»	−17	»	−4	»	−2	»	5	»	»	»	3	»
41	−7	−10	»	−13	−12	−16	− 8	−3	−4	−3	−4	»	1	3	7	4	1
42	»	»	−11	»	−13	»	− 7	»	−3	»	−5	»	0	»	8	»	2
43	−8	−11	−12	−14	−12	−17	− 6	»	−4	−4	−4	6	1	4	7	3	»
44	»	−12	»	−15	»	»	»	»	»	−5	»	5	»	3	»	4	»
45	−7	−11	−13	»	−13	−16	− 7	−2	−3	−6	−3	4	»	»	6	3	1
46	−8	»	−12	»	−12	»	− 6	»	−2	»	»	»	0	»	5	»	0
47	−7	−12	−13	−14	−13	−15	− 7	−3	»	−7	»	5	1	2	4	2	−1
48	»	−11	»	−15	»	−14	»	−4	»	−6	»	6	»	3	»	»	»
49	−6	−10	−12	−14	−13	−15	− 8	−5	−3	−7	−4	5	2	3	3	2	0

27000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	0	3	0	7	13	11	7	3	-5	-9	-9	-15	-15	-10	-10	-20	-18
1	1	4	»	6	14	12	8	2	-6	-10	-8	»	-16	-11	-11	-19	-17
2	»	3	»	7	»	11	»	»	»	»	»	-14	»	-12	»	-20	»
3	»	2	1	8	13	12	9	»	-5	»	-7	-15	-17	-11	-10	-21	»
4	2	»	0	»	14	»	10	»	»	»	-8	»	-16	»	»	»	-16
5	3	3	1	»	13	11	9	»	-4	-11	-9	-14	»	-12	-11	-20	-15
6	»	»	»	7	»	10	»	1	»	-12	»	-15	»	-11	»	-19	»
7	2	2	2	8	12	»	8	2	»	-11	-8	-14	-15	-10	-12	-20	-14
8	3	»	3	»	»	»	»	»	-5	»	-9	»	-16	»	-13	»	-15
9	4	3	2	»	»	9	9	1	-6	-12	-10	-13	-17	»	-14	-21	16
10	»	4	»	9	»	10	»	0	»	-11	»	»	»	-9	»	-22	»
11	»	»	3	10	11	9	10	-1	-5	»	-11	-12	-16	-10	-15	-23	-15
12	»	»	2	»	12	»	11	»	-4	»	»	»	-15	»	-16	»	»
13	5	5	3	9	13	»	10	-2	-5	-12	-12	-11	-14	-11	»	-22	-14
14	»	4	»	»	»	8	»	»	»	-11	»	-10	»	-12	»	-23	»
15	6	»	2	10	12	9	11	-1	-6	-12	»	-11	-13	-13	-15	-22	-15
16	7	»	3	»	11	»	10	»	»	»	-11	»	-14	»	-14	»	»
17	8	3	2	11	12	10	»	-2	-7	-13	-10	-10	-15	-14	-15	»	-14
18	»	2	»	12	»	11	»	-1	»	-12	»	-11	»	»	»	-21	»
19	9	3	»	13	»	10	9	-2	-6	-11	-9	»	-14	-13	-16	-20	-13
20	»	»	1	»	11	»	8	»	-7	»	-10	»	-15	»	-17	»	14
21	8	4	2	14	10	11	9	»	-6	-12	»	-12	-14	-12	-18	-19	»
22	»	3	»	13	»	»	»	-3	»	-11	»	-11	»	-13	»	-20	»
23	7	2	3	»	9	12	8	-4	-5	-10	-11	-12	»	-12	-19	-19	-13
24	8	»	4	»	10	»	9	»	-6	»	»	»	-13	»	-18	»	-12
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	1	»	12	»	13	»	-3	»	-9	»	-11	»	-11	»	»	»
27	9	0	3	13	»	12	8	-4	-7	-8	»	-12	-12	»	-19	-20	-11
28	»	»	»	»	9	»	9	»	-8	»	-12	»	-11	»	-20	»	-12
29	»	-1	2	12	10	13	10	-5	-7	»	-13	-11	»	-10	-19	-19	-13
30	»	0	»	13	»	12	»	»	»	-9	»	-12	»	-11	»	-20	»
31	8	-1	3	14	11	»	9	-6	-8	-8	-14	-13	-12	-12	»	-19	-14
32	7	»	4	»	12	»	8	»	-9	»	-13	»	»	»	-20	»	-13
33	8	»	5	»	13	11	7	-5	-10	-9	»	-12	»	-11	-21	-18	-12
34	»	0	»	15	»	12	»	-4	»	-8	»	»	»	-12	»	-17	»
35	7	-1	6	16	12	11	»	-3	-11	-9	-14	-11	-11	-11	-20	»	-11
36	6	»	7	»	»	»	6	»	-12	»	-15	»	-12	»	-21	»	-10
37	5	-2	»	15	13	10	5	-4	-11	-8	-16	»	-13	-10	-20	-16	-9
38	»	-1	»	14	»	9	»	-5	»	»	»	-10	»	-11	»	-17	»
39	6	-2	6	13	14	10	6	»	-12	-9	-15	-11	-12	-10	-19	-16	»
40	5	»	7	»	13	»	7	»	-13	»	-16	»	-13	»	»	»	-10
41	4	-1	8	»	12	9	8	»	-12	-10	-17	-10	»	-9	-20	-17	-11
42	»	»	»	12	»	10	»	-6	»	-9	»	-11	»	-10	»	-18	»
43	3	0	9	11	11	9	7	-5	»	-8	-18	-12	-14	-11	-21	-19	-10
44	4	»	8	»	12	»	»	»	-11	»	-17	»	-13	»	-20	»	-9
45	5	1	7	12	»	»	6	-6	-12	-7	-16	-13	-12	»	-19	-20	»
46	»	0	»	11	»	8	»	-7	»	-8	»	»	»	-10	»	»	»
47	»	1	6	12	11	7	5	-6	-11	»	-15	-14	-11	-11	»	-19	-10
48	4	»	7	»	10	»	4	»	-10	»	-16	»	-10	»	-20	»	»
49	3	0	7	13	11	7	3	-5	-9	-9	-15	-15	-10	-10	-20	-18	-9

28000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	−9	− 3	−12	−11	−2	4	11	9	14	20	14	12	13	13	11	−4	−3
1	−8	− 4	−11	»	−3	5	10	8	15	19	13	11	»	12	10	»	−4
2	−7	»	−10	»	−4	»	11	»	14	»	»	»	14	»	9	»	−3
3	−6	− 5	−11	−10	−3	6	12	9	»	18	14	»	13	11	8	−5	−2
4	»	− 4	»	− 9	»	7	»	8	»	19	»	12	»	10	»	»	»
5	−5	− 3	−12	− 8	»	»	13	9	15	20	13	13	12	»	9	−4	−3
6	−6	»	»	»	−4	»	12	»	16	»	12	»	13	»	8	»	−2
7	»	− 2	−13	− 9	−5	6	11	10	17	»	13	14	14	11	7	−3	−1
8	»	− 3	»	− 8	»	7	»	»	»	21	»	15	»	10	»	−4	»
9	»	− 4	−12	− 7	−6	»	10	9	18	22	»	14	13	11	»	−3	0
10	−5	»	−13	»	−7	»	9	»	19	»	14	»	»	»	6	»	−1
11	−6	»	−12	− 8	−6	8	8	10	18	23	»	13	12	10	5	−4	0
12	»	− 5	»	− 7	»	9	»	11	»	24	»	14	»	11	»	−3	»
13	−7	− 4	−13	− 8	−5	10	»	12	19	25	13	13	11	10	6	»	1
14	−8	»	−14	»	»	»	9	»	20	»	14	»	12	»	5	»	0
15	−7	− 3	»	− 9	−4	9	10	11	21	24	13	»	13	11	4	−2	−1
16	»	− 2	»	−10	»	8	»	12	»	»	»	14	»	12	»	−1	»
17	−6	− 3	−13	−11	−3	»	11	»	20	25	14	13	12	11	3	−2	»
18	−7	»	−12	»	−2	»	12	»	19	»	15	»	11	»	»	»	0
19	−8	− 4	−11	»	−1	9	13	13	20	24	16	14	»	»	2	−1	−1
20	»	»	»	−12	»	10	»	14	»	23	»	13	»	12	»	−2	»
21	−7	− 5	−12	−11	0	11	12	15	»	22	17	14	12	13	1	−1	0
22	−6	»	−13	»	1	»	»	»	19	»	16	»	11	»	0	»	1
23	−5	− 4	−12	−10	»	12	13	16	20	21	17	13	10	»	1	0	2
24	»	− 5	»	− 9	»	13	»	15	»	20	»	»	»	14	»	−1	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−4	»	−13	»	2	»	14	»	19	»	16	»	11	»	2	»	»
27	−3	− 6	−12	− 8	1	»	13	14	20	21	15	12	10	15	»	0	1
28	»	− 7	»	»	»	12	»	15	»	22	»	13	»	14	»	−1	»
29	−2	»	−13	− 9	0	11	12	14	21	23	»	12	11	15	3	»	2
30	−1	»	−12	»	1	»	11	»	»	»	16	»	»	»	»	»	1
31	−2	− 8	−11	− 8	0	10	»	13	20	24	17	13	12	»	2	»	0
32	»	− 9	»	− 7	»	11	»	12	»	25	»	12	»	»	»	−2	»
33	−1	−10	»	− 6	1	12	12	11	19	24	16	»	13	14	3	−3	»
34	»	»	−12	»	2	»	13	»	18	»	»	»	12	»	4	»	−1
35	−2	− 9	−11	− 5	3	11	14	»	19	»	»	13	11	»	3	−4	»
36	»	−10	»	− 4	»	»	»	10	»	23	»	14	»	13	»	−5	»
37	−3	− 9	−12	»	2	10	13	»	20	22	15	15	»	14	2	−6	»
38	−2	»	−11	»	3	»	»	»	19	»	»	»	10	»	1	»	−2
39	−3	− 8	−12	− 3	4	»	12	11	»	21	14	14	9	»	0	−5	−1
40	»	− 9	»	− 4	»	9	»	12	»	20	»	15	»	13	»	»	»
41	−4	−10	−11	»	»	10	11	11	20	19	13	14	10	»	−1	−4	−2
42	−5	»	»	»	5	»	10	»	21	»	14	»	11	»	−2	»	−3
43	»	»	−10	− 5	6	11	11	12	20	»	13	13	12	12	−3	−3	−2
44	»	−11	»	− 4	»	10	»	»	»	18	»	12	»	11	»	−2	»
45	−4	−12	−11	− 3	5	»	10	13	21	17	12	13	13	10	»	−3	−3
46	−3	»	»	»	6	»	9	»	20	»	13	»	»	»	−4	»	−4
47	−2	»	−12	− 4	5	11	»	14	19	16	»	»	12	9	−5	−4	−3
48	»	−11	»	− 3	»	10	»	15	»	15	»	14	»	10	»	−3	»
49	−3	−12	−11	− 2	4	11	9	14	20	14	12	13	13	11	−4	−3	−2

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	-2	-10	2	2	-2	5	8	9	6	7	1	-4	-9	-9	-16	-24	-2[illegible]
1	-3	-9	1	1	»	4	7	10	7	8	0	-3	-8	»	-17	-23	-2[illegible]
2	»	-8	»	0	»	5	»	9	»	9	»	»	»	-10	»	-22	»
3	»	-7	2	1	-1	4	6	8	8	»	1	-4	-7	-11	-18	-21	-25
4	»	»	1	»	0	»	7	»	7	»	0	»	-6	»	-19	»	»
5	-4	6	0	2	1	»	6	9	8	10	1	-5	-7	-10	»	-22	-26
6	»	-5	»	»	»	5	»	8	»	9	»	-4	»	-11	»	-23	»
7	-5	»	1	3	2	4	7	7	7	10	»	-5	-8	-12	-18	-24	-25
8	-4	»	»	»	1	»	6	»	»	»	0	»	-7	»	-19	»	-2[illegible]
9	-5	-6	2	4	0	3	»	6	8	11	-1	-6	-8	-11	-20	»	-27
10	»	-5	»	3	»	4	»	7	»	10	»	-7	»	»	»	-23	»
11	-4	-6	»	2	1	5	7	6	7	11	»	»	-9	-12	-19	-22	»
12	»	»	3	»	0	»	8	»	8	»	0	»	-8	»	-20	»	-26
13	-5	-5	2	3	1	6	9	»	7	10	1	-8	-9	-13	»	-23	»
14	»	-4	»	4	»	»	»	7	»	9	»	-7	»	»	»	-22	»
15	-6	-3	1	»	2	5	10	8	8	8	0	-8	»	-12	-21	-21	-27
16	-5	»	2	»	3	»	9	»	7	»	»	»	-10	»	-22	»	-26
17	-6	-2	1	3	4	6	10	9	»	7	»	-7	-9	»	-23	-22	-27
18	»	-3	»	2	»	7	»	8	»	»	»	-8	»	-13	»	»	»
19	-7	-2	2	1	»	6	11	9	»	»	-1	-9	-10	»	-22	-23	-26
20	-6	»	»	»	5	»	10	»	6	»	-2	»	-9	»	-23	»	-27
21	»	1	1	0	6	7	»	10	7	»	-3	-10	-10	-14	-24	-24	-28
22	»	0	»	-1	»	»	»	»	»	6	»	-11	»	-15	»	-23	»
23	-5	-1	2	»	»	»	11	11	8	7	-4	-10	-9	-16	»	-24	-27
24	-6	»	3	»	5	»	10	»	7	»	-3	»	»	»	23	»	-26
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	-2	»	6	»	10	»	6	»	-9	»	-17	»	-23	»
27	»	0	4	»	4	7	»	9	6	5	»	-10	»	-16	-22	»	-25
28	-7	»	3	»	»	»	9	»	5	»	-2	»	-10	»	-21	»	-26
29	6	1	»	-3	3	8	8	8	4	6	-3	»	-11	-17	22	-22	-27
30	»	2	»	-2	»	7	»	7	»	»	»	-9	»	»	»	»	»
31	-7	3	2	-3	2	8	9	»	5	7	-4	-10	-12	-18	-21	-21	»
32	-8	»	1	»	1	»	8	»	6	»	-5	»	-11	»	»	»	-28
33	-7	4	0	»	0	9	9	6	5	8	-4	-11	»	-17	-20	-22	-27
34	»	»	»	-4	»	8	»	7	»	7	»	-12	»	-18	»	-23	»
35	-8	3	-1	-3	1	7	8	»	»	6	-3	-11	-10	-19	-19	-24	-28
36	-7	»	-2	»	2	»	»	»	6	»	-2	»	-9	»	-20	»	-27
37	8	2	-1	-4	»	8	7	8	7	5	-3	-10	-10	»	-19	-25	-26
38	»	1	»	-5	»	7	»	7	»	4	»	»	»	-18	»	-24	»
39	»	2	0	-4	1	8	8	6	8	»	-4	-9	-11	-17	-20	-23	-25
40	»	»	-1	»	0	»	9	»	7	»	-3	»	-10	»	-21	»	»
41	-7	3	0	-3	1	»	8	5	8	3	-4	-8	-9	-16	»	-22	-24
42	»	4	»	»	»	7	»	6	»	4	»	-7	»	-17	»	-23	»
43	-6	»	»	-2	2	8	7	5	7	3	»	-8	-8	-16	-22	-24	-23
44	-7	»	1	»	3	»	8	»	»	»	»	»	-7	»	-23	»	-22
45	-8	3	2	-1	4	9	»	6	6	4	-3	-9	-8	-15	-24	»	-21
46	»	2	»	-2	»	10	»	7	»	3	»	-8	»	»	»	-23	»
47	-9	3	»	-1	3	9	9	6	7	2	-4	»	-9	-16	-25	-24	-22
48	»	»	1	»	4	»	8	»	8	»	-5	»	-10	»	»	»	-21
49	-10	2	2	-2	5	8	9	6	7	1	-4	-9	-9	-16	-24	-23	-26

29000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	-21	-22	-16	-21	-9	-3	-12	-11	-11	-6	-9	-4	7	16	11	16	19
1	-22	-23	-17	-22	-10	»	-13	-12	-10	»	-10	-3	6	17	»	17	20
2	-23	»	-18	»	-9	»	-12	»	»	»	-11	»	»	»	»	»	21
3	-22	»	-19	-21	-10	-4	-13	»	-11	-5	»	-4	7	18	12	18	22
4	»	-24	»	-22	»	-3	»	-11	»	-6	»	-5	»	17	»	19	»
5	-21	-23	-18	-21	-9	»	»	-10	-10	-5	-10	-6	8	16	11	»	21
6	-22	»	-17	»	»	»	-14	»	-9	»	»	»	9	»	10	»	20
7	-21	-22	»	»	-8	-2	-15	-9	-8	-4	-9	»	10	17	9	20	21
8	»	-21	»	-20	»	-3	»	-8	»	»	»	-5	»	18	»	19	»
9	-22	»	-18	-21	-9	-2	-16	»	-9	-5	-8	-4	11	17	10	18	»
10	»	»	-17	»	-8	»	-15	»	-8	»	-7	»	12	»	»	»	20
11	-23	-22	-16	»	-7	»	-14	-7	-9	-4	-8	-3	»	16	9	19	19
12	»	»	»	-22	»	-3	»	-8	»	-5	»	-2	»	17	»	20	»
13	-22	-21	-17	-23	-6	-2	-13	-7	»	-6	-7	-1	13	16	10	19	20
14	-21	»	-18	»	-5	»	»	»	-8	»	-6	»	12	»	11	»	19
15	-20	-22	-19	-22	»	-3	-12	-8	-7	-7	-5	-2	13	»	12	18	20
16	»	-23	»	21	»	-4	»	-7	»	-6	»	»	»	17	»	19	»
17	»	-22	-20	-20	-4	-5	-11	-8	-6	»	-4	-1	14	16	13	20	19
18	-21	»	-21	»	-3	»	-12	»	-7	»	-5	»	15	»	12	»	»
19	»	-21	-22	-19	-2	»	-11	-9	-8	-5	-6	0	16	15	»	19	20
20	»	-22	»	»	»	-6	»	-10	»	-6	»	1	»	14	»	18	»
21	-22	»	-23	-18	-3	-5	-12	-11	-7	-5	»	2	17	15	13	17	21
22	-21	»	-22	»	-2	»	-13	»	»	»	-7	»	16	»	12	»	22
23	-22	-21	-23	-19	-3	-6	»	-10	8	-4	8	1	15	14	13	»	21
24	»	-20	»	-18	»	-7	»	-11	»	-5	»	2	»	»	»	16	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	-24	»	-21	»	-14	»	-7	»	-7	»	14	»	14	»	20
27	-23	-21	-25	-19	-»	-6	-13	»	-8	-4	-8	3	13	15	13	17	»
28	»	-20	»	-18		»	»	-10	»	-5	»	»	»	14	»	18	»
29	-22	-21	-24	»	-2	-7	-12	-11	-7	-6	-9	4	»	15	12	17	16
30	-21	»	-25	»	-1	»	-11	»	-6	»	»	»	12	»	11	»	20
31	-20	-20	-24	-17	-2	-8	-12	-12	»	-5	8	3	11	14	12	18	21
32	»	-21	»	-16	»	-7	»	»	»	-4	»	4	»	13	»	»	»
33	-21	-20	-25	-15	»	-8	-13	-13	-7	-5	-7	3	12	»	11	17	22
34	-20	»	»	»	-3	»	-14	»	-8	»	-6	»	13	»	12	»	23
35	»	-19	-24	-14	-2	-9	-15	-12	-7	»	»	4	14	12	13	16	22
36	»	-20	»	-13	»	-8	»	»	»	-6	»	3	»	11	»	17	»
37	-19	-21	-23	-14	-3	»	»	-13	-6	-7	-7	4	13	10	»	18	23
38	-20	»	-22	»	-4	»	-14	»	-5	»	-8	»	»	»	14	»	24
39	-19	»	-21	-13	-5	»	-13	-14	-6	-8	»	5	14	9	15	19	23
40	»	-20	»	-14	»	-9	»	-13	»	-9	»	6	»	10	»	18	»
41	-20	-19	-20	-13	-6	-10	»	-12	-7	-10	-7	5	13	11	14	»	22
42	-21	»	-21	»	»	»	-12	»	-8	»	-6	»	14	»	15	»	21
43	-20	-18	»	-12	-5	-11	-13	-11	-7	-9	-7	»	15	12	14	19	»
44	»	-17	»	-11	»	-12	»	-12	»	»	»	6	»	13	»	»	»
45	-21	-18	-22	»	-4	-11	-12	»	-6	-8	-6	5	14	12	»	20	»
46	-22	»	-21	»	-3	»	-13	»	-5	»	-5	»	15	»	»	»	20
47	-21	-17	-20	»	-4	-12	-12	-13	-6	-9	-4	6	»	13	15	19	21
48	»	»	»	-10	»	-13	»	-12	»	-8	»	»	»	12	»	18	»
49	-22	-16	-21	-9	-3	-12	-11	-11	-6	-9	4	7	16	11	16	19	22

30000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	22	28	28	27	27	18	19	9	8	5	1	7	9	15	20	24	28
1	21	29	27	28	28	19	»	10	9	6	»	8	8	14	21	»	29
2	»	28	»	29	»	18	»	11	»	7	»	7	»	»	»	23	
3	20	27	»	30	27	17	20	10	»	6	0	»	9	13	22	22	28
4	»	»	28	»	26	»	19	»	10	»	−1	»	8	»	23	»	29
5	19	26	27	31	25	16	20	»	9	5	−2	8	7	12	24	23	·
6	»	25	»	30	»	»	»	11	»	4	»	7	»	11	»	22	·
7	20	26	28	»	26	17	19	12	10	5	−1	6	»	12	23	23	28
8	21	»	29	»	25	»	20	»	9	»	»	»	6	»	22	»	29
9	20	27	28	31	24	16	19	11	»	6	−2	7	7	13	23	22	28
10	»	28	»	32	»	15	»	10	»	5	»	8	»	12	»	»	»
11	19	27	29	33	»	14	20	11	8	4	−1	9	8	»	24	23	27
12	18	»	»	»	23	»	21	»	9	»	0	»	9	»	23	»	28
13	»	28	28	»	»	13	20	10	8	»	1	8	8	13	24	22	29
14	»	27	»	34	»	12	»	»	»	5	»	7	»	14	»	23	»
15	19	26	29	33	22	»	19	9	7	6	2	8	9	15	»	22	30
16	»	»	28	»	23	»	18	»	8	»	1	»	»	»	25	»	31
17	»	»	27	32	22	13	19	10	9	5	»	7	8	10	24	21	30
18	»	25	»	31	»	12	»	»	»	4	»	8	»	15	»	22	»
19	20	24	26	32	23	13	»	9	8	3	0	7	7	10	23	»	29
20	21	»	27	»	»	»	20	»	9	»	1	»	6	»	24	»	30
21	22	25	»	31	22	14	19	8	8	4	0	»	»	17	23	23	31
22	»	26	»	30	»	13	»	9	»	»	»	8	»	18	»	22	»
23	23	27	26	31	21	14	18	»	7	3	1	7	7	19	24	23	»
24	24	»	27	»	20	»	17	»	8	»	2	»	8	»	»	»	32
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	30	»	15	»	8	»	4	»	6	»	20	»	24	»
27	25	28	26	29	21	16	18	9	»	5	1	5	9	19	25	»	31
28	26	»	27	»	20	»	»	»	7	»	2	»	10	»	»	»	32
29	27	27	26	»	»	15	19	»	8	4	3	6	11	»	26	23	33
30	»	28	»	30	»	16	»	10	»	3	»	»	»	20	»	24	»
31	»	29	25	29	21	17	18	11	7	»	4	»	12	19	25	25	34
32	28	»	24	»	22	»	»	»	8	»	»	»	11	»	26	»	»
33	27	28	23	30	21	»	19	10	9	»	5	7	12	20	»	26	33
34	»	27	»	»	»	18	»	11	»	2	»	6	»	21	»	27	»
35	28	»	22	31	20	19	18	»	10	3	»	7	11	20	27	26	32
36	27	»	23	»	21	»	»	»	»	»	4	»	12	»	26	»	31
37	28	26	»	30	22	»	»	10	9	4	5	8	11	21	27	»	32
38	»	25	»	31	»	18	»	9	»	3	»	9	»	»	»	27	»
39	27	26	»	»	21	19	17	8	8	4	6	»	10	22	28	26	»
40	»	»	»	»	20	»	16	»	7	»	7	»	11	»	27	»	31
41	»	»	24	32	19	20	15	»	6	3	6	8	10	21	26	27	»
42	»	25	»	31	»	»	»	7	»	4	»	9	»	20	»	28	·
43	28	26	25	»	20	21	14	8	7	3	5	10	»	21	25	29	30
44	29	»	26	»	19	»	13	»	6	»	»	»	11	»	24	»	29
45	28	25	25	30	18	20	12	9	»	2	4	»	12	22	25	28	28
46	»	26	»	29	»	19	»	10	»	»	»	11	»	21	»	»	»
47	29	27	26	28	»	18	11	9	5	1	5	10	13	»	24	29	29
48	28	»	»	»	17	»	10	»	6	»	6	»	14	»	23	»	30
49	28	28	27	27	18	19	9	8	5	1	7	9	15	20	24	28	31

31000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	31	38	32	39	43	41	37	41	45	47	45	45	41	35	36	36	37
1	32	37	33	38	44	40	38	»	46	46	44	44	42	34	37	37	»
2	33	»	32	»	45	»	39	»	45	»	45	»	43	»	»	»	36
3	»	36	31	»	44	39	40	42	44	45	46	43	»	33	38	36	37
4	»	»	»	39	»	40	»	41	»	46	»	42	»	32	»	35	»
5	34	37	32	40	43	»	39	40	»	47	47	43	»	33	37	36	36
6	33	»	31	»	42	»	»	»	43	»	46	»	44	»	36	»	35
7	34	36	30	39	»	41	40	39	44	48	47	44	45	»	35	35	»
8	»	37	»	»	»	42	»	38	»	47	»	»	»	34	»	36	»
9	»	36	29	40	41	41	41	39	45	»	48	43	44	33	36	37	»
10	33	»	30	»	40	»	42	»	46	»	47	»	43	»	37	»	»
11	34	35	29	41	41	»	41	40	47	48	48	44	»	34	»	38	36
12	»	36	»	»	»	40	»	39	»	49	»	45	»	»	»	37	»
13	»	»	28	40	42	41	42	40	46	48	»	46	»	33	38	38	35
14	35	»	27	»	43	»	43	»	»	»	47	»	44	»	39	»	34
15	36	37	28	41	44	42	»	39	47	49	»	45	43	»	40	»	33
16	»	38	»	42	»	43	»	40	»	»	»	46	»	»	»	39	»
17	37	37	»	43	43	44	44	41	»	50	»	»	42	32	41	40	34
18	»	»	29	»	42	»	43	»	46	»	48	»	»	»	40	»	33
19	38	38	28	44	43	43	»	»	45	49	49	47	41	31	39	39	»
20	»	37	»	45	»	»	»	42	»	50	»	48	»	32	»	38	»
21	37	36	29	»	»	42	42	41	46	51	48	47	»	31	38	39	34
22	36	»	30	»	44	»	43	»	47	»	»	»	40	»	39	»	33
23	37	37	»	44	45	41	»	42	»	50	47	48	39	32	38	40	»
24	»	»	»	45	»	40	»	41	»	49	»	49	»	31	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	38	»	»	»	46	»	»	»	46	»	46	»	38	»	39	»	32
27	»	36	29	46	47	39	»	40	45	»	47	48	37	30	38	41	33
28	»	35	»	45	»	40	»	»	»	48	»	49	»	31	»	40	»
29	39	36	30	46	46	»	44	41	46	47	48	48	36	32	»	39	34
30	40	»	31	»	45	»	45	»	47	»	49	»	»	»	39	»	35
31	39	»	32	45	44	39	44	40	48	46	»	47	35	33	38	40	36
32	»	»	»	46	»	38	»	39	»	47	»	46	»	34	»	41	»
33	40	37	33	45	45	39	»	38	47	46	50	45	34	33	37	»	»
34	»	»	»	»	»	»	45	»	46	»	49	»	35	»	38	»	»
35	39	»	»	44	44	40	44	39	45	47	48	»	36	34	37	42	37
36	»	36	»	45	»	41	»	40	»	»	»	44	»	35	»	41	»
37	38	35	34	46	43	42	43	»	46	48	47	45	35	36	36	40	»
38	39	»	35	»	42	»	42	»	47	»	48	»	36	»	»	»	36
39	38	34	36	»	41	41	43	39	46	47	47	44	»	37	»	41	37
40	»	»	»	45	»	40	»	40	»	46	»	43	»	36	»	42	»
41	39	35	37	46	40	39	42	41	»	45	46	42	37	35	35	41	38
42	38	»	36	»	39	»	»	»	47	»	45	»	38	»	36	»	37
43	37	34	37	45	»	38	41	42	48	44	44	41	39	»	37	40	36
44	»	33	»	44	»	39	»	43	»	43	»	»	»	36	»	39	»
45	»	32	38	43	38	38	40	44	47	»	45	40	38	35	38	38	35
46	38	»	39	»	39	»	41	»	»	»	46	»	37	»	37	»	»
47	39	31	38	42	40	»	42	45	46	»	45	41	36	34	»	37	34
48	»	32	»	»	»	37	»	44	»	44	»	40	»	35	»	36	»
49	38	32	39	43	41	37	41	45	47	45	45	41	35	36	36	37	33

32000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	33	47	51	52	57	51	41	50	61	60	67	70	58	51	59	55	53
1	34	»	50	51	58	52	40	»	»	59	68	71	57	52	58	56	52
2	»	46	»	52	»	»	»	51	»	60	»	72	»	51	»	»	»
3	35	47	51	»	»	»	41	52	62	61	69	71	56	»	57	55	51
4	36	»	»	»	»	»	42	»	61	»	68	»	57	»	58	»	52
5	»	48	52	»	57	51	43	53	60	»	69	70	56	52	57	56	53
6	»	49	»	53	»	50	»	»	»	62	»	69	»	51	»	57	»
7	37	»	51	52	56	»	44	54	61	61	68	68	55	52	»	56	52
8	»	»	50	»	55	»	45	»	60	»	»	»	»	»	56	»	»
9	38	»	49	53	54	51	44	53	59	62	»	67	54	53	55	57	53
10	»	50	»	54	»	50	»	52	»	61	»	66	»	»	»	56	
11	39	49	50	53	55	51	»	53	60	60	69	65	55	54	56	»	52
12	40	»	49	»	»	»	45	»	59	»	70	»	56	»	55	»	53
13	41	48	»	54	54	»	46	54	60	59	69	»	55	55	54	55	52
14	»	47	»	55	»	50	»	55	»	»	»	66	»	56	»	54	»
15	42	48	48	56	53	51	47	»	61	58	68	65	»	55	53	53	»
16	43	»	47	»	52	»	46	»	62	»	67	»	56	»	»	»	53
17	42	47	46	»	51	50	47	54	63	59	68	66	»	54	54	54	54
18	»	»	»	57	»	51	»	53	»	60	»	65	»	55	»	53	»
19	41	48	45	58	52	50	46	54	»	61	69	64	55	54	55	52	
20	42	»	44	»	51	»	»	»	62	»	70	»	56	»	54	»	55
21	43	49	45	59	»	49	45	55	61	62	71	63	57	»	55	53	54
22	»	50	»	58	»	50	»	54	»	61	»	»	»	55	»	54	»
23	»	51	44	57	52	49	46	»	60	»	70	64	58	54	54	53	55
24	44	»	45	»	51	»	47	»	61	»	»	»	59	»	55	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	50	»	»	»	48	»	55	»	62	»	63	»	55	»	54	»
27	43	»	44	56	52	47	48	»	62	63	»	62	58	56	56	53	56
28	44	»	45	»	51	»	49	»	»	»	69	»	57	»	57	»	57
29	43	51	46	55	52	46	»	56	63	62	70	61	»	»	58	»	»
30	»	52	»	54	»	47	»	57	»	63	»	60	»	»	»	54	»
31	42	51	»	55	53	46	50	58	64	64	69	»	58	55	57	55	58
32	»	»	47	»	54	»	49	»	63	»	70	»	57	»	58	»	59
33	43	50	46	56	53	47	50	»	62	65	69	61	56	56	57	54	»
34	»	51	»	57	»	»	»	57	»	64	»	62	»	57	»	53	»
35	42	52	47	»	54	46	51	58	61	63	70	61	»	58	56	54	58
36	43	»	46	»	53	»	50	»	60	»	»	»	55	»	»	»	57
37	»	51	47	58	52	45	49	57	»	64	71	60	56	59	57	53	58
38	»	50	»	57	»	44	»	58	»	63	»	59	»	60	»	»	»
39	42	51	48	58	»	45	50	59	59	»	72	58	55	»	56	54	57
40	43	»	»	»	51	»	»	»	60	»	73	»	54	»	55	»	56
41	»	50	49	57	50	44	51	60	59	»	72	»	53	59	54	53	»
42	»	51	»	56	»	43	»	»	»	64	»	57	»	60	»	»	»
43	42	50	50	55	51	»	50	61	60	65	71	56	54	59	»	54	57
44	43	»	51	»	52	»	51	»	59	»	70	»	»	»	55	»	56
45	44	»	50	56	51	42	52	62	60	66	»	57	»	58	54	55	55
46	»	51	»	57	»	41	»	63	»	67	»	»	»	59	»	54	»
47	45	50	51	58	52	42	»	62	61	66	»	58	53	58	55	»	54
48	46	»	52	»	»	»	51	»	60	»	69	»	52	»	54	»	55
49	47	51	52	57	51	41	50	61	60	67	70	58	51	59	55	53	54

33000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	54	50	47	38	36	30	28	22	25	25	19	22	24	19	13	9	6
1	»	49	46	37	37	31	29	23	26	»	18	»	23	20	14	8	7
2	53	»	45	»	36	»	30	»	25	»	17	»	24	»	13	»	»
3	52	48	44	36	35	»	29	22	24	26	16	21	25	21	»	7	8
4	»	47	»	»	»	30	»	21	»	27	»	22	»	22	»	8	»
5	53	»	45	37	36	29	30	22	23	28	»	23	26	»	14	7	7
6	52	»	46	»	37	»	31	»	»	»	15	»	27	»	13	»	8
7	»	46	47	36	36	30	»	»	22	27	16	22	26	21	14	»	7
8	»	45	»	37	»	29	»	21	»	26	»	21	»	»	»	8	»
9	51	44	»	38	35	30	30	22	23	25	15	»	25	22	15	9	8
10	»	»	48	»	34	»	31	»	22	»	16	»	26	»	14	»	7
11	52	45	47	37	35	29	30	»	23	»	17	22	25	23	15	10	»
12	»	44	»	38	»	»	»	21	»	26	»	21	»	24	»	9	»
13	53	43	46	»	34	28	29	22	22	25	16	22	»	23	14	8	6
14	52	»	45	»	33	»	28	»	21	»	»	»	24	»	13	»	5
15	51	44	44	37	32	29	27	21	»	26	17	23	23	22	14	7	4
16	»	45	»	38	»	28	»	22	»	27	»	24	»	21	»	»	»
17	52	46	43	37	»	29	»	23	20	26	18	25	22	»	15	8	5
18	53	»	»	»	31	»	26	»	19	»	17	»	21	»	14	»	4
19	»	45	41	36	32	28	25	22	18	»	18	24	22	20	13	7	3
20	»	44	»	37	»	27	»	»	»	27	»	25	»	19	»	6	»
21	52	43	43	38	33	»	24	23	17	26	19	26	23	18	»	5	4
22	51	»	44	»	34	»	23	»	18	»	20	»	»	»	14	»	5
23	50	»	43	39	33	26	22	24	19	27	»	27	22	17	13	4	4
24	»	44	»	38	»	27	»	»	»	26	»	26	»	18	»	3	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	49	»	42	»	»	»	21	»	20	»	19	»	21	»	»	»	3
27	48	43	»	39	34	28	20	25	21	27	20	»	22	»	12	2	4
28	»	44	»	38	»	29	»	26	»	»	»	25	»	17	»	3	»
29	49	43	41	37	33	28	21	»	22	26	19	»	21	18	11	4	»
30	50	»	40	»	32	»	22	»	23	»	»	»	22	»	»	»	3
31	49	42	39	»	31	29	21	27	24	»	18	26	»	17	10	5	4
32	»	»	»	36	»	28	»	28	»	25	»	25	»	18	»	6	»
33	48	41	38	37	30	29	20	»	»	24	17	24	21	17	»	5	5
34	49	»	39	»	31	»	»	»	23	»	18	»	22	»	9	»	6
35	48	42	38	36	»	»	19	27	24	23	19	25	21	»	10	4	»
36	»	43	»	35	»	28	»	26	»	»	»	»	»	18	»	3	»
37	»	44	39	»	30	27	20	25	25	»	20	24	22	17	9	2	7
38	49	»	»	»	29	»	21	»	26	»	21	»	21	»	10	»	»
39	50	»	38	36	30	»	22	26	25	22	20	23	20	18	»	1	8
40	»	45	»	»	»	26	»	27	»	23	»	22	»	17	»	2	»
41	49	»	37	35	31	25	23	26	26	»	»	23	19	16	9	1	9
42	48	»	36	»	30	»	22	»	»	»	21	»	20	»	8	»	8
43	49	46	35	36	31	26	»	25	27	22	20	22	19	15	9	»	7
44	»	45	»	37	»	25	»	24	»	21	»	23	»	»	»	2	»
45	50	46	»	36	30	26	23	23	28	20	21	»	18	16	8	3	6
46	»	»	36	»	31	»	22	»	27	»	20	»	»	»	9	»	7
47	51	47	37	35	30	27	21	»	26	19	21	23	19	15	10	4	»
48	»	46	»	36	»	»	»	24	»	»	»	23	»	14	»	5	»
49	50	47	38	36	30	28	22	25	25	19	22	24	19	13	9	6	6

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	6	1	4	12	-2	0	-2	-4	-4	-14	-24	-17	-23	-22	-25	-22	31
1	5	»	5	11	-1	1	-1	-5	-3	-15	»	-16	-24	-23	-26	-23	-30
2	»	0	»	12	»	2	»	-6	»	-16	»	-15	»	-22	»	-22	»
3	4	-1	6	11	-2	1	»	-7	-4	-17	-23	-16	-23	-23	-25	»	-29
4	»	»	5	»	»	»	-2	»	-5	»	-22	»	-24	»	-24	»	-30
5	3	-2	»	12	-3	2	-1	-6	-6	-16	-23	»	-25	-22	-23	-21	-29
6	»	-1	»	11	»	3	»	-7	»	»	»	-17	»	-21	»	-22	»
7	4	0	6	12	-2	4	-2	»	-5	-15	-24	-16	-26	-22	-24	-21	»
8	3	»	7	»	-3	»	-1	»	-6	»	-23	»	-25	»	»	»	-28
9	2	1	8	»	-4	3	-2	-6	-5	-16	-22	-15	»	-23	»	-22	27
10	»	»	»	11	»	4	»	-5	»	-17	»	-16	»	»	»	-23	»
11	1	0	9	10	-3	5	-3	-6	»	-18	-21	-17	»	-24	-23	-24	-28
12	0	»	10	»	-4	»	»	»	-6	»	-20	»	-24	»	22	»	-27
13	1	1	9	11	»	4	-2	-5	-7	-19	»	-18	-23	»	-23	-23	-26
14	»	2	»	12	»	3	»	-6	»	»	»	»	»	-23	»	-24	»
15	»	3	10	11	-3	2	-1	-5	»	»	-19	-19	-24	-22	-24	-25	-25
16	2	»	11	»	-2	»	-2	»	-8	»	-18	»	-23	»	-23	»	»
17	3	4	10	10	-1	»	»	»	-9	-20	-17	-18	-24	-21	»	-24	-26
18	»	3	»	»	»	»	»	-4	»	-19	»	-19	»	-22	»	-25	»
19	4	»	9	9	»	3	-3	-3	-10	-20	»	-18	-25	-21	-22	-24	»
20	5	»	10	»	0	»	-4	»	»	»	-18	»	-24	»	-21	»	-25
21	6	4	»	8	-1	4	»	-4	-9	-21	-17	-19	-23	-20	-22	»	26
22	»	»	»	9	»	3	»	-3	»	-20	»	-20	»	»	»	-25	»
23	»	3	»	10	0	2	-5	-2	»	-21	-16	»	-24	-19	-23	-26	-25
24	»	»	9	»	1	»	-4	»	-8	»	-17	»	-23	»	-22	»	-24
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	2	»	9	»	»	»	-1	»	-20	»	-21	»	-20	»	-25	»
27	7	3	10	»	0	1	-3	0	-9	-21	-18	-20	»	-21	-21	-26	-23
28	6	»	9	»	-1	»	-4	»	-10	»	»	»	-22	»	-22	»	-22
29	5	2	10	8	0	0	-5	-1	»	-22	-19	-19	-21	-22	-23	-27	-21
30	»	1	»	7	»	-1	»	0	»	-23	»	-20	»	-21	»	»	»
31	4	2	11	6	»	0	-4	1	-11	»	-20	-19	-22	»	-22	-28	-22
32	3	»	»	»	1	»	-3	»	-10	»	-21	»	-21	»	-23	»	-23
33	»	3	12	5	0	1	-2	0	-11	»	-20	-20	-20	-20	-22	-27	-22
34	»	4	»	4	»	0	»	»	»	-24	»	-21	»	-21	»	»	»
35	4	»	13	3	-1	»	-3	-1	-12	»	-19	-20	-21	-22	»	-28	-23
36	3	»	14	»	0	»	-4	»	-13	»	-18	»	»	»	-21	»	-22
37	2	»	13	2	-1	1	-5	-2	-14	-25	»	-19	-22	-21	-22	-29	-21
38	»	5	»	1	»	0	»	-3	»	»	»	-20	»	-22	»	-30	»
39	3	6	12	2	0	-1	»	-2	-15	-24	-17	-21	-23	-23	-23	»	-20
40	2	»	11	»	»	»	-4	»	-16	»	-16	»	-22	»	-24	»	-21
41	1	7	»	1	-1	-2	-3	-1	-15	-25	-15	»	-23	-22	-23	-31	-20
42	»	6	»	0	»	-3	»	-2	»	»	»	-20	»	-21	»	-32	»
43	2	5	»	-1	0	-2	-4	»	-14	-24	-16	-19	-22	-22	-24	-33	»
44	1	»	12	»	-1	»	-3	»	-13	»	-17	»	-23	»	»	»	-21
45	0	4	13	»	0	-1	-4	-1	-12	-25	-18	-20	»	-23	-23	-32	-22
46	»	»	»	0	»	-2	»	-2	»	-24	»	-21	»	-24	»	-33	»
47	1	3	12	-1	-1	-1	-5	-2	»	-25	-17	-22	-24	-25	-22	-32	-23
48	2	»	13	»	0	»	»		-13	»	-16	»	-23	»	-23	»	-24
49	1	4	12	-2	0	-2	-4	-4	-14	-24	-17	-23	-22	-25	-22	-31	25

34000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	-25	-24	-20	-20	-25	-21	-24	-23	-22	-23	-27	-36	-31	-30	-34	-38	-33
1	»	-23	»	-27	-24	»	-25	-24	-21	-22	-28	»	-30	-31	-35	-39	-32
2	»	»	»	»	»	»	-26	»	-22	»	-29	»	-29	»	-34	»	-31
3	-24	-22	-19	»	-25	-22	-27	»	-23	-21	-28	-35	-30	-30	-35	-38	»
4	»	-21	»	-26	»	»	»	-25	»	-20	»	-34	»	-29	»	-37	»
5	-25	»	-20	»	-24	-21	-28	-24	-24	-21	-29	-33	»	-30	-36	-36	-30
6	»	»	-19	»	-25	»	-29	»	-23	»	»	»	»	»	35	»	-31
7	-24	-22	-18	-27	-24	-22	»	-25	»	-22	-28	-32	-31	-29	-36	-37	-32
8	»	-21	»	-28	»	-23	»	-26	»	-23	»	-33	»	-28	»	»	»
9	-23	-20	-17	-29	»	-24	-28	-27	-22	-22	-27	-32	-30	»	-35	-38	-33
10	-22	»	»	»	-23	»	-27	»	-23	»	-28	»	31	»	-36	»	»
11	»	-21	-18	-30	-24	-25	-26	-28	-22	»	-29	-33	-32	-29	-35	-37	-32
12	»	-20	»	-29	»	-20	»	»	»	-21	»	-34	»	-28	»	-36	»
13	-23	-19	-19	-28	-25	»	-27	-27	-21	22	-30	-35	-33	-27	»	-37	-31
14	-24	»	-20	»	-24	»	-28	»	-20	»	-29	»	«	»	-30	»	»
15	-23	»	-19	-27	-25	-25	-27	-26	-19	-23	»	-36	-32	-28	-37	-38	-30
16	»	-18	»	-28	»	-26	»	-25	»	-24	»	-35	»	-27	»	-37	»
17	-22	-19	-18	-29	-26	-27	»	-26	-18	-23	-28	-34	-33	-28	-36	»	-29
18	-23	»	-19	»	»	»	-26	»	-17	»	-27	»	-34	»	-35	»	-28
19	-24	-20	»	-28	-25	-26	-27	-27	-16	-24	28	»	-33	-27	-36	-36	-29
20	»	-21	»	-29	»	-25	»	-26	»	»	»	-35	»	-28	»	-37	»
21	-23	-22	-18	-30	-24	-24	-26	»	-17	-25	-29	-34	-32	-27	-37	-38	»
22	-22	»	»	»	-25	»	»	»	-18	»	-30	»	-33	»	»	»	-30
23	-23	-21	-19	»	-24	-25	-27	-25	-17	-24	-31	-35	»	-28	-36	-39	-29
24	»	»	»	-31	»	-24	»	-24	»	-25	»	-36	»	-29	»	-38	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-22	»	-20	»	-25	»	»	»	-18	»	-32	»	-32	»	-37	»	-30
27	-21	-22	-21	-32	»	-23	-28	-25	-17	-24	-33	-35	-31	»	»	-37	-29
28	»	-23	»	-33	»	-22	»	-24	»	-23	»	»	»	-30	»	-36	»
29	»	-22	22	-32	-24	-23	-27	-23	-18	»	-34	-34	-30	-31	-38	-35	-28
30	-20	»	-23	»	-25	»	-28	»	-17	»	-33	»	-31	»	-37	»	»
31	-21	-21	-24	-33	-26	»	-27	-24	-18	»	-32	-33	-32	-30	»	-36	-27
32	»	-20	»	»	»	-24	»	-23	»	-22	»	-32	»	-29	»	-37	»
33	-22	»	-25	-34	-25	-25	-28	-24	-17	-23	»	-33	-31	-30	-36	-36	-28
34	-23	»	-26	»	-24	»	-27	»	»	»	-33	»	-30	»	-35	»	-27
35	-24	-21	-25	-33	-25	-24	»	»	-18	»	-32	-32	-31	-31	-34	»	-26
36	»	-22	»	-32	»	-23	»	-23	»	-24	»	-31	»	»	»	-35	»
37	-23	-21	»	-31	-26	-24	-28	-22	-19	-25	-33	»	-30	-32	-33	-34	-25
38	»	»	»	»	-25	»	-27	»	-20	»	-34	»	-29	»	-34	»	-24
39	-24	-22	-24	-30	-26	-23	-26	»	-21	-26	-35	-32	-30	-33	-35	-33	»
40	»	-21	»	-29	»	»	»	-21	»	-27	»	-31	»	-34	»	»	»
41	-25	-20	-25	»	-25	-22	-25	»	-22	-26	-34	-32	»	-33	»	-32	-25
42	-24	»	-26	»	-24	»	-24	»	-23	»	»	»	-29	»	-36	»	-26
43	-23	-19	-27	-28	»	-21	-23	-20	»	-25	-35	-33	»	-34	-37	-31	-27
44	»	-18	»	-27	»	-22	»	-21	»	-26	»	»	»	-33	»	»	»
45	-24	-19	-26	-28	»	»	-22	-22	»	-25	»	-32	»	»	-36	-30	-26
46	-25	»	»	»	-23	»	-23	»	-24	»	-36	»	-30	»	-37	»	-25
47	»	-18	-27	-27	-22	-23	»	-23	»	»	-35	-31	-29	-34	-38	-31	-26
48	»	-19	»	-26	»	-24	»	»	»	-26	»	-30	»	-35	»	-32	»
49	-24	-20	-26	-25	-21	-24	-23	-22	-23	-27	-36	-31	-30	-34	-38	-33	-27

35000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	-27	-24	-23	-14	- 9	-12	-16	-16	-15	-18	-23	-26	-28	-22	-21	-26	-22
1	-26	-23	-22	»	-10	-11	-15	-17	-16	»	-24	-27	»	-21	-20	-25	-23
2	»	»	»	-13	»	-10	»	-18	»	-19	»	-28	»	-20	»	-26	»
3	-27	-24	-23	-14	-11	- 9	-16	-19	»	-18	-25	-27	»	-19	-21	-27	-22
4	-26	»	-22	»	-12	»	»	»	-15	»	-26	»	-27	»	-22	»	-21
5	-25	-23	-21	-13	»	- 8	-17	-20	-16	-19	-27	-28	-28	»	-23	-26	-22
6	»	-24	»	-14	»	- 9	»	-21	»	-20	»	»	»	-20	»	-27	»
7	»	-23	-20	-15	-11	-10	-16	-22	-17	»	-26	-29	-29	-21	»	-26	-21
8	-26	»	-19	»	-12	»	-15	»	»	»	-25	»	-28	»	-24	»	»
9	-25	-22	-20	-14	-13	»	-16	-21	-16	-21	-24	-28	-27	-22	»	-25	»
10	»	-23	»	»	»	-11	»	-20	»	-22	»	-29	»	-21	»	-24	»
11	-24	»	-21	-13	-12	-12	-15	»	-15	-23	»	-28	-28	-20	-23	-23	-20
12	-23	»	-22	»	-13	»	-14	»	»	»	-23	»	-27	»	-24	»	-21
13	-22	-24	-23	-14	-12	-13	»	-19	-14	-24	-24	-27	-26	-19	-25	»	-20
14	»	»	»	-13	»	-14	»	-20	»	-23	»	-26	»	»	»	-22	»
15	-23	-23	»	-14	-11	-15	-15	-19	-15	-24	-25	»	-27	-18	-26	-23	-21
16	»	»	-22	»	-12	»	-16	»	-14	»	-24	»	-26	»	-25	»	-22
17	-24	-24	-21	»	-11	-16	-17	»	-15	-25	-23	-25	-25	-17	-24	-24	»
18	»	-23	»	-13	»	»	»	-18	»	-24	»	-26	»	-16	»	-25	»
19	-25	-24	»	»	-12	-17	-18	-17	-14	-25	-22	-27	»	-15	-25	-26	-21
20	-24	»	20	»	-13	»	-19	»	-15	»	»	»	-26	»	-26	»	-22
21	-25	-23	-19	-12	-12	-18	-20	-18	»	»	-23	-26	-25	-16	-27	-25	-23
22	»	-24	»	-11	»	-19	»	-19	»	»	»	-27	»	-15	»	»	»
23	-24	-25	-18	-12	»	-20	-19	-20	-14	-26	-24	-28	-24	»	-28	»	-22
24	-23	»	»	»	-11	»	-20	»	-15	»	-25	»	-23	»	»	»	-21
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-26	»	-13	»	-19	»	»	»	-27	»	-27	»	-14	»	-26	»
27	-24	-25	-19	-14	-10	»	-19	-21	-16	-28	-24	»	-22	-15	»	-25	-22
28	-25	»	-18	»	- 9	»	-20	»	-17	»	»	»	»	»	-27	»	-21
29	-24	»	-19	-13	-10	-20	-19	-20	-18	»	»	-20	-21	-16	-26	-26	-22
30	»	-24	»	-12	»	-19	»	-19	»	-29	»	-25	»	-17	»	-25	»
31	-23	-23	-20	-11	-11	»	»	»	-19	-28	-25	-24	-20	-18	-25	»	-21
32	-24	»	-19	»	»	»	»	»	-18	»	-20	»	-21	»	-24	»	-20
33	-25	-22	»	-10	-12	»	-18	-18	-19	-27	-25	»	-22	-19	-25	-24	-19
34	»	-21	»	-11	»	-20	»	-19	»	»	»	-25	»	-20	»	-25	»
35	-24	-20	-18	»	-13	-19	-19	»	-18	-28	-24	-26	-23	-19	-26	-24	»
36	-23	»	»	»	-14	»	-20	»	-19	»	-25	»	-24	»	»	»	-20
37	-24	»	-17	»	-13	-18	-21	-18	»	-27	-24	-27	»	-20	-25	-25	-19
38	»	»	»	-10	»	-17	»	-17	»	-26	»	-26	»	-21	»	-26	»
39	-23	-21	-18	- 9	-14	-16	-22	-16	»	-27	-23	-25	-23	-20	-24	-25	-18
40	-22	»	-19	»	»	»	»	»	-20	»	-24	»	»	»	-25	»	-17
41	-23	-22	-18	- 8	»	-17	-21	-17	-21	-26	-25	-26	-24	»	-26	-24	-19
42	»	-21	»	- 9	»	-18	»	-18	»	-27	»	»	»	-21	»	-25	»
43	»	-20	-17	- 8	-13	-17	-20	-17	-20	»	-26	»	-23	-22	-27	»	-15
44	-24	»	-16	»	-14	»	-19	»	-21	»	-25	»	-22	»	»	»	»
45	-25	-21	-17	- 9	-13	»	-18	-16	-20	-26	-24	-25	-23	-21	»	-24	»
46	»	-22	»	»	»	-16	»	-15	»	-25	»	-26	»	-22	»	-23	»
47	-26	»	-16	- 8	-12	-15	-17	-16	-19	-24	»	-27	-24	»	-28	-22	-19
48	-25	»	-15	»	-11	»	-16	»	»	»	-25	»	-23	»	-27	»	-17
49	-24	-23	-14	- 9	-12	-16	-16	-15	-18	-23	-26	-28	-22	-21	-26	-22	-19

36000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	−16	−20	−16	−10	− 9	−3	− 7	−14	−12	0	−2	− 8	−2	−4	−3	7	1
1	−15	−21	−17	−11	»	−4	− 8	−15	−11	−1	−3	− 9	−1	»	−2	6	»
2	−14	»	»	»	−10	»	− 9	»	−10	»	−4	»	−2	»	−3	»	2
3	»	−22	−18	−10	−11	−3	−10	−14	− 9	»	−3	− 8	−1	−5	−2	5	3
4	»	−21	»	− 9	»	−2	»	»	»	0	»	− 7	»	−4	»	4	»
5	−15	−20	−19	−10	−12	»	−11	−13	− 8	−1	−4	− 8	−2	−5	»	3	»
6	−14	»	−18	»	−13	»	−10	»	− 9	»	−5	»	»	»	−3	»	4
7	−13	»	−17	− 9	−12	−1	−11	−12	−10	−2	»	− 7	−3	−4	»	2	3
8	»	−21	»	− 8	»	0	»	»	»	−3	»	− 8	»	»	»	3	»
9	−12	−22	−18	− 7	−11	−1	»	−11	−11	−4	−6	− 7	»	−3	−2	»	4
10	−13	»	−19	»	»	»	−10	»	−10	»	−7	»	−4	»	−1	»	5
11	−14	−21	»	− 8	−12	0	−11	−12	− 9	−5	»	»	−3	−2	−2	»	6
12	»	−20	»	− 7	»	1	»	−11	»	»	»	− 6	»	−1	»	4	»
13	−13	−19	−18	− 8	−11	0	−12	»	»	»	−6	− 7	−4	0	−1	5	»
14	−14	»	−17	»	−10	»	−13	»	− 8	»	−7	»	−5	»	»	»	7
15	−15	−20	−16	»	−11	1	»	−10	− 9	−6	−6	− 6	»	−1	0	4	6
16	»	»	»	− 9	»	»	»	−11	»	»	»	− 5	»	−2	»	5	»
17	−16	−19	−15	−10	»	0	−14	−12	»	−5	−7	− 4	−4	−1	−1	4	»
18	−17	»	−14	»	−10	»	»	»	− 8	»	−6	»	−5	»	−2	»	»
19	−16	−18	»	−11	»	−1	−13	−13	− 7	−4	−5	− 5	−6	»	−1	3	7
20	»	»	»	−10	»	−2	»	−14	»	−5	»	»	»	−2	»	4	»
21	»	−19	−13	−11	− 9	−1	−12	−13	− 6	»	−4	− 6	−5	−1	»	5	8
22	−17	»	−12	»	−10	»	−11	»	− 5	»	−5	»	−4	»	0	»	»
23	−16	−18	−11	−10	−11	»	−12	−14	− 4	−4	−6	− 7	−3	−2	»	4	7
24	»	−19	»	»	»	0	»	−15	»	−5	»	− 8	»	−3	»	3	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−15	»	−10	»	−10	»	−11	»	»	»	−7	»	−4	»	1	»	6
27	−14	−20	− 9	− 9	− 9	−1	»	−14	− 5	−6	−6	− 9	−3	−2	2	»	5
28	»	−19	»	− 8	»	0	»	−13	»	−5	»	− 8	»	»	»	4	»
29	−15	−18	»	− 9	−10	−1	−10	−12	− 4	»	−7	»	−2	−1	3	3	4
30	»	»	−10	»	−11	»	− 9	»	− 5	»	−8	»	−3	»	2	»	5
31	−16	−17	−11	− 8	−10	0	− 8	»	− 6	−4	−9	− 9	−2	−2	3	»	»
32	»	−16	»	− 7	»	»	»	−11	»	−5	»	−10	»	−1	»	4	»
33	−17	−15	−10	»	−11	−1	− 7	−12	− 5	−6	−8	− 9	»	−2	2	5	4
34	−18	»	− 9	»	−10	»	− 8	»	− 4	»	»	»	−3	»	3	»	3
35	−19	−16	−10	− 6	− 9	−2	− 7	−13	»	−5	−7	− 8	»	−3	4	6	4
36	»	−17	»	− 7	»	−3	»	−12	»	−4	»	− 7	»	−2	»	»	»
37	−18	−18	−11	− 6	»	−4	− 8	−13	− 5	−5	−8	− 6	−4	»	5	5	3
38	−19	»	»	»	− 8	»	− 9	»	− 4	»	−7	»	−3	»	4	»	4
39	»	−17	−12	− 7	− 7	−5	−10	−12	− 3	»	−8	− 5	−2	−3	5	6	5
40	»	−16	»	− 6	»	−4	»	»	»	−6	»	− 4	»	−2	»	7	»
41	−18	−15	−13	− 5	− 6	»	− 9	−13	− 4	−7	−9	− 3	−3	−1	»	6	4
42	−19	»	−12	»	− 5	»	−10	»	− 5	»	−8	»	»	»	6	»	»
43	−18	»	−11	− 6	− 4	−5	−11	−14	− 4	−6	»	− 4	−4	−2	7	5	3
44	»	−16	»	− 7	»	−4	»	−13	»	−5	»	− 3	»	−3	»	4	»
45	−19	−15	−12	− 8	− 3	−5	»	−12	− 3	−4	−9	− 2	−5	−4	6	»	4
46	−20	»	−11	»	»	»	−12	»	− 2	»	−8	»	−6	»	7	»	3
47	−21	−16	»	− 9	− 2	»	−13	−13	− 1	−3	−7	»	−5	−3	8	3	2
48	»	−17	»	− 8	»	−6	»	−12	»	»	»	− 1	»	−2	»	2	»
49	−20	−16	−10	− 9	− 3	−7	−14	−12	0	−2	−8	− 2	−4	−3	7	1	2

37000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	2	-13	-5	-6	-7	-5	-6	-13	-21	-16	-15	-13	-8	-12	-18	-24	-31
1	1	-12	-6	»	-8	»	-5	-14	-22	-15	-16	-14	-7	-13	»	-23	-30
2	»	-11	»	»	»	-4	»	-13	»	-14	»	-15	»	-12	»	-24	»
3	2	»	-7	»	-7	-5	-4	-12	-21	-15	»	-14	-6	-11	-19	»	-29
4	»	»	-6	»	-6	»	-3	»	»	»	-17	»	-7	»	-18	»	-30
5	1	-10	-5	-7	-5	-6	»	»	-22	-16	-16	-15	-8	-12	-17	»	-31
6	»	-11	»	-6	»	-5	»	-13	»	-15	»	-14	»	»	»	-25	»
7	2	-12	»	-7	-6	-4	-4	-14	-23	-14	-17	»	-7	-11	-18	-26	-32
8	»	»	-4	»	-5	»	-5	»	-24	»	-18	»	-6	»	-19	»	-31
9	1	-11	-3	-8	-4	-5	-6	»	-23	-15	-19	-13	-7	-12	-20	-27	»
10	»	-10	»	-9	»	»	»	-15	»	-16	»	-12	»	»	»	-28	»
11	0	-9	-2	»	-5	-4	-7	-14	-22	»	-20	-13	»	-11	-19	-27	-32
12	-1	»	-3	»	-4	»	-8	»	-21	»	»	»	-8	»	-20	»	-31
13	-2	-10	»	-10	-3	-5	-7	-15	»	-17	-19	-14	-7	-12	-19	-28	-32
14	»	-9	»	-9	»	-6	»	-14	»	-16	»	-13	»	-13	»	»	»
15	-3	-10	-2	-10	»	-7	-8	-13	-20	-17	-18	-14	-6	»	-20	-29	-31
16	-4	»	»	»	-4	»	-7	»	-19	»	-19	»	-5	»	-21	»	-30
17	»	-9	-1	-9	-5	-6	-6	-14	-18	»	-18	-15	-6	-14	-20	-30	-31
18	»	-8	»	-10	»	-7	»	»	»	-18	»	-16	»	-15	»	-31	»
19	-5	-7	-2	-9	-4	»	-7	-15	-17	-19	-17	-15	-7	-16	»	-30	-32
20	-6	»	-1	»	-5	»	-6	»	-18	»	-16	»	»	»	-21	»	-31
21	-7	»	-2	-10	-4	-8	-7	-16	-17	-20	»	-14	-8	-17	-22	-31	-30
22	»	-6	»	-9	»	»	»	-15	»	-21	»	-13	»	-18	»	-30	»
23	-8	-5	»	-8	-3	-7	»	-16	-18	-20	-15	-14	-7	-19	-23	»	-31
24	-7	»	-3	»	»	»	-8	»	-17	»	-14	»	-6	»	-22	»	-32
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-4	»	-9	»	-6	»	-17	»	»	»	-15	»	-20	»	-31	»
27	-6	-5	-4	-8	-2	-5	-9	»	-16	-19	-15	-14	-7	-19	-23	-30	»
28	-5	»	-5	»	-1	»	-8	»	-17	»	-14	»	-8	»	»	»	-33
29	-6	-6	-4	»	-2	-4	-9	-18	-18	-18	-13	-13	»	-18	-22	-31	-34
30	»	»	»	-9	»	-3	»	-17	»	»	»	-12	»	-19	»	-32	»
31	-5	-5	-3	-8	-3	-2	-8	-18	»	-17	-12	-11	-9	-18	»	-31	-33
32	-6	»	-2	»	-4	»	»	»	»	»	-11	»	-10	»	-23	»	-32
33	-7	-4	-3	-7	»	-3	-9	-19	-17	-16	-12	-10	»	»	-22	-30	-33
34	»	-5	»	-6	»	-2	»	-20	»	-15	»	»	»	-17	»	-31	»
35	»	-6	-2	-5	-5	-3	-10	-21	-18	»	-11	-11	-9	-18	-21	-30	-32
36	-8	»	-1	»	-6	»	-9	»	-17	»	-10	»	-8	»	-22	»	»
37	-9	-7	-2	-4	-7	»	-10	-20	-16	-14	-11	-10	-7	-17	»	-31	»
38	»	-8	»	»	»	-4	»	-19	»	-15	»	-11	»	-18	»	»	»
39	-8	»	-1	-5	-6	-5	-9	-20	-15	-16	»	-12	-8	-17	»	-32	»
40	-9	»	0	»	-5	»	-10	»	»	»	-12	»	-9	»	-23	»	-33
41	-8	-7	-1	-6	-6	-6	»	-21	-14	-15	-11	-11	»	-16	-22	»	-32
42	»	-6	»	-5	»	»	»	-20	»	-14	»	»	»	»	»	-31	»
43	-9	-7	»	-6	-7	-5	-9	-21	-13	-13	»	»	-8	-17	-23	-30	-31
44	»	»	-2	»	-6	»	-10	»	-14	»	-12	»	-9	»	-24	»	-32
45	-10	-6	-3	-5	-5	-4	-11	»	»	-14	-13	-10	-10	-16	-23	-29	»
46	»	-7	»	-6	»	»	»	»	»	-13	»	-9	»	-17	»	-30	»
47	-11	-6	-4	»	-4	-5	»	-22	-15	-14	-14	»	»	-18	-24	-31	-33
48	-12	»	-5	»	-5	»	-12	»	-16	»	»	»	-11	»	-25	»	-32
49	-13	-5	-6	-7	-5	-6	-13	-21	-16	-15	-13	-8	-12	-18	-24	-31	-31

38000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	-31	-30	-25	-33	-40	-38	-43	-39	-36	-32	-36	-24	-32	-33	-28	-23	-25
1	-30	-29	-26	-32	-39	-37	»	-38	-35	-31	-35	-25	-33	-32	-27	»	-26
2	-29	»	-27	»	»	»	-44	»	-36	»	-36	»	-32	»	-26	»	-27
3	-28	-30	»	»	-38	-36	-43	-37	-35	-32	-35	»	-33	-33	-27	-24	-28
4	»	-31	»	-31	»	-37	»	-38	»	»	»	-26	»	-34	»	-25	»
5	-27	-30	-28	-30	-37	-38	-42	»	-34	-33	»	-25	-34	-33	-26	-26	»
6	-28	»	-29	»	-36	»	-43	»	-35	»	-36	»	-35	»	»	»	-29
7	-29	-29	-30	»	-37	-39	-42	-37	-36	-32	-37	-26	»	-32	-25	-25	-28
8	»	»	»	-31	»	-40	»	-38	»	-33	»	-25	»	-33	»	-24	»
9	-30	-28	-29	»	-38	-39	-41	-37	»	»	-36	-24	-34	-32	-24	-23	-27
10	-31	»	»	»	-39	»	»	»	-35	»	-35	»	-35	»	-23	»	-28
11	-32	-27	-30	-32	»	-38	-40	-38	-36	-34	-34	-23	-36	»	-22	-22	-29
12	»	-26	»	-33	»	-39	»	-39	»	-35	»	»	»	-31	»	-21	»
13	»	-27	-31	-34	-38	-40	-41	-38	-37	»	-33	-24	-35	-30	-23	-20	-30
14	-33	»	-30	»	-39	»	-42	»	-36	»	-32	»	-36	»	-22	»	»
15	-34	-28	-29	-35	-38	»	-43	-37	-37	-34	-31	-25	-35	-31	»	-21	-29
16	»	-27	»	»	»	-41	»	-38	»	-35	»	-26	»	-32	»	-22	»
17	-35	»	-30	-36	-37	-40	-44	-37	-36	-34	»	-27	-34	-31	-21	-23	-28
18	-36	»	»	»	-38	»	-43	»	»	»	-30	»	-33	»	-22	»	-29
19	-35	-26	-29	-37	-39	-39	»	-36	-35	-35	-29	-26	-32	-32	-23	»	-30
20	»	-25	»	»	»	-40	»	-35	»	-34	»	-27	»	»	»	-22	»
21	-34	-26	»	-38	-38	-41	-42	-34	-36	-35	-28	»	-31	-31	-24	»	-29
22	»	»	-30	»	-39	»	-43	»	-35	»	-29	»	-32	»	»	»	-30
23	-35	-25	-29	-39	-38	-40	-44	»	-34	»	-28	-28	-31	»	-23	-21	»
24	»	-26	»	-38	»	»	»	-33	»	-36	»	-29	»	-30	»	-20	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-34	»	-30	»	-39	»	-45	»	-33	»	»	»	-30	»	-24	»	-29
27	-33	-25	-31	-37	-38	-41	-44	-32	»	»	-29	-28	-29	-31	-25	-21	-30
28	»	-26	»	-38	»	-40	»	-33	»	-35	»	-29	»	-32	»	»	»
29	-32	»	-32	-39	»	-39	-43	»	-34	-36	-30	-28	-28	»	-26	-20	-29
30	-31	»	»	»	-37	»	»	»	-35	»	-31	»	-29	»	-27	»	-30
31	»	-25	-31	-38	»	»	-42	-34	-36	»	-30	-27	-30	-31	-26	-19	-31
32	»	-26	»	-37	»	-40	»	»	»	-35	»	-28	»	-30	»	-20	»
33	-32	-27	-30	»	-38	»	-41	-35	-35	-34	-29	-29	-29	-31	»	-21	-32
34	-31	»	»	»	-39	»	-40	»	-34	»	-30	»	»	»	-27	»	-33
35	-30	»	-29	-36	-38	-39	-39	-34	-33	-33	»	-30	-28	-32	-28	-22	-34
36	»	-26	»	-35	»	-38	»	-35	»	-34	»	-29	»	-33	»	-23	»
37	-29	-25	-30	-34	-37	»	»	-34	-32	-35	-29	-30	-29	-32	-27	»	-35
38	-28	»	»	»	»	»	-38	»	-31	»	-30	»	-30	»	-26	»	-36
39	-27	-26	»	-35	-38	-39	-37	-35	-30	-36	-29	»	-31	-31	-25	-24	-37
40	»	-25	»	-36	»	-40	»	-36	»	»	»	-29	»	-30	»	-25	»
41	-28	-24	-31	-37	-37	-41	-38	»	-29	-35	-28	-30	-30	-29	-24	-24	»
42	-29	»	-32	»	-36	»	-39	»	-30	»	-29	»	-31	»	»	»	-36
43	-30	-25	-31	»	-37	-42	-40	-35	-31	-36	-28	-31	»	-28	-23	-25	-35
44	»	»	»	-36	»	-43	»	-36	»	-35	»	»	»	-27	»	»	»
45	-29	-24	-32	-37	-36	-42	-39	-35	»	-34	-27	-30	-32	-28	-24	-24	-34
46	»	»	-31	»	-37	»	»	»	-32	»	-26	»	-31	»	-23	»	-35
47	-30	-25	-32	-38	»	-43	-40	-36	-33	-35	-25	-31	-32	»	-22	-25	-34
48	»	-24	»	-39	»	-42	»	-35	»	-36	»	»	»	-29	»	-26	»
49	-30	-25	-33	-40	-38	-43	-39	-36	-32	-36	-24	-32	-33	-28	-23	-25	-33

39000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	-33	-28	-36	-40	-23	-22	-14	-15	-17	-18	-25	-19	-19	-18	-14	-8	1
1	-32	-29	-37	-39	-24	-23	-13	»	-18	»	-24	-20	-20	-17	-13	-7	»
2	»	-30	»	-38	»	»	»	-14	»	-19	»	-19	»	-18	»	-6	»
3	-33	-31	-36	»	-25	-22	-14	-15	-19	-18	-25	-20	»	-19	-14	-5	»
4	-34	»	-37	»	-26	»	-15	»	-18	»	»	»	-19	»	-13	»	2
5	-35	-32	-38	37	-25	-21	-16	-16	»	-17	-26	-19	-20	-20	»	-6	1
6	»	-33	»	-36	»	-22	»	-17	»	-18	»	-18	»	»	»	»	»
7	-34	»	»	-35	»	-21	-17	-18	-19	-19	-25	-17	»	»	-12	-5	0
8	-33	»	»	»	-24	»	-18	»	-18	»	-24	»	-19	»	-11	»	-1
9	»	-32	-37	-34	-25	-20	-17	-19	-17	»	»	»	-18	-21	-12	-4	0
10	»	-31	»	-33	»	-21	»	»	»	»	»	-18	»	-20	»	-3	»
11	-34	-32	-38	-32	-26	»	-18	-20	»	-20	-23	-19	-19	-19	»	-2	-1
12	-33	»	-37	»	-25	»	-19	»	-18	»	-22	»	»	»	»	»	0
13	-32	»	»	-31	-24	-20	»	-21	»	-21	»	-18	-18	-18	-11	-1	-1
14	»	-31	»	-30	»	»	»	-22	»	-22	»	-19	»	-17	»	0	»
15	-33	-32	-36	-29	»	-19	»	-21	-17	-21	-21	-20	-19	-18	-10	»	-2
16	»	»	-35	»	»	»	-20	»	-16	»	-22	»	-18	»	-9	»	-1
17	-32	-33	»	-28	-25	-20	-21	»	-15	-20	-23	»	-19	-19	-10	1	0
18	»	»	»	-27	»	-19	»	-20	»	»	»	-21	»	-18	»	2	»
19	»	-34	-36	-26	-24	-18	-22	»	-16	-19	-22	-20	-18	-17	-11	1	»
20	-31	»	-35	»	-25	»	-23	»	-15	»	-23	»	»	»	»	»	-1
21	-30	-35	-36	»	-26	-17	-22	-19	-16	-18	-22	-21	»	-18	-12	2	0
22	»	»	»	-25	»	-16	»	-18	»	-19	»	-20	»	-17	»	1	»
23	-31	-34	-35	-26	-25	-15	-21	-17	»	-20	-23	-19	-19	-18	-13	0	1
24	-32	»	-36	»	-24	»	»	»	-17	»	-22	»	-20	»	-14	»	0
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-33	»	-25	»	-16	»	-16	»	»	»	»	»	-17	»	1	»
27	»	-34	-37	-24	-23	-15	-20	»	-18	»	-21	-18	-19	-18	-15	2	1
28	-31	»	-38	»	»	»	-19	»	-19	»	-20	»	-20	»	-14	»	»
29	-30	-35	-39	-23	-24	»	-18	-17	-18	-21	-21	»	-19	-17	»	3	0
30	»	-36	»	»	»	-16	»	-18	»	-20	»	-17	»	-16	»	4	»
31	-31	»	-38	-24	-25	-15	-17	-19	-17	-21	»	-18	-18	-17	-13	5	-1
32	-30	»	-39	»	-26	»	-18	»	»	»	-20	»	-17	»	-12	»	0
33	-31	-37	-38	-25	-25	-16	»	-18	-16	-20	-21	-19	-18	-18	-11	»	»
34	»	-38	»	-26	»	-15	»	-17	»	-21	»	-18	»	»	»	4	»
35	-30	-37	»	-25	-26	-14	-17	-16	-17	-22	-20	»	-17	-19	-10	3	1
36	»	»	-39	»	-27	»	-16	»	»	»	-19	»	-18	»	-11	»	2
37	-31	-38	-38	»	-26	-13	-15	»	-16	-23	-20	-17	-17	-18	-10	4	»
38	»	-39	»	-24	»	»	»	-15	»	-24	»	-18	»	-17	»	3	»
39	-30	-38	-37	»	-25	-12	-16	-16	-15	-25	-19	-19	»	-16	-9	»	1
40	-29	»	-36	»	-24	»	-15	»	-14	»	»	»	-18	»	-8	»	2
41	»	-37	-37	-23	-23	-13	-16	-15	»	-24	-20	»	-19	-15	-9	2	1
42	»	-38	»	-22	»	-14	»	»	»	-23	»	-18	»	-14	»	»	»
43	-28	-37	-38	-21	»	-15	-17	-16	-15	-24	-21	-19	-20	»	-10	1	0
44	-29	»	»	»	-24	»	-18	»	-16	»	-20	»	-19	»	-9	»	-1
45	»	-36	-39	-20	-23	-16	-17	-17	-17	»	-19	-20	-20	-13	-10	2	-2
46	»	-37	»	-21	»	-15	»	»	»	-23	»	-19	»	-14	»	1	»
47	-28	-36	-38	-22	-22	»	-16	-16	-16	-24	-18	-20	-19	-15	»	0	-3
48	-27	»	-39	»	-21	»	-15	»	-17	»	-19	»	»	»	-9	»	-4
49	-28	-36	-40	-23	-22	-14	-15	-17	-18	-25	-19	-19	-18	-14	-8	1	-3

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	−3	−1	−8	−14	−17	−22	−24	−20	−24	−17	−17	−16	−15	−10	−1	−6	−8
1	−2	»	−9	−15	−18	−23	»	−21	»	−18	»	−15	»	−9	0	−5	−9
2	»	»	−10	»	−19	»	»	»	−23	»	−16	»	−14	»	−1	»	−10
3	−3	−2	−9	−14	»	−24	−25	−20	−24	−17	−17	−14	−15	»	0	−4	−11
4	»	−1	»	−15	»	−23	»	−19	»	−16	»	»	»	−8	»	−3	»
5	»	−2	−8	−16	−20	−24	−24	−20	−23	»	»	−13	−16	−7	−1	−4	−12
6	−2	»	−7	»	−21	»	−23	»	−22	»	−18	»	−15	»	−2	»	»
7	−3	−3	−8	−15	−20	»	−22	−21	−23	−15	−19	−12	−14	−6	»	−5	−11
8	»	−4	»	»	»	−25	»	−22	»	−14	»	−13	»	−7	»	−6	»
9	−4	»	−9	−16	−19	−26	−23	−23	−24	−15	»	−14	−15	−8	»	−5	−12
10	−5	»	−8	»	−20	»	−22	»	»	»	−18	»	»	»	−1	»	−11
11	−4	−5	−7	−17	−19	−25	»	−24	−25	−14	−19	−13	−14	−9	0	»	−10
12	»	−4	»	−18	»	−24	»	−25	»	−15	»	−14	»	»	»	−6	»
13	−5	−5	»	−19	−20	−23	−21	−26	−24	−16	−18	»	−13	−8	−1	−7	−9
14	»	»	−8	»	−21	»	−22	»	−25	»	−19	»	−14	»	−2	»	−10
15	−4	−4	−7	−18	−22	−22	−21	»	−26	−17	−18	−13	»	−7	−1	−6	»
16	»	−3	»	−19	»	»	»	−27	»	−18	»	−12	»	−8	»	−7	»
17	−3	−2	−8	»	−23	−23	−22	−26	−25	»	−17	−13	»	−7	0	−8	−9
18	−2	»	−7	»	−24	»	−21	»	−24	»	»	»	−15	»	−1	»	−10
19	−3	−3	−8	−18	−25	−24	−22	−25	»	−19	−18	−14	−16	−8	−2	−9	−11
20	»	−4	»	−17	»	−23	»	−26	»	−18	»	−15	»	−7	»	»	»
21	−4	−5	−9	−16	»	−24	−21	−27	−25	−17	−19	−16	−17	»	−3	−8	−12
22	−5	»	»	»	−24	»	−22	»	−24	»	−20	»	−16	»	−4	»	−11
23	»	−4	−8	−15	−25	−25	−23	−26	−23	»	−21	−15	−15	−6	−3	−7	−12
24	»	−5	»	−16	»	−24	»	»	»	−18	»	−16	»	−5	»	−6	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−6	»	−9	»	»	»	−24	»	−22	»	−20	»	»	»	−2	»	−11
27	−5	»	−10	−17	−24	»	−23	−25	»	−17	»	−15	−16	−4	−3	−7	−10
28	»	−6	»	−18	»	−25	»	−24	»	−16	»	−14	»	−3	»	−8	»
29	−4	−7	−11	−17	−23	−24	»	−25	−21	−17	−19	−15	−15	−4	−4	»	−11
30	−5	»	−12	»	»	»	−24	»	−20	»	−18	»	−14	»	−3	»	»
31	−4	−8	»	−16	−22	−23	−25	−24	−19	−18	−19	»	−13	−3	−2	−7	−10
32	»	−7	»	−17	»	−22	»	−25	»	»	»	−14	»	−2	»	»	»
33	−5	−8	−13	−16	−23	−23	−24	»	−18	−17	−20	−13	−14	−3	−1	−8	»
34	−6	»	−12	»	−24	»	−23	»	−17	»	−19	»	−13	»	»	»	−11
35	−7	−9	−11	»	−23	−22	−22	−26	−16	−18	−18	−12	»	−4	−2	−9	»
36	»	»	»	−17	»	−23	»	−27	»	−17	»	−11	»	−3	»	»	»
37	−6	−8	−10	−16	−22	−24	−21	−26	»	−16	−17	−10	−12	−2	»	−10	−12
38	−5	»	−11	»	−21	»	»	»	−17	»	−16	»	−11	»	−1	»	−13
39	−6	−7	−12	−15	»	−25	−22	25	−16	−17	−17	−11	»	»	−2	−9	−12
40	»	−8	»	−16	»	−20	»	−24	»	−16	»	»	»	−1	»	−10	»
41	»	−9	−13	−17	−22	−25	−21	−25	−17	»	»	−10	−12	−2	−3	−9	−11
42	−5	»	−14	»	−21	»	−20	»	−18	»	−18	»	−13	»	−4	»	»
43	−4	−10	−15	−18	−22	»	−21	−24	»	»	−17	−11	−12	−1	»	−10	−10
44	»	−9	»	»	»	−24	»	»	»	−17	»	−12	»	−2	»	−9	»
45	−3	»	−16	−19	−21	−23	»	−25	−19	−16	»	−13	−11	−1	−5	−10	−11
46	»	»	−15	»	−22	»	»	»	»	»	−18	»	−10	»	−4	»	−10
47	−2	−8	−14	−18	»	−24	»	−24	−18	−17	−17	−14	−9	0	−5	»	−9
48	»	−7	»	»	»	−23	»	−23	»	−18	»	−15	»	»	»	−9	»
49	−1	−8	−14	−17	−22	−24	−20	−24	−17	−17	−16	−15	−10	−1	−6	−8	−10

40000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	−10	−10	−7	− 1	− 9	−18	−10	−14	−10	−11	−7	−4	−4	−7	−3	−2	−1
1	»	−11	»	0	−10	−17	− 9	−13	−11	»	−6	−3	−5	−6	−4	−1	−2
2	»	−10	»	1	»	−10	»	»	»	−10	»	−2	»	−5	»	−2	»
3	−11	− 9	»	0	−11	»	−10	−12	−10	− 9	−5	−3	−4	−4	»	−3	−1
4	−12	»	−8	»	−12	»	−11	»	− 9	»	−6	»	»	»	−3	»	0
5	−13	»	−7	− 1	−13	−15	−12	−13	−10	− 8	»	−2	−3	−5	−4	−4	−1
6	»	−10	»	− 2	»	−10	»	−14	»	− 9	»	−1	»	−6	»	−3	»
7	−14	− 9	−6	− 3	−12	−15	»	−13	−11	− 8	−5	−2	−4	−5	−3	»	0
8	−13	»	−5	»	»	»	−11	»	−12	»	−4	»	−5	»	−4	»	−1
9	−12	−10	»	− 2	−11	−16	−10	−12	−13	− 7	−5	»	−6	−6	−3	−4	−2
10	»	−11	»	− 3	»	−17	»	−11	»	»	»	−3	»	−5	»	−5	»
11	−11	−10	−6	− 4	−12	−16	−11	»	−14	− 8	−4	−2	−5	−4	−2	−4	»
12	−10	»	−5	»	−13	»	−12	»	»	»	−3	»	−6	»	»	»	−3
13	− 9	−11	−6	»	−14	−17	−11	−12	−13	− 9	−2	−3	»	−3	−3	−5	−4
14	»	»	»	− 5	»	−16	»	−13	»	»	»	−4	»	−2	»	−4	»
15	− 8	−12	−7	− 6	−15	−15	−10	−14	»	−10	−1	−3	−5	−1	−4	−5	−5
16	− 9	»	−6	»	−14	»	»	»	−12	»	0	»	−6	»	−3	»	−4
17	− 8	−11	−5	− 7	»	−14	− 9	−15	−11	− 9	1	−2	−5	»	−2	−4	−5
18	»	−10	»	− 8	»	−15	»	−16	»	−10	»	»	»	−2	»	−3	»
19	»	− 9	−4	− 9	−15	−14	−10	−15	−12	»	0	−3	−4	−1	−1	»	−4
20	− 7	»	−5	»	−16	»	−11	»	−11	»	−1	»	−5	»	»	»	»
21	− 8	− 8	»	− 8	»	»	−12	−14	−10	− 9	−2	−4	−4	»	»	−2	−5
22	»	− 7	»	»	»	»	»	−13	»	−10	»	−3	»	−2	»	−1	»
23	− 7	»	−4	− 9	−17	−15	−13	−12	− 9	−11	»	»	−3	−3	0	0	−4
24	− 6	»	−5	»	−18	»	−14	»	»	»	»	»	−2	»	−1	»	−3
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	− 6	»	− 8	»	−14	»	−13	»	−10	»	−4	»	»	»	−1	»
27	− 5	− 5	»	− 9	−19	−13	−15	»	−10	−11	−1	»	−3	−4	0	0	»
28	»	»	−6	»	−18	»	»	»	−11	»	−2	»	−4	»	»	»	−2
29	− 6	− 6	−5	−10	−19	»	−14	»	−10	−12	−3	−5	−3	−5	1	»	»
30	»	− 7	»	−11	»	»	»	−12	»	−11	»	−6	»	−4	»	−1	»
31	− 5	− 8	−4	»	−18	−14	−15	−11	− 9	−10	−2	−7	»	−3	2	0	−1
32	− 4	»	»	»	−17	»	−16	»	−10	»	»	»	−4	»	3	»	0
33	− 5	»	−5	−10	−18	−13	−17	−10	»	−11	−3	−8	−5	−2	2	»	1
34	»	− 9	»	−11	»	−12	»	− 9	»	−10	»	−9	»	−3	»	»	»
35	− 6	− 8	−4	−12	»	−13	−18	−10	−11	− 9	−4	»	−4	»	1	1	0
36	− 5	»	»	»	−19	»	−17	»	−10	»	−5	»	−3	»	0	»	1
37	»	− 9	−5	−13	−18	−14	−18	−11	−11	»	−6	−8	−4	−4	−1	0	0
38	»	−10	»	−12	»	−13	»	»	»	− 8	»	−7	»	−3	»	1	»
39	− 6	−11	−4	−13	−19	»	−19	−12	−10	− 9	−5	−6	−3	−4	»	0	1
40	− 7	»	−3	»	−20	»	−20	»	− 9	»	−6	»	»	»	0	»	0
41	− 8	»	−2	−12	−19	−14	−19	−11	»	− 8	»	−5	−4	−3	1	1	1
42	»	−10	»	−11	»	−13	»	−12	»	− 9	»	−4	»	−4	»	0	»
43	− 7	− 9	−3	−10	−20	−12	»	−13	− 8	− 8	−7	−5	−5	−3	0	»	»
44	− 6	»	−2	»	»	»	−18	»	− 9	»	−6	»	−4	»	1	»	2
45	− 7	− 8	»	− 9	−19	−13	−17	−12	−10	− 7	−5	»	−5	−4	0	−1	1
46	»	− 7	»	−10	»	−12	»	−11	»	»	»	−4	»	−3	»	−2	»
47	− 8	− 8	−1	− 9	−18	−11	−16	»	−11	− 6	−4	−3	−6	−4	−1	−1	»
48	− 9	»	0	»	−19	»	−15	»	−12	»	−3	»	−7	»	»	»	2
49	−10	− 7	−1	− 9	−18	−10	−14	−10	−11	− 7	−4	−4	−7	−3	−2	−1	3

41000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	3	-8	-2	-12	-12	-6	6	-3	5	-11	-15	-12	-16	-7	-4	-15	-15
1	2	»	-1	-11	-13	-7	7	-2	4	-12	»	-13	-15	-8	-3	-14	»
2	1	»	0	»	-12	»	8	»	»	»	-16	»	-16	»	-4	»	-14
3	2	-9	-1	-10	-11	-6	»	-1	3	-11	-15	-12	-17	-9	»	»	-15
4	»	-8	»	-9	»	-7	»	»	»	-10	»	-11	»	»	»	-15	»
5	3	-7	»	-8	-12	-8	9	0	4	-11	-16	»	»	-8	-5	-14	-16
6	»	»	-2	»	-11	»	8	»	3	»	-17	»	-16	»	-4	»	-17
7	2	-6	-1	-7	-10	-9	7	»	4	-12	»	-12	-15	-9	-5	-13	»
8	»	-7	»	-6	»	»	»	-1	»	»	»	-11	»	-10	»	-14	»
9	1	-8	0	»	-9	-8	6	0	»	-13	-16	-10	»	-9	-6	-15	-18
10	0	»	-1	»	-8	»	5	»	5	»	»	»	-14	»	-5	»	-19
11	1	-7	-2	-7	-9	-7	»	-1	»	»	-15	-11	-15	-8	-6	-16	-20
12	»	-6	»	-8	»	»	»	-2	»	»	»	-10	»	-7	»	»	»
13	0	-7	-1	-9	»	-6	4	-1	4	-14	-16	-11	-16	»	-7	-15	-19
14	1	»	»	»	-8	»	3	»	3	»	-15	»	-15	»	-8	»	-18
15	»	-8	»	-10	-9	-7	2	0	4	»	-14	-10	-14	-6	»	-14	-17
16	»	»	»	-9	»	-6	»	»	»	-15	»	-9	»	-7	»	-15	»
17	»	-9	-2	-8	-10	»	1	1	3	-14	-13	-8	-13	-8	»	-14	-18
18	0	»	-3	»	-9	»	0	»	2	»	-14	»	»	»	-7	»	-17
19	-1	»	-4	-7	»	-5	1	2	3	-15	»	-7	-14	-9	-8	-13	-16
20	»	-8	»	-6	»	»	»	3	»	-16	»	-8	»	-10	»	-14	»
21	-2	-7	-3	-7	-10	-4	»	4	2	-15	-13	-7	-13	-9	-9	»	-17
22	-1	»	-2	»	»	»	0	»	3	»	-12	»	-14	»	-10	»	-16
23	-2	-6	»	-8	-11	-3	-1	3	4	-14	»	»	-13	-8	-9	-13	-15
24	»	-7	»	-9	»	-4	»	4	»	»	»	-8	»	-9	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-3	»	-1	»	-12	»	0	»	3	»	-11	»	-12	»	»	»	-16
27	-4	-6	-2	»	-11	-5	1	3	2	-13	»	-9	»	-10	-8	-12	-17
28	»	»	»	-10	»	-4	»	2	»	-12	»	-10	»	-9	»	-11	»
29	-5	-7	-3	-9	-10	-3	2	1	»	-11	-10	-11	-11	-10	-9	-12	-18
30	-4	»	-4	»	-9	»	»	»	1	»	-11	»	-10	»	-10	»	-17
31	-5	-6	»	-8	»	-4	1	2	0	-12	-12	-12	-9	»	-11	-11	-16
32	»	-5	»	-9	»	-3	»	1	»	-11	»	»	»	-11	»	-12	»
33	»	-6	-5	-10	-8	-2	2	0	-1	»	-13	-11	-10	-10	-10	-13	-17
34	-6	»	-6	»	-7	»	1	»	-2	»	»	»	-9	»	-11	»	»
35	-5	-5	-7	-11	-8	»	0	1	-3	-12	-14	-10	-8	-9	»	-12	-18
36	»	-4	»	»	»	-1	»	2	»	-11	»	-9	»	-8	»	-11	»
37	-4	»	-8	-10	-7	0	1	3	-4	-12	»	-10	-7	-7	-10	-12	-17
38	-5	»	-9	»	»	»	0	»	»	»	-15	»	-6	»	-11	»	-18
39	-4	-3	-10	-11	-8	1	»	2	-5	-11	-14	-11	-7	-6	-12	»	-17
40	»	-4	»	-12	»	2	»	3	»	-12	»	-12	»	»	»	-13	»
41	-5	-3	»	-11	-7	3	-1	4	-6	-11	-15	»	-6	-7	-13	-14	-18
42	»	»	-11	»	-6	»	-2	»	-7	»	-16	»	-7	»	-12	»	-19
43	-6	-4	-10	-12	-5	2	-3	»	-8	-12	-15	-13	-8	-6	-13	-15	»
44	»	-3	»	-13	»	»	»	3	»	-13	»	-14	»	-5	»	-16	»
45	-5	-2	-11	»	-4	3	-2	4	-9	-14	-14	-15	»	-6	-14	-15	-18
46	-6	»	-12	»	-5	»	-3	»	-10	»	»	»	-7	»	-13	»	-17
47	-7	-3	-11	-12	-6	4	-2	5	»	-13	-13	-14	-8	-5	-14	-16	-18
48	»	»	»	-13	»	5	»	6	»	-14	»	-15	»	-4	»	»	»
49	-8	-2	-12	-12	-6	6	-3	5	-11	-15	-12	-16	-7	-4	-15	-15	-17

42000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	-17	-22	-20	-24	-23	-26	-29	-38	-35	-44	-46	-45	-42	-49	-55	-55	-59
1	-18	-23	»	-25	-24	-25	-30	-37	-36	-45	-45	»	-43	-48	-56	-54	-60
2	»	-24	»	-26	»	-24	»	-36	»	»	»	-44	»	-49	»	-53	»
3	-17	-23	-19	-25	-25	-25	-31	»	-35	-44	-44	-43	-44	-50	-55	-54	»
4	-18	»	-20	»	-26	»	-32	»	-34	»	-45	»	-45	»	»	»	-59
5	-19	-24	-21	»	-27	»	-33	-37	-35	-43	-44	-44	»	-49	-56	-53	-60
6	»	»	»	-24	»	-26	»	-38	»	-44	»	-45	»	-48	»	-52	»
7	-20	-23	-22	-23	-26	-27	-34	-39	»	-45	-45	-46	-46	-49	-57	-53	-61
8	-19	»	-21	»	-25	»	»	»	-36	»	-46	»	-47	»	-56	»	-60
9	-20	-22	-22	-24	»	-26	-35	-38	-35	-44	-45	-47	-46	»	-57	-54	-59
10	»	-21	»	-23	»	-27	»	-39	»	-45	»	»	»	-50	»	-55	»
11	»	-20	-23	-22	-24	-28	-36	-38	-36	»	-46	-48	-45	-49	-56	-56	-60
12	-21	»	-22	»	-25	»	-35	»	-35	»	-47	»	-44	»	-57	»	»
13	-20	-21	-21	-23	-26	»	-34	-39	-36	-44	-46	-47	-43	-50	»	-57	-61
14	»	-20	»	»	»	-29	»	-40	»	-45	»	-46	»	-49	»	-58	»
15	-21	»	-20	-22	-27	-30	-33	-41	-37	-44	»	-45	-44	-50	-58	-59	-60
16	-22	»	-21	»	»	»	-32	»	»	»	-47	»	-45	»	-57	»	-61
17	-21	-19	-20	-23	-26	-29	»	-42	-38	-45	-46	-46	-46	-49	-56	»	-62
18	»	-18	»	-22	»	-28	»	-41	»	-44	»	-45	»	»	»	-60	»
19	-22	-19	»	-23	-25	-29	-33	-42	-39	-45	-47	»	-45	-48	-57	»	-61
20	»	»	-21	»	-24	»	-32	»	-38	»	-48	»	-44	»	-56	»	-60
21	-21	-18	-22	-22	-25	-30	»	»	-39	-44	-47	-46	-43	-47	-55	-59	»
22	»	-19	»	-23	»	»	»	-41	»	-43	»	-45	»	-48	»	-58	»
23	-22	-18	-21	»	-24	-31	-33	-42	-40	-44	-46	-46	»	-49	-56	-59	-61
24	-23	»	-20	»	-23	»	-34	»	-41	»	»	»	-44	»	-55	»	-62
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-19	»	-24	»	-30	»	-41	»	-45	»	-47	»	-48	»	»	»
27	-22	-20	-21	-23	»	-31	-33	-40	-40	-44	-47	-48	-43	»	-54	-58	-61
28	-21	»	»	»	-22	»	-34	»	-41	»	-46	»	-42	»	-53	»	-62
29	»	-21	-20	-24	-23	-30	-35	-41	-40	»	-47	»	-43	-47	-54	-57	-61
30	»	-22	»	-23	»	-29	»	»	»	-43	»	-47	»	-48	»	-58	»
31	-22	-21	-21	-22	-24	»	-36	-40	»	-44	-48	-48	-44	-49	»	-57	-60
32	-23	»	-22	»	-25	»	-37	»	-41	»	-47	»	»	»	-53	»	-61
33	-22	»	-23	-21	-26	-28	-38	-39	-42	-45	»	-47	-45	-50	-52	-58	»
34	»	-20	»	-22	»	-27	»	-38	»	-44	»	-48	»	-51	»	»	»
35	-21	-21	-24	-23	-25	-26	»	-39	-43	»	-46	-47	-46	-50	»	»	-62
36	-22	»	-25	»	»	»	-39	»	-44	»	-45	»	-45	»	-51	»	-61
37	-23	-22	»	-24	-26	-27	»	-38	-43	-43	-46	»	»	-51	-52	-59	-62
38	»	-23	»	-23	»	-28	»	-37	»	»	»	»	»	-50	»	-58	»
39	-22	-22	-26	-24	-25	-27	-38	»	-44	-44	»	-48	-44	-51	-53	»	»
40	-21	»	-27	»	-24	»	-39	»	-45	»	-47	»	-45	»	»	»	-61
41	-22	-23	»	»	-23	-28	-38	-36	»	-45	-46	-47	»	-50	-54	-57	-62
42	»	»	»	-23	»	-29	»	»	»	-46	»	-46	»	-51	»	-56	»
43	-21	»	-26	-24	-24	-28	»	-37	»	-47	-47	-45	-46	-52	-55	-57	-61
44	-22	»	-25	»	-23	»	»	»	-46	»	»	»	-47	»	-54	»	-60
45	-23	»	-26	-23	»	-27	-39	-38	-45	-46	-46	-44	-48	»	-55	-58	-61
46	»	-22	»	»	»	-28	»	-37	»	-47	»	»	»	-53	»	-59	»
47	»	-21	»	-22	-24	-29	-38	-36	-46	»	-47	-43	-49	-54	-56	-58	-62
48	-22	»	-25	»	-25	»	-37	»	-45	»	-46	»	-48	»	-55	»	»
49	-22	-20	-24	-23	-26	-29	-38	-35	-44	-46	-45	-42	-49	-55	-55	-59	-63

43000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	-63	-69	-69	-66	-65	-74	-77	-81	-82	-83	-79	-67	-67	-66	-60	-44	-48
1	-64	-68	-70	»	-66	-75	-78	-80	-83	-84	-78	-68	»	-67	-61	-45	-49
2	-65	»	-69	»	-65	»	-77	»	-84	»	»	»	-68	»	-60	»	-48
3	-64	-67	-70	-67	-66	-74	-76	-81	»	-85	-79	-69	-69	-66	-59	-46	-47
4	»	-66	»	-68	»	-73	»	-82	»	-86	»	-68	»	-65	»	»	»
5	-63	-67	-69	-69	»	-74	-77	-83	-83	»	-78	-69	-70	»	-58	-47	-48
6	-64	»	»	»	-67	»	-78	»	-84	»	-77	»	-71	»	-57	»	-49
7	»	-68	-68	-70	-66	»	-79	-82	-83	»	-76	-68	-70	-64	-58	-46	-50
8	»	-67	»	-69	»	-73	»	»	»	-87	»	-67	»	-65	»	-47	»
9	-65	-68	-69	-68	-67	»	-80	-83	-82	»	-75	-68	-69	-66	»	-46	-51
10	-66	»	-70	»	-68	»	-79	»	-81	»	-76	»	»	»	-57	»	-50
11	-65	»	-71	-67	-69	-72	-78	-82	-82	-88	»	»	-68	-65	-56	-47	-49
12	»	-69	»	-68	»	-73	»	-83	»	-87	»	-69	»	-66	»	-48	»
13	-66	-68	-70	-67	»	-74	»	-84	-81	-86	-77	-70	-69	-65	-55	»	-50
14	-67	»	-69	»	»	»	-77	»	-82	»	-76	»	-68	»	-54	»	-51
15	-68	-67	»	-66	-68	-75	-76	-83	-83	-87	-77	»	-67	-66	-53	-49	-50
16	»	-66	»	-65	»	-74	»	-82	»	»	»	-71	»	-67	»	-50	»
17	-69	-67	-68	-66	-69	-75	-75	»	-82	-88	-78	-72	-68	-66	-52	»	»
18	-70	»	-69	»	-68	»	-76	»	-81	»	-79	»	-67	»	»	»	»
19	-69	-68	-70	»	-69	-74	-77	-81	-80	-87	-80	-71	»	»	-51	-49	-51
20	»	»	»	-65	»	-75	»	-80	»	-88	»	-70	»	-65	»	-50	»
21	-68	-69	-69	64	-70	-76	-78	-79	»	-87	-79	»	-68	-64	-50	-51	-52
22	-67	»	-70	»	-71	»	»	»	-81	»	»	»	-69	»	-49	»	-51
23	-66	-70	-69	-63	»	-77	-79	-80	-82	»	-78	-69	-68	»	-50	-50	-52
24	»	-71	»	-64	»	-78	»	-79	»	-86	»	»	»	-63	»	-49	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-67	»	-68	»	-72	»	»	»	»	»	-77	»	-67	»	-49	»	»
27	»	-72	-69	-65	-73	»	-78	-78	-83	-85	-76	-70	-68	-64	»	-48	-51
28	»	-73	»	»	»	-79	»	-79	»	-86	»	-69	»	-63	»	-49	»
29	-66	»	-68	»	-72	-78	-79	-78	-84	-87	»	-68	-69	-64	-48	-48	-50
30	-67	»	»	»	-73	»	-80	»	»	»	-75	»	-68	»	-49	»	-49
31	-66	»	-67	-66	-74	-77	»	-77	-83	-86	-74	-67	-69	-63	-48	»	-50
32	»	-72	»	-65	»	-76	»	-76	»	-85	»	-68	»	»	»	-47	»
33	-67	-71	»	-66	-73	-77	-81	-77	-84	-84	-73	»	-70	-64	-47	-48	-49
34	»	»	-66	»	-74	»	»	»	-83	»	-72	»	-71	»	-46	»	-50
35	-68	-70	-65	-65	-75	-78	-82	»	-84	-83	-71	-69	-70	-65	-45	-49	»
36	»	-71	»	-66	»	»	»	-78	»	-82	»	-68	»	-64	»	-50	»
37	-69	-70	-64	»	-76	-79	-83	-77	-85	-81	-72	-67	»	-63	-46	-51	-51
38	-68	»	-63	»	-75	»	-82	»	-86	»	»	»	-69	»	-47	»	-50
39	-69	-71	-64	-67	-74	-80	-83	-78	»	-82	-71	-68	-68	-64	-46	-50	-49
40	»	-72	»	-66	»	-79	»	-79	»	-81	»	-67	»	-63	»	»	»
41	-68	-71	-65	-65	»	-78	-84	»	-85	-80	-70	-66	-67	»	-45	-51	-48
42	-69	»	»	»	-73	»	-85	»	-84	»	-69	»	-66	»	-46	»	-49
43	»	-70	-66	-64	-74	-79	-84	-78	-85	»	-68	-67	-67	-62	-45	-50	-48
44	»	-69	»	-63	»	-78	»	»	»	-79	»	-68	»	-61	»	-49	»
45	-70	-70	-67	-62	-75	»	-83	-79	-84	-78	-67	»	-66	-62	»	-50	-47
46	-69	»	-66	»	-74	»	-82	»	-85	»	-66	»	»	»	-46	»	-46
47	-68	»	-65	-63	-73	-79	-81	-80	-84	-79	»	-67	-65	»	-45	-49	-45
48	»	»	»	-64	»	-78	»	-81	»	-78	»	-66	»	-61	»	-48	»
49	-69	-69	-66	-65	-74	-77	-81	-82	-83	-79	-67	-67	-66	-60	-44	-48	-44

44000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	-44	-41	-37	-36	-34	-37	-32	-20	-21	-29	-21	-15	-12	-20	-23	-24	-17
1	-45	-40	-38	-35	»	-36	-33	-21	-20	-30	-22	-16	-13	»	»	-25	-16
2	»	-39	»	-34	»	»	»	-20	»	»	»	»	»	»	»	-24	»
3	»	-40	-37	-35	-33	-35	-32	-21	-21	»	-23	-15	»	-19	-24	-25	-15
4	-46	»	-36	»	-34	»	-31	»	-22	»	-24	»	-12	»	-23	»	»
5	-45	-39	-37	-34	-35	»	-30	-20	-23	-29	»	-16	-13	-20	»	-24	-14
6	»	-40	»	»	»	-34	»	»	»	»	»	-17	»	-19	»	-25	»
7	-44	»	-38	-33	-34	-35	-29	-21	»	-28	»	»	-12	-18	-22	-24	-15
8	-43	»	-39	»	-35	»	-30	»	»	»	-23	»	-13	»	-21	»	-14
9	-44	-39	-38	-32	-34	-36	»	-20	-24	-29	-22	-16	-12	-17	-22	»	-15
10	»	-38	»	-31	»	»	»	-21	»	-28	»	-17	»	»	»	-23	»
11	-43	-39	»	-30	»	-35	-31	-22	-25	-27	-21	»	-13	-16	-23	-24	-16
12	»	»	-39	»	-35	»	-30	»	-24	»	-20	»	-12	»	-22	»	-17
13	-42	-40	»	-29	-36	-36	-29	»	-23	-28	-19	-18	-13	-17	-21	-23	»
14	»	»	»	-28	»	»	»	-23	»	-29	»	-17	»	-18	»	-22	»
15	»	-41	-38	»	-35	-35	-28	-24	-22	-28	-20	-16	»	-17	-22	-21	»
16	-41	»	-39	»	-34	»	-29	»	-23	»	»	»	-12	»	-23	»	-16
17	-40	-40	-38	-29	-33	-34	-28	-25	»	-27	-21	-15	-13	-18	-24	-20	-15
18	»	-41	»	-30	»	-35	»	-24	»	-26	»	-16	»	-19	»	»	»
19	-39	-42	-37	-29	»	-34	-29	-23	-24	-25	-22	-15	-14	»	-23	-21	-14
20	-40	»	»	»	-34	»	-28	»	-23	»	-21	»	-15	»	-24	»	-13
21	»	41	-36	30	-35	-33	-27	-24	»	»	-20	-14	-14	-20	-25	-20	-14
22	»	-42	»	-31	»	-34	»	»	»	-24	»	-13	»	-21	»	-21	»
23	-39	-41	-37	-30	-36	»	-28	-23	-22	-23	-19	»	-15	-22	»	-22	-13
24	-40	»	-36	»	-35	»	-27	»	-23	»	-18	»	»	»	-24	»	-14
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-40	»	-31	»	-33	»	-22	»	-24	»	-14	»	-21	»	-21	»
27	-41	-41	-35	-32	-36	-34	»	-21	-24	-25	-19	-15	-16	-22	-23	»	-13
28	»	»	-34	»	»	»	-26	»	-23	»	-18	»	-17	»	-22	»	-12
29	-40	-40	»	-33	-37	-33	-25	-20	-22	-24	-17	»	-18	-23	-23	-22	-13
30	»	-39	»	-32	»	-34	»	-21	»	»	»	-14	»	-24	»	-21	»
31	-41	-40	-35	-31	-38	-35	»	»	-23	-23	-16	-13	-19	-25	-22	-22	»
32	-42	»	-36	»	-37	»	-24	»	-24	»	-17	»	-18	»	»	»	-12
33	-41	»	-37	»	-36	-36	-23	-20	-25	-24	-16	-14	»	-24	-21	-23	-13
34	»	»	»	-30	»	-35	»	-19	»	-23	»	-15	»	-23	»	-22	»
35	-40	-39	-36	-29	-37	-36	-22	-18	»	-24	-17	-14	-19	-22	-22	-21	-12
36	-39	»	-37	»	-36	»	»	»	-24	»	-16	»	-20	»	-21	»	-11
37	-38	-38	-38	-30	»	-35	»	-19	-25	-23	-15	-13	-21	»	-22	-22	-10
38	»	-39	»	-31	»	-34	»	-20	»	-24	»	»	»	-23	»	-23	»
39	»	»	-37	-32	-37	»	-21	-19	-26	»	-16	-12	-20	-22	-23	-22	-11
40	-39	»	-38	»	-36	»	-20	»	-25	»	-15	»	-19	»	-24	»	»
41	-40	-40	-37	-33	-37	»	-21	-20	-26	-23	-16	-13	-20	-23	»	-21	-12
42	»	-39	»	»	»	-33	»	-19	»	-24	»	-14	»	»	»	-20	»
43	-39	»	-38	-34	38	-32	-20	-20	-27	-23	»	-15	-21	-24	-23	-19	-12
44	-40	»	-37	»	-39	»	-21	»	»	»	-17	»	-20	»	-24	»	-12
45	-39	-38	-36	-35	-38	-31	»	-21	-28	-22	-16	-14	-19	-25	-23	»	-11
46	»	-37	»	-34	»	-32	»	-20	»	-23	»	-13	»	»	»	-18	»
47	-40	-36	»	-33	-39	-31	-20	-21	-29	-22	-15	»	-20	-24	-22	-17	-10
48	»	»	-35	»	-38	»	-21	»	-30	»	-16	»	-21	»	-23	»	»
49	-41	-37	-36	-34	-37	-32	-20	-21	-29	-21	-15	-12	-20	-23	-24	-17	-10

45000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	−10	−9	−8	6	−1	0	8	4	4	3	−1	4	5	3	4	0	−2
1	−11	−10	−7	5	0	»	7	3	5	2	−2	3	6	2	»	1	−1
2	−10	»	−8	»	»	»	6	»	4	»	−1	»	»	»	5	»	0
3	−11	»	−7	6	»	−1	7	4	3	3	»	2	7	3	6	0	−1
4	»	−9	»	5	»	0	»	5	»	2	»	1	»	2	»	»	»
5	−10	−10	−6	4	−1	−1	»	6	2	3	0	2	8	3	5	»	0
6	»	»	−5	»	»	»	»	»	3	»	−1	»	7	»	6	»	1
7	−11	−11	»	3	»	0	6	7	4	2	−2	»	6	4	7	−1	0
8	»	−10	»	2	»	1	»	8	»	»	»	3	»	3	»	0	»
9	−10	−9	−4	3	−2	2	7	»	5	1	−3	2	5	2	6	−1	»
10	−11	»	−5	»	−3	»	6	»	6	»	−2	»	4	»	»	»	1
11	−10	−8	−4	»	−2	3	5	9	7	2	−3	3	»	3	7	−2	0
12	»	»	»	2	»	4	»	10	»	1	»	4	»	2	»	−1	»
13	−11	−9	−3	1	−1	5	6	9	»	2	−2	3	5	3	6	−2	−1
14	−12	»	−2	»	−2	»	»	»	8	»	−3	»	4	»	5	»	−2
15	−13	−8	−1	0	»	6	5	8	9	3	−2	2	5	»	4	»	−3
16	»	−7	»	−1	»	5	»	9	»	2	»	»	»	4	»	−1	»
17	»	−8	−2	−2	−3	6	6	10	8	»	−1	3	6	3	3	−2	−4
18	−12	»	−1	»	−2	»	7	»	7	»	0	»	7	»	2	»	»
19	−11	−9	0	−1	−1	»	6	11	6	3	1	4	6	4	»	−1	−3
20	»	−8	»	»	»	5	»	10	»	4	»	»	»	5	»	0	»
21	−12	»	−1	−2	0	6	»	9	5	3	»	3	5	6	3	−1	−4
22	−11	»	0	»	1	»	5	»	»	»	0	»	4	»	2	»	−3
23	−10	−9	1	−3	2	5	»	»	4	4	1	2	3	7	3	»	−2
24	»	−8	»	−4	»	4	»	8	»	3	»	1	»	»	»	−2	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	0	»	1	»	6	»	3	»	2	»	4	»	2	»	−3
27	−9	−7	1	−3	0	5	7	»	4	4	1	0	5	6	1	−1	»
28	»	»	»	−2	»	»	»	7	»	3	»	1	»	5	»	−2	»
29	−10	−8	2	»	−1	6	8	6	5	2	0	2	»	4	2	−1	−2
30	−11	»	1	»	0	»	9	»	4	»	»	»	4	»	1	»	−3
31	−10	−9	0	−3	1	7	8	7	»	1	1	3	5	5	0	0	»
32	»	−10	»	−2	»	6	»	8	»	2	»	4	»	6	»	»	»
33	−11	−11	1	−3	»	5	7	9	3	1	2	5	6	»	»	−1	−4
34	−12	»	»	»	0	»	6	»	4	»	3	»	5	»	−1	»	−3
35	»	−12	2	−2	1	6	5	8	3	»	2	»	»	5	0	−2	−2
36	»	»	»	−1	»	7	»	»	»	2	»	»	»	4	»	−3	»
37	−11	−11	3	−2	2	»	4	7	4	1	»	6	6	3	»	−4	−1
38	−10	»	2	»	1	»	5	»	3	»	3	»	»	»	1	»	−2
39	−11	»	3	−3	2	8	6	6	»	0	»	5	5	2	0	−3	−1
40	»	−10	»	−2	»	9	»	»	»	1	»	6	»	»	»	−2	»
41	−10	−9	2	−1	3	8	»	5	2	2	2	7	6	»	1	»	0
42	−11	»	3	»	»	»	7	»	3	»	1	»	5	»	0	»	−1
43	−10	−10	»	0	»	9	6	6	2	1	2	»	4	1	−1	−1	0
44	»	−9	»	»	»	10	»	5	»	»	»	8	»	2	»	−2	»
45	−9	−10	»	−1	2	9	5	»	3	0	3	»	5	3	−2	−1	»
46	−8	»	4	»	1	»	6	»	4	»	2	»	4	»	»	»	−1
47	»	−9	5	»	»	8	5	4	3	−1	3	7	»	2	−1	−2	0
48	»	»	»	−2	»	7	»	3	»	0	»	6	»	3	»	−3	»
49	−9	−8	6	−1	0	8	4	4	3	−1	4	5	3	4	0	−2	1

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	1	0	− 6	−10	−4	−2	0	0	2	0	−1	−2	1	−1	7	10	13
1	2	−1	− 5	− 9	−3	−1	»	1	1	−1	−2	−1	2	0	6	»	14
2	»	−2	»	−10	»	0	»	0	»	0	»	»	»	»	»	11	»
3	1	−3	»	− 9	»	1	1	−1	0	−1	−3	»	3	1	5	12	13
4	»	»	− 6	»	»	»	0	»	1	»	−2	»	4	»	6	»	12
5	2	−2	− 7	− 8	−2	2	−1	»	2	−2	−3	−2	3	2	7	13	»
6	»	−3	»	− 9	»	»	»	−2	»	−3	»	−1	»	3	»	12	»
7	1	−2	− 6	»	−1	1	−2	−1	3	−2	−4	0	»	2	6	13	13
8	0	»	− 7	»	0	»	−1	»	4	»	»	»	2	»	5	»	12
9	−1	−1	− 6	− 8	−1	0	0	−2	»	−1	−3	−1	1	3	4	14	»
10	»	0	»	− 9	»	1	»	−1	»	−2	»	−2	»	4	»	»	»
11	−2	−1	− 7	− 8	»	2	−1	0	»	−1	−2	−1	0	»	5	15	13
12	−1	»	»	»	0	»	−2	»	3	»	−1	»	»	»	6	»	12
13	»	0	− 6	− 9	−1	3	−1	−1	4	»	−2	−2	−1	5	5	10	11
14	»	1	»	− 8	»	2	»	»	»	−2	»	−1	»	6	»	17	»
15	0	0	− 7	− 7	−2	»	−2	−2	5	−1	−3	−2	0	5	»	»	12
16	−1	»	− 8	»	−3	»	−3	»	4	»	−2	»	»	»	»	»	13
17	−2	»	»	− 6	−4	1	−2	−1	5	0	»	»	−1	»	4	10	14
18	»	−1	»	− 7	»	0	»	0	»	−1	»	−3	»	6	»	15	»
19	−3	−2	− 7	− 6	−5	−1	»	1	6	0	−3	»	−2	7	5	»	13
20	−4	»	− 8	»	»	»	−1	»	5	»	»	»	−3	»	6	»	12
21	−3	−3	»	− 5	−4	0	0	2	4	»	−2	»	−2	8	7	14	13
22	»	−2	»	− 6	»	1	»	1	»	»	»	−2	»	9	»	15	»
23	−4	»	− 7	− 5	−3	2	»	»	5	−1	−3	−1	−3	10	6	14	»
24	−5	»	− 8	»	−2	»	»	»	4	»	−2	»	−4	»	»	»	14
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	− 4	»	1	»	2	»	0	»	−2	»	9	»	13	»
27	−6	−3	»	»	−1	0	−1	1	»	1	−3	−3	−5	10	7	12	15
28	−5	»	»	»	0	»	»	»	5	»	−4	»	−4	»	6	»	16
29	−4	»	− 9	− 3	»	−1	0	0	4	2	−3	−2	−3	»	5	13	15
30	»	−4	»	− 4	»	0	»	−1	»	3	»	»	»	11	»	12	»
31	»	−5	−10	− 3	−1	−1	−1	0	3	»	−2	−3	−2	10	6	13	14
32	−3	»	− 9	»	−2	»	0	»	4	»	−1	»	−1	»	5	»	»
33	−4	»	− 8	− 4	−1	»	1	−1	5	2	0	−2	0	9	»	12	15
34	»	−4	»	»	»	−2	»	0	»	1	»	−1	»	8	»	11	»
35	−5	»	− 9	− 5	−2	−1	0	1	4	0	»	0	1	7	6	10	14
36	−4	»	− 8	»	−1	»	−1	»	»	»	−1	»	0	»	7	»	15
37	−3	−5	− 7	− 6	−2	−2	»	2	5	−1	−2	1	−1	6	6	»	14
38	»	−6	»	− 5	»	−1	»	1	»	0	»	0	»	»	»	11	»
39	−2	−7	»	− 4	−3	0	−2	0	4	−1	−3	»	−2	7	7	12	15
40	»	»	− 8	»	−2	»	−3	»	3	»	−2	»	−1	»	8	»	16
41	−1	−8	− 9	− 5	−3	−1	−2	»	2	−2	−1	−1	−2	6	9	11	»
42	»	−7	»	− 4	»	»	»	1	»	−3	»	−2	»	7	»	12	»
43	0	−6	− 8	»	−4	−2	−1	2	1	−2	0	−1	»	8	8	13	15
44	−1	»	− 9	»	−5	»	0	»	»	»	»	»	−1	»	7	»	14
45	−2	−5	− 8	− 3	−4	−3	−1	1	»	−1	−1	0	0	7	8	12	13
46	»	−4	»	− 4	»	−2	»	0	»	−2	»	−1	»	6	»	»	»
47	−1	−5	− 9	− 5	»	−1	0	1	0	−1	0	0	−1	»	9	»	14
48	0	»	»	»	−3	»	1	»	−1	»	−1	»	−2	»	10	»	13
49	0	−6	−10	− 4	−2	0	0	2	0	−1	−2	1	−1	7	10	13	12

46000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	12	23	24	31	32	38	35	35	34	38	42	43	35	30	36	35	35
1	13	»	25	30	»	37	36	»	33	37	43	42	»	29	35	36	»
2	12	»	24	»	33	»	35	»	32	»	44	»	36	»	»	»	34
3	13	22	25	»	32	36	36	36	33	38	»	41	»	30	36	37	33
4	»	»	»	31	»	35	»	37	»	»	»	42	»	29	»	38	»
5	14	23	24	30	33	36	37	»	»	37	45	43	35	30	37	39	34
6	15	»	25	»	34	»	»	»	»	»	46	»	36	»	36	»	»
7	16	24	26	29	»	37	»	36	32	38	45	42	35	»	35	38	35
8	»	23	»	30	»	»	»	35	»	37	»	»	»	31	»	37	»
9	»	22	27	29	»	38	36	36	31	»	46	43	34	30	36	36	36
10	15	»	28	»	33	»	35	»	32	»	47	»	33	»	37	»	»
11	16	21	»	28	34	»	36	35	31	36	46	42	32	31	»	37	37
12	»	»	»	»	»	39	»	36	»	35	»	41	»	30	»	36	»
13	»	»	27	29	33	38	37	35	32	36	»	42	33	31	38	35	36
14	15	»	26	»	34	»	36	»	»	»	45	»	32	»	39	»	37
15	14	20	27	30	33	37	»	34	31	37	46	43	33	30	40	»	38
16	»	21	»	29	»	36	»	35	»	36	»	42	»	»	»	36	»
17	13	22	»	30	34	35	37	36	32	37	45	»	34	29	39	37	37
18	»	»	28	»	35	»	36	»	33	»	46	»	33	»	40	»	38
19	14	23	29	31	36	36	35	»	32	38	47	43	34	»	39	36	»
20	»	22	»	32	»	»	»	37	»	37	»	44	»	28	»	37	»
21	15	21	28	»	37	35	36	36	33	38	48	43	»	29	40	36	39
22	16	»	29	»	36	»	»	»	34	»	»	»	33	»	41	»	40
23	17	22	»	31	35	36	37	35	»	39	49	42	32	28	42	37	39
24	»	21	»	32	»	37	»	34	»	40	»	41	»	29	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	18	»	»	»	36	»	36	»	35	»	48	»	31	»	43	»	38
27	»	22	28	33	37	38	35	33	34	»	49	40	30	30	44	38	37
28	»	23	»	34	»	37	»	»	»	41	»	39	»	31	»	39	»
29	19	22	27	33	38	»	34	32	35	42	50	40	»	32	»	38	38
30	20	»	26	»	39	»	33	»	36	»	49	»	»	»	43	»	37
31	21	»	27	32	40	36	34	33	37	41	»	41	29	33	42	37	36
32	»	21	»	33	»	37	»	32	»	40	»	42	»	34	»	36	»
33	20	22	28	34	39	36	»	33	38	41	50	41	30	35	41	»	37
34	21	»	29	»	»	»	35	»	39	»	51	»	29	»	40	»	36
35	22	21	»	33	40	35	34	34	38	42	50	»	28	»	39	37	35
36	»	22	»	32	»	34	»	35	»	»	»	40	»	36	»	38	»
37	23	23	30	33	»	33	33	»	37	43	49	39	29	35	40	37	»
38	22	»	29	»	41	»	32	»	36	»	50	»	30	»	»	»	36
39	23	22	30	»	40	34	33	36	37	»	49	38	»	34	39	36	35
40	»	»	»	34	»	35	»	37	»	42	»	37	»	35	»	35	»
41	24	21	29	33	39	34	34	36	»	43	48	38	31	34	38	34	36
42	23	»	30	»	40	»	»	»	38	»	47	»	30	»	39	»	37
43	22	22	31	32	»	35	35	35	»	44	46	39	29	»	38	35	38
44	»	23	»	31	»	34	»	34	»	45	»	»	»	35	»	34	»
45	»	24	32	32	39	35	34	33	39	»	45	38	30	36	37	35	39
46	23	»	31	»	38	»	33	»	40	»	44	»	»	»	36	»	»
47	24	25	32	33	37	»	34	34	39	44	43	37	31	37	»	»	38
48	»	24	»	»	»	36	»	33	»	43	»	36	»	36	»	36	»
49	23	24	31	32	38	35	35	34	38	42	43	35	30	36	35	35	39

47000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	39	34	33	39	38	45	49	52	42	55	65	61	61	64	56	67	60
1	38	35	34	38	39	46	48	51	»	54	64	62	60	65	57	66	61
2	»	34	»	37	»	45	»	50	»	53	»	61	»	64	»	»	»
3	39	35	33	36	»	46	49	49	43	54	63	60	59	»	58	67	»
4	38	»	»	»	38	»	48	»	44	»	64	»	60	»	59	»	62
5	»	36	34	37	39	47	47	50	45	»	63	61	59	63	60	66	63
6	»	37	»	36	»	46	»	»	»	55	»	62	»	62	»	67	»
7	37	36	35	37	38	»	46	»	44	54	62	61	58	61	»	66	64
8	36	»	34	»	37	»	45	»	45	»	63	»	»	»	59	»	65
9	35	»	35	38	36	47	44	49	46	55	»	60	59	62	58	65	64
10	»	37	»	37	»	48	»	50	»	54	»	59	»	63	»	64	»
11	36	36	34	36	37	49	»	49	45	55	64	»	60	62	59	»	65
12	35	»	35	»	»	»	45	»	46	»	63	»	61	»	58	»	64
13	36	»	»	37	38	50	46	50	45	56	64	»	60	63	57	63	63
14	»	35	»	38	»	49	»	51	»	»	»	58	»	62	»	62	»
15	35	34	36	37	39	50	47	»	46	57	65	59	61	63	56	63	»
16	34	»	37	»	38	»	46	»	47	»	66	»	60	»	»	»	62
17	35	33	36	»	39	49	45	50	48	58	67	58	»	62	57	62	63
18	»	»	»	38	»	50	»	49	»	59	»	57	»	63	»	61	»
19	34	32	35	37	40	49	»	48	»	60	66	58	59	62	58	60	62
20	35	»	36	»	39	»	»	»	49	»	67	»	60	»	59	»	63
21	34	33	37	38	»	50	46	47	50	59	66	59	61	»	60	59	62
22	»	32	»	37	»	51	»	48	»	58	»	»	»	61	»	60	»
23	»	33	38	38	40	52	47	47	49	»	67	60	62	62	61	61	63
24	35	»	37	»	39	»	48	»	48	»	66	»	63	»	60	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	32	»	»	»	51	»	48	»	59	»	61	»	61	»	»	»
27	36	»	36	39	38	50	49	47	47	60	»	62	62	62	61	60	64
28	35	»	37	»	37	»	50	»	»	»	67	»	63	»	62	»	65
29	34	31	36	40	38	51	»	46	48	61	66	61	62	63	63	»	»
30	»	30	»	»	»	50	»	47	»	60	»	60	»	»	»	»	»
31	33	29	»	41	39	49	»	48	49	61	67	»	61	62	»	59	64
32	»	»	35	»	»	»	49	»	48	»	66	»	62	»	64	»	63
33	34	28	36	40	40	50	50	»	49	62	67	59	»	61	65	58	»
34	»	29	»	39	»	»	»	49	»	63	»	»	»	60	»	59	
35	33	30	37	»	41	49	51	48	50	64	»	60	»	59	66	58	62
36	32	»	38	»	42	»	50	»	51	»	»	»	63	»	67	»	61
37	31	31	39	38	43	50	49	47	»	63	66	59	62	58	66	59	62
38	»	30	»	37	»	49	»	»	»	62	»	60	»	59	»	»	»
39	32	29	38	38	»	50	»	46	50	63	65	59	61	»	»	60	61
40	31	»	»	»	44	»	50	»	»	»	64	»	62	»	67	»	60
41	»	30	39	39	»	49	49	45	51	»	»	60	63	58	66	61	59
42	»	31	»	»	»	48	»	»	»	64	»	61	»	57	»	60	»
43	32	32	»	38	43	»	48	44	52	63	63	60	64	56	»	59	58
44	33	»	40	»	44	»	49	»	51	»	64	»	»	»	67	»	57
45	»	»	39	37	45	»	50	45	52	62	»	59	65	55	68	58	58
46	»	31	»	38	»	47	»	44	»	63	»	60	»	54	»	59	»
47	32	32	40	39	44	48	»	43	53	64	63	61	66	55	67	»	59
48	33	»	39	»	»	»	51	»	54	»	62	»	65	»	68	»	58
49	34	33	39	38	45	49	52	42	55	65	61	61	64	56	67	60	57

48000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	57	56	56	57	58	56	58	56	60	68	69	73	78	83	84	86	87
1	»	57	55	56	59	57	57	55	61	»	70	74	79	82	85	85	88
2	58	»	56	»	60	»	56	»	62	»	69	»	80	»	86	»	»
3	59	56	57	»	61	»	55	56	63	69	70	73	79	83	»	84	89
4	»	57	»	»	»	56	»	57	»	68	»	74	»	82	»	83	»
5	60	»	58	57	60	55	56	58	64	67	»	75	78	81	87	82	90
6	59	»	57	»	61	»	55	»	»	»	69	»	79	»	88	»	91
7	58	56	58	58	60	54	»	59	65	66	70	74	80	80	87	»	90
8	»	»	»	59	»	55	»	58	»	67	»	»	»	»	»	83	»
9	57	55	»	60	59	56	56	59	64	66	69	»	79	79	88	84	89
10	»	»	59	»	60	»	57	»	63	»	70	»	80	»	87	»	90
11	58	56	58	61	61	55	56	»	64	67	71	75	81	80	86	85	»
12	»	57	»	62	»	»	»	60	»	66	»	76	»	79	»	86	»
13	57	56	57	»	62	56	57	59	»	65	72	75	»	»	85	»	89
14	58	»	58	»	63	»	58	»	65	»	»	»	82	»	»	»	88
15	57	57	57	61	62	55	»	58	»	66	73	»	83	»	84	85	87
16	»	58	»	62	»	56	»	57	»	65	»	76	»	80	»	»	»
17	58	59	56	63	»	57	57	56	64	66	72	»	84	»	85	86	88
18	57	»	»	»	63	»	58	»	65	»	»	»	85	»	84	»	87
19	»	60	55	64	62	56	59	55	66	»	71	75	86	79	85	85	88
20	»	59	»	65	»	55	»	»	»	65	»	74	»	80	»	86	»
21	58	58	56	64	61	»	60	»	67	66	70	75	85	79	»	85	89
22	57	»	55	»	62	»	»	»	66	»	71	»	»	»	84	»	90
23	56	»	56	63	61	»	61	56	65	65	»	76	»	80	83	»	91
24	»	»	»	64	»	56	»	»	»	»	»	75	»	81	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	57	»	»	»	»	»	60	»	66	»	72	»	86	»	82	»	92
27	58	»	»	63	»	57	61	55	65	66	71	»	87	82	81	86	93
28	»	57	»	62	»	56	»	56	»	»	»	76	»	81	»	87	»
29	57	56	57	61	60	55	60	»	64	65	70	75	88	»	82	88	»
30	58	»	56	»	59	»	59	»	65	»	69	»	87	»	»	»	94
31	59	55	57	»	60	54	58	55	66	66	68	76	»	80	83	89	95
32	»	»	»	60	»	53	»	56	»	65	»	77	»	81	»	88	»
33	58	56	56	61	61	52	57	57	»	66	69	78	88	82	84	87	96
34	59	»	55	»	62	»	»	»	67	»	68	»	87	»	»	»	95
35	58	»	56	60	»	51	58	58	66	65	67	77	86	»	83	88	94
36	»	55	»	61	»	52	»	59	»	66	»	»	»	81	»	87	»
37	»	56	55	60	61	53	»	60	»	»	68	76	85	82	82	»	93
38	59	»	56	»	60	»	57	»	67	»	69	»	84	»	83	»	»
39	58	57	57	61	61	»	56	61	66	67	»	77	83	83	»	86	94
40	»	58	»	»	»	52	»	60	»	66	»	78	»	84	»	87	»
41	57	»	56	60	60	53	57	59	67	65	»	77	84	85	82	86	93
42	58	»	57	»	59	»	58	»	»	»	70	»	85	»	83	»	92
43	59	59	56	59	58	54	»	60	68	66	71	76	84	86	84	»	93
44	»	58	»	58	»	55	»	61	»	65	»	77	»	»	»	87	»
45	58	59	»	»	57	56	57	60	67	66	72	»	85	85	85	88	94
46	»	»	57	»	56	»	58	»	68	»	73	»	84	»	84	»	95
47	57	58	56	57	55	57	57	»	69	67	72	76	83	84	85	87	»
48	»	57	»	58	»	»	»	59	»	68	»	77	»	85	»	86	»
49	56	56	57	58	56	58	56	60	68	69	73	78	83	84	86	87	94

49000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	94	94	83	83	80	78	84	76	78	71	78	76	71	78	77	69	67
1	95	»	84	82	81	79	83	77	79	72	»	77	72	77	78	68	68
2	»	95	»	81	»	78	»	76	»	»	»	76	»	78	»	67	»
3	94	»	85	80	82	79	»	77	»	73	77	75	71	77	77	»	67
4	93	»	84	»	»	»	82	»	78	»	78	»	72	»	76	»	66
5	92	94	»	81	81	80	»	76	77	74	79	»	73	78	77	66	67
6	»	93	»	80	»	»	»	75	»	»	»	74	»	77	»	67	»
7	93	94	85	81	»	81	81	»	76	73	80	75	72	78	76	66	»
8	94	»	84	»	82	»	82	»	77	»	81	»	71	»	»	»	66
9	93	95	»	»	81	82	83	74	76	74	82	74	»	77	75	65	65
10	»	»	»	80	»	81	»	75	»	75	»	»	»	78	»	64	
11	»	96	85	79	80	80	82	74	»	76	83	»	72	79	74	63	64
12	94	»	86	»	79	»	»	»	75	»	84	»	71	»	73	»	65
13	93	95	85	80	»	81	»	73	76	77	83	75	70	»	74	64	66
14	»	94	»	79	»	82	»	74	»	76	»	»	»	78	»	63	»
15	»	93	84	80	80	83	81	73	75	»	82	76	69	79	75	64	65
16	92	»	83	»	79	»	80	»	74	»	81	»	70	»	76	»	»
17	93	92	84	81	80	»	79	72	75	77	82	77	71	78	»	63	66
18	»	91	»	»	»	84	»	73	»	78	»	78	»	77	»	64	»
19	94	»	85	80	81	83	80	74	74	77	»	77	70	76	75	65	65
20	95	»	86	»	82	»	79	»	»	»	83	»	71	»	74	»	66
21	94	»	85	79	81	84	»	73	73	76	84	76	70	75	73	»	67
22	»	90	»	80	»	83	»	74	»	75	»	75	»	»	»	66	»
23	93	89	»	79	80	82	78	73	72	74	83	»	71	74	72	65	68
24	»	»	84	»	81	»	79	»	71	»	82	»	70	»	71	»	67
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	88	»	78	»	»	»	74	»	73	»	74	»	»	»	64	»
27	94	87	85	»	80	83	78	75	72	72	81	75	»	75	70	63	66
28	95	»	84	»	79	»	»	»	73	»	»	»	69	»	69	»	67
29	94	88	85	79	78	82	77	74	»	73	82	74	70	76	»	64	66
30	»	89	»	80	»	83	»	75	»	72	»	73	»	»	»	»	»
31	93	88	84	81	»	82	76	74	74	73	81	72	69	»	68	63	67
32	92	»	»	»	77	»	77	»	73	»	80	»	70	»	69	»	66
33	»	87	85	82	78	81	78	75	72	»	79	71	71	77	70	64	65
34	»	86	»	83	»	»	»	»	»	72	»	72	»	78	»	63	»
35	93	85	86	82	79	»	77	76	71	73	78	73	72	77	»	62	66
36	92	»	85	»	78	»	78	»	72	»	77	»	»	»	71	»	65
37	91	»	84	83	79	80	77	75	71	74	»	72	73	76	72	63	64
38	»	84	»	82	»	79	»	76	»	75	»	73	»	75	»	62	»
39	90	83	83	81	80	78	»	77	70	74	76	72	74	74	73	»	65
40	91	»	84	»	»	»	76	»	69	»	75	»	73	»	72	»	64
41	90	82	»	82	79	79	77	»	68	75	74	»	74	75	71	63	65
42	»	81	»	»	»	80	»	78	»	»	»	73	»	76	»	64	»
43	91	80	83	83	80	81	78	»	69	76	73	72	75	77	70	65	»
44	92	»	82	»	79	»	77	»	70	»	74	»	76	»	»	»	»
45	93	-81	83	»	80	82	76	79	71	77	73	71	»	78	71	»	66
46	»	»	»	82	»	83	»	80	»	78	»	70	»	77	»	66	»
47	92	82	82	81	79	84	77	79	»	77	74	71	77	»	»	»	65
48	93	»	»	»	78	»	»	»	70	»	75	»	»	»	70	»	»
49	94	83	83	80	78	84	76	78	71	78	76	71	78	77	69	67	66

50000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	66	62	64	58	49	45	50	50	42	43	37	32	32	23	23	20	21
1	67	63	»	57	50	44	51	49	43	42	36	»	33	22	22	19	20
2	»	»	63	»	49	»	52	»	44	»	35	»	32	»	21	»	21
3	68	64	64	58	48	45	51	»	45	43	34	31	33	23	22	18	»
4	»	65	»	57	»	»	»	50	»	44	»	32	»	24	»	17	»
5	69	66	63	»	49	46	50	51	46	45	33	»	»	23	21	18	20
6	68	»	62	»	50	»	49	»	45	»	»	»	34	»	20	»	21
7	67	65	61	»	51	47	50	50	»	44	32	33	33	22	19	19	22
8	»	66	»	56	»	46	»	49	»	43	»	32	»	23	»	»	»
9	68	67	60	55	»	45	49	50	46	44	33	33	34	»	20	20	23
10	67	»	»	»	50	»	»	»	47	»	34	»	33	»	21	»	22
11	»	68	59	56	49	46	48	51	46	»	33	32	32	24	22	21	21
12	»	69	»	55	»	47	»	»	»	43	»	31	»	25	»	22	»
13	68	68	60	54	50	»	47	50	45	44	34	30	31	26	»	23	22
14	67	»	59	»	49	»	46	»	46	»	35	»	»	»	21	»	23
15	66	»	60	53	48	46	47	49	45	43	»	31	30	25	20	24	24
16	»	69	»	54	»	47	»	48	»	42	»	30	»	26	»	25	»
17	65	68	59	53	»	46	»	47	46	41	36	31	29	27	21	»	25
18	66	»	60	»	»	»	48	»	47	»	»	»	28	»	20	»	24
19	67	67	»	52	49	47	»	46	48	42	35	»	27	28	21	24	23
20	»	66	»	51	»	46	»	45	»	»	»	30	»	29	»	25	»
21	66	65	61	52	48	47	47	»	49	43	36	29	26	30	20	24	»
22	67	»	60	»	47	»	46	»	48	»	35	»	25	»	»	»	22
23	66	66	61	»	46	48	47	46	49	42	34	30	»	»	19	25	21
24	»	»	»	51	»	47	»	47	»	41	»	29	»	29	»	26	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	65	»	60	»	47	»	»	»	»	»	33	»	26	»	20	»	20
27	66	65	59	50	»	48	46	46	48	40	32	28	25	»	21	25	»
28	»	64	»	51	»	47	»	45	»	41	»	»	»	30	»	»	»
29	»	»	58	52	46	48	45	44	»	»	33	29	26	29	»	26	19
30	65	»	57	»	45	»	46	»	47	»	32	»	25	»	20	»	»
31	64	63	58	51	44	»	47	43	»	42	31	28	»	30	»	27	18
32	»	64	»	»	»	47	»	44	»	41	»	»	»	29	»	28	»
33	63	»	57	52	45	48	46	45	48	40	»	29	24	30	19	27	17
34	62	»	56	»	46	»	47	»	»	»	32	»	25	»	20	»	16
35	61	65	57	51	47	47	»	44	»	39	33	28	24	29	21	»	15
36	»	64	»	50	»	48	»	»	»	40	»	29	»	»	»	26	»
37	62	63	»	49	46	49	»	45	47	39	32	»	23	28	20	25	16
38	»	»	56	»	47	»	46	»	46	»	33	»	22	»	19	»	17
39	61	62	57	»	»	50	45	»	45	38	32	30	21	27	20	26	»
40	»	63	»	»	»	»	»	44	»	39	»	31	»	26	»	25	»
41	62	62	»	»	48	51	46	43	44	38	31	30	»	25	21	24	18
42	63	»	56	»	49	»	47	»	43	»	»	»	22	»	20	»	19
43	»	61	57	50	48	50	48	42	»	37	30	31	21	24	19	23	20
44	»	62	»	51	»	49	»	43	»	38	»	32	»	23	»	»	»
45	62	63	58	50	»	50	49	42	44	37	29	31	20	»	20	22	19
46	61	»	»	»	47	»	48	»	43	»	30	»	21	»	21	»	20
47	»	64	59	49	46	49	49	41	42	»	31	32	22	»	20	23	19
48	»	63	»	50	»	50	»	»	»	36	»	31	»	24	»	22	»
49	62	64	58	49	45	50	50	42	43	37	32	32	23	23	20	21	18

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	18	10	16	13	7	2	5	16	13	3	5	12	16	16	18	18	24
1	17	11	17	»	8	3	4	17	12	2	4	13	»	17	19	»	23
2	»	»	»	12	»	4	»	18	»	3	»	12	»	16	»	17	»
3	16	12	16	11	9	3	5	17	»	4	»	13	15	17	20	18	22
4	17	»	17	»	8	»	»	»	13	»	5	»	16	»	19	»	21
5	16	11	»	12	»	2	6	16	14	3	6	14	17	»	18	19	22
6	»	10	»	13	»	3	»	17	»	4	»	»	»	18	»	20	»
7	»	9	18	12	9	2	»	18	15	»	7	13	16	»	17	19	21
8	15	»	17	»	8	»	7	»	14	»	6	»	15	»	16	»	»
9	14	8	16	13	7	»	6	19	13	3	7	14	16	17	»	18	22
10	»	7	»	»	»	»	»	18	»	2	»	15	»	16	»	19	»
11	15	»	15	12	8	1	5	17	12	1	»	14	17	17	17	»	23
12	14	»	14	»	»	»	4	»	»	»	6	»	16	»	»	»	22
13	13	8	13	11	7	2	»	16	13	2	7	13	17	»	18	»	21
14	»	7	»	10	»	3	»	15	»	3	»	14	»	»	»	20	»
15	12	»	»	9	6	2	5	16	12	2	8	»	18	18	17	19	22
16	»	»	12	»	7	»	6	»	11	»	»	»	17	»	16	»	21
17	11	6	11	10	6	1	7	»	12	»	9	15	16	17	15	20	»
18	»	7	»	9	»	»	»	17	»	3	»	16	»	18	»	19	»
19	10	8	12	»	5	2	8	»	13	2	10	17	»	19	»	18	20
20	11	»	13	»	4	»	»	»	14	»	»	»	15	»	14	»	21
21	12	7	12	8	5	»	9	18	»	3	9	18	16	18	13	19	20
22	»	8	»	7	»	1	»	19	»	2	»	17	»	19	»	»	»
23	13	9	11	»	»	0	10	18	15	1	10	16	15	»	12	18	19
24	14	»	»	»	4	»	11	»	14	»	9	»	14	»	13	»	20
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	10	»	8	»	−1	»	»	»	0	»	15	»	20	»	19	»
27	13	9	12	9	3	»	12	17	13	−1	8	14	13	19	»	20	21
28	12	»	11	»	4	»	13	»	»	»	9	»	»	»	14	»	20
29	»	»	12	8	3	0	12	18	14	0	»	15	12	20	15	19	21
30	»	8	»	9	»	»	»	19	»	1	»	14	»	19	»	20	»
31	11	7	11	8	4	−1	»	»	13	0	10	15	13	20	14	»	22
32	10	»	10	»	»	»	11	»	12	»	9	»	14	»	15	»	23
33	9	8	»	7	3	0	12	20	11	1	8	»	15	19	14	»	24
34	»	9	»	6	»	−1	»	19	»	»	»	16	»	18	»	21	»
35	10	10	9	7	2	0	11	»	10	2	9	15	14	17	15	20	»
36	9	»	»	»	3	»	12	»	9	»	10	»	13	»	»	»	25
37	10	11	8	»	2	1	13	20	8	3	9	16	»	18	16	21	26
38	»	»	»	8	»	2	»	19	»	2	»	15	»	19	»	22	»
39	11	12	9	9	3	3	14	18	»	3	10	14	12	18	17	21	25
40	10	»	10	»	2	»	»	»	7	»	11	»	13	»	18	»	24
41	11	13	9	8	»	2	15	17	6	4	10	13	14	»	17	»	23
42	»	14	»	9	»	3	»	16	»	5	»	»	»	17	»	22	»
43	»	15	10	8	1	4	16	15	5	»	11	12	15	18	16	23	22
44	12	»	11	»	2	»	17	»	4	»	10	»	14	»	17	»	»
45	13	14	12	9	3	»	18	14	3	4	11	13	15	19	»	22	23
46	»	15	»	»	»	3	»	13	»	5	»	14	»	20	»	23	»
47	12	»	11	8	2	4	17	14	4	4	»	15	16	19	16	24	22
48	11	»	12	»	1	»	16	»	»	»	12	»	15	»	17	»	21
49	10	16	13	7	2	5	16	13	3	5	12	16	16	18	18	24	22

51000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	22	23	28	28	22	23	31	30	33	30	25	23	25	27	25	18	15
1	21	22	29	27	»	24	»	31	»	31	26	22	26	»	24	19	14
2	20	»	»	»	23	»	30	»	34	»	25	»	27	»	25	»	13
3	»	23	30	»	22	25	»	32	35	»	24	23	26	26	26	18	12
4	»	24	»	28	»	»	»	»	»	30	»	22	»	25	»	17	»
5	»	25	29	27	»	»	29	33	36	29	25	23	27	26	»	16	11
6	19	»	30	»	23	»	30	»	37	»	26	»	»	»	25	»	12
7	20	»	»	26	»	24	29	34	36	30	»	22	26	25	26	17	11
8	»	»	»	27	»	23	»	35	»	29	»	23	»	24	»	16	»
9	»	24	29	28	24	24	»	36	37	28	27	24	27	23	25	»	12
10	19	»	30	»	»	»	30	»	38	»	26	»	28	»	24	»	11
11	20	23	»	29	25	23	31	35	39	27	25	»	27	24	23	17	12
12	»	»	»	28	»	»	»	34	»	»	»	25	»	23	»	16	»
13	21	24	31	29	24	22	»	»	38	28	26	24	26	22	22	17	»
14	20	»	32	»	23	»	32	»	37	»	25	»	25	»	»	»	11
15	21	23	33	»	24	23	33	35	38	29	26	25	»	23	23	16	10
16	»	»	»	30	»	24	»	36	»	30	»	26	»	24	»	17	»
17	22	24	32	31	23	23	34	37	»	29	25	27	26	»	24	16	9
18	23	»	31	»	24	»	»	»	37	»	26	»	27	»	23	»	8
19	24	23	30	30	»	24	33	38	36	30	25	26	28	»	22	15	7
20	»	22	»	29	»	25	»	39	»	29	»	»	»	23	»	16	»
21	»	21	29	28	23	24	34	40	35	»	24	27	29	24	21	17	6
22	23	»	30	»	22	»	33	»	34	»	25	»	28	»	20	»	»
23	22	22	31	29	23	»	34	39	33	28	26	28	»	23	»	18	7
24	»	23	»	»	»	23	»	38	»	29	»	27	»	22	»	17	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	21	»	30	»	22	»	33	»	»	»	27	»	27	»	21	»	8
27	20	24	29	28	23	24	»	39	32	30	26	26	28	23	20	»	7
28	»	23	»	29	»	25	»	38	»	29	»	27	»	»	»	18	»
29	21	24	»	30	22	26	32	39	33	28	»	»	29	22	19	17	6
30	»	»	28	»	23	»	31	»	34	»	25	»	30	»	20	»	7
31	20	25	27	29	24	27	32	»	33	27	24	26	29	23	»	18	»
32	»	26	»	28	»	»	»	38	»	28	»	25	»	24	»	17	»
33	21	27	26	»	23	26	31	37	34	»	25	26	»	23	21	16	8
34	22	»	25	»	22	»	32	»	35	»	»	»	28	»	22	»	9
35	21	26	26	27	23	27	33	36	»	27	24	27	27	24	21	17	8
36	»	27	»	28	»	28	»	37	»	26	»	28	»	23	»	»	»
37	20	28	25	29	»	27	32	36	34	25	23	29	26	»	20	16	7
38	»	»	»	»	24	»	33	»	33	»	22	»	27	»	19	»	8
39	»	29	26	28	23	26	32	35	32	»	21	30	26	22	20	15	7
40	»	28	»	27	»	27	»	»	»	26	»	29	»	23	»	14	»
41	21	29	27	26	22	»	31	36	31	25	20	28	27	22	»	15	8
42	22	»	28	»	23	»	32	»	»	»	21	»	»	»	19	»	»
43	21	»	29	25	24	28	31	35	32	24	»	27	28	23	20	»	7
44	»	28	»	26	»	29	»	34	»	25	»	26	»	24	»	16	»
45	22	27	28	25	23	30	»	33	33	24	»	25	29	»	19	»	8
46	23	»	27	»	»	»	32	»	32	»	»	»	»	»	20	»	7
47	22	28	»	24	24	31	31	34	31	25	22	»	28	25	19	15	8
48	»	27	»	23	»	30	»	33	»	»	»	26	»	26	»	16	»
49	23	28	28	22	23	31	30	33	30	25	23	25	27	25	18	15	8

52000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	8	8	3	9	12	11	8	4	3	3	10	8	9	17	22	13	19
1	9	7	4	10	11	»	»	3	4	2	11	9	8	16	»	14	20
2	»	8	»	»	»	10	»	2	»	3	»	10	»	17	»	15	»
3	8	»	5	11	12	9	7	3	3	4	»	9	7	18	21	16	21
4	7	»	6	»	11	»	6	»	»	»	12	»	8	»	22	»	20
5	6	7	7	10	10	8	»	2	2	5	11	8	9	19	21	»	21
6	»	8	»	11	»	9	»	1	»	6	»	9	»	»	»	15	»
7	7	7	»	12	9	8	7	0	3	7	12	»	8	18	22	16	22
8	»	»	6	»	10	»	6	»	4	»	11	»	9	»	21	»	21
9	6	»	7	11	11	9	7	»	3	»	10	10	8	17	»	15	»
10	»	8	»	12	»	»	»	1	»	6	»	11	»	18	»	14	»
11	5	7	6	»	12	»	8	2	4	7	9	12	»	17	20	15	22
12	6	»	7	»	11	»	7	»	3	»	»	»	7	»	19	»	23
13	5	6	8	13	12	8	6	3	»	6	8	13	8	18	18	16	24
14	»	5	»	12	»	7	»	4	»	5	»	12	»	»	»	»	»
15	6	4	7	11	»	6	7	»	4	6	7	11	7	»	19	15	23
16	7	»	»	»	11	»	8	»	5	»	8	»	6	»	18	»	22
17	»	5	8	10	10	5	9	3	4	»	9	10	7	17	17	16	21
18	»	6	»	9	»	6	»	»	»	7	»	11	»	16	»	17	»
19	6	7	7	10	9	»	10	4	5	8	8	10	8	17	»	18	22
20	7	»	6	»	10	»	9	»	4	»	7	»	»	»	18	»	23
21	6	»	5	9	9	5	8	»	5	7	»	9	9	18	17	19	22
22	»	6	»	»	»	4	»	5	»	8	»	8	»	19	»	18	»
23	7	7	4	10	8	5	»	4	6	7	8	9	10	20	18	»	21
24	6	»	3	»	»	»	7	»	5	»	7	»	11	»	17	»	20
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	6	»	9	»	4	»	5	»	»	»	8	»	21	»	»	»
27	7	5	2	8	9	3	6	»	6	6	8	9	12	22	»	17	»
28	8	»	1	»	8	»	5	»	5	»	9	»	11	»	»	»	21
29	9	4	2	»	9	2	6	6	6	7	8	8	»	21	16	16	22
30	»	»	»	»	»	3	»	7	»	6	»	»	»	20	»	17	»
31	10	5	3	9	8	4	5	8	»	7	»	9	10	21	15	16	23
32	9	»	4	»	9	»	»	»	7	»	7	»	9	»	14	»	24
33	»	4	5	10	»	5	4	7	»	8	6	8	10	»	13	15	23
34	»	3	»	11	»	4	»	»	»	7	»	»	»	22	»	16	»
35	»	4	4	10	8	5	»	6	8	»	7	9	9	23	12	»	22
36	10	»	5	»	7	»	3	»	7	»	6	»	10	»	13	»	»
37	9	5	6	11	»	»	4	5	6	8	5	10	11	24	»	17	21
38	»	6	»	»	»	4	»	6	»	7	»	9	»	23	»	18	»
39	10	»	»	12	6	5	3	5	5	8	»	10	10	22	14	17	22
40	9	»	7	»	5	»	4	»	»	»	»	»	11	»	15	»	23
41	»	5	6	13	6	6	»	4	4	7	4	»	12	21	14	»	22
42	»	6	»	14	»	»	»	3	»	8	»	9	»	»	»	18	»
43	8	7	»	15	7	7	3	4	5	9	»	»	13	20	13	19	21
44	»	»	7	»	»	»	2	»	4	»	5	»	14	»	14	»	22
45	7	6	8	14	8	8	3	»	5	»	6	8	15	21	13	20	»
46	»	5	»	13	»	»	»	3	»	8	»	7	»	22	»	19	»
47	8	4	7	»	9	7	2	4	4	9	7	8	»	21	14	20	21
48	9	»	8	»	10	»	3	»	3	»	»	»	16	»	»	»	20
49	8	3	9	12	11	8	4	3	3	10	8	9	17	22	13	19	21

53000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	21	16	21	22	22	19	16	15	13	17	15	13	16	11	13	9	12
1	20	15	20	21	21	18	»	14	12	16	14	12	15	12	12	»	13
2	19	»	19	»	»	»	17	»	11	»	13	»	14	»	13	»	14
3	20	16	»	22	20	17	16	15	10	17	14	»	15	11	12	8	13
4	»	15	»	23	»	18	»	14	»	»	»	13	»	12	»	9	»
5	19	14	18	»	19	19	17	»	11	18	13	14	14	11	11	10	»
6	»	»	19	»	18	»	16	»	12	»	12	»	13	»	»	»	12
7	20	13	18	»	19	18	17	15	13	19	11	15	»	12	10	9	11
8	»	»	»	24	»	19	»	16	»	18	»	14	»	11	»	10	»
9	19	14	17	23	20	18	16	17	»	17	12	13	12	10	9	»	12
10	18	»	16	»	19	»	»	»	14	»	13	»	13	»	»	»	11
11	17	13	17	22	»	19	17	16	15	16	14	12	14	»	8	11	12
12	»	14	»	23	»	18	»	15	»	15	»	»	»	11	»	12	»
13	»	15	16	22	20	17	16	16	14	»	15	»	13	10	9	11	13
14	18	»	17	»	19	»	15	»	15	»	»	»	14	»	8	»	»
15	17	14	18	21	18	»	14	17	14	»	14	13	15	9	»	»	14
16	»	13	»	»	»	16	»	»	»	14	»	14	»	10	»	10	»
17	16	»	17	22	17	15	13	»	13	15	»	13	14	11	7	11	15
18	15	»	16	»	18	»	»	»	»	»	15	»	13	»	8	»	16
19	16	12	15	23	17	»	»	16	»	14	16	12	12	12	7	»	17
20	»	13	»	24	»	14	»	15	»	15	»	13	»	»	»	10	»
21	15	14	»	»	16	15	14	16	14	14	17	»	13	»	8	11	16
22	»	»	»	»	15	»	13	»	15	»	18	»	12	»	9	»	15
23	16	»	16	25	16	14	14	»	16	13	17	12	11	13	10	12	»
24	»	15	»	26	»	»	»	17	»	12	»	13	»	14	»	13	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	15	»	15	»	15	»	15	»	15	»	»	»	12	»	11	»	16
27	14	16	16	»	16	15	16	16	»	13	16	14	11	13	10	14	15
28	»	15	»	27	»	16	»	17	»	12	»	13	»	12	»	»	»
29	15	14	17	26	»	17	17	16	14	11	15	12	12	»	»	13	14
30	14	»	»	»	17	»	16	»	15	»	14	»	11	»	9	»	15
31	»	15	18	27	18	16	15	17	14	»	13	11	10	11	8	14	16
32	»	16	»	26	»	15	»	»	»	12	»	12	»	10	»	»	»
33	13	15	17	25	19	»	16	18	13	13	12	13	9	9	»	15	15
34	12	»	18	»	20	»	15	»	12	»	11	»	»	»	9	»	16
35	11	»	19	24	19	16	16	17	13	12	»	14	10	8	10	14	17
36	»	16	»	23	»	15	»	18	»	13	»	15	»	9	»	13	»
37	12	17	18	»	18	16	»	17	14	14	12	16	9	10	9	»	16
38	11	»	17	»	»	»	15	»	»	»	13	»	10	»	10	»	15
39	12	18	»	22	19	15	16	16	15	13	12	»	9	9	9	14	16
40	»	17	»	21	»	16	»	15	»	»	»	»	»	10	»	15	»
41	13	18	18	22	18	17	15	»	16	14	13	15	10	»	8	16	»
42	14	»	17	»	17	»	14	»	17	»	12	»	9	»	»	»	15
43	15	17	18	»	18	18	15	14	18	15	13	16	»	11	9	15	16
44	»	»	»	21	»	19	»	13	»	16	»	17	»	12	»	14	»
45	16	18	19	20	19	18	»	14	»	17	12	16	8	11	10	13	17
46	17	»	20	»	18	»	»	»	19	»	11	»	9	»	11	»	16
47	16	19	21	»	»	17	14	13	18	16	12	17	10	»	10	14	15
48	»	20	»	21	»	»	»	12	»	15	»	»	»	12	»	13	»
49	16	21	22	22	19	16	15	13	17	15	13	16	11	13	9	12	14

54000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	14	14	7	10	13	19	21	19	22	23	25	21	31	33	35	32	24
1	13	13	8	11	14	18	»	»	21	22	24	20	30	34	34	33	»
2	»	14	»	10	»	»	»	20	»	23	»	21	»	33	»	32	»
3	14	»	7	»	»	19	20	21	22	22	25	20	»	34	35	31	23
4	15	»	6	»	»	»	21	»	21	»	»	»	31	»	36	»	22
5	16	13	»	9	13	20	22	22	»	21	24	19	32	33	35	32	21
6	»	»	»	8	»	21	»	23	»	20	»	18	»	34	»	»	»
7	»	12	5	9	»	22	21	24	22	21	23	19	33	»	34	33	22
8	15	»	»	»	14	»	20	»	»	»	22	»	32	»	33	»	23
9	»	11	6	10	13	23	19	23	21	»	21	20	31	35	34	32	24
10	»	12	»	11	»	22	»	»	»	22	»	21	»	34	»	31	»
11	16	11	5	12	14	»	18	»	22	21	22	20	32	35	»	30	23
12	17	»	4	»	15	»	19	»	23	»	23	»	»	»	33	»	24
13	18	»	5	11	16	21	20	24	22	20	»	21	31	34	34	31	25
14	»	10	»	10	»	20	»	23	»	19	»	22	»	35	»	30	»
15	17	11	6	9	17	19	»	22	21	20	22	21	32	34	35	»	24
16	18	»	7	»	»	»	19	»	»	»	21	»	33	»	34	»	23
17	17	10	»	8	18	20	18	21	22	21	22	»	32	33	35	31	22
18	»	11	»	9	»	19	»	22	»	»	»	22	»	34	»	32	»
19	16	10	8	8	19	18	19	»	23	22	21	21	33	35	34	31	»
20	17	»	9	»	20	»	18	»	22	»	20	»	32	»	»	»	21
21	16	»	10	»	21	19	19	23	23	21	21	20	»	36	35	30	20
22	»	»	»	9	»	18	»	22	»	22	»	21	»	37	»	29	»
23	»	9	11	10	20	19	20	21	»	23	22	22	31	36	34	28	21
24	15	»	10	»	21	»	»	»	24	»	21	»	30	»	33	»	20
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	10	»	11	»	18	»	20	»	24	»	»	»	35	»	27	»
27	»	9	11	12	20	19	21	19	23	»	22	23	31	36	32	28	19
28	16	»	12	»	19	»	22	»	22	»	21	»	30	»	31	»	»
29	17	8	11	13	20	»	21	20	21	25	22	24	31	35	»	»	18
30	»	9	»	»	»	20	»	19	»	26	»	23	»	34	»	29	»
31	18	»	10	12	21	19	20	20	22	27	»	24	30	35	30	28	19
32	17	»	11	»	22	»	19	»	»	»	21	»	31	»	31	»	20
33	16	8	12	13	21	18	»	21	23	28	20	23	32	36	32	»	19
34	»	9	»	12	»	17	»	22	»	29	»	24	»	»	»	27	»
35	15	8	»	11	20	18	18	23	24	28	19	»	33	37	31	28	18
36	»	»	11	»	21	»	19	»	25	»	20	»	34	»	32	»	17
37	16	7	12	10	22	19	18	»	24	27	»	25	35	36	31	29	»
38	»	6	»	9	»	»	»	22	»	26	»	26	»	35	»	28	»
39	17	5	13	»	»	20	19	21	25	27	21	25	»	36	»	27	18
40	18	»	12	»	21	»	20	»	24	»	»	»	34	»	32	»	»
41	17	4	11	10	20	19	19	20	»	28	20	26	35	37	33	»	19
42	»	5	»	»	»	20	»	19	»	27	»	27	»	36	»	»	»
43	16	6	10	11	»	21	20	20	23	»	21	28	34	»	32	28	20
44	15	»	»	»	19	»	21	»	22	»	22	»	»	»	31	»	21
45	»	7	11	10	20	»	20	21	23	»	21	»	33	35	32	27	22
46	»	6	»	11	»	22	»	»	»	26	»	29	»	34	»	26	»
47	14	7	10	12	21	»	19	22	22	»	22	30	32	35	»	25	21
48	13	»	11	»	20	»	20	»	»	»	21	»	»	»	31	»	20
49	14	7	10	13	19	21	19	22	23	25	21	31	33	35	32	24	21

55000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	21	15	10	8	9	4	8	14	11	6	12	13	7	9	8	5	17
1	20	16	9	9	8	5	9	13	»	5	13	12	6	8	9	6	16
2	19	»	10	»	7	»	»	»	12	»	12	»	7	»	10	»	15
3	18	15	9	10	»	4	10	14	13	6	13	13	8	»	9	7	16
4	»	14	»	11	»	3	»	13	»	7	»	»	»	9	»	8	»
5	»	15	8	10	6	2	11	12	12	»	12	12	9	»	8	7	15
6	17	»	9	»	7	»	10	»	11	»	11	»	8	»	7	»	»
7	18	14	10	11	6	»	11	13	12	8	10	11	9	8	»	8	14
8	»	13	»	»	»	3	»	14	»	9	»	12	»	9	»	9	»
9	17	»	9	10	5	4	10	15	13	8	»	11	8	10	6	10	15
10	16	»	8	»	6	»	9	»	»	»	»	»	7	»	5	»	14
11	15	14	»	9	7	5	»	16	14	9	11	10	6	9	6	»	13
12	»	15	»	10	»	4	»	15	»	10	»	11	»	»	»	11	»
13	14	16	»	9	8	5	8	16	»	11	12	»	5	8	7	10	12
14	»	»	7	»	9	»	9	»	15	»	13	»	6	»	6	»	11
15	15	15	8	8	10	»	8	»	14	12	14	12	7	7	5	11	»
16	»	14	»	9	»	»	»	15	»	11	»	11	»	6	»	12	»
17	16	13	7	»	9	4	9	14	13	12	13	10	»	7	4	13	10
18	»	»	8	»	8	»	8	»	14	»	»	»	8	»	5	»	9
19	15	12	7	10	9	5	9	13	»	11	12	9	9	8	4	14	8
20	»	13	»	9	»	4	»	12	»	10	»	10	»	7	»	»	»
21	14	12	6	»	»	5	8	13	15	11	13	11	8	»	5	13	7
22	15	»	»	»	8	»	9	»	14	»	12	»	9	»	4	»	8
23	»	11	7	10	7	4	10	12	15	»	13	10	10	6	5	12	»
24	»	12	»	9	»	5	»	»	»	12	»	11	»	7	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	16	»	6	»	8	»	11	»	14	»	12	»	»	»	4	»	7
27	17	»	7	8	7	4	10	»	15	11	»	12	»	6	3	13	6
28	»	13	»	7	»	5	»	11	»	10	»	»	»	7	»	12	»
29	18	14	8	8	6	4	»	10	14	9	»	11	11	6	4	»	5
30	17	»	7	»	»	»	11	»	13	»	13	»	10	»	5	»	4
31	16	13	»	7	5	3	12	11	»	8	14	»	11	5	6	13	5
32	»	14	»	8	»	2	»	»	»	»	»	10	»	6	»	14	»
33	17	15	8	7	6	3	»	»	12	9	15	9	12	7	7	15	»
34	16	»	9	»	5	»	13	»	11	»	»	»	11	»	»	»	6
35	17	14	8	»	»	4	14	12	10	8	16	8	»	6	8	16	7
36	»	»	»	»	»	3	»	13	»	7	»	7	»	5	»	15	»
37	16	»	»	»	6	4	15	12	»	8	17	8	12	6	9	14	6
38	17	»	9	»	5	»	»	»	9	»	16	»	11	»	8	»	5
39	»	13	8	8	»	5	14	11	8	9	17	9	12	»	9	15	6
40	»	12	»	9	»	6	»	10	»	10	»	»	»	7	»	14	»
41	»	13	7	8	6	5	13	9	9	»	16	10	11	8	10	15	7
42	16	»	8	»	7	»	12	»	8	»	15	»	12	»	9	»	»
43	15	12	9	7	8	»	13	10	7	11	14	9	13	9	»	16	6
44	»	11	»	»	»	6	»	11	»	12	»	8	»	»	»	15	»
45	16	»	10	6	7	7	14	12	6	13	»	7	12	8	8	16	7
46	15	»	9	»	6	»	13	»	»	»	13	»	11	»	7	»	6
47	16	10	8	7	5	8	»	13	7	12	14	8	10	7	6	»	7
48	»	11	»	8	»	7	»	12	»	13	»	7	»	»	»	17	»
49	15	10	8	9	4	8	14	11	6	12	13	7	9	8	5	17	6

56000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	6	8	7	14	17	26	25	33	32	25	22	19	17	18	4	3	−5
1	»	9	6	13	»	25	26	»	31	»	23	20	18	17	5	2	−4
2	»	10	»	14	»	26	»	»	»	26	»	21	»	»	»	3	»
3	7	11	7	15	18	»	27	32	30	27	24	22	17	16	»	2	−5
4	6	»	6	»	19	»	28	»	31	»	23	»	»	»	4	»	−4
5	5	»	7	14	18	25	27	33	32	26	»	23	18	15	»	1	−3
6	»	12	»	13	»	»	»	34	»	27	»	24	»	16	»	0	»
7	4	13	8	14	17	26	»	35	33	26	24	23	17	17	5	»	−2
8	3	»	7	»	»	»	28	»	32	»	23	»	16	»	»	»	−3
9	2	12	»	15	18	27	29	34	33	25	22	»	17	»	4	−1	−2
10	»	11	»	16	»	26	»	35	»	»	»	22	»	16	»	0	»
11	3	10	6	15	19	25	30	»	32	24	23	»	18	17	5	1	»
12	4	»	5	»	18	»	29	»	31	»	»	»	19	»	»	»	−1
13	»	9	4	»	19	26	30	36	30	»	22	21	»	18	6	2	0
14	»	»	»	14	»	25	»	35	»	23	»	22	»	17	»	1	»
15	3	10	3	15	20	24	31	»	»	22	21	»	20	16	5	0	1
16	4	»	4	»	21	»	»	»	29	»	22	»	19	»	6	»	»
17	5	11	5	16	»	»	32	36	28	21	21	21	18	»	5	−1	0
18	»	10	»	»	»	25	»	37	»	20	»	»	»	15	»	−2	
19	»	9	6	»	20	26	33	36	29	»	20	20	17	16	6	−3	−1
20	4	»	»	»	»	»	32	»	30	»	»	»	18	»	7	»	»
21	5	»	7	17	19	»	33	35	31	19	21	19	17	15	»	−4	0
22	»	8	»	»	»	27	»	36	»	20	»	20	»	16	»	−5	»
23	6	»	6	18	»	28	32	37	30	21	»	19	18	15	8	»	1
24	5	»	7	»	20	»	31	»	»	»	20	»	19	»	9	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	7	»	19	»	29	»	38	»	22	»	18	»	»	»	−6	»
27	6	8	»	20	21	28	32	37	29	21	»	»	20	14	8	−5	2
28	»	»	8	»	22	»	33	»	30	»	»	»	21	»	7	»	1
29	5	9	9	21	23	27	32	»	31	22	21	17	20	13	6	−4	»
30	»	10	»	22	»	»	»	36	»	21	»	18	»	12	»	−3	»
31	6	9	8	»	24	28	31	35	30	20	»	19	»	11	5	−4	0
32	5	»	9	»	25	»	32	»	29	»	»	»	21	»	4	»	1
33	6	8	10	23	26	27	31	34	»	19	20	18	20	10	5	−3	2
34	»	7	»	22	»	28	»	35	»	20	»	19	»	11	»	»	»
35	7	6	11	23	»	27	32	34	30	19	19	18	21	»	6	−4	1
36	8	»	»	»	27	»	33	»	29	»	20	»	22	»	5	»	0
37	»	5	12	22	26	26	32	33	30	»	19	17	21	10	4	−3	−1
38	»	6	»	21	»	25	»	»	»	»	»	18	»	9	»	−2	»
39	9	5	11	20	27	»	31	32	29	20	20	17	20	»	»	−3	0
40	8	»	12	»	28	»	30	»	28	»	21	»	»	»	5	»	1
41	7	»	11	19	27	24	31	31	27	21	»	18	21	8	4	−4	0
42	»	6	»	18	»	23	»	30	»	20	»	19	»	7	»	−5	»
43	6	5	12	19	28	24	»	31	26	19	20	18	20	8	3	»	−1
44	7	»	13	»	»	»	»	»	27	»	21	»	21	»	4	»	−2
45	8	6	»	18	27	»	32	30	28	20	22	»	20	7	3	−6	−3
46	»	7	»	17	»	25	»	31	»	»	»	17	»	6	»	−7	»
47	»	6	14	»	26	24	33	»	27	21	21	18	19	5	2	−6	»
48	7	»	15	»	27	»	34	»	26	»	20	»	18	»	»	»	−4
49	8	7	14	17	26	25	33	32	25	22	19	17	18	4	3	−5	−5

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	-5	1	0	-5	-2	-3	-4	-5	-14	-31	-33	-30	-35	-39	-43	-46	-44
1	-6	»	1	-4	»	-2	-5	-6	-15	-32	»	-29	-36	-38	-42	-45	-45
2	-5	»	0	»	-1	»	-4	»	»	»	-32	»	-35	»	-43	»	-46
3	-4	2	»	-5	-2	-3	»	-7	-16	-33	»	-28	-36	-39	-42	»	-47
4	»	»	»	-6	»	-4	»	»	»	-32	»	-29	»	»	»	-44	»
5	»	1	»	-5	-1	»	-5	-8	-17	-31	-31	»	-37	-38	-41	-45	-48
6	»	»	-1	»	-2	»	-6	»	-18	»	-30	»	-36	»	-40	»	-49
7	-3	2	-2	-4	»	-5	-5	»	»	-30	-29	-28	-35	-37	-41	-46	»
8	»	1	»	-5	»	»	»	-7	»	-29	»	-29	»	-36	»	-45	»
9	-4	2	-3	»	-1	-6	-4	-8	-19	-30	-28	-30	»	-35	-42	-46	-50
10	-3	»	-4	»	0	»	-5	»	-20	»	»	»	-34	»	-43	»	-51
11	-2	1	-5	-4	-1	-5	-4	-7	»	-29	-29	-29	-35	-34	-44	-45	-52
12	»	2	»	-5	»	-4	»	-6	»	-28	»	-30	»	-35	»	»	»
13	-3	1	-4	-6	»	-3	-3	-5	-19	-29	-30	-31	-36	»	-45	-44	-53
14	-2	»	»	»	-2	»	-4	»	-20	»	-29	»	-37	»	-44	»	-52
15	»	0	-3	»	-3	-2	-5	-6	-21	»	»	-32	-36	-34	-45	-43	-51
16	»	-1	»	-7	»	-1	»	»	»	-28	»	-33	»	-35	»	-42	»
17	-1	-2	-4	-8	-2	»	-6	-7	-20	-27	-28	-34	-35	-36	»	-43	-52
18	0	»	-3	»	-3	»	-7	»	-19	»	-27	»	»	»	-44	»	-53
19	1	»	-2	-9	-2	-2	-8	-8	-20	-28	»	-33	-34	-37	-43	-44	-52
20	»	-1	»	-8	»	-1	»	-9	»	-29	»	-32	»	-36	»	»	»
21	0	-2	-3	-7	-1	0	»	-8	-19	-30	-26	-33	-33	-37	-44	»	-53
22	-1	»	-2	»	»	»	-7	»	-20	»	-27	»	-34	»	-43	»	-52
23	-2	-3	»	-6	0	1	-6	-9	-21	-31	-26	»	-33	-38	-42	-45	-53
24	»	-2	»	-5	»	0	»	-8	»	»	»	-34	»	-37	»	-46	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-1	»	-3	»	1	»	-7	»	-22	»	-27	»	-34	»	»	»	-52
27	-2	-1	-2	»	0	-1	-8	-9	-23	-30	-26	»	»	-36	-43	-45	-53
28	»	»	»	-6	»	-2	»	-10	»	-29	»	-35	»	-37	»	-44	»
29	»	-2	-1	-5	-1	-1	-7	-11	»	-28	-27	-36	-35	-38	-44	-43	-54
30	-1	»	-2	»	0	»	»	»	-24	»	-26	»	-36	»	-45	»	-55
31	-2	-3	-3	-4	»	0	-8	-12	-25	-29	-27	-37	-37	»	-44	-42	-56
32	»	-4	»	-5	»	-1	»	-13	»	-30	»	»	»	-37	»	-41	»
33	»	-3	-2	-6	-1	-2	-9	-12	-26	»	-28	-36	-36	-38	-45	-42	»
34	-1	»	-3	»	0	»	-8	»	-27	»	-29	»	-37	»	-46	»	»
35	-2	-4	-2	-5	-1	»	-7	-11	-28	-29	-30	-37	-38	-39	»	-43	-57
36	»	-5	»	»	»	»	»	-12	»	-30	»	-38	»	-38	»	-42	»
37	-1	»	-3	-4	-2	-1	-8	-13	-27	-29	»	-39	-39	-39	-45	-41	-56
38	0	»	-4	»	-3	»	-7	»	-»	»	-29	»	-40	»	-46	»	»
39	1	-6	-5	-5	-2	-2	»	-14	-28	-30	-30	-38	-39	-38	-45	»	-55
40	»	-5	»	-4	»	-3	»	-15	»	-31	»	-39	»	»	»	-42	»
41	2	-4	»	-3	-1	-2	-8	-14	-29	-32	-29	»	-38	»	-44	-43	-56
42	»	»	-6	»	0	»	-7	»	-30	»	-30	»	»	»	-45	»	-57
43	3	-3	-5	-2	-1	-3	-8	»	-31	-31	-31	»	-37	-39	-46	-44	»
44	»	-2	»	-3	»	»	»	-15	»	-30	»	-38	»	-40	»	-43	»
45	4	-1	-6	»	-2	-2	-7	-14	-32	»	-30	-37	»	-41	-45	-44	-58
46	3	»	-5	»	-3	»	»	»	»	»	»	»	-38	»	-46	»	-59
47	2	-2	-4	-2	»	-3	-6	»	»	-31	-29	-36	-39	-42	-47	-45	-60
48	»	-1	»	-1	»	-4	»	-13	»	-32	»	-35	»	-43	»	»	»
49	1	0	-5	-2	-3	-4	-5	-14	-31	-33	-30	-35	-39	-43	-46	-44	-61

57000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	-61	-64	-69	-70	-75	-67	-59	-63	-66	-64	-58	-55	-50	-56	-43	-46	-48
1	-62	-65	»	-71	-74	-68	-60	-64	-67	-63	-57	»	-51	-57	-44	-45	-49
2	»	-66	»	-70	»	-69	»	-65	»	»	»	-54	»	-58	»	-44	»
3	»	-65	-68	-69	-73	-70	-59	»	-66	-62	-58	-55	-50	-57	-45	-43	»
4	-61	»	-67	»	»	»	-58	»	»	»	-59	»	-51	»	»	»	-50
5	-62	-66	-66	»	-72	-71	-57	-66	-65	-61	-58	-54	»	-58	-46	-44	-49
6	»	»	»	-70	»	-70	»	-67	»	-60	»	-53	»	-59	»	-43	»
7	-63	-65	-67	-71	-71	-69	-56	-66	»	-61	-59	-54	-52	-58	-45	-44	-50
8	-62	»	-68	»	-70	»	»	»	-64	»	-58	»	-51	»	-46	»	-49
9	-63	-66	-69	-72	»	-68	-57	-67	-63	-62	-59	-53	-52	»	-45	-45	-50
10	»	-67	»	-73	»	-67	»	-66	»	-63	»	»	»	-57	»	-44	»
11	»	-66	-68	-72	-69	-68	-56	-65	-62	»	-58	»	-53	-56	»	-43	-51
12	-64	»	-69	»	-68	»	-55	»	-61	»	-57	»	-54	»	-46	»	»
13	-65	-67	-70	-73	-69	»	-54	-64	-60	-64	-56	-54	-53	-55	»	-44	-50
14	»	-68	»	»	»	-67	»	-63	»	-63	»	-55	»	-54	»	-45	»
15	-64	»	-71	-72	-68	-66	-55	-64	-59	-62	»	-54	-54	-53	-47	-44	-51
16	-63	»	-72	»	-69	»	-54	»	»	»	-57	»	-55	»	-46	»	-52
17	-64	-69	-71	-73	-68	-65	»	-63	-60	-61	-58	-53	-56	-52	-47	»	-51
18	»	-70	»	-72	»	-64	»	-62	»	-62	»	-52	»	»	»	-43	»
19	-63	-69	»	-73	-67	-63	-55	»	-61	-61	-57	»	-55	-51	-48	-44	-50
20	»	»	-70	»	-68	»	-56	»	-62	»	-56	»	-56	»	-47	»	-49
21	-62	-70	-71	»	-67	-64	-57	»	-61	-62	-55	-51	-57	-50	-46	-43	»
22	»	-71	»	»	»	»	»	-61	»	-61	»	-52	»	-51	»	»	»
23	-63	-70	-72	»	-68	-65	-58	-62	-62	-60	-54	-53	»	-50	»	-44	-50
24	-64	»	-71	»	-67	»	-59	»	-61	»	»	»	-58	»	-45	»	-51
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-69	»	-74	»	-64	»	-61	»	-59	»	»	»	-49	»	»	»
27	-63	-68	-72	-73	»	-63	-60	-62	-60	-60	»	-54	-59	»	-44	-45	-50
28	-64	»	»	»	-66	»	-61	»	-59	»	-55	»	-58	»	-45	»	-51
29	»	-67	-71	-74	-67	-62	-62	-63	»	»	-54	-55	-59	»	-46	-46	-50
30	»	-66	»	-73	»	-61	»	»	»	-61	»	-54	»	-50	»	-45	»
31	-63	-67	-72	-74	-66	»	»	-64	-60	-62	-53	-55	-58	-49	»	-46	-51
32	-64	»	-71	»	-65	»	-63	»	-61	»	-54	»	»	»	-47	»	-52
33	-65	»	-70	-75	»	»	-64	-65	-62	-61	»	-54	-57	-48	-46	-45	-51
34	»	-66	»	»	»	-62	»	-66	»	»	»	-53	»	-47	»	-44	»
35	-64	-65	»	-74	-64	-61	»	-65	-63	-60	-53	-54	-56	-46	-47	»	-50
36	-63	»	-69	»	»	»	-63	»	-64	»	-54	»	-55	»	-46	»	-51
37	»	-66	»	-73	-65	-60	-64	-64	-63	-59	-55	»	-56	-47	-45	-45	-52
38	»	»	»	-72	»	-59	»	-63	»	»	»	-55	»	-46	»	-46	»
39	-64	-65	-70	-73	-66	-58	-63	»	-64	-58	-54	-54	-57	-45	-46	-47	»
40	-63	»	-71	»	-67	»	-62	»	-63	»	-55	»	-56	»	»	»	-53
41	»	-66	-70	»	-68	-59	»	-62	-62	-59	-56	-53	»	-46	-45	-48	-54
42	»	»	»	-72	»	-58	»	-61	»	-58	»	-52	»	-45	»	-47	»
43	-64	-67	-69	-73	-69	-57	-63	-62	»	-59	-57	-51	-57	-44	-44	-48	-55
44	-65	»	-68	»	-68	»	»	»	-61	»	-56	»	-56	»	-43	»	-54
45	-64	-68	-69	-74	»	»	-64	-63	-62	-58	-57	-52	-55	»	-44	-47	-55
46	»	-69	»	-73	»	-58	»	-64	»	-57	»	»	»	-43	»	-48	»
47	»	-70	-70	-74	-67	-59	-65	-65	-63	»	-56	-51	-56	-42	-45	-47	-54
48	-63	»	-69	»	-68	»	-64	»	-64	»	»	»	-57	»	-46	»	»
49	-64	-69	-70	-75	-67	-59	-63	-66	-64	-58	-55	-50	-56	-43	-46	-48	-55

58000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-55	-63	-66	-67	-66	-59	-66	-66	-72	-79	-69	-71	-69	-67	-69	-64	-58
1	-54	-64	-67	»	-65	-58	-67	-67	»	-78	-68	-72	»	-68	-68	-65	-59
2	-53	»	-66	»	-64	»	-66	»	-71	»	»	»	-68	»	-67	»	-60
3	-54	-65	-65	-68	-63	-59	-65	-68	»	-77	-67	-73	-69	-69	-66	-64	-61
4	»	-64	»	-67	»	-58	»	-67	»	-78	»	-74	»	-70	»	»	»
5	-55	-65	-66	-68	»	-59	-64	-68	-72	-79	»	-75	-68	»	-65	»	-62
6	-56	»	»	»	-62	»	-65	»	-71	»	-66	»	-67	»	»	»	-61
7	»	-64	-65	-67	-63	-60	-66	-69	-72	»	-65	»	-66	»	-64	-65	-60
8	»	-65	»	-66	»	-61	»	»	»	-78	»	-74	»	-71	»	-64	»
9	-57	-66	-66	»	-62	»	-67	-68	-71	-79	-66	»	-65	-70	»	-63	-61
10	-58	»	-67	»	-63	»	-68	»	-72	»	»	»	»	»	-65	»	-62
11	-57	»	-66	-65	-64	-62	-69	-67	-73	»	»	-73	-66	-71	-66	-62	-63
12	»	-67	»	-66	»	-63	»	-68	»	-78	»	-72	»	-70	»	-61	»
13	-58	-66	-65	»	-65	-62	»	»	-72	-77	-67	-73	-65	-71	-67	»	-64
14	-59	»	-66	»	»	»	»	»	-73	»	-68	»	-64	»	-68	»	-65
15	-60	-67	»	-65	-66	»	-70	-67	-74	-78	-69	»	-65	-72	-67	-60	-66
16	»	-66	»	-66	»	-61	»	-68	»	»	»	-72	»	-71	»	-59	»
17	-61	-65	-67	»	-67	-62	-69	»	-75	-77	-70	-73	-66	-70	-66	-60	»
18	-60	»	»	»	-66	»	-68	»	-74	»	-71	»	-65	»	»	»	-65
19	-59	»	-66	»	-65	-61	-67	-69	-73	-76	-70	-74	»	-69	-65	-61	»
20	»	»	»	-67	»	-62	»	-70	»	-77	»	-73	»	-68	»	-62	»
21	-58	-64	-67	-66	-64	-63	»	-71	»	-78	-71	-72	-66	-67	-64	-61	»
22	-57	»	-66	»	-65	»	»	»	-74	»	»	»	-67	»	-65	»	-64
23	-56	-65	-67	-67	»	-64	-68	-70	-75	-77	-70	-73	-66	»	-64	-62	-63
24	»	-66	»	-66	»	-65	»	-69	»	-76	»	»	»	»	»	-61	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-57	»	-68	»	-64	»	-67	»	-76	»	-71	»	-67	»	-65	»	»
27	-58	-65	-67	-67	-65	»	-66	-68	-77	-75	-72	-72	-68	-68	»	-60	-62
28	»	-66	»	»	»	-66	»	-69	»	-74	»	»	»	-69	»	-59	»
29	-59	»	-66	-66	»	-65	-67	-68	-78	-73	»	-73	-69	-70	-64	-60	-61
30	-60	»	-65	»	-64	»	-68	»	»	»	-71	»	-70	»	-63	»	-62
31	-61	-67	-64	-65	-65	»	»	-67	-79	-72	-72	-72	-69	-71	-64	»	-63
32	»	-66	»	-66	»	-66	»	-68	»	-71	»	-71	»	»	»	-61	»
33	-60	-65	»	-65	-64	-67	-67	-67	-78	-70	-71	»	-68	-70	-65	-60	-62
34	»	»	-65	»	-63	»	-68	»	-79	»	-70	»	-69	»	-64	»	-63
35	-61	-64	-64	-64	-62	-66	-67	»	-80	-69	-71	-70	-68	-69	-65	-59	»
36	»	-65	»	-65	»	»	»	-68	»	-70	»	-69	»	-68	»	-60	»
37	-62	-64	-65	»	-61	-65	-66	-67	-81	-69	-72	-70	»	-69	-66	-61	-62
38	»	»	-66	»	-60	»	-67	»	-82	»	»	»	-69	»	-65	»	-61
39	-63	-65	-65	-64	-59	»	-66	-68	»	-70	-71	-69	-70	-68	-64	-60	-60
40	»	-64	»	-63	»	-64	»	»	»	-71	»	-70	»	-69	»	»	»
41	-62	-65	-64	-64	»	-63	-65	-67	-81	-70	-70	-71	-71	»	-63	-59	-62
42	-61	»	»	»	-58	»	-66	»	-80	»	-71	»	-70	»	-62	»	-61
43	»	-66	-65	-65	-59	-64	-65	-68	-81	»	-70	-72	»	-68	-63	-58	»
44	»	-67	»	-66	»	-65	»	»	»	-69	»	-71	»	-69	»	-57	»
45	-62	-66	-66	-67	-58	»	-66	-69	-80	-70	-71	-70	-69	-68	»	-56	-63
46	-61	»	-67	»	-57	»	-65	»	-79	»	-70	»	»	»	-64	»	-62
47	-62	»	-68	-66	-58	-66	-66	-70	-80	-69	»	-69	-68	-67	-63	-57	-63
48	»	-65	»	-67	»	-65	»	-71	»	-70	»	-70	»	-68	»	-58	»
49	-63	-66	-67	-66	-59	-66	-66	-72	-79	-69	-71	-69	-67	-69	-64	-58	-62

59000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	-62	-63	-66	-63	-60	-65	-77	-85	-92	-92	-87	-84	-91	-87	-83	- 95
1	-61	-64	»	-62	»	-66	-76	-86	-93	-91	-86	-83	-90	»	-84	- 94
2	»	»	»	-61	»	-67	»	-85	»	-92	»	»	»	-88	»	- 95
3	»	-63	-65	-62	-59	-68	-77	-84	-94	»	-85	-82	-89	-87	-85	- 94
4	-60	»	-66	»	-58	»	-78	»	-93	»	-86	»	-88	»	-86	»
5	-59	-64	-67	-63	-59	»	-79	-83	-92	-91	-85	-83	-89	-88	»	»
6	»	-65	»	»	»	-67	»	-84	»	-92	»	-84	»	-89	»	- 95
7	-60	»	-68	-64	-60	-68	-80	-83	-91	-93	»	-85	-88	-90	-87	- 96
8	-61	»	-67	»	-59	»	-81	»	»	»	-86	»	-87	»	-86	»
9	-60	-64	-66	-63	-58	-69	»	-84	-90	-92	-87	-86	-86	-89	-87	»
10	»	-65	»	-64	»	-68	»	-85	»	-91	»	-85	»	»	»	- 95
11	-61	-66	»	-63	-57	-69	-80	-86	-89	-90	-86	»	-85	-90	-88	»
12	»	»	-67	»	-58	»	-79	»	-88	»	-85	»	-86	»	-89	»
13	-60	-65	-68	-62	-59	-70	-80	»	-89	-91	-84	-86	-87	-91	-90	- 96
14	»	-66	»	-63	»	»	»	-87	»	-92	»	-85	»	-92	»	- 97
15	-61	-65	-67	»	-60	-69	-81	-86	-88	-91	-83	-86	»	-91	-91	- 96
16	-60	»	-66	»	-61	»	-80	»	-89	»	»	»	-86	»	-90	»
17	»	-64	-67	-62	»	-70	-81	-85	»	-90	-84	-85	-87	-90	-89	- 97
18	»	-63	»	-63	»	-71	»	-86	»	-89	»	-86	»	-89	»	»
19	-59	»	-66	-62	»	-72	-80	-87	-90	-90	»	-87	-86	»	-90	- 98
20	-60	»	»	»	»	»	-81	»	-91	»	-83	»	-87	»	-89	»
21	»	-62	-67	-63	-60	-73	-82	-88	-90	»	-84	-88	-88	-88	-88	- 99
22	»	-63	»	-62	»	-74	»	»	»	-89	»	-87	»	-89	»	- 98
23	-59	-62	-66	-61	-59	»	-81	-89	-89	-90	-83	-88	-89	-88	»	- 99
24	-60	»	-65	»	-58	»	-82	»	-88	»	-82	»	»	»	-89	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-61	»	-62	»	-75	»	-90	»	-89	»	-89	»	-87	»	-100
27	-59	-62	-64	-61	-59	»	»	-89	-89	-88	»	-88	-88	-86	-90	»
28	-58	»	-63	»	»	»	-83	»	-90	»	-81	»	-89	»	-91	»
29	-59	-63	»	-60	-58	-76	-84	-90	-91	-87	-82	»	-90	-85	-90	- 99
30	»	-62	»	-61	»	-75	»	-91	»	»	»	-89	»	-84	»	-100
31	-60	-61	-62	-62	-59	-74	»	»	-92	-86	-81	-88	-91	-83	-91	- 99
32	-59	»	-61	»	-60	»	-83	»	-91	»	-82	»	-90	»	»	»
33	-60	-62	-60	»	-61	-73	-82	-92	-92	-87	-83	-89	»	-84	-90	-100
34	»	»	»	-63	»	-74	»	-93	»	-86	»	-90	»	-85	»	- 99
35	»	-63	-61	»	-60	-75	-83	-92	»	-85	-82	-89	-91	-84	-89	- 98
36	-61	»	-62	»	-59	»	»	»	-93	»	-83	»	-90	»	-90	»
37	-62	-64	-63	-62	»	-76	-82	-93	-94	-84	-84	-88	-89	»	-91	»
38	»	-65	»	-61	»	-77	»	-94	»	-83	»	»	»	-83	»	- 99
39	»	-64	-64	-62	-60	-76	»	-93	-93	»	-85	-89	-88	»	-90	- 98
40	-63	»	-65	»	-61	»	-81	»	-92	»	-84	»	»	»	-91	»
41	-62	-65	-64	-61	-62	»	-82	-94	-91	-84	-83	»	-87	-84	»	- 99
42	»	-66	»	»	»	-77	»	-95	»	-85	»	-90	»	-83	»	-100
43	-63	»	-65	»	-63	-78	-83	-94	-92	»	»	-91	-86	-84	-92	-101
44	-62	»	-64	»	-64	»	-84	»	»	»	-84	»	-87	»	-91	»
45	-63	-67	-65	-62	-63	-77	»	»	-93	-86	-83	»	-86	-83	-92	»
46	»	-68	»	-61	»	-76	»	-93	»	-85	»	-92	»	»	»	-100
47	-62	-67	»	-60	-64	»	-85	-92	-92	-86	-84	»	-87	-82	-93	-101
48	»	»	-64	»	»	»	-86	»	-93	»	-83	»	-88	»	-94	»
49	-63	-66	-63	-60	-65	-77	-85	-92	-92	-87	-84	-91	-87	-83	-95	-102

60000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	-102	-106	-106	-107	-107	-106	-108	-104	-104	- 98	-88	-83	-85	-89
1	-101	-107	-107	-106	-108	-105	»	-103	-103	- 99	-89	-82	-86	-90
2	»	-106	»	-107	»	-104	»	-104	»	-100	»	-83	»	»
3	-102	-105	»	-106	»	-105	-109	-103	-104	- 99	-88	»	-87	-91
4	»	»	-108	»	-109	»	-108	»	-103	»	-89	»	-88	»
5	-101	-106	-109	-105	-108	-104	-107	»	-102	- 98	-88	-84	-87	-92
6	»	-105	»	-104	»	»	»	-104	»	- 97	»	-83	»	-93
7	-100	-104	-110	»	»	-105	-106	-103	-103	- 98	-89	-82	»	-94
8	- 99	»	-111	»	-107	»	-105	»	»	»	»	»	-86	»
9	- 98	-105	-110	-103	-108	-106	-104	-104	»	- 97	-88	-83	-87	-95
10	»	-104	»	-102	»	-105	»	-105	»	- 96	»	-82	»	-96
11	- 97	-105	-111	-103	»	»	-103	-104	-102	- 95	-87	-81	-86	»
12	- 98	»	»	»	-109	»	-102	»	-101	»	-88	»	-87	»
13	»	-106	-112	-104	-110	-104	-103	-105	-102	»	-87	-82	-86	-95
14	»	-107	»	-105	»	-105	»	»	»	- 96	»	-83	»	-94
15	- 99	-106	»	-104	-109	»	-102	-106	-101	- 97	-88	-84	-87	-95
16	-100	»	-111	»	-108	»	-101	»	-102	»	-87	»	»	»
17	-101	»	-112	-105	-107	-106	-100	-107	-101	- 98	»	-85	-86	-96
18	»	-105	»	-106	»	-105	»	-108	»	- 97	»	-84	»	-95
19	-102	-104	-111	-105	-108	-106	»	-107	-102	- 96	-88	-83	-85	-94
20	-101	»	-112	»	»	»	- 99	»	-103	»	-87	»	-86	»
21	-102	-105	»	-106	-109	-107	-100	-106	-104	- 97	-88	»	-87	-93
22	»	-104	»	-105	»	-108	»	-107	»	»	»	-82	»	-94
23	-103	-103	-111	-104	-108	-109	- 99	»	-103	- 96	-87	-81	-86	»
24	-104	»	-112	»	-107	»	»	»	-102	»	-88	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	-105	»	-108	»	»	»	»	»	-80	»	-93
27	-103	-104	-113	-106	-106	-109	»	-106	»	»	-87	-79	-87	-94
28	-102	»	-112	»	-107	»	»	»	»	»	-86	»	-88	»
29	-103	-103	-111	-107	»	-110	-100	»	-103	- 97	-85	-80	-87	»
30	»	-104	»	-106	»	-111	»	-105	»	- 96	»	»	»	-93
31	»	-103	-112	-105	-106	»	- 99	-106	-102	»	-86	-79	-88	-92
32	-102	»	»	»	»	»	-100	»	-103	»	-85	»	-89	»
33	-101	-102	-111	»	-105	»	- 99	-107	-102	- 95	-84	-78	-90	-93
34	»	»	»	»	»	-110	»	-106	»	- 94	»	-79	»	-94
35	-100	»	-112	-104	-104	-111	-100	-107	-101	- 93	»	-78	-91	-93
36	»	»	-113	»	-105	»	-101	»	»	»	-85	»	-92	»
37	-101	-101	-112	-105	-104	-112	»	-106	-102	- 92	-84	-79	-91	»
38	»	-102	»	-104	»	-111	»	-107	»	- 93	»	-80	»	»
39	-102	-103	»	-103	-103	-110	-100	-106	-101	- 92	-83	»	-92	-94
40	»	»	-111	»	-102	»	- 99	»	-100	»	-82	»	-91	»
41	-101	-104	-110	-104	-103	-109	-100	»	-101	- 91	-81	-81	-92	-93
42	»	-105	»	-105	»	»	»	-105	»	- 90	»	-82	»	-92
43	-102	-104	-109	»	-104	-110	-101	-106	-100	- 89	-80	-81	»	-91
44	-103	»	-110	»	-105	»	-102	»	- 99	»	»	»	-91	»
45	-104	-103	-109	-106	-104	-109	-101	-105	»	- 90	»	-82	-90	-92
46	»	-104	»	-107	»	-108	»	-106	»	- 89	»	-83	»	-91
47	-105	-105	-108	-106	»	-109	-102	-105	- 98	- 88	-81	-84	-89	»
48	-106	»	»	»	-105	»	-103	»	- 97	»	-82	»	-90	»
49	-106	-106	-107	-107	-106	-108	-104	-104	- 98	- 88	-83	-85	-89	-92

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	-92	-83	-79	-84	-79	-73	-71	-65	-56	-54	-60	-65	-63	-69	-66	-66	-77
1	-93	»	-80	-83	-78	»	-70	-64	-55	-55	»	-64	-62	-70	-66	-67	-78
2	»	-84	»	-84	»	-74	»	»	»	-56	»	-63	»	-69	»	-68	»
3	-92	-85	-79	-83	-79	-73	»	-63	-54	-55	-59	-64	-61	-68	-67	»	-79
4	-93	»	-80	»	»	»	-71	»	-53	»	-58	»	-62	»	-66	»	-80
5	-94	-84	»	-84	-78	-74	-72	-62	-52	-54	-59	»	-63	-67	-67	-69	-81
6	»	-83	»	»	»	-73	»	-61	»	»	»	-65	»	-66	»	-70	»
7	-93	-82	-81	-83	-77	-72	-73	»	-53	-55	-58	-64	-64	-65	-66	»	»
8	-94	»	»	»	-78	»	-72	»	-54	»	-59	»	-65	»	»	»	-82
9	-95	-83	-82	»	-77	-71	-73	-62	-53	-56	-60	-63	»	»	-67	-71	-81
10	»	»	»	-82	»	-70	»	-61	»	-57	»	-62	»	-64	»	-72	»
11	-96	-82	-83	-81	-76	-71	-72	-60	»	-58	-61	»	-66	-65	-66	-71	-82
12	-95	»	-84	»	-75	»	»	»	-54	»	»	»	-67	»	-65	»	-81
13	-94	-81	-83	-80	»	-72	-71	-61	-53	»	-62	-61	-68	»	»	-72	-82
14	»	-82	»	-81	»	-73	»	-62	»	-57	»	»	»	-66	»	-71	»
15	»	-81	-84	-82	-74	-74	-70	»	-52	»	-63	-60	-69	-65	-64	-70	-83
16	-95	»	-83	»	-75	»	»	»	-53	»	-64	»	-70	»	-65	»	»
17	-96	-82	-82	-83	-76	»	-71	-61	-54	-58	-65	-61	-69	-64	»	-71	-82
18	»	-81	»	»	»	-75	»	-60	»	-59	»	-62	»	-65	»	-72	»
19	-97	»	-81	»	-75	-74	-70	-59	-53	-58	»	-63	-68	-64	-66	-73	-81
20	-96	»	»	»	-76	»	-71	»	»	»	-66	»	-67	»	-65	»	-82
21	-97	»	-82	-82	-75	-75	»	-60	-54	»	»	-62	-68	-65	-64	»	-81
22	»	-82	»	-81	»	-74	»	-61	»	-59	»	-63	»	»	»	-74	»
23	-96	-83	»	-80	-76	-75	-72	-60	-55	-60	-67	»	-69	-64	-65	-75	-82
24	»	»	-81	»	-75	»	-73	»	-56	»	-68	»	-68	»	-66	»	-83
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-82	»	-79	»	»	»	-61	»	-59	»	-62	»	-65	»	-76	»
27	-97	-81	-82	»	-74	-76	-74	-62	-55	-60	-67	-63	»	-64	-65	-77	-84
28	-96	»	-81	»	-73	»	-75	»	-56	»	»	»	-67	»	-66	»	-85
29	-95	-82	-82	-80	»	-75	-74	-61	»	-59	-68	-64	-68	-63	-65	-78	»
30	»	-81	»	-79	»	-76	»	-62	»	-60	»	-65	»	-64	»	»	»
31	-94	-82	-81	-80	»	-77	-73	-61	-55	-61	-69	-64	-69	»	-64	-79	-84
32	-93	»	»	»	-72	»	-72	»	-54	»	-68	»	-68	»	-63	»	-83
33	»	-83	-80	»	-73	-76	-71	-60	-53	»	-67	-65	-67	-63	-62	-80	-82
34	»	-84	»	-81	»	-75	»	»	»	-60	»	-64	»	-64	»	-79	»
35	-92	-85	-81	-82	-74	»	-70	-59	-52	-61	-68	-65	-66	»	»	-80	-81
36	-91	»	-82	»	-75	»	-69	»	-51	»	-69	»	»	»	-63	»	-80
37	-90	»	»	-83	-74	-74	-68	-60	-50	-62	»	-66	-65	-65	-64	-81	-81
38	»	-84	»	-82	»	-73	»	-59	»	-61	»	-65	»	-66	»	-80	»
39	-89	-83	-83	-81	-73	-72	»	-60	-51	-60	-70	-64	-66	-65	-65	»	-80
40	-88	»	-84	»	»	»	-67	»	-50	»	»	»	-67	»	-66	»	-81
41	-87	-82	»	-80	-72	-71	-66	-59	-51	-59	-69	»	-68	-64	-65	-79	-80
42	»	-81	»	-79	»	-72	»	-58	»	»	»	»	»	-65	»	-78	»
43	-86	-82	-85	-80	-73	-73	-67	»	-52	-60	-68	-65	-69	-66	-64	-79	»
44	-85	»	-84	»	-72	»	-66	»	-53	»	-67	»	-70	»	»	»	-79
45	-86	-81	-85	»	-73	-72	-65	-57	-52	-59	-68	-64	»	-67	-65	-78	-80
46	»	»	»	-79	»	-71	»	-58	»	-58	»	-65	»	-68	»	-79	»
47	-85	-80	-86	-80	-74	-70	-66	-57	»	-59	-67	-64	-69	-67	-66	-78	-79
48	-84	»	-85	»	-73	»	»	»	-53	»	-66	»	-70	»	-65	»	-80
49	-83	-79	-84	-79	-73	-71	-65	-56	-54	-60	-65	-63	-69	-67	-66	-77	-79

61000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	-79	-79	-75	-68	-61	-68	-63	-53	-53	-53	-66	-64	-67	-68	-70	-71	-63
1	-80	-80	»	-69	»	-69	-62	-52	-54	-54	-65	»	-66	-69	-71	-72	-62
2	»	»	-76	»	-62	»	-61	»	-55	»	-64	»	-67	»	-70	»	-63
3	-79	-81	»	-70	-63	-70	-60	»	-56	-53	-63	-65	-68	-68	-71	-71	»
4	»	»	»	-69	»	»	»	-51	»	-52	»	-66	»	-69	»	-70	»
5	»	-80	»	»	-62	-69	-59	-52	-55	-51	-62	-67	»	-68	-70	-69	-64
6	-78	»	-75	»	»	»	-58	»	-54	»	»	»	-67	»	-69	»	-65
7	-79	-81	-74	-68	-61	-70	-57	-53	»	-52	-63	»	-68	-69	-70	-70	-64
8	»	-80	»	-69	»	-71	»	-54	»	-53	»	-68	»	-68	»	»	»
9	»	-79	-73	-68	»	-70	-56	-55	-55	-52	-62	-69	-69	»	-69	-69	-65
10	-80	»	»	»	-62	»	-57	»	-56	»	-63	»	-68	»	»	»	-64
11	»	-78	-72	-67	-63	-71	-58	-54	-57	»	-64	-70	-69	-67	-70	-68	-63
12	»	-79	»	-68	»	-70	»	»	»	-53	»	-69	»	-66	»	-67	»
13	-81	-78	-73	-67	-62	»	-59	-55	-58	-54	-63	-68	-70	-67	»	-66	-64
14	-82	»	-72	»	-63	»	-58	»	-57	»	-62	»	»	»	-71	»	-65
15	-81	»	-73	-68	-64	-69	-57	-56	-58	-55	»	-69	-69	-68	-70	-67	-64
16	»	-79	»	-67	»	-70	»	-57	»	-56	»	-68	»	-69	»	-68	»
17	»	-78	-72	-66	-65	-69	»	-56	-59	-57	-61	-69	-68	-70	-71	»	-63
18	-80	»	-71	»	»	»	-56	»	-58	»	-62	»	-67	»	-70	»	-64
19	-81	-77	»	-67	-64	-70	-55	-57	-59	-58	-63	»	-66	-69	-71	-67	-65
20	»	-76	»	-66	»	-69	»	»	»	»	»	-68	»	-68	»	-68	»
21	-80	-75	-72	-67	-63	-68	-56	»	-58	-59	-62	-67	-65	-69	-72	-67	»
22	-81	»	-71	»	-64	»	-55	»	-57	»	-63	»	-66	»	»	»	-64
23	-80	-74	-70	»	-65	-67	-54	-56	-56	-60	-62	-66	»	-70	-73	-68	-63
24	»	»	»	-68	»	-66	»	-55	»	-61	»	-67	»	-69	»	-69	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-79	»	-71	»	»	»	»	»	-55	»	-61	»	-67	»	-74	»	-64
27	-80	-73	-70	-67	»	-65	-53	-56	-56	-60	-60	-66	-68	»	-73	-68	-65
28	»	-72	»	»	»	-64	»	-55	»	-61	»	»	»	-68	»	-67	»
29	»	-71	-71	-66	-64	-63	-52	-56	-55	»	-59	-67	-67	-67	-74	-66	-64
30	-79	»	-72	»	-65	»	-53	»	-56	»	-60	»	-68	»	-75	»	»
31	-80	-70	-71	-65	-66	»	-54	-57	-55	-60	-59	-68	-69	-68	»	-67	»
32	»	-71	»	»	»	-64	»	-58	»	-61	»	-69	»	-67	»	-66	»
33	-79	»	-70	-66	-65	-65	-55	-57	-54	-62	»	-70	-70	-68	-74	-65	-63
34	-78	»	-69	»	-66	»	-54	»	»	»	-60	»	-69	»	-75	»	-64
35	-77	-72	-68	-67	-67	-64	»	-56	-55	-63	-61	-71	-68	»	-74	»	-65
36	»	-73	»	-66	»	-63	»	-55	»	-64	»	-70	»	»	»	-64	»
37	-76	-74	»	-65	-68	-64	-53	-56	-54	-65	-62	»	-69	-69	-75	-65	-66
38	»	»	-67	»	-69	»	-54	»	-53	»	-63	»	-70	»	-74	»	»
39	-77	-75	-66	-64	-70	-63	-55	»	-54	-64	-64	»	-69	-68	-73	»	»
40	»	-74	»	-63	»	»	»	-55	»	-65	»	-69	»	-67	»	-64	»
41	-76	-75	-67	»	-69	-64	-54	-54	-55	-66	-65	-68	»	»	-72	-65	-67
42	-77	»	-68	»	-68	»	-53	»	-56	»	»	»	»	»	-71	»	-66
43	-78	-74	-69	-62	-69	-63	-54	»	»	-67	-66	»	-70	-68	-72	-64	-67
44	»	-75	»	-63	»	-64	»	-53	»	-66	»	-67	»	-69	»	»	»
45	-79	-76	-70	-62	»	-63	-53	-54	-55	»	-65	-68	-69	»	-73	-65	-68
46	-80	»	»	»	-70	»	-54	»	»	»	-64	»	-70	»	-72	»	»
47	»	-75	-69	-61	-69	-64	»	»	-54	»	-65	-67	-69	-68	-71	-64	-67
48	»	-74	»	-62	»	-63	»	»	»	-67	»	-68	»	-69	»	»	»
49	-79	-75	-68	-61	-68	-63	-53	-53	-53	-66	-64	-67	-68	-70	-71	-63	-66

62000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	-66	-59	-60	-70	-73	-72	-75	-68	-71	-63	-69	-60	-51	-53	-46	-44	-46
1	-67	-60	-59	»	-72	-73	-74	-69	-70	-64	-70	-61	»	-54	-45	-43	-47
2	»	»	»	-71	»	-72	»	-68	»	-63	»	-62	»	-53	»	-44	»
3	-66	-59	-60	-72	-73	-73	-75	-67	»	-64	-69	-61	»	-52	-46	-45	-48
4	»	»	-59	»	-72	»	»	»	-71	»	-68	»	-50	»	-45	»	-47
5	-67	-60	-58	-71	»	-72	-76	-68	-70	-65	-69	-62	-49	»	-44	-46	-48
6	»	-61	»	-70	»	-71	»	-69	»	-64	»	»	»	-51	»	-47	»
7	»	-60	-59	-71	-73	-70	-75	-70	-69	»	-68	-61	-50	-52	»	-48	-47
8	-68	»	-60	»	-74	»	-74	»	-70	»	-67	»	-49	»	-45		»
9	-67	-61	-61	-70	-73	»	-73	-69	-69	-63	-66	-62	-50	-51	»	-47	-48
10	»	-60	»	»	»	-71	»	-70	»	-64	»	»	»	-52	»	-46	»
11	-68	»	-62	-71	-74	-72	-72	-71	-68	-65	»	-61	-49	-53	-44	-47	-47
12	-67	»	-61	»	-75	»	-71	»	»	»	-65	»	-48	»	-45		-46
13	-68	-59	-62	-72	-74	-71	»	-72	-69	-64	-66	-60	-49	-52	-46	»	-45
14	»	-58	»	-73	»	-72	»	-73	»	-65	»	-61	»	»	»	-46	»
15	-67	-57	»	-74	-73	-71	-70	-74	-68	»	-65	»	»	-51	-45	-47	-46
16	»	»	-61	»	-72	»	-69	»	-69	»	-64	»	-48	»	-44	»	-45
17	-66	-56	-62	-75	-73	-70	-70	»	-68	-64	-63	-62	-49	-50	-45	-48	»
18	»	-57	»	-76	»	»	»	-75	»	-63	»	-61	»	-49	»	-49	»
19	-67	-58	-61	»	-72	-71	-69	-76	-67	-62	-62	-62	»	-48	-44	-48	-44
20	-66	»	-62	»	-71	»	-70	»	-66	»	»	»	-50	»	-45	»	-43
21	-67	-57	-61	-75	-72	-70	-71	-75	»	-63	-61	-61	-49	-47	-44	-47	»
22	»	-58	»	-76	»	-71	»	-76	»	-64	»	»	»	-48	»	»	»
23	-66	-57	-60	»	»	-72	-70	-77	-67	-65	-62	-62	-50	»	»	-46	-44
24	-65	»	»	»	-73	»	-71	»	-66	»	-63	»	-49	»	-45		-43
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-58	»	-75	»	-71	»	»	»	-66	»	»	»	-47	»	-47	»
27	-64	-59	-61	-74	-72	»	-70	-76	-65	-67	»	-61	-50	-46	»	-48	-42
28	-65	»	-60	»	-71	»	-69	»	-64	»	-62	»	»	»	-46	»	»
29	-66	»	-61	-73	-70	-72	-68	-75	»	-66	»	-60	-49	-47	-45	-49	-43
30	»	-58	»	-74	»	-73	»	»	»	-65	»	-59	»	»	»	-50	»
31	-65	-57	-62	-73	-71	-74	»	-74	-63	-66	-63	-58	-50	-46	-46	»	-42
32	-64	»	-63	»	»	»	-67	»	-62	»	-62	»	-51	»	-45	»	-41
33	-63	-58	»	-74	»	-75	-66	-75	-63	-65	-63	»	-52	-47	-46	-51	-42
34	»	-59	»	»	»	-76	»	»	»	»	»	-57	»	-46	»	-52	»
35	-62	-60	»	-75	-72	»	-65	»	-62	-64	-64	-56	-51	-45	-45	-51	»
36	-61	»	-64	»	-73	»	-64	»	-61	»	-63	»	-52	»	»		-43
37	»	-59	-65	»	-72	-77	-65	-76	-60	-65	-62	-55	»	-44	-44	-50	-44
38	»	»	»	-74	»	-76	»	-77	»	-66	»	-54	»	-43	»	-49	»
39	-60	-58	-64	-75	-71	-75	-66	-76	»	-67	-61	-55	-53	-44	-45	-50	-45
40	-59	»	-65	»	-70	»	»	»	-61	»	-60	»	-52	»	-46	»	-46
41	-58	-59	-66	-74	»	-70	-67	-75	-60	-66	-61	-54	-51	»	-45	-40	-45
42	»	-58	»	-75	»	-77	»	-74	»	-65	»	»	»	-43	»	-48	»
43	»	-57	-65	-74	-69	-78	-66	-73	-61	»	-60	-53	-52	-44	-44	-47	-44
44	-59	»	-66	»	-68	»	»	»	-60	»	-61	»	-51	»	-43	»	»
45	-58	-58	-67	-73	-69	»	-67	-74	-61	-66	-60	-52	-52	-45	»	-46	-43
46	»	-59	»	»	»	-77	»	-73	»	-67	»	-51	»	-46	»	-45	»
47	-59	»	-68	-74	-70	-76	»	-72	-62	-68	»	-52	-53	-45	-44	-46	-42
48	-58	»	-69	»	-71	»	-68	»	»	»	-61	»	-52	»	-45	»	-41
49	-59	-60	-70	-73	-72	-75	-68	-71	-63	-69	-60	-51	-53	-46	-44	-46	-41

63000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	-41	-36	-33	-27	-26	-35	-40	-43	-34	-37	-37	-36	-32	-34	-39	-37	-38
1	-42	-37	-34	-28	»	»	»	-42	-33	-36	-36	-35	-31	»	-38	-36	-39
2	-43	»	»	»	-27	»	»	»	-32	»	-35	»	-32	»	-39	»	-38
3	»	-38	-33	-27	-28	-36	-39	-41	-33	»	-34	-34	-31	-35	-40	-37	-39
4	»	-39	»	-28	»	-35	»	»	»	-35	»	-33	»	-36	»	-36	»
5	-42	-38	-32	-29	-29	»	-38	-40	-32	-36	-33	-34	-32	-35	»	»	-40
6	-41	»	-33	»	-30	»	-39	»	-33	»	»	»	»	»	»	»	-41
7	-40	»	-32	-28	-31	-34	-38	-39	-32	-35	»	»	-33	»	-39	-37	-40
8	»	-37	»	-29	»	-33	»	-40	»	-36	»	-33	»	-36	»	-36	»
9	-39	-36	-31	-30	-30	-34	»	-41	-31	-37	-32	»	-34	-35	-40	»	-39
10	-40	»	-30	»	»	»	-39	»	-32	»	»	»	-33	»	-39	»	-40
11	-39	-37	»	-31	-29	-35	-40	-40	-33	»	-33	»	-34	-36	-40	-35	-41
12	»	-38	»	-32	»	-34	»	-39	»	»	»	-34	»	-37	»	-34	»
13	»	-37	-29	-31	-30	-33	-39	»	-34	-36	-34	-33	-35	-36	-39	-35	»
14	-38	»	»	»	-31	»	»	»	-33	»	-33	»	-34	»	»	»	-42
15	-37	-36	-30	»	-30	»	-40	-38	-34	-37	-34	-32	»	-35	-40	-36	-41
16	»	»	»	»	»	-34	»	-37	»	-36	»	-33	»	-34	»	-37	»
17	-36	-35	-29	»	-29	-35	-41	-38	»	-37	-35	-32	-35	-35	-39	-38	-40
18	-37	»	»	»	-30	»	»	»	-33	»	-36	»	-34	»	-40	»	-39
19	-36	»	-30	-32	»	-36	-42	-37	-34	-36	-37	-31	-33	»	-41	-37	-40
20	»	-36	»	-33	»	-35	»	-38	»	-37	»	»	»	-36	»	-36	»
21	»	-35	-29	-34	-31	-36	-43	-37	-35	»	-36	-32	-32	-37	-42	-35	-41
22	-37	»	-30	»	-32	»	-42	»	-36	»	-35	»	-33	»	-43	»	»
23	-38	-36	-31	-35	-33	»	-43	-38	-37	-36	-34	-31	-32	-36	»	-36	-40
24	»	-35	»	»	»	»	»	-37	»	-37	»	-32	»	-35	»	-35	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-39	»	-30	»	-34	»	-42	»	»	»	-35	»	-31	»	»	»	-41
27	-38	-36	-31	-34	-35	-35	»	-36	-38	-36	-34	-33	-30	-36	-42	»	-42
28	»	-37	»	-35	»	-34	»	-37	»	-37	»	-34	»	»	»	-36	»
29	-37	-36	»	-34	-36	-35	-43	-38	-39	-38	-33	»	-31	-35	-41	-37	-43
30	»	»	-30	»	-37	»	-44	»	-38	»	-34	»	-30	»	-42	»	-44
31	-38	-37	-29	-35	-38	-36	-45	»	-39	-39	-35	-35	-31	-36	-41	-38	»
32	»	-36	»	-36	»	»	»	-37	»	-40	»	-34	»	-35	»	-37	»
33	-39	-35	-28	»	-39	-37	-44	-36	-40	-39	-34	»	»	-34	-40	-38	-45
34	-40	»	-29	»	-38	»	-43	»	-39	»	»	»	-30	»	-39	»	-46
35	-39	-36	-28	-35	-39	-38	-44	-35	»	-38	-33	-35	-31	-35	-40	-37	-47
36	»	-35	»	-34	»	-37	»	-34	»	-39	»	-34	»	-36	»	»	»
37	-38	-34	-27	-33	»	-38	»	-35	-38	-38	-34	-33	-32	»	-41	-38	-46
38	-37	»	»	»	-38	»	-45	»	-37	»	-35	»	-33	»	-40	»	-45
39	»	-33	-28	-32	-39	-39	-44	-36	-36	»	-34	-32	-34	-37	-41	-37	-46
40	»	-32	»	-31	»	-40	»	»	»	-37	»	-33	»	-36	»	-36	»
41	-36	-33	-27	-30	-38	»	»	-35	-37	-36	-35	»	-33	-37	»	-35	-47
42	-37	»	-28	»	-39	»	-45	»	-38	»	-36	»	»	»	-40	»	-46
43	-38	»	-29	-29	-38	-39	-44	-34	-37	-35	»	-32	-32	-36	-41	-36	-47
44	»	-32	»	-28	»	-40	»	-33	»	-36	»	-33	»	-37	»	-37	»
45	-37	-33	-28	-27	-37	-41	»	-32	-38	-35	-35	-32	-31	-38	-40	»	-48
46	-38	»	»	»	»	»	-45	»	-37	»	-34	»	-32	»	-39	»	-49
47	-37	-32	»	-28	-36	-40	-44	-33	-36	-36	-35	»	-33	-39	-38	-38	-50
48	»	-33	»	-27	»	-41	»	-34	»	»	»	-31	»	-38	»	-37	»
49	-36	-33	-27	-26	-35	-40	-43	-34	-37	-37	-36	-32	-34	-39	-37	-38	-50

64000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	-50	-47	-55	-62	-65	-74	-77	-82	-82	-74	-67	-65	-48	-50	-51	-48	-48
1	-49	-48	»	-61	-64	»	-76	-83	-81	-75	»	-66	-49	-51	»	-49	-49
2	»	»	»	»	»	-73	»	-84	»	-76	»	-65	»	-52	»	-48	»
3	»	»	-54	-62	-65	-74	-77	-83	-80	-75	»	-64	-50	-51	-52	-49	-50
4	-50	»	»	»	-66	»	-78	»	»	»	-66	»	-49	»	-53	»	-51
5	-49	-47	-55	-61	-67	-75	»	-82	-79	-74	-67	-63	-50	-50	-54	»	-52
6	»	-48	»	-62	»	-76	»	-83	»	-73	»	-62	»	»	»	-48	»
7	-48	-49	»	-63	-66	-75	-79	-84	-78	-74	-66	»	-51	-51	-53	-47	-51
8	»	»	-56	»	-67	»	-78	»	-79	»	-65	»	»	»	»	»	-52
9	-49	-48	-57	-64	-68	-76	-77	»	-78	»	-66	-63	-50	-52	-52	-46	»
10	»	-49	»	-63	»	»	»	-85	»	-73	»	-62	»	-53	»	-45	»
11	-48	-50	-58	»	-69	-75	-78	-84	-77	-74	»	-61	»	-52	-51	-44	-51
12	-49	»	-59	»	-70	»	-79	»	-76	»	»	»	-51	»	-50	»	-50
13	-48	-49	-58	»	-69	-76	-80	-85	»	-75	-67	-60	-52	-51	-51	-43	-49
14	»	-50	»	-64	»	-75	»	-84	»	-74	»	-59	»	-52	»	»	»
15	-47	-51	-57	-63	»	-74	-81	-85	-77	-73	-68	-58	-53	»	-50	-44	-48
16	-48	»	»	»	-68	»	-82	»	-76	»	-69	»	-52	»	-51	»	-47
17	»	-52	-58	-64	»	-73	-83	-86	-75	»	-70	-57	-53	-53	-50	-45	-46
18	»	-51	»	-63	»	-74	»	»	»	-72	»	-56	»	-54	»	-44	»
19	-47	-50	-59	-64	-67	»	»	-85	-74	-73	-69	-55	-54	-53	»	-45	-45
20	-48	»	-60	»	-66	»	-82	»	-75	»	-68	»	»	»	-51	»	-44
21	-47	»	-61	-63	-67	-73	-81	-84	-76	-72	»	-54	-55	-52	-52	-44	-45
22	»	-51	»	-64	»	-72	»	-85	»	-71	»	-55	»	-53	»	-45	»
23	-46	-52	-60	-65	-68	-73	»	-84	-75	-70	-67	-56	-54	-54	-51	»	-46
24	-45	»	-59	»	»	»	-82	»	-76	»	-66	»	-55	»	-52	»	-47
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-53	»	-66	»	-72	»	-83	»	»	»	-55	»	-55	»	-44	»
27	-46	-54	-58	-67	-69	-71	-81	»	-77	-69	-65	-54	-54	-56	-53	-45	»
28	-47	»	-59	»	-68	»	»	»	-78	»	-64	»	-53	»	»	»	-46
29	-46	-55	-60	»	-69	-72	-82	-84	-77	-70	-63	-53	»	-55	-54	-46	-47
30	»	»	»	-68	»	-71	»	-83	»	-69	»	»	»	-54	»	-45	
31	-47	-56	-59	-67	-70	-70	-81	-82	»	-68	-64	-52	-52	-55	-55	-44	-48
32	-48	»	-60	»	-69	»	»	»	-76	»	»	»	-51	»	-54	»	-47
33	-49	-55	-59	-68	»	-71	-80	-83	-75	-69	-65	-51	-52	»	-55	-45	-48
34	»	-54	»	-69	»	-72	»	-84	»	-70	»	»	»	-54	»	-46	»
35	»	-53	-60	-68	-68	-73	-81	-85	-76	»	-66	-52	-51	-55	-54	-47	-49
36	-48	»	-61	»	-69	»	-82	»	-75	»	-65	»	-52	»	-53	»	»
37	-49	-52	-60	-69	-68	»	-81	-84	-74	-71	-64	-51	-53	-56	»	»	»
38	»	-53	»	»	»	-74	»	-85	»	-70	»	-50	»	-55	»	-48	»
39	-50	»	-61	-68	-69	-75	-80	-84	-73	-69	»	-49	-54	»	-52	-47	»
40	-51	»	-62	»	-70	»	-81	»	»	»	-65	»	»	»	-51	»	-48
41	-50	-52	-63	-67	-71	-76	»	-83	-72	-68	-66	»	-53	-54	-50	»	-47
42	»	-53	»	-66	»	-77	»	-84	»	-67	»	-50	»	»	»	-48	»
43	-49	-52	»	-67	-72	-78	-80	-83	-73	»	-65	»	-52	-53	-51	»	-46
44	»	»	-62	»	-73	»	-79	»	»	»	-66	»	-51	»	-50	»	-47
45	-48	-53	-61	-66	-74	»	-80	»	-72	-66	-67	-49	-52	-54	-49	-49	»
46	»	»	»	-65	»	»	»	-82	»	-67	»	-50	»	-53	»	-48	»
47	-47	-54	-62	»	-73	»	»	-81	-73	-68	-66	-49	»	-52	-48	-49	-46
48	-46	»	-61	»	»	»	-81	»	-74	»	»	»	-51	»	-49	»	-47
49	-47	-55	-62	-65	-74	-77	-82	-82	-74	-67	-65	-48	-50	-51	-48	-48	-48

65000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	−48	−44	−37	−25	−20	−21	−20	−11	−7	3	4	13	18	20	15	6	1
1	−47	−45	−36	−24	−21	−20	»	−10	−8	4	3	12	17	21	14	»	2
2	−48	»	−35	»	»	»	−19	»	−7	»	4	»	16	»	13	»	1
3	−49	−46	»	−25	−22	−21	−18	−11	−6	3	5	»	15	20	14	7	0
4	»	−45	»	−26	»	−20	»	−10	»	»	»	11	»	19	»	6	»
5	−50	−46	−34	−25	−21	−21	−17	»	−7	4	4	10	16	18	13	5	»
6	−49	»	−33	»	−20	»	−16	»	−6	»	5	»	17	»	»	»	1
7	−50	−45	−32	»	»	−22	−15	»	−5	3	6	11	»	19	12	4	2
8	»	»	»	»	»	−23	»	−9	»	4	»	12	»	20	»	5	»
9	−49	−44	−31	−24	−21	−24	−16	−8	»	5	7	11	16	19	11	6	3
10	−50	»	−32	»	−22	»	»	»	−6	»	6	»	15	»	12	»	2
11	−49	−43	−31	−25	»	−25	−15	−7	−7	6	7	10	14	»	11	7	3
12	»	−44	»	−26	»	−24	»	−6	»	7	»	»	»	20	»	6	»
13	»	−43	−32	−25	−23	−25	−14	−7	−8	»	8	11	13	19	10	7	2
14	−48	»	−31	»	»	»	−13	»	−9	»	9	»	14	»	9	»	»
15	−49	−42	−32	−26	−22	»	»	−6	−8	8	10	12	15	»	»	8	3
16	»	−41	»	»	»	−24	»	−5	»	9	»	11	»	20	»	7	»
17	−48	»	−31	−27	−21	−25	−14	−4	−9	10	»	12	16	»	10	6	4
18	−49	»	−32	»	−20	»	−13	»	»	»	9	»	17	»	9	»	5
19	−50	−40	−33	−26	»	−24	»	−3	−8	9	8	11	18	21	8	»	»
20	»	−41	»	−25	»	−23	»	−4	»	10	»	12	»	»	»	»	»
21	−49	−40	»	−24	−21	−22	−12	−5	−7	9	7	»	17	20	»	5	4
22	»	»	−32	»	−22	»	−13	»	−6	»	8	»	16	»	9	»	5
23	−48	−39	−31	−23	−23	−21	−12	»	−7	10	9	13	»	19	8	4	»
24	»	−38	»	−24	»	»	»	−6	»	9	»	»	»	20	»	5	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−47	»	−30	»	−24	»	−11	»	−6	»	»	»	17	»	9	»	6
27	−46	−39	−31	−25	−25	−20	»	−5	»	8	8	»	16	21	8	6	7
28	»	−40	»	−24	»	−21	»	»	»	9	»	12	»	20	»	»	»
29	−45	−39	−30	−25	»	−22	»	−4	−5	8	7	13	15	»	7	5	6
30	−44	»	»	»	−24	»	−12	»	−4	»	8	»	16	»	6	»	7
31	»	−38	−29	−24	»	−21	−11	−5	−3	»	9	14	15	21	5	6	6
32	»	−37	»	»	»	−20	»	»	»	9	»	15	»	20	»	7	»
33	−45	−38	»	−25	−25	»	−10	−6	−2	10	10	16	14	21	»	6	7
34	−46	»	−30	»	−26	»	−11	»	−1	»	11	»	»	»	4	»	»
35	»	»	−29	−24	−25	−21	»	−5	0	9	»	15	15	20	3	7	6
36	»	−39	»	−25	»	−22	»	−6	»	10	»	14	»	19	»	6	»
37	−47	−38	−28	−24	−24	−21	»	−7	1	9	10	15	16	18	4	»	7
38	−46	»	»	»	»	»	−10	»	0	»	11	»	15	»	5	»	8
39	−47	−39	»	−23	−23	−20	−9	−6	1	8	12	»	16	17	6	5	7
40	»	−40	»	−22	»	−21	»	−7	»	»	»	16	»	18	»	4	»
41	−46	−39	−27	−23	−24	−20	−8	»	0	7	13	17	17	17	5	3	»
42	−47	»	−26	»	−23	»	−7	»	1	»	12	»	16	»	»	»	8
43	−46	»	−27	»	−22	−21	−8	−8	2	6	13	18	»	16	6	2	9
44	»	»	»	−22	»	−22	»	−9	»	5	»	19	»	17	»	1	»
45	−45	−38	−26	−21	−23	−21	−9	−8	»	6	12	20	17	16	7	2	10
46	−44	»	−27	»	−22	»	»	»	3	»	11	»	18	»	8	»	11
47	»	−37	−26	−20	»	−20	−10	−7	4	5	12	19	19	»	7	3	12
48	»	−36	»	−19	»	−19	»	−8	»	4	»	»	»	»	»	2	»
49	−44	−37	−25	−20	−21	−20	−11	−7	3	4	13	18	20	15	6	1	13

66000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	13	11	6	9	4	4	10	13	8	2	−7	−3	−5	1	7	8	4
1	14	12	5	10	5	5	9	»	7	1	−6	−2	−6	0	6	9	»
2	»	11	»	9	»	»	»	14	»	»	»	−1	»	−1	»	8	»
3	15	10	4	»	4	6	10	»	6	»	−5	0	»	0	7	»	5
4	16	»	3	»	3	»	9	»	5	»	»	»	−7	»	»	»	6
5	15	9	2	8	4	7	8	15	»	0	−4	1	−6	»	6	7	5
6	»	10	»	9	»	6	»	16	»	1	»	0	»	−1	»	»	»
7	14	9	1	8	»	7	7	15	4	0	−5	»	−5	»	5	8	4
8	13	»	»	»	3	»	8	»	5	»	»	»	−4	»	4	»	5
9	»	8	2	9	4	8	»	14	4	»	−4	−1	−5	0	5	9	6
10	»	7	»	10	»	7	»	»	»	−1	»	−2	»	»	»	8	»
11	14	8	3	11	»	»	9	»	3	0	−5	−1	−4	1	»	7	7
12	15	»	2	»	3	»	»	»	4	»	−6	»	»	»	6	»	8
13	14	»	3	10	4	»	8	15	5	−1	»	−2	»	0	5	8	»
14	»	»	»	11	»	8	»	14	»	0	»	−1	»	1	»	7	»
15	15	9	2	»	5	9	»	13	4	1	−7	0	−5	2	4	»	7
16	16	»	»	»	»	»	9	»	5	»	−6	»	−4	»	5	»	»
17	15	»	»	10	6	10	10	12	6	0	−5	»	−5	3	4	8	6
18	»	8	»	9	»	11	»	13	»	»	»	1	»	2	»	7	»
19	14	9	3	8	5	10	11	»	7	−1	−6	0	−4	3	5	8	»
20	15	»	4	»	4	»	12	»	6	»	−7	»	−3	»	»	»	5
21	16	10	3	»	3	9	11	14	7	−2	−6	1	»	2	6	7	4
22	»	»	»	7	»	»	»	13	»	−3	»	2	»	1	»	6	»
23	17	9	4	6	4	10	12	14	»	−4	−7	1	−2	0	7	7	5
24	16	»	5	»	3	»	»	»	6	»	−6	»	−3	»	8	»	6
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	8	»	7	»	11	»	15	»	−5	»	»	»	1	»	8	»
27	»	7	4	6	4	12	13	14	5	»	−7	0	−4	0	9	7	7
28	15	»	3	»	5	»	14	»	6	»	−6	»	−3	»	8	»	»
29	16	8	4	5	4	»	13	13	7	−6	−5	1	−4	−1	»	6	»
30	»	9	»	»	»	11	»	12	»	−7	»	2	»	0	»	5	»
31	17	»	3	6	5	12	12	11	6	−8	»	1	−5	1	7	6	8
32	16	»	4	»	4	»	»	»	»	»	−6	»	−4	»	8	»	9
33	15	10	5	5	5	»	»	10	7	−7	−5	2	−3	2	7	»	8
34	»	9	»	6	»	13	»	9	»	−8	»	3	»	»	»	5	»
35	14	8	»	5	4	14	11	10	8	−7	−6	»	−2	3	8	4	9
36	»	»	6	»	3	»	12	»	9	»	−5	»	−1	»	9	»	8
37	13	7	7	4	2	13	11	»	8	−6	−4	2	0	2	8	3	»
38	»	8	»	5	»	»	»	9	»	−5	»	1	»	3	»	4	»
39	12	9	8	»	3	12	12	10	7	−6	−5	0	»	4	7	5	7
40	11	»	9	»	2	»	13	»	6	»	»	»	1	»	6	»	8
41	12	»	8	6	3	11	14	11	»	»	−4	−1	2	3	7	4	7
42	»	8	»	7	»	12	»	10	»	−7	»	−2	»	4	»	»	»
43	11	7	7	8	»	11	13	11	7	−6	−3	−3	3	»	6	5	8
44	12	»	»	»	4	»	14	»	6	»	−4	»	2	»	7	»	7
45	»	6	8	7	5	12	13	10	5	»	−3	−4	3	»	6	4	8
46	»	5	»	6	»	11	»	»	»	−7	»	−3	»	5	»	5	»
47	11	6	9	5	4	»	14	9	4	−8	−2	−4	2	6	»	4	9
48	10	»	8	»	5	»	»	»	3	»	−3	»	»	»	7	»	10
49	11	6	9	4	4	10	13	8	2	−7	−3	−5	1	7	8	4	9

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	9	17	20	30	32	34	36	35	36	28	25	30	39	33	38	43	34
1	»	18	21	31	33	33	37	34	»	29	24	29	38	32	37	42	35
2	10	»	20	»	34	»	»	»	35	»	25	»	37	»	36	»	34
3	9	19	21	30	»	34	36	33	36	28	»	28	36	»	37	41	33
4	»	20	»	29	»	33	»	32	»	27	»	»	»	33	»	42	»
5	»	19	22	30	33	32	37	33	35	»	26	29	35	»	36	41	34
6	10	»	21	»	34	»	38	»	34	»	27	»	36	»	37	»	»
7	9	18	20	31	33	»	39	32	33	26	28	28	37	34	»	42	35
8	»	17	»	»	»	33	»	33	»	25	»	29	»	33	»	43	»
9	8	»	19	32	»	32	38	34	32	26	»	30	38	»	36	42	36
10	9	»	20	»	34	»	39	»	»	»	27	»	39	»	35	»	35
11	10	16	21	31	35	31	»	35	33	25	28	29	38	34	36	»	36
12	»	15	»	30	»	32	»	34	»	24	»	30	»	»	»	41	»
13	11	16	»	29	36	31	38	33	34	23	29	»	37	33	37	40	»
14	»	»	22	»	35	»	37	»	33	»	28	»	36	»	36	»	37
15	10	17	23	28	34	30	36	»	32	24	27	29	35	32	37	39	»
16	»	18	»	27	»	»	»	32	»	23	»	30	»	33	»	38	»
17	11	19	24	»	33	29	»	31	33	24	26	31	»	34	38	37	38
18	10	»	23	»	34	»	35	»	32	»	»	»	36	»	39	»	39
19	11	18	24	28	35	30	36	32	»	23	25	30	37	35	40	38	38
20	»	19	»	»	»	29	»	»	»	22	»	31	»	36	»	»	»
21	12	20	23	27	»	30	37	33	33	21	24	»	36	»	39	37	39
22	11	»	»	»	36	»	38	»	32	»	25	»	35	»	38	»	40
23	»	19	24	28	37	29	37	34	31	»	26	32	34	37	39	38	39
24	»	20	»	27	»	30	»	»	»	22	»	33	»	38	»	37	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	12	»	25	»	36	»	36	»	32	»	25	»	»	»	40	»	38
27	13	»	26	28	37	29	37	35	33	23	»	32	35	39	41	36	37
28	»	21	»	27	»	28	»	34	»	24	»	31	»	38	»	37	»
29	14	20	27	28	38	29	»	35	32	25	24	32	36	39	42	»	36
30	15	»	28	»	»	»	36	»	31	»	25	»	35	»	43	»	35
31	16	»	»	29	39	30	35	36	30	26	26	»	36	38	44	38	34
32	»	21	»	28	»	31	»	35	»	»	»	33	»	39	»	39	»
33	17	20	29	27	40	30	36	»	29	27	27	32	35	38	43	38	»
34	16	»	28	»	39	»	35	»	30	»	28	»	34	»	»	»	»
35	15	21	27	»	40	31	36	36	29	28	29	33	»	»	44	»	33
36	»	»	»	28	»	30	»	37	»	»	»	34	»	37	»	37	»
37	14	»	28	29	39	31	37	38	»	27	30	35	35	»	45	38	32
38	15	»	29	»	38	»	»	»	30	»	31	»	»	»	44	»	33
39	»	22	28	30	»	32	»	37	29	28	30	»	34	»	45	37	32
40	»	21	»	31	»	33	»	38	»	27	»	»	»	36	»	36	»
41	»	20	29	30	37	34	38	37	28	»	31	36	35	35	44	35	31
42	16	»	28	»	36	»	37	»	»	»	32	»	36	»	43	»	»
43	15	21	27	29	35	»	36	»	27	26	31	37	37	36	»	36	30
44	»	20	»	»	»	33	»	38	»	27	»	38	»	37	»	35	»
45	16	»	28	30	34	»	35	37	28	26	»	39	36	38	42	34	29
46	17	»	29	»	»	»	36	»	»	»	30	»	35	»	43	»	30
47	16	21	30	»	33	34	»	38	29	25	31	38	34	37	42	»	29
48	»	20	»	31	»	35	»	37	»	26	»	39	»	»	»	35	»
49	17	20	30	32	34	36	35	36	28	25	30	39	33	38	43	34	28

67000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	28	27	28	36	36	33	35	37	33	33	35	25	27	27	25	29	29
1	»	28	29	37	35	32	34	36	34	»	36	26	28	26	24	30	28
2	»	29	»	36	»	33	»	»	»	32	»	27	»	27	»	31	»
3	27	28	30	35	34	»	35	35	35	33	35	28	29	28	»	32	29
4	26	»	29	»	35	»	36	»	36	»	34	»	»	»	25	»	28
5	25	»	30	36	»	34	37	36	35	34	»	27	28	27	24	31	27
6	»	29	»	37	»	35	»	35	»	35	»	26	»	28	»	30	»
7	24	30	29	38	34	36	»	34	36	36	35	»	27	27	25	»	26
8	25	»	30	»	»	»	38	»	37	»	34	»	26	»	26	»	27
9	24	31	»	39	35	35	39	33	38	35	33	»	25	26	25	29	26
10	»	30	»	40	»	34	»	34	»	»	»	27	»	25	»	28	»
11	25	29	29	41	34	33	38	»	39	34	32	26	26	24	26	27	»
12	24	»	28	»	35	»	»	»	40	»	31	»	27	»	»	»	25
13	25	30	29	»	36	32	37	35	39	33	32	27	»	23	27	28	24
14	»	»	»	40	»	31	»	36	»	32	»	28	»	24	»	29	»
15	24	29	30	39	37	30	36	37	»	31	31	29	28	25	28	28	25
16	23	»	31	»	38	»	»	»	38	»	32	»	27	»	27	»	24
17	24	28	32	40	»	29	37	36	37	32	31	30	26	»	28	29	»
18	»	27	»	39	»	30	»	35	»	31	»	»	»	26	»	»	»
19	»	28	33	38	37	29	36	34	36	»	30	31	25	25	»	30	»
20	25	»	34	»	38	»	»	»	35	»	29	»	26	»	29	»	»
21	26	27	33	37	39	»	35	35	34	30	30	30	»	26	»	31	23
22	»	28	»	»	»	30	»	34	»	31	»	»	»	27	»	30	»
23	25	»	32	36	40	31	34	35	35	32	»	29	27	28	28	29	24
24	26	»	33	»	41	»	35	»	»	»	29	»	28	»	27	»	25
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	27	»	37	»	32	»	»	»	33	»	28	»	»	»	30	»
27	25	28	»	38	40	33	»	36	34	32	28	»	27	29	26	29	24
28	»	»	32	»	41	»	34	»	33	»	29	»	28	»	27	»	25
29	26	29	31	37	»	32	35	»	32	31	28	27	27	30	26	30	»
30	»	28	»	»	»	»	»	35	»	32	»	28	»	29	»	31	»
31	25	29	»	»	40	31	34	36	33	»	27	27	»	28	27	30	24
32	24	»	30	»	39	»	35	»	32	»	»	»	28	»	26	»	23
33	»	28	29	36	»	30	36	37	»	31	26	28	29	29	27	29	22
34	»	»	»	37	»	31	»	36	»	30	»	29	»	28	»	»	»
35	25	29	30	36	»	32	37	»	33	31	27	28	28	»	28	30	21
36	26	»	»	»	38	»	36	»	34	»	26	»	27	»	29	»	22
37	»	30	31	37	37	33	35	»	35	»	25	27	26	29	30	29	23
38	»	29	»	38	»	34	»	»	»	30	»	28	»	28	»	28	»
39	27	28	32	37	36	»	34	35	34	31	24	27	25	»	»	29	22
40	28	»	31	»	35	»	35	»	35	»	25	»	»	»	31	»	21
41	29	»	32	36	36	35	36	36	34	32	»	26	26	27	30	28	20
42	»	29	»	35	»	36	»	35	»	33	»	25	»	26	»	29	»
43	28	28	»	36	35	37	»	34	35	34	24	26	27	25	31	»	21
44	29	»	33	»	»	»	37	»	34	»	25	»	28	»	32	»	20
45	30	29	»	35	34	36	36	35	33	35	26	»	27	24	31	28	21
46	»	28	»	»	»	37	»	34	»	»	»	27	»	23	»	29	»
47	29	29	34	36	33	36	37	»	»	34	25	26	28	24	30	30	»
48	28	»	35	»	34	»	36	»	34	»	26	»	27	»	»	»	20
49	27	28	36	36	33	35	37	33	33	35	25	27	27	25	29	29	21

68000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	21	17	21	17	16	21	28	27	29	26	32	40	41	43	40	40	45
1	20	»	20	18	15	22	27	28	30	27	»	39	42	44	39	»	44
2	21	»	19	»	»	»	26	»	»	»	33	»	41	»	»	»	45
3	20	16	20	19	16	21	»	27	31	28	34	40	»	»	40	»	46
4	»	17	»	18	»	20	»	28	»	29	»	41	»	»	»	39	»
5	19	16	»	19	17	21	25	27	30	30	33	»	42	45	39	40	47
6	»	»	19	»	16	»	24	»	29	»	»	»	43	»	40	»	48
7	18	17	18	18	17	20	»	»	28	»	34	42	44	44	39	41	»
8	»	18	»	17	»	»	»	26	»	31	»	41	»	43	»	42	»
9	17	17	19	»	18	19	23	»	27	30	35	42	»	44	40	43	47
10	16	»	18	»	19	»	»	»	28	»	»	»	43	»	39	»	48
11	15	18	19	16	20	»	22	25	»	29	34	43	42	45	38	42	47
12	»	19	»	17	»	20	»	24	»	30	»	44	»	46	»	»	»
13	16	20	20	»	»	21	21	25	27	29	33	45	»	»	39	41	48
14	15	»	»	»	19	»	22	»	26	»	34	»	41	»	40	»	»
15	»	»	»	18	18	22	23	26	25	»	33	»	40	47	39	42	49
16	»	19	»	17	»	23	»	»	»	30	»	46	»	46	»	43	»
17	16	18	21	16	19	»	22	27	26	31	34	45	41	47	»	42	50
18	17	»	20	»	18	»	21	»	25	»	35	»	»	»	40	»	49
19	16	»	21	15	19	24	22	26	24	32	»	46	40	46	41	43	48
20	»	19	»	16	»	25	»	27	»	31	»	45	»	47	»	42	»
21	17	20	20	15	20	24	»	26	25	30	36	44	41	46	40	»	49
22	18	»	21	»	»	»	23	»	26	»	37	»	42	»	41	»	48
23	19	19	»	16	19	25	»	27	27	31	38	»	43	45	42	43	49
24	»	20	»	15	»	24	»	26	»	»	»	43	»	46	»	44	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	18	»	20	»	20	»	22	»	28	»	37	»	44	»	»	»	50
27	17	21	19	»	21	25	23	27	27	30	36	44	»	45	41	45	51
28	»	»	»	14	»	26	»	28	»	29	»	43	»	46	»	44	»
29	16	22	20	13	22	25	24	29	»	28	35	42	45	»	40	43	50
30	17	»	19	»	21	»	»	»	26	»	34	»	46	»	39	»	49
31	18	»	18	14	»	26	25	30	»	27	35	41	47	»	38	42	50
32	»	23	»	13	»	27	»	29	»	28	»	»	»	45	»	41	»
33	»	22	17	14	22	28	24	30	27	»	36	42	48	44	39	42	49
34	17	»	18	»	21	»	25	»	26	»	37	»	49	»	40	»	»
35	18	23	19	15	20	»	26	29	25	27	36	43	50	45	»	43	50
36	»	24	»	»	»	27	»	28	»	28	»	42	»	»	»	42	»
37	17	»	20	14	21	26	27	29	24	29	»	43	49	44	41	43	49
38	16	»	»	»	22	»	28	»	»	»	35	»	48	»	40	»	50
39	17	25	19	13	23	25	»	30	23	30	36	42	47	43	39	»	49
40	»	24	»	14	»	26	»	31	»	29	»	43	»	»	»	»	»
41	18	23	»	13	22	27	27	30	»	30	35	»	48	42	40	44	50
42	»	»	20	»	21	»	28	»	22	»	36	»	47	»	39	»	49
43	17	24	19	12	20	28	29	»	23	31	37	44	46	»	38	43	»
44	»	23	»	13	»	»	»	29	»	32	»	43	»	41	»	44	»
45	16	22	18	»	19	29	28	28	24	33	38	44	»	42	39	45	50
46	17	»	17	»	20	»	27	»	25	»	»	»	45	»	40	»	51
47	16	23	18	14	21	30	26	29	»	34	39	43	44	41	39	44	52
48	»	22	»	15	»	29	»	30	»	33	»	42	»	40	»	»	»
49	17	21	17	16	21	28	27	29	26	32	40	41	43	40	40	45	52

69000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	52	47	44	49	51	51	53	58	63	65	66	66	67	69	69	78	78
1	»	46	»	50	52	52	»	57	64	66	65	»	66	70	70	77	79
2	»	47	»	49	»	51	»	58	»	»	»	65	»	71	»	78	»
3	53	48	45	50	51	50	54	»	65	67	66	64	67	70	71	77	»
4	54	»	46	»	50	»	53	»	66	»	65	»	66	»	»	»	»
5	55	49	47	»	49	51	52	57	65	68	66	65	»	69	72	78	78
6	»	»	»	51	»	50	»	56	»	67	»	66	»	68	»	79	»
7	56	50	48	52	50	49	53	57	»	68	67	67	65	69	71	78	77
8	55	»	47	»	51	»	»	»	66	»	66	»	64	»	72	»	78
9	54	49	48	51	»	48	54	58	67	67	67	68	63	»	73	79	»
10	»	48	»	52	»	49	»	59	»	66	»	»	»	70	»	80	»
11	»	47	49	53	52	50	53	58	66	»	66	69	64	71	74	79	79
12	53	»	50	»	53	»	»	»	65	»	65	»	65	»	73	»	»
13	52	46	51	52	52	»	52	59	66	65	64	70	64	70	»	80	78
14	»	47	»	»	»	51	»	58	»	64	»	71	»	69	»	81	»
15	51	»	50	53	51	52	51	59	65	63	»	70	63	68	74	82	79
16	52	»	51	»	50	»	52	»	»	»	65	»	62	»	75	»	78
17	51	48	50	54	51	51	»	60	64	64	64	71	61	67	76	»	77
18	»	49	»	53	»	50	»	59	»	63	»	70	»	»	»	81	»
19	50	50	»	52	52	51	53	58	63	62	»	»	62	68	75	80	78
20	»	»	»	»	53	»	»	»	62	»	63	»	63	»	76	»	77
21	51	51	49	51	52	»	52	»	»	»	64	69	64	67	75	81	»
22	»	52	»	50	»	»	»	59	»	63	»	70	»	68	»	80	»
23	50	53	50	»	53	52	51	60	61	64	63	71	»	69	76	79	76
24	51	»	49	»	54	»	52	»	62	»	»	»	63	»	77	»	75
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	52	»	49	»	53	»	61	»	65	»	72	»	68	»	»	»
27	52	51	48	50	»	52	53	62	63	64	64	73	»	»	78	78	76
28	51	»	»	»	55	»	54	»	64	»	65	»	64	»	79	»	77
29	»	50	49	51	54	51	55	61	65	»	64	74	63	69	78	79	76
30	»	49	»	50	»	52	»	»	»	65	»	73	»	70	»	80	»
31	52	48	48	51	53	»	56	60	66	66	65	72	64	69	»	79	75
32	51	»	»	»	54	»	55	»	65	»	66	»	»	»	77	»	»
33	50	»	»	52	55	53	56	61	64	67	»	71	65	»	76	»	76
34	»	49	»	51	»	52	»	60	»	66	»	72	»	70	»	78	»
35	51	48	49	52	54	51	»	61	63	67	65	71	66	»	77	»	75
36	50	»	48	»	»	»	55	»	64	»	66	»	»	»	78	»	76
37	49	47	»	53	53	50	56	60	65	68	67	»	67	69	77	79	77
38	»	48	»	52	»	51	»	61	»	»	»	70	»	68	»	80	»
39	50	47	47	51	54	52	57	»	66	»	68	69	68	67	76	79	»
40	49	»	48	»	»	»	56	»	»	»	67	»	»	»	»	»	76
41	48	48	47	»	53	53	57	»	»	67	66	70	»	66	75	78	75
42	»	»	»	52	»	54	»	62	»	66	»	69	»	65	»	79	»
43	49	47	46	53	54	»	56	61	»	65	65	70	67	66	76	78	74
44	»	»	47	»	»	»	»	»	65	»	64	»	66	»	77	»	75
45	48	46	48	»	»	55	57	60	64	66	65	69	67	»	78	79	76
46	»	45	»	52	»	54	»	61	»	67	»	»	»	67	»	78	»
47	»	»	49	51	53	53	56	62	65	»	64	68	68	68	79	77	75
48	»	»	48	»	52	»	57	»	66	»	65	»	69	»	78	»	»
49	47	44	49	51	51	53	58	63	65	66	66	67	69	69	78	78	74

70000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	74	88	88	90	87	84	83	76	77	77	74	77	72	64	61	54	59
1	75	89	87	»	88	83	82	77	76	76	73	76	»	63	60	55	»
2	76	»	86	»	87	»	81	»	75	»	»	»	73	»	59	»	58
3	77	90	87	89	88	84	»	76	»	77	72	75	74	»	58	56	59
4	»	89	»	88	»	85	»	75	»	78	»	76	»	62	»	»	»
5	78	88	88	89	»	84	80	74	76	77	73	77	73	»	57	57	60
6	77	»	»	»	89	»	81	»	77	»	74	»	74	»	56	»	61
7	»	87	89	90	90	85	82	73	78	»	73	76	75	61	55	56	62
8	»	86	»	89	»	84	»	»	»	78	»	75	»	62	»	57	»
9	76	85	90	90	89	»	81	72	77	77	72	»	76	63	»	58	61
10	75	»	89	»	88	»	80	»	76	»	71	»	»	»	54	»	62
11	76	»	90	89	87	83	81	73	75	78	»	74	75	64	55	59	61
12	»	86	»	88	»	82	»	72	»	79	»	73	»	65	»	»	»
13	77	87	91	87	86	81	»	73	76	80	72	74	76	64	54	»	60
14	78	»	92	»	»	»	80	»	75	»	73	»	75	»	55	»	59
15	79	88	»	88	85	80	81	72	76	79	74	»	74	65	56	60	»
16	»	87	»	89	»	81	»	71	»	»	»	73	»	66	»	»	»
17	80	88	93	88	84	80	»	»	77	78	75	72	73	65	»	61	»
18	81	»	94	»	83	»	80	»	78	»	74	»	74	»	»	»	60
19	82	89	95	»	82	81	»	72	79	77	73	73	»	66	55	60	61
20	»	»	»	87	»	80	»	71	»	76	»	»	»	67	»	59	»
21	83	90	94	86	83	79	79	72	»	77	»	74	73	68	54	58	60
22	82	»	93	»	82	»	»	»	80	»	72	»	72	»	55	»	59
23	83	89	92	»	»	80	78	73	»	78	71	75	71	»	54	59	58
24	»	88	»	85	»	81	»	»	»	77	»	»	»	67	»	58	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	84	»	91	»	81	»	79	»	81	»	72	»	70	»	55	»	»
27	85	89	92	84	»	»	78	72	82	76	73	76	71	66	»	59	57
28	»	88	»	»	»	80	»	73	»	77	»	75	»	67	»	58	»
29	86	»	»	85	80	79	77	74	81	76	»	74	72	66	54	59	58
30	87	»	91	»	81	»	76	»	»	»	74	»	71	»	55	»	59
31	»	89	92	86	82	80	»	73	80	77	75	73	70	65	54	»	60
32	»	88	»	87	»	81	»	74	»	76	»	72	»	»	»	66	»
33	88	89	»	88	83	80	75	75	81	77	76	»	69	64	53	61	61
34	»	»	91	»	84	»	76	»	80	»	»	»	68	»	54	»	62
35	89	88	90	89	83	79	77	»	79	78	75	71	»	63	53	62	»
36	»	87	»	90	»	»	»	74	»	77	»	70	»	62	»	61	»
37	88	88	91	»	82	80	78	75	78	76	76	71	»	63	52	60	63
38	87	»	92	»	83	»	79	»	»	»	»	»	69	»	53	»	64
39	86	87	91	91	82	79	78	76	»	75	75	70	68	62	52	59	65
40	»	86	»	90	»	80	»	77	»	76	»	71	»	61	»	»	»
41	87	87	90	89	»	81	79	78	77	75	74	72	67	»	51	60	66
42	88	»	»	»	83	»	78	»	76	»	73	»	66	»	52	»	67
43	»	86	91	88	84	82	77	79	77	»	74	73	65	62	53	61	66
44	»	87	»	89	»	83	»	»	»	74	»	72	»	61	»	60	»
45	87	86	90	88	85	»	76	78	76	75	75	71	66	60	»	59	65
46	88	»	89	»	84	»	77	»	75	»	76	»	»	»	54	»	64
47	89	»	90	87	83	»	76	77	76	74	»	72	65	61	55	58	63
48	»	87	»	88	»	82	»	78	»	73	»	73	»	62	»	59	»
49	88	88	90	87	84	83	76	77	77	74	77	72	64	61	54	59	64

71000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	64	57	58	52	48	41	48	48	59	61	55	60	57	48	44	48	49
1	63	56	57	51	»	42	49	49	60	62	56	59	56	»	45	49	48
2	»	57	»	52	»	»	»	50	»	63	»	»	»	47	»	48	»
3	»	58	58	51	49	43	48	51	59	»	55	»	55	46	46	47	47
4	62	»	59	»	50	»	49	»	58	»	»	»	54	»	47	»	»
5	63	59	58	50	49	»	48	50	59	»	54	60	53	45	»	48	48
6	»	60	»	»	»	42	»	51	»	62	»	»	»	44	»	49	»
7	»	»	57	49	48	41	47	»	60	61	»	59	52	45	48	50	49
8	62	»	56	»	49	»	»	»	»	»	53	»	51	»	49	»	48
9	61	61	55	48	50	»	»	50	61	62	54	60	52	46	48	»	49
10	»	62	»	49	»	42	»	51	»	63	»	61	»	»	»	51	»
11	62	61	»	»	51	43	48	52	60	»	53	»	53	45	49	50	48
12	»	»	»	»	52	»	47	»	61	»	52	»	52	»	50	»	47
13	63	»	56	50	51	44	46	»	60	64	53	60	53	46	51	51	»
14	»	62	»	51	»	»	»	51	»	65	»	61	»	47	»		»
15	62	63	55	»	50	43	47	52	61	64	54	60	»	46	50	52	46
16	61	»	54	»	51	»	46	»	60	»	»	»	54	»	51	»	47
17	62	64	53	52	50	44	45	51	»	65	53	61	53	47	52		46
18	»	63	»	51	»	45	»	50	»	64	»	60	»	48	»		»
19	63	64	54	52	»	44	46	49	59	63	54	59	52	»	51	51	45
20	64	»	»	»	49	»	47	»	58	»	55	»	53	»	50		46
21	»	65	55	51	48	43	48	50	57	»	56	58	52	47	51	50	45
22	»	»	»	50	»	44	»	»	»	62	»	59	»	46	»	49	»
23	63	64	»	51	47	»	49	51	56	61	55	58	53	45	»	50	46
24	64	»	54	»	»	»	48	»	55	»	56	»	»	»	52	»	45
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	63	»	50	»	45	»	52	»	60	»	57	»	44	»	51	»
27	65	64	53	51	46	44	»	53	56	61	55	58	52	»	51	»	46
28	66	»	52	»	»	»	49	»	55	»	54	»	51	»	50	»	45
29	65	63	»	50	47	43	48	52	56	60	53	»	50	43	51	50	44
30	»	62	»	51	»	44	»	53	»	»	»	59	»	42	»	51	»
31	64	61	51	52	46	45	49	»	57	61	54	60	49	43	50	52	»
32	63	»	52	»	47	»	48	»	58	»	55	»	50	»	»	»	45
33	62	60	53	»	46	44	49	54	57	60	56	61	»	44	51	51	46
34	»	»	»	53	»	45	»	53	»	59	»	60	»	43	»	50	»
35	61	61	54	54	45	46	48	54	»	58	57	59	51	44	52	49	45
36	60	»	53	»	44	»	»	»	58	»	»	»	50	»	53	»	46
37	61	60	52	53	»	47	47	55	59	59	58	58	51	»	54	48	45
38	»	59	»	52	»	48	»	54	»	60	»	»	»	43	»	49	»
39	»	58	51	51	43	47	48	55	60	»	59	59	52	42	53	48	46
40	60	»	50	»	42	»	47	»	59	»	58	»	53	»	52		»
41	61	57	51	52	43	»	48	54	58	59	57	60	52	43	»	49	45
42	»	58	»	»	»	»	»	55	»	58	»	59	»	44	»	50	»
43	60	»	52	»	44	48	49	56	57	57	»	60	51	45	51	49	44
44	59	»	53	»	43	»	48	»	»	»	58	»	52	»	»	»	45
45	»	57	52	51	42	47	»	57	58	56	57	59	51	44	50	»	44
46	»	58	»	50	»	48	»	58	»	57	»	58	»	»	»	50	»
47	58	59	»	49	43	49	49	59	59	56	58	»	50	45	49	49	»
48	»	»	51	»	42	»	48	»	60	»	59	»	49	»	48	»	43
49	57	58	52	48	41	48	48	59	61	55	60	57	48	44	48	49	43

72000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	43	49	43	33	22	21	19	18	17	24	27	37	36	33	22	19	23
1	44	50	44	34	23	»	20	17	16	25	28	38	37	34	»	18	24
2	43	»	45	»	22	»	21	»	17	»	29	»	»	»	23	»	25
3	44	»	46	33	23	20	20	18	16	26	»	»	38	33	24	17	26
4	»	49	»	34	»	19	»	19	»	25	»	37	»	32	»	18	»
5	45	50	45	35	24	18	»	18	17	26	30	36	37	31	23	»	27
6	46	»	44	»	»	»	21	»	18	»	29	»	38	»	22	»	28
7	47	49	»	34	»	19	22	19	19	27	28	»	37	32	21	19	27
8	»	50	»	35	»	20	»	18	»	»	»	37	»	33	»	20	»
9	46	51	43	34	23	21	23	»	20	26	29	38	36	32	20	21	»
10	45	»	44	»	24	»	22	»	21	»	30	»	37	»	»	»	28
11	44	50	45	»	23	20	»	19	22	27	29	37	»	31	21	»	29
12	»	»	»	33	»	21	»	18	»	28	»	36	»	30	»	20	»
13	43	49	44	32	22	22	23	17	»	27	28	35	38	29	22	19	28
14	42	»	43	»	21	»	»	»	21	»	27	»	37	»	21	»	29
15	43	48	42	31	»	23	24	18	22	26	28	34	36	»	20	18	28
16	»	47	»	30	»	24	»	17	»	25	»	»	»	30	»	19	»
17	»	48	41	31	22	23	23	18	21	»	29	35	35	29	19	20	29
18	42	»	»	»	21	»	24	»	22	»	28	»	34	»	20	»	»
19	43	»	42	30	20	»	23	17	23	24	27	34	35	30	»	21	28
20	»	47	»	»	»	24	»	18	»	25	»	33	»	29	»	22	»
21	44	»	43	31	21	23	24	19	22	24	»	34	34	30	19	21	29
22	43	»	42	»	22	»	23	»	»	»	28	»	35	»	18	»	30
23	44	48	41	30	21	22	»	20	23	23	29	35	34	31	19	»	31
24	»	49	»	29	»	21	»	21	»	24	»	34	»	»	»	22	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	40	»	20	»	22	»	22	»	30	»	33	»	20	»	32
27	45	48	39	30	19	22	21	»	23	25	31	33	32	32	21	23	»
28	»	47	»	29	»	»	»	20	»	26	»	34	»	31	»	24	»
29	46	48	38	»	18	21	20	21	24	27	32	35	»	30	20	25	31
30	47	»	39	»	19	»	21	»	23	»	»	»	33	»	19	»	»
31	46	47	40	30	20	22	22	22	»	28	33	34	34	29	20	»	30
32	»	46	»	29	»	21	»	21	»	29	»	33	»	28	»	»	»
33	45	47	39	»	»	20	21	20	22	30	34	34	35	»	19	24	29
34	46	»	»	»	21	»	20	»	21	»	35	»	»	»	20	»	30
35	»	46	38	28	22	»	21	19	22	»	36	»	34	27	21	23	31
36	»	»	»	27	»	19	»	»	»	29	»	35	»	26	»	24	»
37	45	45	39	26	21	»	20	20	23	»	37	36	33	25	»	23	30
38	46	»	38	»	20	»	19	»	»	»	38	»	»	»	22	»	29
39	47	»	37	25	21	18	20	»	24	30	»	35	»	24	21	24	30
40	»	44	»	»	»	19	»	19	»	31	»	36	»	23	»	25	»
41	48	45	36	24	22	»	»	20	25	30	37	35	34	22	20	»	31
42	47	»	37	»	»	»	21	»	24	»	38	»	33	»	19	»	30
43	48	44	»	»	21	20	22	19	25	29	37	»	32	23	20	24	29
44	»	43	»	25	»	21	»	20	»	»	»	36	»	22	»	»	»
45	49	»	36	24	22	20	21	»	26	28	36	35	33	21	21	»	»
46	»	»	35	»	21	»	20	»	25	»	35	»	34	»	»	»	30
47	50	44	34	»	22	19	19	19	24	29	36	34	»	22	20	23	29
48	»	»	»	23	»	18	»	18	»	28	»	35	»	23	»	24	»
49	49	43	33	22	21	19	18	17	24	27	37	36	33	22	19	23	30

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	30	34	32	35	34	29	44	39	42	41	39	42	41	38	36	39	37
1	31	33	33	34	33	30	»	40	43	»	38	43	40	37	35	»	38
2	»	34	»	33	»	31	»	41	»	42	»	42	»	»	»	38	»
3	30	33	»	34	32	32	43	42	44	41	39	»	39	36	36	39	37
4	»	»	32	»	33	»	44	»	43	»	40	»	38	»	35	»	36
5	31	32	33	33	32	33	43	»	42	40	41	41	37	37	36	40	»
6	»	31	»	32	»	»	»	41	»	39	»	40	»	38	»	39	»
7	32	32	34	»	33	32	42	42	41	40	»	41	»	37	37	38	37
8	31	»	33	»	32	»	»	»	42	»	»	»	36	»	36	»	36
9	30	31	32	33	33	33	43	41	»	41	40	42	37	38	35	39	35
10	»	30	»	32	»	34	»	42	»	42	»	43	»	39	»	»	»
11	31	»	31	31	»	35	»	43	41	43	»	44	36	»	34	40	34
12	30	»	»	»	34	»	42	»	42	»	41	»	35	»	35	»	33
13	»	31	»	32	35	34	43	42	43	»	42	43	34	38	34	39	»
14	»	30	»	33	»	35	»	»	»	42	»	44	»	37	»	»	»
15	31	31	32	34	34	»	42	41	42	43	41	45	35	38	»	40	34
16	30	»	33	»	33	»	43	»	41	»	40	»	»	»	35	»	35
17	31	»	32	35	34	36	42	40	40	44	»	44	»	39	34	39	34
18	»	30	»	36	»	37	»	41	»	43	»	»	»	38	»	38	»
19	32	31	31	37	33	38	»	42	39	42	»	45	36	37	35	»	33
20	31	»	32	»	»	»	41	»	38	»	39	»	»	»	36	»	32
21	32	32	»	36	32	39	40	41	»	43	40	»	35	»	35	37	31
22	»	33	»	35	»	40	»	»	»	»	»	44	»	36	»	38	»
23	31	32	31	34	33	41	»	»	»	42	39	43	34	35	36	37	»
24	32	»	32	»	34	»	41	»	39	»	38	»	35	»	»	»	30
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	»	»	»	»	40	»	43	»	44	»	34	»	36	»
27	31	31	»	33	33	42	42	39	»	42	37	43	36	33	35	37	29
28	32	»	31	»	32	»	»	»	40	»	36	»	35	»	36	»	28
29	»	32	32	32	»	43	41	38	»	41	35	44	34	»	35	38	27
30	»	31	»	33	»	44	»	37	»	40	»	»	»	34	»	37	»
31	»	32	31	34	33	45	40	36	39	»	36	43	33	35	36	36	28
32	31	»	32	»	34	»	41	»	40	»	35	»	34	»	35	»	»
33	32	33	33	33	»	»	40	37	39	39	36	44	35	34	»	37	27
34	»	34	»	»	»	44	»	38	»	38	»	43	»	33	»	38	»
35	31	»	34	34	35	45	39	39	40	37	»	42	36	34	36	37	28
36	32	»	35	»	34	»	38	»	»	»	37	»	37	»	37	»	27
37	33	33	36	»	33	44	»	40	41	38	38	43	38	35	36	»	28
38	»	34	»	33	»	43	»	39	»	39	»	44	»	»	»	36	»
39	32	33	»	32	32	44	39	40	40	»	39	»	37	34	35	»	27
40	»	»	35	»	31	»	38	»	41	»	38	»	38	»	36	»	28
41	31	32	36	33	32	43	39	»	42	38	39	45	39	35	37	37	»
42	»	31	»	32	»	»	»	39	»	39	»	44	»	34	»	»	»
43	30	32	37	»	31	44	38	38	41	40	40	43	»	33	38	38	27
44	31	»	38	»	30	»	37	»	40	»	»	»	38	»	37	»	26
45	32	31	37	33	29	43	38	39	»	39	41	44	39	34	38	37	25
46	»	32	»	32	»	42	»	40	»	40	»	43	»	35	»	»	»
47	33	33	36	33	»	43	39	41	39	39	40	42	40	»	37	38	»
48	34	»	»	»	28	»	38	»	40	»	41	»	39	»	38	»	26
49	34	32	35	34	29	44	39	42	41	39	42	41	38	36	39	37	27

73000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	27	18	19	13	17	26	35	38	38	40	37	41	40	35	35	38	37
1	26	19	20	12	»	25	36	»	39	39	36	»	41	36	36	37	»
2	27	»	»	»	18	»	35	»	40	»	»	»	42	»	»	»	36
3	26	18	21	»	19	26	34	37	39	»	37	40	»	35	37	38	37
4	»	»	»	13	»	25	»	38	»	40	»	39	»	34	»	37	»
5	25	19	22	12	20	24	»	»	»	39	36	40	41	33	38	38	38
6	26	»	21	»	19	»	»	»	40	»	»	»	40	»	39	»	37
7	25	18	22	13	»	»	35	39	41	40	37	39	41	»	38	39	36
8	»	19	»	14	»	25	»	40	»	39	»	»	»	34	»	38	»
9	»	18	21	»	20	26	34	39	40	»	38	38	40	35	37	37	35
10	26	»	»	»	21	»	33	»	39	»	39	»	39	»	38	»	»
11	25	»	22	13	22	»	34	40	38	38	40	37	38	34	»	36	36
12	»	»	»	»	»	25	»	39	»	37	»	36	»	35	»	35	»
13	26	»	21	12	23	26	35	40	39	36	»	37	37	36	37	36	37
14	27	»	22	»	22	»	36	»	»	»	41	»	38	»	36	»	38
15	26	19	21	11	21	27	»	41	40	37	42	36	»	37	37	»	37
16	»	18	»	12	»	28	»	40	»	38	»	35	»	»	»	37	»
17	25	19	»	13	»	»	37	41	41	37	41	»	37	38	36	36	38
18	»	»	20	»	22	»	36	»	40	»	42	»	36	»	37	»	39
19	24	18	19	14	23	29	35	»	41	36	43	36	37	37	36	37	»
20	»	17	»	13	»	»	»	42	»	35	»	35	»	38	»	38	»
21	23	18	18	»	22	30	36	43	40	34	42	34	»	37	37	37	38
22	»	»	17	»	23	»	35	»	39	»	»	»	38	»	36	»	39
23	22	17	16	14	24	31	36	44	»	35	41	33	37	36	37	36	38
24	»	18	»	15	»	32	»	45	»	36	»	32	»	37	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	21	»	»	»	25	»	37	»	»	»	42	»	36	»	38	»	37
27	»	17	17	16	24	»	38	44	38	»	43	31	37	36	37	35	36
28	»	16	»	15	»	31	»	»	»	35	»	32	»	35	»	36	»
29	22	15	16	14	23	»	37	45	39	34	44	31	36	36	»	35	37
30	23	»	17	»	24	»	38	»	38	»	45	»	»	»	38	»	38
31	22	»	18	15	23	30	39	44	37	33	»	32	»	37	39	34	37
32	»	16	»	16	»	29	»	43	»	34	»	33	»	38	»	35	»
33	23	17	19	15	22	30	»	»	38	33	44	32	35	37	38	»	38
34	24	»	»	»	»	»	38	»	37	»	43	»	36	»	37	»	37
35	23	16	»	14	23	29	37	44	36	32	42	»	37	38	36	36	38
36	»	17	»	15	»	30	»	45	»	»	»	33	»	39	»	35	»
37	22	18	18	14	24	31	36	»	35	31	43	34	38	38	35	36	»
38	23	»	17	»	25	»	35	»	36	»	42	»	37	»	»	»	39
39	22	19	16	»	24	30	36	46	37	30	41	35	»	37	36	»	40
40	»	»	»	13	»	31	»	45	»	31	»	34	»	36	»	35	»
41	21	20	15	12	23	30	37	44	»	32	»	35	38	37	37	36	41
42	20	»	14	»	24	»	»	»	38	»	42	»	37	»	38	»	42
43	19	19	13	13	»	31	36	43	39	33	43	36	38	»	37	35	41
44	»	20	»	14	»	32	»	42	»	34	»	»	»	36	»	36	»
45	»	19	12	15	25	33	37	41	40	»	42	37	37	35	38	»	»
46	20	»	13	»	26	»	36	»	»	»	41	»	36	»	37	»	»
47	19	18	12	16	27	»	37	40	39	35	»	38	35	34	»	37	42
48	»	19	»	»	»	34	»	39	»	36	»	39	»	»	»	38	»
49	18	19	13	17	26	35	38	38	40	37	41	40	35	35	38	37	43

74000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	43	46	46	52	52	51	55	53	50	47	50	39	44	42	46	42	39
1	42	45	45	53	51	50	54	52	»	46	51	40	45	43	47	41	38
2	»	46	»	54	»	49	»	53	»	47	»	39	»	44	»	»	»
3	43	45	»	55	»	50	53	52	51	46	50	40	44	»	46	40	39
4	44	»	»	»	50	»	52	»	52	»	49	»	45	»	45	»	40
5	»	44	46	56	49	»	51	53	53	»	50	41	44	43	46	39	41
6	»	43	»	55	»	51	»	»	»	45	»	40	»	42	»	40	»
7	43	44	45	54	50	»	52	54	52	46	49	41	43	43	»	39	42
8	44	»	46	»	51	»	51	»	51	»	48	»	»	»	45	»	41
9	43	»	45	55	50	52	52	53	50	45	»	42	42	42	44	38	40
10	»	»	»	56	»	53	»	52	»	46	»	43	»	43	»	37	»
11	42	45	46	55	49	52	»	53	49	45	47	42	41	42	45	»	39
12	41	»	47	»	»	»	51	»	48	»	46	»	42	»	44	»	»
13	42	46	»	56	50	53	52	54	47	46	»	»	41	41	45	38	40
14	»	47	»	57	»	52	»	55	»	»	»	41	»	40	»	39	»
15	43	46	48	58	49	51	53	»	48	47	45	40	40	»	44	38	»
16	44	»	49	»	48	»	52	»	49	»	44	»	»	»	»	»	39
17	43	47	48	»	47	50	51	56	48	48	45	39	»	41	45	37	38
18	»	»	»	57	»	51	»	57	»	47	»	40	»	42	»	38	»
19	44	46	49	58	48	50	52	56	»	46	44	39	41	41	44	39	39
20	45	»	50	»	49	»	»	»	47	»	45	»	40	»	45	»	38
21	44	45	49	59	»	49	51	55	48	45	44	40	41	»	44	38	39
22	»	44	»	58	»	»	»	56	»	46	»	»	»	40	»	37	»
23	»	43	50	57	48	50	52	57	»	»	»	39	40	41	45	38	38
24	45	»	49	»	47	»	51	»	49	»	43	»	39	»	44	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	44	»	»	»	51	»	56	»	47	»	38	»	42	»	37	»
27	44	»	48	56	48	50	50	57	48	48	»	37	38	43	43	36	39
28	43	»	49	»	47	»	51	»	»	»	44	»	39	»	42	»	»
29	44	43	50	55	48	51	»	56	49	47	43	38	40	44	43	»	38
30	»	42	»	54	»	52	»	55	»	48	»	37	»	»	»	37	»
31	45	41	»	»	49	53	50	54	48	47	44	»	39	»	44	36	39
32	»	»	51	»	48	»	49	»	47	»	43	»	»	»	43	»	38
33	44	42	50	55	49	54	50	»	48	48	42	»	38	43	44	37	»
34	»	43	»	54	»	»	»	53	»	49	»	38	»	44	»	36	»
35	43	44	49	»	50	55	51	54	47	»	41	39	»	45	45	35	37
36	42	»	50	»	49	»	50	»	»	»	»	»	37	»	46	»	38
37	41	45	49	55	50	56	49	»	»	50	40	38	38	44	45	36	37
38	»	46	»	54	»	57	»	53	»	49	»	39	»	45	»	»	»
39	42	45	50	53	»	»	50	52	46	48	41	40	39	»	44	37	»
40	43	»	»	»	»	»	51	»	47	»	40	»	40	»	43	»	36
41	»	46	51	»	51	56	52	53	»	»	41	41	39	44	44	38	37
42	»	47	»	52	»	57	»	»	»	47	»	42	»	45	»	39	»
43	44	»	52	51	52	»	51	52	46	48	40	43	40	44	»	38	38
44	»	»	53	»	53	»	52	»	47	»	»	»	»	»	45	»	39
45	45	»	54	50	52	56	53	51	48	47	»	44	41	45	44	37	38
46	»	48	»	51	»	55	»	50	»	48	»	43	»	46	»	38	»
47	44	47	53	»	»	54	»	51	47	49	39	44	42	47	43	»	37
48	45	»	52	»	»	»	54	»	46	»	38	»	43	»	»	»	36
49	46	46	52	52	51	55	53	50	47	50	39	44	42	46	42	39	37

75000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	37	42	44	44	35	38	24	26	31	20	28	35	38	26	24	21	25
1	»	43	45	45	36	»	25	27	32	»	27	36	37	27	25	22	24
2	36	»	44	»	35	»	24	»	33	»	26	»	36	»	24	»	»
3	37	42	43	44	34	»	23	28	32	21	27	37	37	26	»	21	23
4	»	41	»	»	»	37	»	27	»	22	»	36	»	25	»	22	»
5	36	»	42	45	33	36	22	28	31	21	»	37	»	26	25	21	24
6	»	»	41	»	32	»	23	»	»	»	»	»	36	»	24	»	23
7	35	»	40	46	33	35	»	29	32	20	26	38	37	25	23	»	22
8	»	42	»	47	»	34	»	»	»	21	»	39	»	»	»	20	»
9	34	43	»	46	34	35	24	28	31	22	25	»	36	24	22	21	23
10	»	»	41	»	33	»	23	»	32	»	24	»	35	»	23	»	22
11	33	42	40	45	32	34	24	»	31	23	25	38	34	25	24	22	»
12	»	41	»	44	»	»	»	27	»	22	»	37	»	»	»	»	»
13	32	42	39	»	33	35	25	28	30	21	26	38	»	26	»	23	23
14	33	»	40	»	34	»	24	»	31	»	»	»	35	»	25	»	22
15	34	41	41	43	33	34	25	29	»	22	25	37	»	27	24	24	23
16	»	40	»	44	»	35	»	30	»	21	»	»	»	28	»	»	»
17	33	41	40	43	»	»	26	31	30	22	»	36	34	»	23	23	22
18	34	»	»	»	34	»	25	»	29	»	»	»	35	»	22	»	21
19	»	42	39	44	35	34	26	32	»	»	26	35	36	27	23	24	22
20	»	41	»	43	»	33	»	»	»	21	»	34	»	26	»	23	»
21	35	42	40	42	34	»	»	31	28	22	27	35	35	27	»	22	23
22	34	»	41	»	35	»	25	»	29	»	28	»	»	»	22	»	22
23	33	»	42	43	»	32	24	30	28	23	»	36	34	26	21	23	21
24	»	43	»	»	»	31	»	29	»	24	»	35	»	25	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	34	»	43	»	»	»	25	»	29	»	29	»	33	»	22	»	22
27	»	44	»	42	34	30	26	30	28	25	30	»	32	24	23	22	23
28	»	45	»	»	»	29	»	31	»	»	»	36	»	25	»	23	»
29	35	46	42	41	35	28	25	»	27	24	29	37	31	24	22	24	»
30	36	»	41	»	36	»	26	»	26	»	30	»	30	»	»	»	24
31	37	45	40	»	35	29	27	32	25	23	31	36	»	25	23	25	23
32	»	»	»	40	»	30	»	31	»	24	»	37	»	24	»	26	»
33	38	44	39	39	36	29	26	32	»	23	30	36	31	25	24	»	24
34	39	»	40	»	37	»	»	»	26	»	31	»	30	»	23	»	25
35	40	45	41	40	»	28	25	31	25	24	30	35	29	»	24	27	26
36	»	44	»	39	»	29	»	32	»	23	»	»	»	26	»	28	»
37	»	43	42	38	38	28	26	31	24	»	31	34	28	27	23	27	25
38	39	»	43	»	37	»	25	»	23	»	32	»	29	»	22	»	»
39	40	44	42	37	38	»	26	30	24	22	33	33	28	26	»	26	24
40	»	43	»	»	»	27	»	29	»	23	»	34	»	25	»	25	»
41	41	»	43	38	39	26	25	28	23	24	»	35	29	26	21	24	25
42	42	»	42	»	38	»	26	»	»	»	34	»	28	»	22	»	24
43	41	44	43	37	37	25	»	29	24	25	35	34	27	25	23	»	25
44	»	45	»	38	»	26	»	30	»	26	»	35	»	»	»	25	»
45	42	46	»	37	38	25	25	29	23	25	36	»	26	»	22	24	24
46	»	»	44	»	39	»	24	»	22	»	37	»	25	»	21	»	25
47	43	45	43	36	38	24	25	»	21	26	36	36	26	24	20	25	»
48	»	»	»	35	»	»	»	30	»	27	»	37	»	25	»	26	»
49	42	44	44	35	38	24	26	31	20	28	35	38	26	24	21	25	25

76000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	25	26	15	14	11	8	4	3	−7	−11	−3	0	1	6	−2	−2	−3
1	26	»	14	13	10	7	5	2	−6	»	»	−1	2	7	−1	−1	−4
2	»	25	»	12	»	6	»	1	»	−10	»	0	»	6	»	−2	»
3	25	24	13	13	9	5	»	»	−7	−9	−2	−1	1	5	0	»	−5
4	24	»	12	»	»	»	»	»	−6	»	−3	»	0	»	1	»	−4
5	25	25	»	14	10	»	4	2	−5	−8	−4	»	1	4	0	−1	−5
6	»	24	»	13	»	6	»	1	»	»	»	0	»	5	»	0	»
7	26	25	11	»	11	5	3	»	−4	−7	−5	»	2	4	−1	−1	»
8	25	»	»	»	12	»	4	»	−3	»	−6	»	1	»	»	»	−4
9	26	»	12	»	11	4	5	»	−2	−6	−5	1	»	»	−2	0	−5
10	»	»	»	12	»	5	»	»	»	−7	»	2	»	3	»	−1	»
11	27	24	11	11	12	6	4	2	»	−8	−4	1	2	2	−3	0	−6
12	26	»	12	»	13	»	»	»	−3	»	−5	»	3	»	−4	»	−7
13	25	25	11	12	»	7	5	1	−2	−9	−4	2	4	»	−5	−1	−8
14	»	24	»	13	»	6	»	2	»	−8	»	»	»	1	»	−2	»
15	»	23	12	»	12	5	4	1	−1	»	−3	1	5	0	−4	−3	−9
16	24	»	13	»	11	»	3	»	−2	»	−2	»	4	»	−3	»	»
17	25	22	14	12	12	»	2	2	»	−7	−3	2	3	1	»	−2	−8
18	»	21	»	»	»	»	»	1	»	−8	»	1	»	0	»	−3	»
19	26	»	15	11	11	4	3	0	−3	»	»	2	4	1	−2	»	−7
20	25	»	14	»	10	»	2	»	»	»	−2	»	3	»	−1	»	−6
21	24	20	13	12	11	3	»	−1	−2	−7	−1	3	4	2	»	»	−5
22	»	21	»	13	»	4	»	−2	»	−8	»	4	»	»	»	−4	»
23	25	22	»	14	12	3	1	−3	−3	−7	−2	»	5	1	0	−3	−4
24	»	»	12	»	11	»	2	»	−4	»	−1	»	6	»	−1	»	−5
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	21	»	15	»	»	»	−4	»	−6	»	3	»	0	»	−2	»
27	24	20	11	»	10	4	3	−3	−3	−5	0	4	»	1	0	−1	−4
28	23	»	12	»	9	»	4	»	−4	»	»	»	7	»	−1	»	−5
29	22	21	13	14	8	5	»	−4	»	−4	−1	5	6	0	−2	0	−6
30	»	20	»	15	»	4	»	−5	»	−3	»	4	»	1	»	»	»
31	21	19	14	16	»	3	3	−4	»	−4	0	3	5	»	−1	−1	−7
32	22	»	»	»	7	»	2	»	−5	»	1	»	4	»	−2	»	−8
33	»	18	13	15	6	2	3	−5	−6	»	0	4	3	2	−3	0	−9
34	»	17	»	14	»	1	»	»	»	−3	»	3	»	1	»	−1	»
35	21	18	12	13	7	»	2	−6	−7	−2	1	4	4	2	»	−2	−8
36	22	»	11	»	8	»	3	»	−8	»	2	»	»	»	−4	»	−9
37	21	»	12	14	9	2	2	−7	−9	−3	»	5	5	1	−3	−1	−10
38	»	17	»	13	»	3	»	−8	»	−4	»	4	»	2	»	0	»
39	22	16	13	12	8	2	»	−7	−8	−5	1	3	4	1	−2	»	−11
40	21	»	12	»	»	»	1	»	−9	»	0	»	5	»	−1	»	−10
41	22	15	»	11	7	3	2	−6	−10	−6	−1	»	4	2	−2	−1	−11
42	»	14	»	12	»	4	»	−7	»	»	»	2	»	1	»	0	»
43	23	»	13	13	6	3	1	»	−9	−7	−2	1	5	0	−1	−1	»
44	24	»	14	»	7	»	2	»	−10	»	−1	»	6	»	»	»	−12
45	25	13	13	»	8	4	3	−6	−11	−6	0	0	»	−1	»	−2	−11
46	»	»	»	12	»	»	»	−7	»	−5	»	−1	»	»	»	−3	»
47	26	14	12	»	9	3	2	−6	»	−4	−1	0	»	−2	−2	−2	−10
48	25	»	13	»	8	»	»	»	−12	»	0	»	7	»	−3	»	−9
49	26	15	14	11	8	4	3	−7	−11	−3	0	1	6	−2	−2	−3	−10

77000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	−10	−3	4	7	8	4	8	16	16	19	18	9	13	16	15	7	6
1	− 9	»	»	8	9	5	7	15	15	18	17	»	14	17	16	8	5
2	»	»	5	»	8	»	8	»	16	»	16	»	15	»	17	»	4
3	−10	−4	4	9	7	6	7	»	15	17	17	10	16	16	16	9	»
4	»	−3	»	10	»	»	»	16	»	18	»	9	»	15	»	8	»
5	−11	−2	5	»	8	5	6	17	»	17	18	8	»	16	17	9	3
6	−10	»	6	»	9	»	7	»	14	»	»	»	17	»	16	»	4
7	−11	−1	7	11	8	»	6	16	»	16	19	9	16	17	17	10	5
8	»	−2	»	10	»	4	»	17	»	17	»	8	»	18	»	»	»
9	−10	−1	8	11	»	5	5	18	15	18	20	9	17	»	18	11	6
10	− 9	»	»	»	9	»	6	»	16	»	19	»	16	»	17	»	7
11	»	0	9	12	8	4	7	19	17	»	20	10	15	17	18	10	8
12	»	−1	»	13	»	5	»	»	»	17	»	11	»	18	»	9	»
13	»	0	10	12	9	»	8	20	18	18	21	12	14	17	»	8	9
14	−10	»	9	»	8	»	»	»	»	»	20	»	»	»	17	»	10
15	− 9	»	10	11	7	6	9	21	17	17	»	13	15	18	16	9	11
16	»	1	»	12	»	7	»	22	»	16	»	14	»	17	»	10	»
17	− 8	0	11	11	6	8	»	21	16	17	19	13	16	18	15	»	12
18	− 9	»	10	»	»	»	8	»	15	»	18	»	17	»	14	»	11
19	− 8	−1	»	12	5	9	9	22	14	16	17	»	16	19	15	9	10
20	»	0	»	13	»	8	»	21	»	»	»	12	»	20	»	8	»
21	− 7	1	9	12	4	9	10	»	15	15	16	11	15	21	16	9	»
22	− 8	»	10	»	5	»	11	»	16	»	15	»	16	»	»	»	11
23	− 7	0	9	»	6	10	12	20	17	14	16	10	»	20	15	8	12
24	»	»	»	13	»	11	»	21	»	13	»	»	»	19	»	7	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	− 8	»	10	»	5	»	»	»	»	»	15	»	15	»	14	»	»
27	− 7	−1	11	14	»	12	11	20	16	12	16	11	16	»	13	»	11
28	»	0	»	15	»	11	»	19	»	11	»	»	»	18	»	6	»
29	»	−1	12	16	6	10	12	18	»	»	15	10	17	»	12	7	10
30	− 6	»	11	»	7	»	13	»	15	»	14	»	»	»	11	»	»
31	− 5	0	10	15	»	»	12	19	16	10	13	»	18	19	»	6	11
32	»	−1	»	»	»	»	»	18	»	11	»	9	»	18	»	7	»
33	− 6	»	9	14	6	9	13	19	15	»	»	8	19	17	10	8	10
34	− 5	»	8	»	5	»	14	»	»	»	12	»	20	»	11	»	11
35	− 4	0	9	13	6	»	»	»	14	10	»	9	21	16	12	»	12
36	»	1	»	12	»	8	»	18	»	11	»	8	»	»	»	9	»
37	− 3	0	»	11	5	»	15	17	15	12	11	»	20	17	13	10	11
38	»	»	10	»	»	»	16	»	16	»	10	»	19	»	12	»	12
39	− 2	1	11	»	4	7	17	»	17	13	9	9	20	16	13	11	»
40	»	0	»	10	»	»	»	16	»	14	»	8	»	15	»	12	»
41	− 1	»	10	»	3	8	16	17	16	15	10	9	»	14	12	11	11
42	»	»	9	»	2	»	17	»	17	»	»	»	21	»	11	»	10
43	− 2	1	8	9	1	»	18	18	»	16	9	»	20	13	10	10	11
44	»	2	»	8	»	7	»	17	»	15	»	10	»	12	»	»	»
45	− 1	3	9	9	»	8	19	16	18	16	10	»	19	»	9	9	12
46	− 2	»	»	»	2	»	18	»	17	»	11	»	18	»	8	»	11
47	»	4	8	8	3	7	17	15	18	»	10	11	17	13	7	8	10
48	»	3	»	7	»	8	»	»	»	17	»	12	»	14	»	7	»
49	− 3	4	7	8	4	8	16	16	19	18	9	13	16	15	7	6	11

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	11	4	5	8	12	11	8	12	4	−3	−2	−1	− 9	−10	−5	− 8	2
1	12	3	6	»	11	10	7	13	3	−2	−1	−2	»	−11	−4	− 9	1
2	»	»	»	9	»	»	»	12	»	−1	»	−1	»	−12	»	−10	»
3	11	2	5	10	12	11	8	11	»	0	−2	−2	− 8	»	−3	−11	2
4	10	»	»	»	13	»	»	»	2	»	−3	»	− 9	»	−2	»	3
5	9	1	6	11	»	10	7	10	3	1	−2	−1	− 8	»	−3	−10	2
6	»	2	»	12	»	9	»	11	»	2	»	»	»	−11	»	− 9	»
7	»	3	7	11	12	8	8	12	2	»	−1	−2	− 7	−10	−4	− 8	1
8	8	»	8	»	11	»	9	»	3	»	»	»	− 8	»	−5	»	»
9	7	4	9	12	10	»	10	11	2	3	−2	−1	− 7	−11	»	»	»
10	»	5	»	»	»	7	»	12	»	2	»	0	»	−10	»	»	»
11	6	»	8	11	9	8	11	11	»	1	»	−1	− 8	−11	»	− 7	0
12	5	»	9	»	8	»	12	»	»	»	−1	»	− 9	»	−4	»	−1
13	»	4	8	12	7	9	»	10	1	0	0	−2	»	−12	−5	»	0
14	»	5	»	13	»	10	»	9	»	−1	»	»	»	»	»	− 8	»
15	6	6	»	»	8	11	13	8	0	»	»	»	−10	−13	−4	− 7	−1
16	»	»	7	»	7	»	12	»	1	»	1	»	− 9	»	−3	»	−2
17	5	5	6	12	8	10	11	»	»	−2	2	−3	− 8	−12	−4	− 6	»
18	»	6	»	11	»	»	»	»	»	»	»	−4	»	−11	»	− 5	»
19	4	7	5	»	7	9	»	7	0	−1	3	−5	»	−10	−3	− 6	−3
20	3	»	4	»	8	»	12	»	−1	»	»	»	− 9	»	−2	»	−4
21	2	6	3	12	»	8	11	6	»	−2	2	−6	− 8	− 9	−3	− 5	−3
22	»	7	»	»	»	9	»	5	»	−1	»	−5	»	−10	»	»	»
23	3	8	»	11	»	10	12	6	−2	−2	1	−6	− 9	»	−2	− 4	−2
24	2	»	»	»	7	»	13	»	−1	»	0	»	−10	»	−3	»	−3
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	9	»	»	»	11	»	»	»	−3	»	−7	»	−11	»	− 5	»
27	3	10	4	12	6	»	12	5	−2	−2	1	−8	−11	−10	»	− 4	−4
28	4	»	5	»	5	»	13	»	−3	»	2	»	»	»	−4	»	−5
29	5	»	4	13	6	12	12	4	−2	−1	»	−7	−12	− 9	−3	− 5	−4
30	»	9	»	12	»	11	»	3	»	0	»	−6	»	− 8	»	− 6	»
31	4	10	5	11	7	10	»	2	−1	−1	1	−7	−13	− 7	−2	»	−3
32	5	»	4	»	»	»	11	»	0	»	»	»	−12	»	−3	»	−2
33	6	»	»	12	6	9	12	3	−1	0	2	»	−13	− 6	−4	− 7	−3
34	»	»	»	11	»	8	»	4	»	»	»	−6	»	− 5	»	− 6	»
35	5	11	5	12	5	7	13	»	−2	1	1	−7	−14	− 6	−5	− 5	»
36	6	»	6	»	6	»	14	»	−1	»	2	»	−13	»	»	»	−2
37	5	10	5	»	7	8	13	5	−2	0	1	−8	»	− 5	−4	− 6	−3
38	»	»	»	13	»	7	»	4	»	−1	»	−9	»	− 6	»	− 5	»
39	6	9	6	12	8	6	12	5	»	0	0	−8	−12	− 7	−5	− 4	−2
40	5	»	7	»	9	»	»	»	−3	»	1	»	−11	»	−6	»	−1
41	4	10	6	11	»	7	11	6	−4	−1	2	»	−10	»	−7	− 3	0
42	»	9	»	12	»	6	»	5	»	0	»	»	»	− 6	»	− 2	»
43	»	8	7	13	10	7	10	4	−3	»	1	−9	− 9	− 7	−8	− 1	1
44	3	»	6	»	9	»	11	»	−4	»	2	»	−10	»	−7	»	»
45	4	7	5	12	8	»	10	3	−3	−1	1	−8	− 9	− 6	»	0	0
46	»	6	»	»	»	8	»	4	»	−2	»	−7	»	− 5	»	1	»
47	3	»	6	11	9	7	11	5	−4	−3	»	−8	−10	− 4	−6	2	1
48	»	»	7	»	10	»	12	»	»	»	0	»	−11	»	−7	»	0
49	4	5	8	12	11	8	12	4	−3	−2	−1	−9	−10	− 5	−8	2	−1

78000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	-1	-7	-7	-2	-1	0	-8	-3	9	5	14	5	-2	1	-1	12	14
1	-2	-6	-8	-1	»	1	-9	»	8	6	13	4	-1	»	0	13	15
2	-3	»	»	»	-2	»	»	»	9	»	14	»	0	»	1	»	»
3	»	-5	-7	-2	-3	»	-10	-4	8	»	15	3	1	0	2	14	14
4	»	-6	»	-3	»	0	»	»	»	7	»	4	»	-1	»	»	»
5	-2	-7	-6	»	-2	»	-9	-3	7	8	14	3	0	0	»	13	15
6	-3	»	»	»	-1	»	-8	»	6	»	13	»	»	»	3	»	16
7	-4	»	-5	-4	-2	1	-9	-2	5	9	»	4	-1	-1	2	14	15
8	»	-8	»	-3	»	0	»	-1	»	10	»	3	»	-2	»	13	»
9	-3	-9	-4	-2	-1	-1	»	0	6	11	12	4	0	-3	3	»	14
10	-2	»	-3	»	»	»	-8	»	5	»	13	»	1	»	4	»	13
11	-1	-8	»	-1	0	-2	-9	1	4	12	12	»	2	-2	5	12	14
12	»	-9	»	0	»	-3	»	2	»	»	»	3	»	-3	»	11	»
13	-2	-8	-2	-1	»	-2	-8	»	5	11	13	4	3	-4	4	12	»
14	-3	»	-1	»	1	»	-7	»	6	»	12	»	2	»	»	»	13
15	-2	-9	-2	»	2	-3	-6	1	7	10	11	3	»	-3	5	13	12
16	»	»	»	»	»	-2	»	2	»	11	»	2	»	-2	»	14	»
17	-3	-10	-3	-2	1	-3	-7	1	»	10	10	3	1	-1	4	13	13
18	-4	»	-4	»	2	»	»	»	8	»	11	»	0	»	5	»	14
19	-3	-11	-3	-3	»	-4	»	0	9	11	10	2	1	»	6	14	15
20	»	-10	»	-4	»	-3	»	1	»	10	»	»	»	-2	»	13	»
21	»	-11	-4	-5	1	-2	-6	2	8	»	11	1	0	-1	5	»	»
22	-4	»	-3	»	0	»	-5	»	7	»	12	»	-1	»	4	»	»
23	-5	-10	-2	-6	-1	»	-6	3	8	11	11	0	-2	0	»	14	14
24	»	-11	»	»	»	-3	»	2	»	10	»	-1	»	-1	»	15	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-6	»	-1	»	0	»	-5	»	»	»	12	»	-1	»	3	»	13
27	-7	-10	0	-5	1	-4	»	3	7	11	13	-2	0	0	2	»	14
28	»	»	»	-4	»	-3	»	2	»	12	»	-3	»	»	»	16	»
29	-8	-11	»	-5	0	-4	-6	3	6	11	»	»	1	-1	3	15	15
30	»	»	1	»	-1	»	-7	»	5	»	12	»	2	»	2	»	14
31	-9	-12	0	-4	-2	-5	-6	»	6	12	13	-2	1	0	3	14	»
32	»	-11	»	-3	»	»	»	4	»	13	»	-1	»	1	»	13	»
33	»	-10	1	»	-3	-6	-5	5	7	14	12	-2	»	0	4	14	15
34	-10	»	0	»	-4	»	-6	»	8	»	»	»	2	»	5	»	16
35	-9	-9	-1	-4	-3	-5	-5	4	»	13	11	»	3	1	6	13	17
36	»	-8	»	-3	»	-6	»	5	»	14	»	-1	»	2	»	»	»
37	-8	-7	-2	-2	»	»	»	6	7	13	10	0	2	»	5	12	16
38	-7	»	»	»	-2	»	-4	»	8	»	9	»	3	»	6	»	17
39	»	-8	-3	-3	-1	-5	-3	7	7	»	8	-1	2	3	7	13	16
40	»	-9	»	-2	»	-6	»	»	»	14	»	0	»	2	»	12	»
41	-8	-8	»	-3	-2	»	-4	8	6	15	7	1	3	1	»	11	»
42	-9	»	-4	»	-1	»	-3	»	7	»	6	»	»	»	8	»	15
43	-8	»	-3	-4	-2	-5	-2	7	8	16	»	0	2	0	»	12	14
44	»	-7	»	-3	»	-6	»	6	»	15	»	-1	»	»	»	13	»
45	»	-6	-2	-2	-1	-7	»	7	7	14	5	-2	»	1	9	»	13
46	-7	»	-3	»	»	»	-3	»	6	»	4	»	3	»	10	»	14
47	-6	-5	»	-1	»	-6	-4	8	5	13	»	»	2	0	11	12	15
48	»	-6	»	-2	»	-7	»	9	»	»	»	-3	»	»	»	13	»
49	-7	-7	-2	-1	0	-8	-3	9	5	14	5	-2	1	-1	12	14	15

79000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	15	7	12	12	24	22	21	18	21	21	15	12	14	13	11	2	−1
1	16	6	13	11	23	»	20	17	22	20	16	13	13	14	»	1	−2
2	»	7	»	»	»	23	»	»	»	19	»	»	»	13	»	0	»
3	15	»	14	12	22	22	19	16	23	20	»	14	12	14	10	1	−3
4	14	»	13	»	»	»	18	»	»	»	15	»	13	»	9	»	−2
5	15	6	14	13	21	21	»	17	»	21	14	15	12	15	8	»	−3
6	»	5	»	14	»	20	»	18	»	20	»	16	»	»	»	0	»
7	14	6	»	»	22	19	19	19	22	21	13	»	13	»	7	1	−4
8	»	»	15	»	21	»	20	»	21	»	14	»	12	»	8	»	−3
9	13	5	16	15	»	20	19	»	20	20	13	17	13	14	7	0	»
10	»	6	»	14	»	»	»	»	»	19	»	18	»	13	»	1	»
11	12	7	»	»	22	19	20	18	»	20	14	17	»	14	6	2	−2
12	13	»	15	»	21	»	21	»	21	»	»	»	12	»	5	»	−3
13	14	6	16	»	20	20	20	19	»	21	15	16	13	13	4	1	−4
14	»	7	»	15	»	19	»	20	»	20	»	15	»	12	»	»	»
15	15	6	15	16	»	20	19	19	20	19	14	14	12	»	5	2	−3
16	14	»	»	»	19	»	18	»	21	»	13	»	13	»	6	»	−4
17	»	7	14	17	20	21	17	20	22	»	12	13	14	13	7	3	−5
18	»	8	»	18	»	22	»	»	»	20	»	14	»	14	»	»	»
19	13	7	13	19	21	»	18	21	23	19	13	13	15	15	»	4	−6
20	12	»	14	»	20	»	19	»	22	»	12	»	»	»	8	»	−5
21	13	»	15	20	21	21	20	22	23	20	»	14	16	14	9	3	−4
22	»	8	»	21	»	20	»	23	»	19	»	13	»	15	»	2	»
23	12	»	16	22	22	21	»	24	22	18	13	12	15	16	10	»	−3
24	11	»	15	»	»	»	19	»	21	»	12	»	14	»	9	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	9	»	21	»	22	»	23	»	»	»	11	»	15	»	3	»
27	10	10	14	22	21	23	20	»	22	19	13	10	13	»	8	2	»
28	11	»	13	»	20	»	21	»	23	»	14	»	»	»	»	»	−2
29	12	9	12	»	21	24	22	22	22	18	13	»	»	16	7	3	−3
30	»	»	»	23	»	25	»	21	»	17	»	»	»	15	»	2	»
31	11	10	11	22	22	24	21	20	»	»	14	11	12	14	6	1	−2
32	10	»	12	»	23	»	»	»	»	»	13	»	13	»	7	»	−1
33	9	9	13	23	»	23	22	»	21	16	12	10	14	»	8	0	0
34	»	8	»	22	»	»	»	19	»	17	»	»	»	13	»	−1	»
35	»	9	14	23	24	»	21	20	20	»	13	11	15	14	7	−2	1
36	10	»	13	»	»	»	»	»	19	»	14	»	14	»	6	»	»
37	9	10	12	»	23	»	20	19	20	16	13	12	15	13	»	−1	0
38	»	9	»	»	»	24	»	20	»	17	»	13	»	14	»	0	»
39	8	»	11	22	22	23	19	19	19	16	»	12	16	15	5	−1	−1
40	»	»	12	»	23	»	18	»	»	»	14	»	15	»	4	»	0
41	9	8	11	23	24	24	»	18	20	15	13	13	16	14	3	»	−1
42	»	9	»	24	»	23	»	19	»	16	»	14	»	»	»	0	»
43	8	10	»	23	25	24	17	20	21	17	12	»	15	15	2	1	−2
44	»	»	10	»	24	»	18	»	20	»	13	»	14	»	1	»	−1
45	7	11	11	24	23	23	17	»	21	16	14	15	13	14	2	0	»
46	»	10	»	23	»	»	»	21	»	15	»	14	»	13	»	−1	»
47	»	11	12	»	22	22	18	22	22	16	13	15	»	12	1	−2	−2
48	6	»	13	»	21	»	17	»	21	»	»	»	14	»	2	»	−1
49	7	12	12	24	22	21	18	21	21	15	12	14	13	11	2	−1	−2

80000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	−2	−1	11	7	1	−1	3	3	3	6	5	0	3	8	12	9	11
1	−3	0	10	6	0	0	»	2	4	7	4	−1	4	9	11	»	12
2	−4	»	11	»	»	»	4	»	»	»	3	»	5	»	10	»	11
3	−3	1	»	7	−1	−1	3	»	5	6	4	»	6	8	11	10	»
4	»	2	»	6	»	−2	»	1	»	»	»	0	»	9	»	9	»
5	−4	3	10	7	0	−1	4	»	4	7	3	−1	7	10	10	10	»
6	−5	»	11	»	1	»	3	»	»	»	4	»	8	»	»	»	12
7	»	2	10	»	0	0	4	2	3	8	3	0	»	11	9	9	»
8	»	»	»	8	»	1	»	3	»	7	»	1	»	12	»	»	»
9	−6	3	9	9	1	0	5	4	»	8	2	0	7	11	»	10	11
10	−5	»	10	»	2	»	»	»	2	»	3	»	8	»	8	»	12
11	−4	2	9	8	»	1	4	5	1	9	4	1	»	»	9	11	11
12	»	1	»	7	»	0	»	6	»	8	»	»	»	10	»	12	»
13	»	»	8	6	3	1	3	»	2	»	»	0	7	9	10	13	10
14	−3	»	7	»	4	»	2	»	1	»	5	»	6	»	9	»	»
15	−4	2	8	7	3	»	1	5	»	9	4	−1	7	10	»	»	11
16	»	3	»	»	»	2	»	»	»	10	»	−2	»	11	»	12	»
17	−3	»	7	6	2	1	»	4	2	9	»	−1	6	12	8	13	12
18	−4	»	8	»	1	»	2	»	»	»	3	»	5	»	9	»	11
19	−3	2	9	5	»	2	»	3	3	10	4	0	4	11	10	»	12
20	»	3	»	»	»	3	»	2	»	9	»	1	»	»	»	14	»
21	−2	4	»	4	2	4	1	1	2	8	3	»	5	12	9	13	13
22	»	»	8	»	1	»	0	»	3	»	4	»	6	»	8	»	14
23	»	5	7	3	2	3	1	»	4	7	»	0	7	11	9	12	»
24	»	6	»	4	»	»	»	2	»	8	»	1	»	10	»	13	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−1	»	6	»	1	»	2	»	5	»	»	»	8	»	10	»	13
27	0	5	7	5	2	2	3	1	»	7	3	2	7	11	11	14	12
28	»	4	»	4	»	3	»	2	»	6	»	3	»	12	»	»	»
29	1	5	6	»	»	2	4	3	6	5	2	2	6	»	10	15	11
30	0	»	»	»	1	»	5	»	7	»	3	»	7	»	9	»	10
31	»	»	7	5	2	»	6	4	8	»	2	3	8	13	8	14	11
32	»	4	»	4	»	3	»	»	»	4	»	2	»	12	»	15	»
33	1	5	8	3	1	»	7	5	9	5	1	1	7	13	»	14	12
34	2	»	7	»	0	»	6	»	8	»	2	»	»	»	7	»	11
35	1	»	6	2	»	2	7	6	9	6	»	2	8	14	8	15	10
36	»	6	»	1	»	1	»	5	»	7	»	1	»	15	»	14	»
37	0	7	7	0	»	0	»	4	10	8	1	0	7	14	9	»	9
38	1	»	8	»	»	»	6	»	9	»	2	»	8	»	8	»	10
39	»	8	»	−1	−1	1	5	»	10	7	1	»	7	15	9	13	11
40	»	9	»	0	»	2	»	3	»	»	»	−1	»	14	»	14	»
41	2	10	7	−1	0	3	4	»	9	6	0	0	6	13	10	13	»
42	1	»	8	»	1	»	3	»	»	»	−1	»	»	»	»	»	12
43	0	11	7	»	0	4	4	2	»	7	0	1	»	14	9	12	13
44	»	»	»	−2	»	5	»	3	»	6	»	0	»	13	»	11	»
45	−1	12	6	»	−1	4	3	2	»	5	−1	1	7	12	10	10	12
46	−2	»	7	»	−2	»	»	»	8	»	0	»	8	»	11	»	13
47	−1	11	6	−1	»	3	2	3	7	4	−1	2	7	»	10	11	14
48	»	10	»	0	»	4	»	2	»	5	»	»	»	11	»	10	»
49	−1	11	7	1	−1	3	3	3	6	5	0	3	8	12	9	11	13

81000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	13	15	13	10	7	2	2	6	−2	−2	−13	−12	−16	−13	−12	−12	−10
1	14	14	12	9	6	»	3	»	»	−3	−12	−13	−15	−12	−11	−13	»
2	»	13	»	10	»	»	»	5	»	−4	»	−12	»	−13	»	−12	»
3	13	12	13	»	7	1	4	6	−3	−3	−11	−13	»	−14	−10	−13	−11
4	14	»	»	»	8	»	5	»	−4	»	»	»	−14	»	−9	»	−12
5	15	»	14	11	7	0	4	5	»	−4	−10	−14	−13	−15	−10	−12	−13
6	»	11	»	10	»	−1	»	4	»	−3	»	−15	»	−16	»	»	»
7	14	10	13	»	»	0	5	3	−3	−2	−11	−16	−14	»	−11	−13	−14
8	13	»	»	»	6	»	6	»	−2	»	−10	»	−15	»	−10	»	−15
9	»	11	14	11	5	−1	7	2	−1	»	−9	−15	−16	»	−9	−12	−16
10	»	12	»	12	»	−2	»	»	»	−3	»	−16	»	−15	»	−11	»
11	14	11	15	13	4	»	8	1	0	−4	−8	−17	−15	−14	»	−10	−17
12	15	»	14	»	3	»	7	»	−1	»	−7	»	»	»	−10	»	−18
13	14	»	15	12	4	−1	6	0	−2	−5	»	−16	−16	−13	−9	−11	−19
14	»	10	»	13	»	−2	»	−1	»	−4	»	−15	»	−14	»	−12	»
15	15	9	16	12	3	−3	»	0	−1	−3	−8	−14	−15	−15	−8	»	−18
16	16	»	15	»	»	»	7	»	0	»	−7	»	−14	»	−9	»	−17
17	15	10	»	11	4	−2	8	−1	−1	−4	−8	»	−13	−14	−10	−11	−18
18	»	9	»	12	»	−3	»	0	»	»	»	−13	»	−13	»	−12	»
19	14	10	14	13	5	−4	7	»	−2	−5	−9	−14	−14	−12	−9	−11	»
20	15	»	15	»	6	»	6	»	−1	»	»	»	−15	»	»	»	−17
21	14	9	14	»	»	−3	5	1	−2	−6	−10	−13	»	−13	−8	−10	−18
22	»	»	»	14	»	−2	»	0	»	−7	»	−14	»	−14	»	−11	»
23	15	10	15	15	5	−3	6	−1	»	−8	−11	−15	−16	−15	−7	−10	−19
24	16	»	16	»	6	»	»	»	−1	»	−12	»	−15	»	−6	»	−18
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	11	»	14	»	−2	»	−2	»	−7	»	»	»	−16	»	−9	»
27	»	10	15	13	5	−1	7	−3	0	»	−13	−14	−14	−15	−7	−8	−17
28	17	»	16	»	4	»	8	»	−1	»	−14	»	−15	»	−6	»	»
29	18	9	17	12	3	»	9	−4	0	−8	−13	−13	−14	−14	»	−7	−16
30	»	10	»	»	»	0	»	−5	»	−9	»	−14	»	−15	»	−6	»
31	19	»	16	11	4	−1	10	−6	1	−10	»	−15	−15	−14	−7	−7	−15
32	18	»	15	»	»	»	9	»	»	»	−14	»	−14	»	−8	»	−16
33	19	11	14	10	3	−2	»	−7	0	−9	−15	»	−13	−15	−9	»	−15
34	»	12	»	9	»	−3	»	−8	»	−10	»	−16	»	»	»	−8	»
35	18	13	»	8	2	−2	8	−7	−1	−11	−14	»	−14	−14	−10	−7	−16
36	»	»	15	»	1	»	7	»	0	»	−13	»	−13	»	−11	»	−15
37	19	14	14	7	0	−1	8	»	1	−12	−14	−17	−12	−15	−10	−6	»
38	»	13	»	8	»	»	»	−6	»	−11	»	−18	»	−16	»	−7	»
39	20	14	15	»	−1	0	7	−5	0	−10	−13	−17	»	−17	»	−8	»
40	19	»	14	»	0	»	6	»	−1	»	»	»	−11	»	−9	»	−14
41	18	15	13	9	1	1	7	−6	»	−11	−12	−16	»	−16	»	−7	−13
42	»	14	»	8	»	0	»	−5	»	−10	»	−17	»	»	»	»	»
43	19	15	12	9	»	1	8	−4	−2	−11	−11	−16	»	»	−10	−8	−14
44	18	»	»	»	2	»	7	»	−3	»	−12	»	−10	»	−9	»	−13
45	»	»	13	10	3	2	6	−3	−4	»	»	−15	−11	−15	−10	−9	−14
46	»	14	»	9	»	3	»	»	»	»	»	−16	»	−14	»	−10	»
47	17	13	12	8	4	»	5	−2	»	−12	−13	−17	−12	−13	»	−9	−13
48	16	»	11	»	3	»	6	»	−3	»	−12	»	»	»	−11	»	−12
49	15	13	10	7	2	2	6	−2	−2	−13	−12	−16	−13	−12	−12	−10	−13

82000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	-13	-13	-18	-16	-21	-25	-32	-30	-33	-25	-19	-23	-29	-31	-36	-39	-49
1	-14	-12	-19	-17	-20	-26	-33	-29	»	-26	-20	-24	-28	-32	-35	-38	-48
2	-15	»	-18	»	-19	»	»	»	-34	»	-21	»	-27	»	-34	»	-49
3	-16	-13	-17	-18	»	-27	-34	-28	-33	-27	-22	-25	-28	»	-35	-39	-48
4	»	-14	»	»	»	-26	»	-29	»	-26	»	»	»	-33	»	-38	»
5	»	-15	-16	-19	-20	-27	-33	-30	-32	»	-21	-26	-29	-32	-34	-39	-49
6	-15	»	-17	»	-21	»	-32	»	-31	»	-22	»	-30	»	-35	»	»
7	-14	-16	-18	-20	-20	»	-33	-31	-30	-25	-21	-27	-31	-31	»	-38	-50
8	»	»	»	»	»	-26	»	-30	»	-24	»	-28	»	-32	»	-39	»
9	-15	»	-19	-21	-21	-25	-32	-29	-29	-23	»	-27	-32	-33	-34	»	-51
10	-14	»	-18	»	-22	»	-33	»	»	»	-22	»	-31	»	-33	»	-52
11	-15	»	-17	-22	-23	-24	»	-30	-28	-24	-21	-26	-30	-34	-32	»	-51
12	»	-17	»	-23	»	-23	»	-31	»	»	»	-27	»	»	»	-38	»
13	-14	-18	»	-24	-24	-24	-32	-30	-27	-23	-20	»	-31	-33	-33	-39	-50
14	»	»	-18	»	-23	»	-33	»	-28	»	-21	»	-32	»	-32	»	-49
15	-15	-19	-17	-25	-24	-23	-34	»	-27	-24	-20	»	-33	-34	-33	-38	»
16	»	»	»	-26	»	»	»	-29	»	-23	»	-26	»	-35	»	-39	»
17	-16	-18	-18	»	-23	-24	-33	-28	-28	-24	»	-27	»	-36	-32	-40	-50
18	-15	»	-17	»	-22	»	-32	»	-29	»	»	»	-34	»	-33	»	-49
19	-14	-17	-18	-27	-23	-25	-31	-29	»	-25	-21	-28	-33	-37	-34	-39	-50
20	»	-18	»	-26	»	-26	»	-30	»	-24	»	-27	»	-36	»	»	»
21	-15	-19	-17	-27	»	-27	-30	-31	-28	-25	-20	-28	-34	»	-33	-40	-49
22	-16	»	»	»	-24	»	-31	»	-27	»	-19	»	-33	»	-34	»	»
23	»	-20	-16	-26	-23	-28	-30	-32	-26	»	-20	-29	-34	-37	-33	»	-50
24	»	-19	»	-25	»	-29	»	»	»	-24	»	-30	»	-38	»	-41	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-15	»	-15	»	-22	»	-29	»	-27	»	-19	»	»	»	-34	»	-49
27	-14	»	-16	»	»	-30	-30	-31	-26	-23	»	»	-33	-39	-33	-40	-48
28	»	-18	»	-26	»	-31	»	-32	»	-22	»	-29	»	-38	»	-41	»
29	-13	-17	-17	-27	-23	-32	»	-31	-27	»	-20	-28	-34	-37	-34	»	-49
30	-12	»	-16	»	»	»	-29	»	»	»	-19	»	-33	»	-33	»	-48
31	-11	-16	»	-26	-24	-33	-28	»	-26	-21	-20	»	-34	-36	-34	-42	-49
32	»	-17	»	-27	»	-32	»	-32	»	»	»	-29	»	-37	»	-43	»
33	»	-18	-17	-26	-23	»	»	»	-27	-22	-21	-30	-33	-36	-33	-44	»
34	-12	»	-16	»	»	»	-27	»	-26	»	-22	»	-32	»	»	»	-48
35	-11	-19	-17	»	-24	»	-28	-33	-27	-21	-23	-31	»	-35	-32	-45	-47
36	»	»	»	»	»	-31	»	-32	»	-22	»	-30	»	-36	»	-44	»
37	-12	»	-16	-25	-25	-32	-29	»	»	-21	-24	-29	-33	-37	-31	-45	-48
38	»	»	-17	»	-24	»	»	»	-26	»	-25	»	»	»	-32	»	-49
39	-13	-20	-16	-24	»	-33	-28	-33	-27	-20	-24	-28	-34	»	-33	-46	-50
40	»	-19	»	-23	»	-34	»	-34	»	-19	»	»	»	-38	»	-47	»
41	»	-18	-15	-22	-25	-33	-29	-33	-26	»	-23	-27	-33	-37	-34	-46	-51
42	-14	»	-14	»	-24	»	-30	»	-27	»	-22	»	-32	»	-35	»	»
43	-13	-17	-13	-21	-23	»	-29	-32	-26	-18	-23	-28	-31	-38	»	-47	-52
44	»	-18	»	»	»	-32	»	-31	»	-19	»	-29	»	-37	»	-48	»
45	-12	»	-14	-20	-24	-31	-28	-32	-25	-20	»	»	-32	-36	-36	-49	-53
46	-13	»	-15	»	-23	»	-29	»	»	»	-22	»	-31	»	-37	»	-52
47	-14	-17	-16	-21	-24	-32	»	-31	-26	-19	»	-28	-32	-35	-38	»	-51
48	»	»	»	-22	»	-31	»	-32	»	-18	»	-29	»	»	»	-50	»
49	-13	-18	-16	-21	-25	-32	-30	-33	-25	-19	-23	-29	-31	-36	-39	-49	-50

83000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	-50	-51	-60	-62	-58	-52	-57	-55	-54	-52	-53	-52	-53	-54	-52	-55	-50
1	»	-52	-61	»	-57	-53	-58	-56	-55	»	-52	-51	-52	-55	-51	-56	-49
2	»	-53	»	-61	»	-52	»	»	»	-51	»	-52	»	-54	»	-57	»
3	-49	»	-62	-60	-56	»	-57	-57	-54	-50	-51	-53	-51	-55	»	-58	»
4	-50	»	-61	»	-55	»	-58	»	»	»	-50	»	»	»	-50	»	-50
5	-49	»	-60	-59	-54	-53	-57	-58	-55	-49	»	-52	-52	-56	-51	-59	»
6	»	-54	»	-58	»	-54	»	-59	»	-50	»	-51	»	-55	»	»	»
7	-50	-55	-59	-59	-55	-55	»	-58	-56	-51	-51	-50	-53	-54	»	»	-49
8	-51	»	-58	»	»	»	-58	»	-57	»	-50	»	-54	»	-50	»	-48
9	-50	-54	»	-58	-54	-56	-59	-59	-58	-52	-51	»	»	-53	-49	-60	-49
10	»	-55	»	-59	»	-55	»	-58	»	»	»	»	»	-54	»	-59	»
11	-51	-54	-59	-60	-53	-56	-60	»	-57	-51	»	-51	-55	-55	-48	-60	»
12	-50	»	-60	»	-52	»	-59	»	-56	»	-50	»	-56	»	»	»	-48
13	-51	-55	-59	»	-53	-55	-58	-59	»	-52	-51	-52	»	-56	-49	-59	-49
14	»	»	»	-61	»	-54	»	»	»	-51	»	-53	»	-55	»	-58	»
15	-50	-56	»	-62	-52	-55	»	-58	»	-52	-50	-54	-55	-54	-50	-57	-50
16	-51	»	-58	»	-51	»	»	»	-55	»	-51	»	-54	»	-51	»	-51
17	-52	-57	-57	-61	»	-56	-59	-57	-54	-51	-52	-53	-53	»	-50	-56	-50
18	»	-58	»	»	»	-55	»	-58	»	-52	»	»	»	-55	»	-55	»
19	»	-57	»	-62	-52	-54	-60	-59	»	»	-51	-52	-54	-54	-49	-54	-49
20	-51	»	-58	»	-51	»	-59	»	-53	»	-52	»	-55	»	-50	»	»
21	»	-56	-57	-63	-52	»	-60	-58	-54	-53	-51	-53	-54	-53	»	-53	-50
22	»	-55	»	»	»	»	»	-59	»	-52	»	-52	»	-54	»	-52	»
23	-50	»	-58	-64	-53	-53	-59	-58	-53	-53	»	-53	-53	-55	-51	-53	-49
24	-51	»	-59	»	-52	»	-58	»	»	»	-50	»	-54	»	-52	»	-50
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-56	»	-63	»	-52	»	-57	»	-52	»	-52	»	»	»	-52	»
27	-50	-57	»	-62	-51	-51	-57	-56	-52	-53	-51	»	-53	-54	-53	-53	-51
28	»	»	-58	»	-50	»	-58	»	-53	»	-50	»	-52	»	-54	»	-50
29	-51	-58	-57	-61	-51	-52	-59	»	-52	-54	-51	-51	-51	-53	»	-52	»
30	»	-59	»	-62	»	»	»	-57	»	-55	»	-52	»	-54	»	»	»
31	-50	-60	-56	»	-50	-53	-58	-56	-51	-54	-52	-51	»	-53	-55	-53	-49
32	-49	»	-57	»	-49	»	-59	»	-50	»	»	»	-52	»	-54	»	-48
33	-48	-59	-58	-63	-50	-52	-58	-57	»	-55	-51	-50	-53	-52	-55	-52	-47
34	»	-60	»	-62	»	-53	»	-58	»	-56	»	-51	»	-51	»	»	»
35	-49	-59	-57	-61	»	-54	-59	-57	-51	-55	-52	-50	»	»	-56	-51	-46
36	-48	»	»	»	-49	»	-58	»	-52	»	-51	»	-52	»	-57	»	-45
37	»	-58	-58	-60	-50	-55	-57	-56	-51	»	-52	-51	-53	-50	-56	-52	-44
38	»	-59	»	-61	»	-54	»	»	»	-56	»	-50	»	-49	»	-51	»
39	-49	-60	-59	-60	-49	»	-56	-55	-52	-57	-51	-51	-54	-50	»	-50	-45
40	-50	»	-60	»	-48	»	-55	»	-53	»	-50	»	»	»	-55	»	-44
41	-49	»	-59	-59	-49	-53	-56	»	-52	-56	»	-52	-55	-49	-54	-49	-43
42	»	-61	»	-58	»	-54	»	-56	»	-57	»	-53	»	-50	»	-48	»
43	-48	-60	-60	-57	-50	-53	»	»	-51	-56	-51	-52	-54	»	-53	»	-44
44	-49	»	-61	»	»	»	-57	»	-52	»	-52	»	-53	»	-54	»	-43
45	-50	-61	»	-58	-51	-54	-56	-55	-51	-55	-53	»	-54	-51	-53	-49	-42
46	»	-60	»	-59	»	-55	»	»	»	»	»	-53	»	-52	»	-50	»
47	-51	-59	-62	-58	-52	-56	-55	»	-50	-54	-52	-54	-53	-53	-54	-51	»
48	-50	»	-61	»	-51	»	-54	»	-51	»	-51	»	-54	»	»	»	-41
49	-51	-60	-62	-58	-52	-57	-55	-54	-52	-53	-52	-53	-54	-52	-55	-50	-40

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	-40	-45	-37	-38	-37	-30	-29	-34	-29	-21	-22	-28	-25	-22	-17	-4	- 7
1	-41	»	-38	»	-36	-29	-30	-33	-28	-20	»	-27	-26	-21	-16	-3	- 6
2	-42	»	»	»	-35	»	-29	»	»	»	-21	»	-25	»	-17	»	- 5
3	-41	»	-39	-37	-34	-30	»	-32	-29	-19	-22	-28	-24	-20	-16	»	- 6
4	»	-46	»	-36	»	-31	»	-31	»	-18	»	-29	»	»	»	-2	»
5	-42	-45	»	-35	-33	-32	-30	-30	-28	-19	-23	»	-23	-21	-15	-3	- 7
6	»	»	-38	»	-34	»	-31	»	-29	»	-24	»	-22	»	-14	»	- 6
7	-41	-46	-39	-36	-35	-33	-32	»	-28	-20	»	-28	-23	-20	-13	-4	»
8	»	-45	»	-35	»	»	»	-29	»	-21	»	-27	»	-19	»	-5	»
9	-42	-44	-38	»	-34	-32	-31	-30	»	-20	-25	-26	»	-20	-14	-4	- 5
10	-43	»	-37	»	-33	»	-30	»	-27	»	»	»	-22	»	»	»	- 4
11	-44	-43	-36	-34	-34	-33	-29	-29	»	-21	»	-27	-21	-21	-13	-3	- 5
12	»	-44	»	-35	»	-32	»	-30	»	-20	»	-28	»	-20	»	»	»
13	-43	-45	-37	-34	»	-31	-28	-31	-26	-21	-26	-29	-20	»	-14	-2	- 6
14	-44	»	»	»	-33	»	-29	»	-25	»	-27	»	-21	»	-13	»	- 5
15	»	-44	-36	-35	-34	-30	-28	-30	-24	»	-28	-30	-22	-21	-12	-3	- 6
16	»	-43	»	-34	»	-31	»	»	»	-20	»	-31	»	-20	»	-4	»
17	-45	»	-35	-35	»	»	-29	-31	-23	-21	-29	»	-23	-19	»	-3	- 5
18	-44	»	-34	»	-33	»	-30	»	-22	»	-28	»	»	»	-13	»	- 4
19	-43	»	-35	-36	-32	»	-31	-30	-21	-20	»	-30	-24	-20	-12	-4	- 5
20	»	44	»	-35	»	-32	»	-29	»	-19	»	-29	»	-21	»	-5	»
21	-44	-43	-36	-36	-31	-31	»	-30	»	-20	-29	-28	-23	-20	-11	»	- 6
22	-43	»	-35	»	»	»	-32	»	-20	»	-30	»	-24	»	-10	»	- 5
23	-42	-42	»	-37	-30	-30	-33	-29	-21	-19	-29	»	-23	-21	- 9	-6	- 6
24	»	-41	»	-38	»	-29	»	-28	»	»	»	-27	»	-20	»	-5	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-43	»	-36	»	-31	»	-32	»	-22	»	-28	»	-22	»	»	»	- 7
27	»	-42	-37	»	-30	-30	-31	-29	-21	-20	-27	-26	»	-21	- 8	-6	- 8
28	»	»	»	-39	»	-31	»	-30	»	-19	»	-25	»	-22	»	-7	»
29	-42	-41	-36	-38	-29	-30	-30	-29	»	-20	-28	-24	-21	-21	- 7	-6	- 7
30	-43	»	-37	»	-28	»	»	»	-22	»	-29	»	-20	»	- 6	»	- 8
31	-42	-40	-38	-39	»	-29	-31	-28	-21	-21	-30	-25	-21	»	- 5	-7	- 9
32	»	-39	»	-38	»	-28	»	-27	»	»	»	»	»	-22	»	-6	»
33	»	-38	-39	-37	-27	-29	-30	-26	-20	»	-29	-24	-20	-21	- 6	-5	-10
34	-43	»	-38	»	-28	»	-31	»	-21	»	-28	»	-21	»	- 7	»	»
35	-44	-39	-37	-36	-29	»	-30	-27	-22	-22	-29	-23	-20	-22	»	-6	- 9
36	»	-38	»	»	»	-30	»	»	»	-23	»	-22	»	-21	»	-7	»
37	-45	»	-36	-35	-28	-29	-31	-28	-23	-22	»	-21	-21	-22	- 6	-6	»
38	-46	»	-37	»	-27	»	-30	»	»	»	-28	»	-22	»	- 5	»	- 8
39	-45	-37	-38	-34	-28	-30	»	-27	-22	-21	-29	-22	-23	-21	»	»	- 9
40	»	-38	»	-35	»	-29	»	»	»	-20	»	-23	»	»	»	-7	»
41	-44	-37	»	-36	-29	»	-29	-26	-21	-21	-30	»	»	-22	- 4	-8	-10
42	»	»	-37	»	-30	»	-30	»	-20	»	-31	»	-22	»	- 3	»	»
43	-45	-38	-38	-37	-31	-28	-31	»	-19	-20	»	-22	-23	-21	- 4	-7	»
44	»	-37	»	-36	»	»	»	-27	»	»	»	-23	»	-20	»	-6	»
45	-44	-38	-37	»	-32	-29	-32	-26	»	-21	-30	-24	»	-19	- 5	-7	-11
46	-45	»	-38	»	-31	»	-33	»	-20	»	»	»	-24	»	- 4	»	-10
47	-46	-37	-37	-35	-30	-28	»	-27	»	-22	-29	-25	-23	-18	- 5	-8	- 9
48	»	-38	»	-36	»	»	»	-28	»	-23	»	-24	»	-17	»	»	»
49	-45	-37	-38	-37	-30	-29	-34	-29	-21	-22	-28	-25	-22	-17	- 4	-7	- 8

84000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	−8	− 5	0	−2	5	7	3	10	−3	−1	− 3	−9	−6	−2	−3	6	8
1	−9	− 4	»	−1	4	8	4	11	−4	−2	− 2	»	−7	−1	−2	5	7
2	»	− 5	»	0	»	9	»	10	»	»	»	−8	»	−2	»	6	»
3	−8	− 4	−1	1	5	8	5	»	−3	−1	− 1	−9	−8	−1	−3	7	»
4	−9	»	−2	»	4	»	4	»	−2	»	0	»	−9	»	»	»	6
5	−8	− 5	−1	»	5	7	5	9	−1	0	1	−8	»	0	−2	6	7
6	»	»	»	0	»	6	»	8	»	−1	»	−7	»	1	»	5	»
7	−7	− 6	0	1	6	7	6	7	»	−2	0	−8	−8	0	−1	6	8
8	−6	»	1	»	5	»	»	»	0	»	»	»	−7	»	−2	»	9
9	−5	− 7	0	2	»	8	7	6	1	−3	− 1	−9	−8	»	−3	5	8
10	»	− 6	»	3	»	7	»	5	»	−2	»	»	»	−1	»	6	»
11	»	− 7	−1	»	4	6	8	6	2	»	− 2	−8	−9	0	−2	7	7
12	−4	»	−2	»	»	»	9	»	3	»	− 1	»	−8	»	−1	»	»
13	−5	− 6	−3	»	3	»	8	5	2	−3	− 2	−7	−7	1	»	6	8
14	»	− 5	»	»	»	7	»	6	»	−2	»	−6	»	2	»	7	»
15	−6	»	−2	4	4	8	7	5	1	−1	»	−5	−8	1	0	8	7
16	−5	»	−3	»	5	»	8	»	»	»	− 3	»	−7	»	1	»	6
17	−6	− 6	−4	3	6	7	»	4	2	−2	− 4	−4	−8	0	0	»	5
18	»	− 7	»	2	»	6	»	3	»	−1	»	−5	»	»	»	9	»
19	−7	− 8	»	1	7	5	9	2	3	−2	− 5	»	−7	1	»	8	6
20	»	»	−3	»	8	»	»	»	2	»	− 6	»	−6	»	−1	»	»
21	−6	− 9	−4	0	9	4	8	»	1	−3	− 7	−6	−5	0	0	»	»
22	»	−10	»	1	»	»	»	3	»	−2	»	−7	»	−1	»	7	»
23	−7	− 9	−3	»	10	3	7	2	2	−3	− 6	−8	»	»	−1	6	7
24	»	»	−4	»	9	»	6	»	3	»	»	»	»	»	0	»	8
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	− 8	»	2	»	2	»	1	»	−4	»	−9	»	0	»	»	»
27	−6	− 9	−3	1	»	3	7	2	2	»	− 7	−8	−4	»	»	7	9
28	−7	»	»	»	10	»	8	»	»	»	− 6	»	−5	»	1	»	10
29	»	− 8	−2	0	9	2	7	»	3	»	− 5	−7	»	−1	2	6	11
30	»	− 7	»	1	»	1	»	»	»	−5	»	−6	»	0	»	7	»
31	−6	− 6	−1	0	8	»	8	»	2	−6	− 6	−7	−6	−1	»	6	12
32	−7	»	−2	»	»	»	9	»	1	»	− 7	»	»	»	1	»	13
33	−8	»	−1	»	7	2	10	3	2	−5	»	−8	−5	0	2	7	12
34	»	− 5	»	1	»	3	»	2	»	−4	»	−7	»	−1	»	6	»
35	−7	»	−2	2	6	2	»	1	1	−3	− 8	−6	−6	0	3	»	11
36	»	»	−1	»	»	»	11	»	2	»	− 9	»	−5	»	4	»	12
37	−8	− 4	»	1	7	1	12	»	1	−4	−10	»	−4	−1	5	5	11
38	»	− 3	»	2	»	2	»	2	»	»	»	−7	»	−2	»	6	»
39	−7	− 4	−2	3	8	1	13	»	0	−3	− 9	−8	−5	−3	6	7	»
40	−6	»	−1	»	7	»	12	»	−1	»	−10	»	−4	»	»	»	12
41	−5	− 3	−2	»	6	2	13	1	−2	−4	− 9	−7	»	−2	5	6	13
42	«	»	»	4	»	1	»	0	»	−3	»	−8	»	−3	»	5	»
43	»	− 2	−1	3	7	2	12	1	»	−4	− 8	−7	−3	−4	6	6	12
44	−6	»	−2	»	8	»	»	»	−1	»	− 9	»	−2	»	7	»	13
45	−7	− 1	»	4	»	3	11	0	0	−3	− 8	−8	−3	»	6	5	12
46	»	0	»	5	»	4	»	−1	»	−2	»	»	»	−3	»	6	»
47	»	− 1	−1	4	9	3	12	−2	1	»	− 7	−7	−4	−2	5	7	13
48	−6	»	−2	»	8	»	11	»	0	»	− 8	»	−3	»	6	»	»
49	−5	0	−2	5	7	3	10	−3	−1	−3	− 9	−6	−2	−3	6	8	12

85000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	12	21	22	30	25	19	21	23	25	22	21	23	23	28	32	34	33
1	11	20	23	»	26	20	20	24	24	21	22	22	»	27	33	35	32
2	10	»	24	»	27	»	19	»	25	»	»	»	24	»	34	»	33
3	11	21	25	31	28	21	18	25	»	20	21	21	25	26	33	36	»
4	»	20	»	30	»	»	»	26	»	21	»	22	»	27	»	»	»
5	10	19	26	29	»	22	19	27	26	»	»	21	26	»	»	35	34
6	11	»	»	»	27	»	18	»	27	»	22	»	27	»	32	»	33
7	»	18	27	30	»	21	17	26	28	»	23	22	»	28	33	»	32
8	»	17	»	29	»	20	»	»	»	20	»	»	»	27	»	34	»
9	10	16	28	28	26	»	16	25	29	19	»	21	28	26	»	35	33
10	9	»	29	»	25	»	17	»	28	»	24	»	»	»	34	»	34
11	8	»	28	27	24	19	18	26	»	18	»	20	27	25	35	34	35
12	»	15	»	26	»	18	»	»	»	17	»	21	»	26	»	33	»
13	7	16	27	25	25	»	»	27	27	16	23	20	26	25	34	»	34
14	8	»	28	»	»	»	19	»	26	»	24	»	25	»	»	»	35
15	9	15	»	26	»	19	18	28	25	17	23	»	24	26	33	32	36
16	»	16	»	»	»	20	»	27	»	»	»	21	»	25	»	33	»
17	10	17	»	25	24	21	19	»	24	16	24	22	25	24	32	34	»
18	11	»	27	»	25	»	20	»	25	»	23	»	26	»	»	»	37
19	»	16	26	»	24	22	19	»	26	15	24	21	»	23	31	33	36
20	»	»	»	26	»	23	»	26	»	14	»	20	»	24	»	34	»
21	»	15	27	27	23	22	18	27	»	15	25	21	27	25	30	33	35
22	12	»	28	»	22	»	»	»	27	»	24	»	28	»	29	»	34
23	13	14	29	26	»	23	19	28	26	16	25	22	29	»	28	34	35
24	»	15	»	27	»	24	»	27	»	15	»	»	»	26	»	35	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	14	»	30	»	23	»	18	»	25	»	24	»	»	»	29	»	»
27	13	16	31	26	22	»	19	28	26	16	25	21	28	27	»	34	34
28	»	»	»	»	»	25	»	29	»	17	»	22	»	26	»	35	»
29	14	»	30	25	21	26	18	30	25	18	»	23	27	27	»	34	35
30	15	»	29	»	22	»	17	»	»	»	24	»	26	»	30	»	34
31	16	17	28	24	23	25	»	31	26	19	23	22	27	26	29	»	33
32	»	16	»	25	»	24	»	30	»	20	»	21	»	»	»	33	»
33	17	17	»	26	22	23	16	29	27	21	22	»	28	27	28	»	34
34	»	»	29	»	23	»	17	»	26	»	23	»	29	»	29	»	33
35	»	16	30	25	22	22	18	»	27	20	22	22	28	28	30	34	»
36	»	17	»	24	»	»	»	28	»	21	»	21	»	29	»	35	»
37	18	18	31	»	21	21	19	29	26	22	21	22	»	28	31	34	34
38	»	»	30	»	20	»	20	»	27	»	»	»	29	»	30	»	35
39	19	17	29	25	21	20	21	30	»	21	22	23	28	29	31	35	34
40	»	18	»	26	»	21	»	31	»	22	»	22	»	30	»	»	»
41	20	19	»	25	»	20	22	30	26	»	23	23	29	»	32	34	35
42	19	»	»	»	20	»	23	»	25	»	22	»	30	»	33	»	36
43	»	20	30	24	21	19	22	29	24	»	23	22	29	29	34	33	35
44	»	19	»	25	»	18	»	»	»	21	»	23	»	28	»	34	»
45	18	20	31	24	20	»	23	28	23	20	»	22	28	29	»	35	34
46	19	»	32	»	19	»	24	»	22	»	22	»	»	»	35	»	35
47	20	»	31	25	20	19	23	27	21	19	»	23	27	30	»	34	36
48	»	21	»	26	»	20	»	26	»	20	»	24	»	31	»	33	»
49	21	22	30	25	19	21	23	25	22	21	23	23	28	32	34	33	37

86000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	37	42	41	48	48	57	62	64	67	56	56	54	46	48	40	37	32
1	38	»	40	49	»	56	61	63	66	57	»	53	47	»	39	38	33
2	»	41	»	50	»	57	»	62	»	58	»	»	»	49	»	39	»
3	»	40	41	49	47	56	60	63	67	»	57	52	48	50	38	38	32
4	37	»	40	»	48	»	59	»	66	»	58	»	49	»	39	»	»
5	36	39	39	»	49	»	60	62	65	57	59	53	48	49	»	37	33
6	»	40	»	»	»	57	»	63	»	58	»	54	»	48	»	36	»
7	35	»	40	50	50	58	61	64	66	59	»	53	47	47	38	37	34
8	36	»	39	»	51	»	62	»	»	»	58	»	48	»	39	»	33
9	35	39	40	51	52	57	»	63	67	60	59	52	49	48	»	»	34
10	»	40	»	50	»	»	»	62	»	61	»	53	»	»	»	36	»
11	34	39	»	49	53	56	63	61	68	60	58	»	50	47	38	»	33
12	»	»	39	»	52	»	62	»	67	»	57	»	51	»	37	»	32
13	35	40	40	50	53	57	61	»	68	59	58	54	50	48	38	35	»
14	»	39	»	49	»	»	»	60	»	58	»	53	»	47	»	36	»
15	34	40	39	»	52	58	62	61	66	57	57	52	»	46	37	37	33
16	35	»	40	»	53	»	61	»	6	»	»	»	51	»	38	»	32
17	34	39	41	48	54	57	62	60	»	56	58	51	52	47	39	38	31
18	»	40	»	47	»	»	»	59	»	57	»	50	»	48	»	»	»
19	33	41	42	46	»	58	61	58	65	58	59	49	51	»	38	39	32
20	34	»	»	»	55	»	60	»	64	»	60	»	50	»	39	»	31
21	»	42	43	47	56	57	61	»	63	»	59	50	49	49	38	40	30
22	»	41	»	48	»	58	»	»	»	»	»	49	»	48	»	39	»
23	35	42	44	49	57	»	62	59	62	59	58	48	»	47	»	38	31
24	36	»	43	»	58	»	61	»	63	»	57	»	»	»	37	»	32
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	43	»	48	»	57	»	60	»	60	»	49	»	46	»	37	»
27	37	44	44	49	57	58	»	59	62	59	56	»	50	47	38	»	31
28	38	»	45	»	»	»	62	»	61	»	57	»	49	»	39	»	30
29	39	43	»	48	58	59	63	58	60	60	56	»	»	48	40	38	31
30	»	42	»	49	»	60	»	59	»	»	»	48	»	49	»	37	»
31	40	»	44	48	59	59	62	»	61	59	55	49	50	48	39	38	»
32	41	»	»	»	58	»	61	»	60	»	54	»	49	»	»	»	30
33	»	41	45	»	59	58	62	60	59	60	53	48	»	47	40	37	31
34	»	»	»	47	»	59	»	61	»	61	»	49	»	46	»	36	»
35	42	40	44	48	58	60	61	62	»	62	52	48	50	45	41	35	»
36	41	»	43	»	59	»	»	»	58	»	53	»	51	»	40	»	30
37	42	41	44	47	»	61	62	63	59	61	54	49	50	»	»	34	29
38	»	40	»	46	»	60	»	64	»	60	»	»	»	»	»	33	»
39	»	41	»	47	58	61	63	65	58	»	55	48	»	44	39	34	30
40	41	»	45	»	57	»	62	»	57	»	»	»	49	»	40	»	»
41	40	42	46	48	58	»	61	66	58	59	»	49	48	43	»	33	29
42	»	41	»	»	»	60	»	65	»	»	»	50	»	42	»	32	»
43	41	»	45	47	59	59	62	66	»	58	»	49	47	41	41	31	28
44	40	»	46	»	58	»	63	»	»	»	54	»	46	»	»	»	27
45	41	40	47	48	57	60	»	67	57	57	55	48	47	40	40	»	28
46	»	41	»	49	»	»	»	66	»	56	»	47	»	»	»	32	»
47	»	42	»	48	»	61	64	67	56	57	54	»	46	41	39	33	[illegible]
48	»	»	48	»	56	»	65	»	57	»	55	»	47	»	38	»	28
49	42	41	48	48	57	62	64	67	56	56	54	46	48	40	37	32	28

87000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	28	27	29	41	38	37	41	39	37	37	33	29	40	33	43	37	32
1	27	28	30	42	39	»	40	38	36	36	»	30	39	32	»	36	33
2	28	»	31	»	40	»	39	»	37	»	32	»	»	»	42	»	34
3	29	»	32	43	41	36	40	39	»	37	»	31	38	33	41	35	35
4	»	27	»	42	»	37	»	40	»	36	»	32	»	34	»	36	»
5	30	26	33	43	42	38	»	39	38	35	33	31	37	35	40	»	34
6	31	»	32	»	»	»	41	»	37	»	34	»	36	»	39	»	33
7	30	27	»	44	43	»	42	38	36	36	35	»	35	36	38	35	34
8	»	26	»	43	»	37	»	37	»	»	»	32	»	37	»	34	»
9	29	27	33	44	42	38	43	»	37	35	36	33	36	36	39	35	»
10	30	»	34	»	41	»	42	»	38	»	35	»	37	»	»	»	33
11	31	26	35	»	40	39	41	36	39	36	34	32	»	37	38	36	34
12	»	»	»	45	»	40	»	37	»	37	»	31	»	38	»	37	»
13	30	27	36	46	41	41	40	38	»	36	33	32	38	39	37	38	33
14	29	»	37	»	40	»	»	»	40	»	32	»	37	»	38	»	32
15	»	28	36	47	»	42	39	37	41	37	31	31	38	»	39	37	31
16	»	29	»	46	»	41	»	»	»	38	»	»	»	38	»	38	»
17	»	30	37	45	41	40	38	36	42	»	30	32	37	39	40	37	30
18	28	»	38	»	42	»	37	»	41	»	29	»	36	»	41	»	»
19	29	29	37	46	41	»	38	35	40	37	30	33	35	40	»	»	31
20	»	30	»	»	»	39	»	34	»	36	»	32	»	41	»	38	»
21	30	»	36	45	40	38	37	33	41	37	»	31	34	»	40	39	30
22	31	»	35	»	39	»	38	»	»	»	29	»	»	»	39	»	31
23	30	29	»	44	38	39	»	34	40	36	30	»	33	42	38	»	30
24	»	30	»	45	»	38	»	33	»	37	»	32	»	»	»	38	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	36	»	37	»	39	»	»	»	29	»	34	»	39	»	29
27	29	31	35	44	38	39	40	»	39	38	30	33	35	43	38	37	»
28	»	30	»	43	»	»	»	»	»	37	»	34	»	44	»	»	»
29	30	29	34	»	37	»	39	32	38	36	31	»	»	43	39	36	28
30	31	»	33	»	»	»	40	»	37	»	»	»	34	»	38	»	27
31	30	28	32	»	38	40	41	33	»	35	32	35	»	42	39	35	28
32	»	29	»	42	»	41	»	34	»	34	»	36	»	43	»	»	»
33	29	»	33	43	»	40	42	35	36	35	31	35	33	»	40	34	27
34	»	»	»	»	37	»	41	»	35	»	32	»	32	»	39	»	26
35	»	30	34	42	38	39	42	36	36	»	»	36	33	44	38	»	27
36	»	29	»	41	»	38	»	»	»	36	»	37	»	45	»	33	»
37	30	28	35	42	39	»	41	35	37	37	31	36	34	44	»	34	26
38	29	»	36	»	38	»	42	»	36	»	30	»	»	»	37	»	27
39	28	»	37	41	37	39	43	34	35	»	»	37	35	45	38	35	26
40	»	29	»	40	»	38	»	33	»	36	»	38	»	44	»	34	»
41	29	30	38	41	38	39	»	34	36	35	29	37	34	43	»	»	27
42	30	»	39	»	»	»	42	»	35	»	30	»	35	»	37	»	26
43	31	31	»	40	37	38	41	35	34	34	29	»	34	42	36	33	27
44	»	30	»	39	»	39	»	34	»	»	»	36	»	43	»	32	»
45	30	31	40	38	36	40	40	»	35	33	30	37	33	42	37	33	»
46	29	»	41	»	35	»	39	»	36	»	29	»	34	»	»	»	28
47	28	30	42	»	36	39	40	35	37	32	30	38	»	43	38	32	29
48	»	»	»	37	»	40	»	36	»	33	»	39	»	42	»	33	»
49	27	29	41	38	37	41	39	37	37	33	29	40	33	43	37	32	30

88000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	30	29	32	40	37	45	35	28	26	18	22	21	26	27	23	29	34
1	29	30	»	41	38	46	»	27	25	19	23	20	25	26	24	»	»
2	»	31	»	40	»	47	»	28	»	20	»	21	»	»	»	»	»
3	30	30	»	39	37	48	34	29	26	19	22	»	26	25	»	30	35
4	»	»	31	»	38	»	35	»	27	»	23	»	27	»	25	»	34
5	31	29	32	40	39	47	34	»	28	18	22	22	»	24	24	29	»
6	»	30	»	41	»	»	»	30	»	17	»	»	»	23	»	30	»
7	30	29	33	»	38	46	33	31	29	18	»	23	»	22	25	29	35
8	29	»	32	»	37	»	32	»	28	»	»	»	28	»	26	»	36
9	28	30	33	40	36	47	31	32	»	19	23	24	27	21	25	28	37
10	»	29	»	41	»	46	»	»	»	20	»	25	»	22	»	»	»
11	29	30	34	40	»	47	»	»	27	19	24	24	26	»	26	27	38
12	»	»	»	»	37	»	30	»	26	»	23	»	27	»	27	»	37
13	»	31	35	39	»	46	31	33	25	»	24	23	26	23	28	26	38
14	»	32	»	»	»	45	»	»	»	»	»	22	»	22	»	25	»
15	28	33	»	38	36	»	30	32	24	20	25	21	25	21	»	26	39
16	27	»	34	»	37	»	31	»	23	»	26	»	»	»	27	»	38
17	»	»	35	37	»	46	32	31	22	21	»	20	»	22	26	25	39
18	»	32	»	38	»	47	»	30	»	20	»	19	»	21	»	26	»
19	28	31	36	39	38	48	»	29	21	19	25	20	26	20	25	»	38
20	27	»	35	»	»	»	33	»	22	»	24	»	27	»	24	»	39
21	28	30	»	40	37	49	32	28	21	20	25	»	26	19	23	27	40
22	»	31	»	41	»	48	»	27	»	»	»	21	»	18	»	28	»
23	»	32	34	40	38	47	33	»	22	21	24	22	25	19	24	29	»
24	»	»	35	»	39	»	32	»	21	»	23	»	26	»	»	»	41
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	39	»	48	»	26	»	22	»	23	»	20	»	28	»
27	27	31	34	38	40	49	33	27	»	23	22	24	25	19	25	29	40
28	26	»	33	»	41	»	»	»	22	»	21	»	24	»	24	»	41
29	27	30	34	39	»	48	32	28	23	24	20	25	25	»	23	28	40
30	»	31	»	38	»	47	»	29	»	23	»	»	»	18	»	29	»
31	»	30	33	37	42	46	31	28	24	»	19	24	26	19	24	28	41
32	28	»	34	»	43	»	30	»	25	»	20	»	27	»	25	»	»
33	27	29	»	36	42	»	29	29	24	22	21	25	28	18	»	29	42
34	»	30	»	»	»	45	»	30	»	21	»	26	»	19	»	30	»
35	28	»	35	37	41	44	30	29	23	20	»	25	29	18	24	31	41
36	27	»	36	»	42	»	29	»	»	»	22	»	30	»	25	»	40
37	28	31	37	38	41	43	»	28	24	21	21	26	29	17	26	»	41
38	»	30	»	39	»	42	»	29	»	20	»	27	»	»	»	30	»
39	29	31	»	38	40	41	30	28	23	21	22	»	28	18	27	31	42
40	»	»	38	»	41	»	29	»	22	»	21	»	27	»	28	»	41
41	30	32	37	37	42	40	28	»	21	20	22	26	26	19	29	32	»
42	»	33	»	»	»	»	»	27	»	19	»	25	»	20	»	33	»
43	31	32	36	»	43	39	29	26	20	20	23	24	»	21	28	32	40
44	30	»	37	»	44	»	28	»	19	»	»	»	27	»	27	»	39
45	31	33	38	38	45	38	29	27	»	21	24	23	28	22	28	»	38
46	»	32	»	37	»	37	»	26	»	»	»	24	»	23	»	»	»
47	30	31	39	36	»	36	28	25	18	22	23	25	27	»	29	33	39
48	29	»	»	»	44	»	27	»	17	»	22	»	26	»	28	»	40
49	29	32	40	37	45	35	28	26	18	22	21	26	27	23	29	34	41

89000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	41	40	42	43	45	47	45	44	48	44	38	48	48	41	34	30	30
1	42	39	41	44	44	»	44	»	49	43	39	49	47	40	35	29	»
2	43	»	40	»	45	»	45	»	48	»	40	»	46	»	»	»	31
3	44	38	41	»	44	48	46	45	49	42	41	48	»	39	34	28	30
4	»	»	»	43	»	47	»	44	»	41	»	47	»	40	»	27	»
5	45	37	»	42	45	46	45	43	»	42	40	48	47	39	33	28	29
6	46	»	40	»	46	»	»	»	48	»	39	»	»	»	34	»	28
7	47	38	41	43	»	47	46	42	47	41	40	47	46	»	33	29	29
8	»	39	»	44	»	48	»	43	»	40	»	»	»	40	»	28	»
9	»	38	42	45	47	49	45	42	46	»	41	48	45	41	34	27	28
10	46	»	41	»	46	»	46	»	45	»	42	»	46	»	35	»	»
11	45	37	42	44	45	»	47	41	46	39	43	49	45	40	»	28	27
12	»	38	»	»	»	48	»	42	»	40	»	50	»	39	»	27	»
13	46	»	43	43	44	47	46	41	47	39	»	51	44	38	34	26	28
14	45	»	44	»	45	»	47	»	»	»	44	»	»	»	33	»	29
15	44	37	43	44	46	46	»	42	46	40	43	50	45	37	34	»	28
16	»	38	»	45	»	47	»	43	»	39	»	51	»	»	»	27	»
17	45	39	»	46	45	46	46	44	45	38	44	»	44	36	33	28	27
18	»	»	44	»	44	»	45	»	44	»	43	»	45	»	32	»	26
19	46	40	45	47	45	45	44	»	45	37	44	52	44	35	31	27	»
20	»	39	»	46	»	»	»	45	»	36	»	51	»	34	»	26	»
21	45	40	44	»	46	44	43	46	44	35	43	50	»	35	32	25	25
22	46	»	45	»	45	»	42	»	43	»	»	»	43	»	31	»	26
23	45	41	44	47	44	45	41	47	»	34	»	49	44	34	32	26	27
24	»	42	»	46	»	44	»	46	»	33	»	50	»	33	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	44	»	»	»	45	»	42	»	42	»	44	»	43	»	31	»	26
27	»	43	43	45	44	45	41	47	41	»	45	51	42	32	32	27	27
28	»	42	»	46	»	46	»	»	»	32	»	52	»	31	»	26	»
29	45	43	44	45	45	»	42	48	40	33	44	51	43	32	»	27	28
30	44	»	»	»	46	»	41	»	39	»	45	»	»	»	31	»	29
31	43	»	45	46	45	47	42	49	40	32	»	50	44	33	32	28	28
32	»	42	»	47	»	46	»	48	»	33	»	49	»	32	»	29	»
33	44	43	46	46	46	47	»	49	41	34	46	50	45	31	33	»	»
34	43	»	45	»	»	»	43	»	42	»	47	»	46	»	32	»	27
35	42	44	»	45	45	48	44	48	43	35	48	»	45	30	»	»	28
36	»	43	»	44	»	47	»	49	»	»	»	49	»	»	»	28	»
37	41	44	44	»	44	48	43	»	44	36	47	50	»	31	31	27	»
38	42	»	43	»	43	»	44	»	43	»	46	»	44	»	»	»	29
39	41	43	42	»	44	49	43	48	44	37	»	49	»	32	30	28	30
40	»	»	»	43	»	48	»	49	»	»	»	50	»	33	»	29	»
41	40	44	41	44	45	47	44	48	»	38	45	49	45	34	29	30	29
42	39	»	42	»	46	»	»	»	45	»	46	»	44	»	28	»	»
43	40	43	»	45	»	46	»	49	44	»	47	48	43	»	29	29	28
44	»	42	»	44	»	»	»	48	»	37	»	»	»	»	»	30	»
45	»	43	43	45	»	45	43	49	45	»	48	49	42	33	30	31	27
46	41	»	42	»	45	»	44	»	44	»	49	»	41	»	31	»	»
47	40	42	»	44	46	»	43	50	43	38	48	50	40	32	»	30	28
48	»	»	»	»	»	46	»	49	»	37	»	49	»	33	»	29	»
49	40	42	43	45	47	45	44	48	44	38	48	48	41	34	30	30	29

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	29	23	19	26	24	28	21	25	19	16	12	9	14	4	3	6	6
1	28	22	20	27	25	»	22	»	»	15	11	10	15	5	4	7	7
2	»	23	»	26	»	29	»	26	»	16	»	9	»	6	»	»	»
3	27	22	19	25	»	28	23	25	18	15	12	8	14	»	3	8	6
4	26	»	»	»	24	»	22	»	19	»	13	»	13	»	4	»	7
5	»	21	18	26	25	27	21	26	20	»	14	9	14	7	3	7	8
6	»	20	»	27	»	26	»	»	»	16	»	8	»	6	»	6	»
7	25	19	17	28	24	»	22	27	21	15	»	9	13	7	»	7	9
8	24	»	18	»	23	»	23	»	22	»	13	»	»	»	4	»	8
9	23	»	17	27	24	25	24	28	21	14	»	8	12	6	3	6	9
10	»	18	»	28	»	24	»	27	»	13	»	7	»	5	»	7	»
11	22	19	18	27	23	23	»	26	22	14	12	6	»	6	4	»	10
12	23	»	17	»	»	»	25	»	21	»	11	»	11	»	3	»	11
13	»	18	»	26	24	22	24	25	20	13	10	»	12	5	4	6	12
14	»	17	»	25	»	23	»	26	»	»	»	7	»	4	»	5	»
15	22	18	16	24	25	24	23	»	19	14	11	8	11	3	3	6	»
16	23	»	15	»	26	»	24	»	18	»	10	»	10	»	»	»	»
17	22	17	»	»	25	23	25	25	19	13	9	9	»	4	2	»	11
18	»	»	»	23	»	24	»	26	»	14	»	10	»	5	»	7	»
19	21	16	16	24	24	23	24	»	»	13	10	11	9	»	1	6	10
20	22	»	17	»	25	»	»	»	20	»	»	»	»	»	2	»	9
21	21	15	18	25	»	24	23	25	19	12	9	»	8	»	3	5	8
22	»	14	»	24	»	23	»	26	»	11	»	»	»	4	»	4	»
23	»	13	19	25	24	24	»	27	20	»	8	10	7	3	4	3	7
24	22	»	20	»	23	»	24	»	»	»	7	»	6	»	5	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	14	»	»	»	23	»	26	»	12	»	9	»	2	»	4	»
27	23	»	»	24	24	»	25	25	19	11	»	8	5	1	6	5	8
28	22	»	21	»	»	»	26	»	»	»	8	»	6	»	7	»	9
29	21	15	22	»	25	22	»	26	20	10	7	9	5	2	6	»	»
30	»	16	»	23	»	21	»	25	»	11	»	8	»	»	»	6	»
31	22	»	»	22	24	20	25	24	19	10	8	»	4	3	7	5	10
32	»	»	23	»	25	»	24	»	20	»	7	»	3	»	»	»	9
33	21	17	24	21	26	21	»	»	21	9	6	7	2	2	6	4	»
34	»	16	»	22	»	»	»	23	»	8	»	6	»	3	»	5	»
35	20	17	25	»	25	20	25	22	20	9	7	7	»	2	7	6	10
36	21	»	24	»	26	»	26	»	19	»	»	»	3	»	8	»	11
37	20	16	25	21	27	19	25	23	»	10	8	8	4	3	»	7	12
38	»	15	»	22	»	18	»	22	»	9	»	9	»	2	»	»	»
39	21	14	24	23	»	19	26	21	20	8	9	8	3	»	7	6	»
40	22	»	»	»	26	»	27	»	19	»	»	»	2	»	6	»	13
41	»	15	25	22	27	20	26	20	18	»	8	9	1	3	7	7	12
42	»	16	»	23	»	21	»	»	»	9	»	10	»	2	»	6	»
43	»	17	24	24	26	»	25	19	17	10	9	11	2	3	»	7	13
44	23	»	25	»	27	»	26	»	16	»	10	»	»	»	8	»	12
45	22	»	26	23	26	20	25	20	15	11	»	12	3	4	9	8	13
46	»	»	»	24	»	19	»	19	»	12	»	13	»	3	»	7	»
47	21	18	27	23	27	20	»	20	16	11	9	14	2	4	8	»	12
48	22	»	26	»	»	»	26	»	15	»	10	»	3	»	7	»	11
49	23	19	26	24	28	21	25	19	16	12	9	14	4	3	6	6	10

90000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	10	18	11	10	-7	-6	-13	-14	-4	6	3	0	4	0	8	3	11
1	»	19	10	9	-6	-5	-14	-13	-3	»	2	1	3	-1	»	4	12
2	9	»	9	»	-7	»	-13	»	-4	»	1	»	2	»	7	»	»
3	»	20	8	8	-8	»	-14	-12	-5	5	0	0	»	0	»	5	11
4	»	19	»	»	»	-4	»	-11	»	»	»	»	»	-1	»	6	»
5	10	»	7	9	-9	-3	-13	-10	-4	4	»	-1	1	-2	8	7	10
6	11	»	8	»	-8	»	-12	»	»	»	-1	»	»	»	7	»	9
7	10	18	7	8	-9	-2	»	-9	»	5	-2	»	2	-1	8	»	10
8	»	17	»	7	»	-3	»	»	»	6	»	-2	»	»	»	8	»
9	9	16	»	6	-8	-4	»	-10	-3	5	-1	»	3	-2	9	7	9
10	»	»	6	»	-9	»	-13	»	-2	»	-2	»	2	»	8	»	10
11	10	15	5	7	»	-3	-14	»	-1	6	-1	-1	1	-1	»	8	»
12	»	14	»	»	»	»	»	-9	»	7	»	-2	»	0	»	9	»
13	11	13	»	»	-8	-4	-13	-10	-2	8	0	-1	»	1	7	8	11
14	12	»	6	»	-7	»	-14	»	-3	»	»	»	0	»	8	»	12
15	»	12	7	8	-8	-5	-13	-11	»	9	»	0	-1	0	9	9	13
16	»	13	»	9	»	-4	»	»	»	8	»	1	»	-1	»	»	»
17	11	14	6	8	»	-5	-14	-10	-2	9	1	2	-2	»	8	10	12
18	12	»	»	»	-7	»	-15	»	-3	»	0	»	-1	»	9	»	11
19	»	15	5	7	-6	-4	-14	-9	-2	»	1	1	0	»	8	11	12
20	»	16	»	6	»	-3	»	»	»	10	»	2	»	0	»	10	»
21	13	17	4	5	-7	»	-13	-10	-3	9	2	1	1	1	»	11	13
22	14	»	5	»	-6	»	-12	»	-2	»	1	»	»	»	7	»	14
23	13	»	4	4	-7	-4	-11	-9	-1	8	»	0	0	2	8	12	15
24	»	18	»	3	»	-5	»	-8	»	7	»	1	»	3	»	13	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	14	»	5	»	»	»	-12	»	-2	»	2	»	1	»	7	»	14
27	15	17	»	»	-8	-4	-13	-9	-1	8	3	»	0	4	6	12	13
28	»	16	»	2	»	-5	»	-8	»	»	»	0	»	5	»	11	»
29	14	15	6	1	-9	-4	-12	»	0	7	2	1	-1	4	»	10	»
30	»	»	7	»	-10	»	-11	»	1	»	1	»	0	»	»	»	14
31	13	14	6	»	-9	-5	-12	-9	2	6	2	0	»	5	5	9	13
32	»	»	»	0	»	-6	»	-8	»	7	»	1	»	6	»	10	»
33	14	13	7	-1	-8	-7	-13	-7	»	6	3	2	-1	5	6	9	14
34	15	»	8	»	-7	»	»	»	»	»	2	»	0	»	7	»	13
35	16	14	7	-2	»	-8	-12	-6	3	7	1	3	-1	»	8	8	14
36	»	13	»	-3	»	-9	»	-7	»	6	»	»	»	6	»	9	»
37	»	»	8	-2	-6	-10	-13	-8	4	»	0	4	-2	7	9	10	15
38	15	»	7	»	-5	»	-12	»	3	»	-1	»	-1	»	10	»	»
39	14	12	8	-3	-6	»	-13	-9	4	5	-2	5	0	8	»	11	14
40	»	11	»	»	»	-9	»	-10	»	4	»	4	»	7	»	12	»
41	15	»	7	-2	-5	-10	-14	-9	5	3	»	5	1	8	9	13	15
42	16	»	8	»	-6	»	-13	»	»	»	-3	»	0	»	8	»	14
43	15	12	9	-3	-5	-11	»	-8	4	2	-2	6	1	»	7	»	15
44	»	13	»	-4	»	-12	»	-7	»	3	»	7	»	»	»	12	»
45	16	12	»	-5	»	-11	-12	-6	5	2	-1	»	2	9	6	13	16
46	»	»	8	»	-4	»	»	»	4	»	-2	»	1	»	5	»	»
47	17	11	9	-6	-5	-12	-13	»	5	1	-1	6	0	10	4	12	»
48	»	10	»	-7	»	»	»	-5	»	2	»	5	»	9	»	11	»
49	18	11	10	-7	-6	-13	-14	-4	6	3	0	4	0	8	3	11	15

91000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	15	16	11	15	6	16	14	14	12	11	13	12	15	5	−1	−6	3
1	16	»	12	14	7	15	15	15	11	12	»	13	16	6	0	−5	4
2	»	15	»	15	»	16	»	16	»	11	»	12	»	5	»	−4	»
3	»	14	13	14	8	17	»	15	10	12	12	11	15	4	−1	»	5
4	17	»	14	»	»	»	14	»	11	»	13	»	16	»	−2	»	4
5	16	15	»	15	9	16	15	16	12	13	14	»	»	3	−3	−3	5
6	»	16	»	16	»	17	»	17	»	»	»	10	»	2	»	−2	»
7	17	17	13	15	10	18	14	»	13	14	13	9	15	3	−4	−1	»
8	16	»	14	»	11	»	13	»	12	»	12	»	14	»	»	»	6
9	17	18	15	»	12	17	12	18	11	15	13	8	»	2	−5	0	7
10	»	»	»	14	»	18	»	19	»	16	»	9	»	1	»	−1	»
11	16	19	14	13	13	17	13	20	»	17	14	8	15	0	−6	−2	6
12	17	»	13	»	14	»	»	»	10	»	15	»	14	»	−5	»	5
13	16	20	12	14	»	18	14	»	9	18	14	9	15	»	−6	−3	4
14	»	19	»	13	»	17	»	21	»	17	»	»	»	1	»	−2	»
15	»	18	11	12	15	16	15	22	10	»	15	8	14	0	−7	−3	5
16	15	»	12	»	14	»	16	»	9	»	14	»	13	»	−6	»	»
17	16	19	11	11	15	»	17	21	10	16	15	7	12	1	»	»	4
18	»	20	»	»	»	15	»	20	»	17	»	8	»	0	»	−2	»
19	17	»	12	10	16	14	16	19	11	18	»	9	11	−1	−7	−1	3
20	18	»	11	»	17	»	17	»	»	»	14	»	10	»	−6	»	2
21	17	19	»	11	16	15	»	18	10	17	15	8	11	0	−7	»	1
22	»	18	»	»	»	14	»	17	»	16	»	9	»	»	»	−2	»
23	18	17	»	10	17	15	18	18	11	17	16	»	10	−1	−6	−1	0
24	»	»	10	»	16	»	19	»	12	»	15	»	11	»	−5	»	1
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	18	»	9	»	»	»	19	»	18	»	10	»	−2	»	0	»
27	19	17	11	»	15	16	18	18	13	17	16	11	»	−3	−4	1	0
28	20	»	12	»	16	»	19	»	14	»	»	»	12	»	−5	»	−1
29	21	18	13	10	15	15	18	17	»	16	17	10	11	»	−4	0	0
30	»	19	»	9	»	14	»	18	»	17	»	9	»	−2	»	»	»
31	22	20	14	8	»	13	17	17	15	18	18	8	10	»	−5	−1	»
32	21	»	»	»	16	»	18	»	14	»	19	»	11	»	−4	»	−1
33	»	19	15	7	17	12	17	16	13	»	18	»	10	−3	»	−2	−2
34	»	18	»	6	»	11	»	»	»	»	»	9	»	»	»	−1	»
35	20	17	16	5	16	»	18	15	12	17	19	8	»	−2	»	0	−3
36	19	»	15	»	17	»	17	»	11	»	18	»	»	»	−5	»	−2
37	18	»	14	4	16	12	18	14	12	16	»	9	9	−3	−4	1	−1
38	»	16	»	3	»	11	»	15	»	»	»	10	»	−4	»	0	»
39	17	15	15	4	15	10	»	14	»	15	17	11	8	−3	−3	»	0
40	18	»	16	»	»	»	17	»	13	»	16	»	7	»	−2	»	−1
41	19	14	»	5	16	11	»	13	12	16	15	»	8	−2	−1	−1	−2
42	»	13	»	6	»	»	»	12	»	»	»	10	»	−3	»	−2	»
43	18	12	17	7	»	12	18	»	11	15	16	11	7	−2	−2	−1	»
44	17	»	16	»	17	»	17	»	10	»	15	»	8	»	»	»	−3
45	16	13	»	»	18	11	16	13	11	14	»	12	»	−1	−3	0	−4
46	»	»	»	6	»	12	»	14	»	13	»	13	»	−2	»	1	»
47	»	12	15	5	17	13	15	13	»	14	14	14	7	−1	−4	2	»
48	17	»	14	»	16	»	»	»	12	»	13	»	6	»	−5	»	»
49	16	11	15	6	16	14	14	12	11	13	12	15	5	−1	−6	3	−5

92000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	−5	−2	2	3	7	−5	−6	−6	−10	−11	−12	−3	−6	−18	−14	−13	−22
1	−4	−1	»	2	6	−6	−5	−7	−9	−12	−11	»	−5	−19	−15	−14	−23
2	»	»	1	»	5	»	»	»	−10	»	−10	»	»	»	−14	»	−24
3	−3	−2	0	1	4	−5	−6	»	−11	−13	−11	−4	−6	−18	−13	−15	»
4	»	−1	»	0	»	»	»	−8	»	−12	»	−5	»	−19	»	−16	»
5	−2	−2	1	»	5	−4	−5	−9	−10	»	»	−6	»	−18	−12	−15	−23
6	−3	»	2	»	4	»	−4	»	−11	»	»	»	−5	»	−11	»	−24
7	−2	−1	3	−1	3	−5	−3	−10	»	−11	−12	−5	−6	−17	−12	−16	−25
8	»	−2	»	0	»	−6	»	−9	»	−10	»	−4	»	−18	»	»	»
9	−3	−1	4	1	»	−5	−4	−8	−12	−9	−11	−3	−7	»	−11	−15	−24
10	−4	»	»	»	2	»	−5	»	−11	»	−10	»	−8	»	−12	»	−25
11	»	0	3	0	1	−6	−4	−9	−10	»	−11	−2	−9	−19	−13	−16	−26
12	»	−1	»	1	»	−7	»	»	»	−10	»	−1	»	−20	»	−15	»
13	»	−2	2	2	0	»	−3	−8	−9	−9	−10	−2	−10	−19	»	−16	−27
14	−5	»	1	»	−1	»	−4	»	−10	»	−9	»	»	»	−14	»	»
15	−6	»	2	3	−2	−8	−5	−9	−9	−8	»	−1	−9	−20	−15	»	−26
16	»	−1	»	2	»	−7	»	−10	»	−9	»	−2	»	−19	»	−15	»
17	−5	0	3	»	−3	−8	»	−11	−10	−8	−8	−3	−10	»	−16	»	−25
18	−6	»	»	»	»	»	−4	»	−11	»	−7	»	»	»	−17	»	−24
19	−5	»	»	3	−4	−9	−3	−12	−12	−7	−8	»	−11	−20	−16	−16	−25
20	»	1	»	4	»	−10	»	−11	»	»	»	−2	»	−21	»	−15	»
21	−6	2	4	3	−5	−11	−4	»	−11	»	−7	−1	−12	−20	−17	−14	»
22	−7	»	3	»	−6	»	−3	»	»	»	−6	»	−13	»	»	»	−26
23	−8	1	»	»	−7	−12	−4	»	−10	−8	−5	−2	»	−19	»	−15	−25
24	»	»	»	4	»	−13	»	−12	»	−9	»	−3	»	»	»	−14	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−9	»	4	»	»	»	»	»	−9	»	−6	»	−12	»	−16	»	−26
27	−8	2	5	»	»	−12	−5	−11	−8	−10	−5	−4	−13	»	−15	−15	−25
28	»	1	»	3	»	−13	»	−10	»	−11	»	»	»	−18	»	−16	»
29	»	»	4	4	−6	−12	−4	−11	−7	»	−4	−5	−14	−17	−14	−15	−24
30	»	»	3	»	−5	»	−3	»	−8	»	−5	»	−13	»	−13	»	»
31	−9	2	4	3	−4	»	−4	−10	−7	»	−6	−4	−12	−16	»	−16	−25
32	»	3	»	»	»	−13	»	−9	»	−10	»	−3	»	−15	»	−15	»
33	−8	»	3	4	−5	−12	−3	−8	−8	−11	»	−4	−13	−16	−14	−16	−26
34	−7	»	2	»	−4	»	−4	»	»	»	−7	»	−14	»	−13	»	−27
35	−6	2	1	5	−3	−11	»	−7	−9	−10	−6	−5	−15	−15	−14	»	−26
36	»	1	»	6	»	−10	»	−8	»	−11	»	−4	»	»	»	−17	»
37	−5	2	»	7	−4	−11	−3	−9	−10	−10	−5	»	−16	−16	−15	−18	−25
38	»	»	2	»	−5	»	−4	»	−11	»	−6	»	−17	»	−16	»	−24
39	−6	1	3	8	»	−10	−5	»	−10	−9	−5	−5	−16	−15	−15	−19	»
40	»	2	»	9	»	»	»	−10	»	−10	»	−6	»	−14	»	−20	»
41	−7	1	4	»	−6	−9	−6	−9	−11	−9	−4	»	»	−13	−14	−19	−23
42	−6	»	3	»	−7	»	−5	»	−10	»	»	»	−17	»	−13	»	−24
43	−5	2	2	8	−6	−8	−6	−8	»	−10	−5	−7	−18	−14	−12	−20	»
44	»	»	»	7	»	−9	»	−9	»	−11	»	−8	»	−13	»	»	»
45	−4	1	1	6	»	−8	−5	−10	−11	−12	−6	−7	−19	»	−11	−21	−25
46	−3	»	»	»	−7	»	−6	»	»	»	−5	»	−18	»	−12	»	−26
47	»	2	2	5	−6	−7	−5	−11	−10	»	−4	−6	−19	−14	−13	−22	−25
48	»	1	»	6	»	−6	»	»	»	−11	»	−5	»	−15	»	−21	»
49	−2	2	3	7	−5	−6	−6	−10	−11	−12	−3	−6	−18	−14	−13	−22	−26

93000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	-26	-33	-23	-29	-24	-23	-27	-38	-45	-45	-42	-45	-43	-44	-49	-53	-59
1	-25	-32	-24	»	-23	-22	-28	-39	-46	-46	-43	-46	»	-43	-50	-54	-60
2	»	»	»	-28	»	-21	»	-40	»	-45	»	»	»	-42	»	-53	»
3	-24	-33	-23	-27	-22	-22	-29	-41	»	-44	»	-47	-44	-43	-49	-54	-61
4	-23	»	-22	»	-21	»	»	»	-47	»	-42	»	-43	»	-50	»	-62
5	»	-32	-23	-26	»	-21	-30	-40	»	-45	-43	-46	-44	»	-51	-55	-63
6	»	-33	»	-27	»	-22	»	»	»	-44	»	»	»	-44	»	-56	»
7	»	-34	-24	-26	-22	-23	»	»	-48	»	-44	-45	-43	-45	-50	-55	-64
8	-22	»	-23	»	-23	»	-31	»	-49	»	-45	»	»	»	-51	»	»
9	-23	-33	-22	-25	»	»	-32	-41	-50	-43	-46	-44	-44	-44	»	-54	-63
10	»	»	»	»	»	-22	»	-42	»	-44	»	-43	»	-45	»	-55	»
11	-24	»	»	-24	-24	-21	-33	-41	-51	-45	»	-42	-43	-46	-50	-54	-64
12	-25	»	-23	»	-25	»	-32	»	»	»	-47	»	-42	»	-51	»	-63
13	»	-32	-22	-23	-24	-22	»	-40	-52	-44	-46	-41	-43	-47	-50	»	-64
14	»	-31	»	-22	»	-23	»	-39	»	-43	»	-40	»	»	»	-53	»
15	-24	-30	»	-21	-25	-22	-31	-40	-51	-42	-45	»	-44	-48	-51	-54	-65
16	»	»	-23	»	-26	»	-32	»	-52	»	-44	»	-45	»	-52	»	-64
17	-25	-29	-24	-22	-25	-23	-33	»	-53	-41	-43	-39	-44	-47	-51	»	»
18	»	-30	»	-21	»	»	»	-41	»	-42	»	-38	»	-46	»	-55	»
19	-26	-29	-25	»	-26	-22	»	-40	-52	-43	-42	-37	»	»	-52	-54	-65
20	-25	»	-26	»	-25	»	-34	»	-51	»	»	»	-43	»	»	»	-64
21	-24	-30	-27	-20	-26	-23	-35	-41	»	-44	-41	-38	-42	-47	-53	-53	-63
22	»	-29	»	-19	»	-22	»	-40	»	-43	»	-37	»	-48	»	»	»
23	-25	-28	-26	-20	»	-23	-34	-39	-50	-42	-42	-38	-41	»	-52	-54	-62
24	-24	»	»	»	-25	»	-35	»	-49	»	-41	»	-42	»	-51	»	-63
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-27	»	-21	»	-24	»	»	»	-43	»	-39	»	-49	»	-55	»
27	-25	-26	-25	-22	-24	»	»	-40	-50	-44	-40	-40	-43	-48	»	-54	-62
28	-26	»	-26	»	-25	»	»	»	-49	»	-39	»	»	»	-50	»	-61
29	-27	»	-25	-21	-24	-25	-36	-39	-48	-45	»	-39	-42	-49	-51	-55	-60
30	»	-25	»	-20	»	-26	»	-40	»	-46	»	-40	»	-48	»	-56	»
31	-28	-24	-26	-19	-25	-25	»	-41	-47	-45	-40	-39	-41	-49	-52	»	-61
32	-29	»	-25	»	»	»	-37	»	-46	»	-41	»	-42	»	-51	»	-60
33	-28	-23	»	-18	-26	-24	-38	-42	-47	-44	-42	»	-43	-50	-52	-57	-61
34	»	-24	»	-19	»	-25	»	-41	»	»	»	-40	»	-49	»	-56	»
35	-29	-23	-24	-20	-25	-26	-37	»	-48	-43	-43	-41	-42	-48	-51	-57	»
36	-30	»	-23	»	»	»	-38	»	-47	»	-44	»	-41	»	»	»	-60
37	-29	-24	-24	»	-24	-27	-39	-42	-46	-44	-45	-40	»	-47	-52	-56	-61
38	»	»	»	-19	»	-28	»	-43	»	-45	»	-41	»	»	»	-55	»
39	-30	-23	-25	-20	-23	-29	-40	-42	»	-44	-46	-40	-42	-48	-51	-56	-60
40	-29	»	-24	»	-24	»	»	»	-45	»	-45	»	-43	»	-52	»	-59
41	-30	-24	-23	-21	»	-28	-41	-43	-44	-45	-46	-41	-42	»	-51	-57	»
42	»	-23	»	-22	»	-29	»	-44	»	-44	»	»	»	-49	»	-58	»
43	»	-24	-24	-21	-25	-28	-40	-43	-45	»	-47	-42	-43	-48	-50	-57	-58
44	-31	»	-25	»	-24	»	-39	»	-44	»	-46	»	-44	»	-51	»	»
45	-32	-25	-26	-22	-23	»	-40	-44	-43	-45	-47	-43	-45	-49	»	-58	-59
46	»	-24	»	»	»	-29	»	-45	»	-44	»	-42	»	-48	»	-59	»
47	-31	»	-27	-23	»	-28	-39	-44	-44	-43	»	-43	-46	-49	-52	»	-60
48	-32	»	-28	»	-22	»	-38	»	»	»	-46	»	-45	»	»	»	-59
49	-33	-23	-29	-24	-23	-27	-38	-45	-45	-42	-45	-43	-44	-49	-53	-59	-58

94000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	-58	-64	-61	-61	-64	-59	-60	-62	-51	-51	-48	-47	-47	-59	-58	-66	-71
1	-57	»	-62	-60	»	-58	-61	-61	-52	-52	-47	-48	-48	»	-59	-65	-72
2	-58	»	»	»	-63	»	-62	»	-53	»	-46	»	-49	»	-60	»	-71
3	»	-65	-63	-59	-64	-59	-63	-62	-54	»	-45	-47	-50	-58	-61	-66	-70
4	»	-66	»	-58	»	-60	»	»	»	-51	»	-48	»	-57	»	-65	»
5	-57	-65	-62	-57	-63	»	-64	-61	-55	-52	-46	-49	-51	-56	»	-66	-69
6	-58	»	-61	»	-64	»	-65	»	-54	»	-45	»	»	»	-62	»	-70
7	-59	»	-62	»	-65	-61	-66	-60	-53	-53	»	-48	-50	-55	-63	-67	-69
8	»	-64	»	-58	»	-60	»	-59	»	-52	»	-49	»	-56	»	-68	»
9	-60	-63	-61	-57	-64	-61	»	-58	-54	-51	-46	-48	-51	-55	-64	»	-70
10	-61	»	-62	»	»	»	-67	»	-55	»	-47	»	-52	»	-65	»	-69
11	-60	-62	»	-56	-63	-62	-68	-57	-54	-52	-48	»	-53	-56	-64	-69	-70
12	»	-61	»	-55	»	-61	»	-56	»	»	»	-49	»	-57	»	-68	»
13	-61	-60	-61	-56	-62	-62	-69	»	-53	-53	-47	-48	-54	-56	-63	-69	»
14	-60	»	-62	»	-61	»	-68	»	-54	»	-48	»	-53	»	»	»	-69
15	-61	-61	-61	»	-62	-61	»	-55	-53	-54	-49	-47	»	-55	-62	-70	-70
16	»	»	»	-57	»	-62	»	-54	»	-55	»	-46	»	-56	»	-71	»
17	-60	-60	-60	-58	-61	-61	-67	-53	»	-54	-48	-47	-52	-57	»	-70	-71
18	-59	»	-61	»	-60	»	»	»	-54	»	-49	»	-51	»	-63	»	-70
19	-60	-59	-62	-57	»	-60	-66	-52	-55	-53	-50	-48	-50	»	-62	-69	-71
20	»	-60	»	-56	»	-59	»	-53	»	-54	»	»	»	-58	»	-68	»
21	»	-61	-61	-57	-59	-58	-67	-52	-56	»	-51	-49	-49	-59	-61	-67	-72
22	-61	»	-62	»	-60	»	-66	»	-55	»	-50	»	-50	»	-62	»	»
23	-62	-60	-61	-56	-61	»	-65	-51	-56	-53	-49	-48	-51	-58	»	-68	-71
24	»	-59	»	»	»	-57	»	-52	»	-54	»	-47	»	-59	»	-69	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-61	»	-60	»	-62	»	»	»	»	»	-50	»	-52	»	-63	»	-72
27	-62	-60	-61	-55	-63	-58	»	-51	-55	-53	-51	-46	-53	-58	-62	»	-73
28	»	-59	»	-54	»	-59	»	-50	»	-52	»	-47	»	»	»	-70	»
29	-63	-60	»	-55	-64	-58	-66	-49	-56	-51	-50	»	-52	-59	-63	-71	»
30	»	»	-62	»	-63	»	-65	»	-57	»	-49	»	-53	»	-64	»	-74
31	-64	-61	-61	-56	-62	-59	-64	»	-56	-50	-48	-46	-54	-58	»	-70	»
32	»	-60	»	-57	»	»	»	-50	»	-51	»	-47	»	»	»	-69	»
33	-65	-61	-60	»	»	-60	»	-51	-55	-52	-47	-46	»	-59	-65	-70	»
34	-66	»	-59	»	-63	»	-63	»	-54	»	»	»	-55	»	-64	»	-73
35	-67	-62	-60	-58	-64	-59	-64	-52	»	-51	»	-45	-54	-58	-65	-71	-74
36	»	-63	»	-59	»	-60	»	-53	»	»	»	-44	»	-57	»	»	»
37	-68	-64	-59	-60	»	-61	-65	-52	»	-52	-48	-45	-55	»	-64	-70	-73
38	-67	»	»	»	-63	»	-64	»	-53	»	-47	»	-56	»	-63	»	»
39	»	-63	-60	-61	-62	-60	»	-51	-54	»	-46	-46	-57	-58	-64	-71	-72
40	»	-64	»	-62	»	»	»	»	»	-51	»	-45	»	-59	»	»	»
41	-66	-63	-59	-63	»	»	-63	-50	-53	-50	-47	-44	-58	-58	»	-70	-71
42	-65	»	-60	»	-61	»	-64	»	-54	»	-48	»	»	»	-65	»	-72
43	-64	»	»	-64	-60	-59	-63	-49	-53	-49	»	-45	-57	-57	-64	-69	-73
44	»	»	»	-63	»	-58	»	-50	»	-50	»	-46	»	-56	»	-70	»
45	»	-62	-61	-62	-61	-57	»	-51	-52	»	»	-47	-58	-57	-65	»	-74
46	-65	»	-60	»	»	»	-64	»	-53	»	-49	»	-59	»	-66	»	-75
47	»	-61	»	-63	-60	-58	-63	-50	-52	-49	-48	»	-58	-58	-65	-69	-74
48	»	-60	»	-64	»	-59	»	-51	»	»	»	-46	»	-59	»	-70	»
49	-64	-61	-61	-64	-59	-60	-62	-51	-51	-48	-47	-47	-59	-58	-66	-71	-74

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	-74	-70	-67	-65	-70	-85	-91	-93	-98	-91	- 98	-92	-90	- 93	-102
1	-75	-71	-68	-64	-71	»	-92	»	-97	-92	- 99	-91	-89	- 94	»
2	»	-70	»	»	»	-84	»	-92	»	-93	»	-90	»	- 95	»
3	-76	»	-69	-63	-72	-83	-91	»	-96	-94	»	-91	-88	- 94	-101
4	-77	»	-68	»	-71	»	-92	»	»	»	-100	»	-87	»	-102
5	-78	-71	-69	-64	-72	-84	»	-93	-95	-95	-101	-90	-88	- 95	-103
6	»	-70	»	-65	»	-85	»	-92	»	-94	»	-89	»	»	»
7	-77	-71	»	-66	-71	-84	-93	-93	-96	-93	-100	»	-89	- 94	-104
8	»	»	-68	»	-72	»	-94	»	-95	»	- 99	»	-88	»	-105
9	-76	-72	»	-67	-73	-83	-93	»	-96	-92	-100	-90	-87	»	-104
10	»	-73	»	-68	»	»	»	-92	»	-93	»	-89	»	- 93	»
11	-75	-72	-69	»	-72	-82	»	-91	-97	-92	- 99	-88	»	- 94	-103
12	»	»	-70	»	-73	»	-94	»	-98	»	»	»	-86	»	-102
13	-76	-73	-71	-67	-72	-83	-95	-92	»	-93	- 98	-89	-85	- 93	-103
14	»	»	»	-66	»	-82	»	-91	»	-92	»	-88	»	- 92	»
15	-77	-72	-72	-67	»	-83	-96	-92	-97	-93	- 99	-89	-86	»	-102
16	-78	»	»	»	-73	»	-97	»	-98	»	- 98	»	»	»	-101
17	»	-71	-71	-68	-72	-82	-96	-91	-97	»	- 97	»	-87	- 91	-100
18	»	-70	»	-69	»	-83	»	»	»	-92	»	-90	»	- 92	»
19	-79	-71	»	-68	-73	»	-95	-90	-98	»	- 96	-89	-86	- 93	»
20	-80	»	-70	»	-74	»	-96	»	»	»	- 97	»	»	»	- 99
21	-81	»	-69	-69	-75	-84	»	»	-97	-93	»	-90	-87	- 92	- 98
22	»	-70	»	-68	»	-85	»	-91	»	»	»	-91	»	- 91	»
23	-80	-69	-70	-69	-74	»	»	-92	-98	-92	- 96	-92	-88	- 92	- 99
24	-79	»	-69	»	»	»	-95	»	-97	»	- 95	»	-87	»	- 98
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-70	»	-68	»	-86	»	-93	»	»	»	-91	»	- 93	»
27	-78	»	-68	-69	-75	-87	-96	»	-98	-93	- 94	-92	-88	- 94	- 97
28	»	»	-67	»	-74	»	-97	»	-97	»	- 93	»	-87	»	»
29	-77	-71	-66	»	-75	-86	-96	-94	-96	-92	- 92	-91	»	- 93	- 96
30	»	»	»	-70	»	-87	»	-95	»	-93	»	-92	»	- 94	»
31	-76	-72	-67	-71	-76	-86	-95	-96	»	-92	- 91	-91	-88	- 95	- 95
32	-75	»	-66	»	-77	»	»	»	»	»	- 92	»	-89	»	- 94
33	-74	-73	-65	-72	»	-87	-96	-95	-97	-93	- 93	-90	-90	»	- 93
32	»	-72	»	-73	»	-88	»	-96	»	-92	»	»	»	- 94	»
35	»	-73	-66	-72	-78	-87	-97	-95	-96	»	- 94	-89	-89	- 95	- 94
36	-73	»	-65	»	-79	»	-96	»	-95	»	- 93	»	-90	»	- 93
37	-72	-74	-66	-71	-78	»	-95	-96	-96	-91	- 94	-90	-91	- 96	»
38	»	-73	»	»	»	-88	»	-95	»	-92	»	-89	»	- 95	»
39	-71	»	-65	-70	-79	-89	-94	-94	-95	-93	»	-88	-92	- 96	- 94
40	-72	»	-66	»	-80	»	-93	»	»	»	- 93	»	-93	»	- 93
41	-71	-72	-67	-69	-79	-90	»	-95	-94	-92	»	-87	-94	- 97	- 92
42	»	-71	»	-70	»	-89	»	-94	»	-93	»	-88	»	»	»
43	-70	-70	»	-71	-80	-88	-92	-95	-93	-94	- 94	»	-95	- 98	- 93
44	»	»	-66	»	-81	»	-93	»	-92	»	- 95	»	-96	»	- 94
45	-69	-69	-65	-70	-82	-89	-92	»	-91	-95	- 94	-89	-95	- 99	- 93
46	»	-68	»	-69	»	»	»	-96	»	-96	»	-90	»	-100	»
47	-70	-67	-66	»	-83	-90	-93	-97	-92	-97	- 93	-91	»	-101	- 92
48	-71	»	-65	»	-84	»	-94	»	-91	»	»	»	-94	»	- 93
49	-70	-67	-65	-70	-85	-91	-93	-98	-91	-98	- 92	-90	-93	-102	- 94

95000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	− 94	−102	−104	−102	−103	−110	−104	−113	−110	−112	−106	−109	−120
1	− 93	−103	−103	−101	−104	−109	−105	−114	»	−111	−107	−108	»
2	− 94	»	−102	»	−105	»	»	»	−111	»	−106	»	−119
3	− 95	−104	−103	−102	»	−110	−106	−113	−110	−112	»	−107	−118
4	»	−105	»	−101	»	−111	»	−114	»	»	»	»	»
5	»	−106	−102	−102	−106	−110	−105	−113	»	»	−105	−108	−119
6	− 96	»	−103	»	»	»	−106	»	−109	»	−106	»	»
7	− 97	−105	−104	−101	−107	»	»	−114	−108	−111	−107	−109	−120
8	»	−106	»	»	»	»	»	−113	»	−110	»	−110	»
9	− 96	»	−105	−100	»	−109	−105	−114	−107	−109	»	−111	−119
10	− 97	»	−104	»	−108	»	−106	»	»	»	−108	»	−120
11	− 98	−107	»	− 99	−109	−110	»	−115	−108	−108	−107	−112	−119
12	»	»	»	− 98	»	−109	»	−116	»	−107	»	−113	»
13	»	−108	»	− 99	−108	−108	−107	−117	−107	−106	−108	»	−120
14	»	»	−103	»	−109	»	−106	»	−106	»	−109	»	−121
15	− 99	−107	−104	− 98	−108	−109	−107	»	−107	−105	−110	−114	−122
16	»	−108	»	− 97	»	»	»	−116	»	−106	»	−113	»
17	−100	−107	−103	»	−107	−108	−108	−117	−108	−107	−111	−114	»
18	− 99	»	−102	»	−106	»	−107	»	−107	»	»	»	−123
19	− 98	−106	−103	− 98	−105	−107	−108	−116	»	−108	−112	»	−122
20	»	−107	»	− 97	»	−106	»	−115	»	»	»	−115	»
21	− 97	−106	−104	− 98	»	−105	−109	−116	−106	−107	−113	−116	−121
22	− 98	»	»	»	−106	»	−110	»	−107	»	−112	»	−122
23	»	−105	−103	− 97	−107	−104	−109	−117	−108	»	−111	−117	−123
24	»	−104	»	− 98	»	−105	»	»	»	−108	»	−116	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	− 97	»	−102	»	−106	»	−108	»	−107	»	−110	»	»
27	− 98	»	−103	− 97	−107	−106	»	−116	−108	−107	»	−115	−124
28	»	»	»	− 98	»	−105	»	−115	»	−108	»	−116	»
29	− 97	−105	−104	− 99	−106	−104	»	−116	−107	−107	−111	−117	−125
30	− 96	»	−105	»	»	»	−107	»	−108	»	−110	»	−124
31	− 95	−104	»	»	−107	−103	−108	−115	−109	−106	−109	»	−125
32	»	−103	»	−100	»	−102	»	−114	»	»	»	−116	»
33	− 96	−104	»	−101	−108	−103	−109	»	−108	−107	−110	−117	−124
34	− 97	»	−104	»	−109	»	−110	»	−109	»	−109	»	−125
35	− 98	»	−105	»	−110	−102	−109	−113	−110	−108	−108	»	»
36	»	»	»	−100	»	−101	»	−114	»	−109	»	−116	»
37	− 97	»	−106	−101	−109	−100	−108	−115	»	−110	−107	−117	−124
38	− 98	»	−105	»	−108	»	»	»	−111	»	−106	»	−125
39	− 99	−103	−104	−102	»	−101	−109	−116	−112	−109	−107	−118	−126
40	»	−104	»	−101	»	−102	»	−115	»	−110	»	»	»
41	»	−103	−103	−102	−107	−103	−110	−114	−111	»	−108	−117	−125
42	−100	»	−102	»	−106	»	−111	»	−110	»	−109	»	−124
43	»	−104	−103	−103	−107	»	−112	−113	−111	−111	−110	−118	−123
44	»	−103	»	»	»	−104	»	−112	»	−110	»	−117	»
45	−101	»	−102	−104	−108	−105	−113	−113	−110	−109	»	−118	−124
46	−102	»	−103	»	−109	»	−112	»	»	»	−111	»	−123
47	−101	−104	−102	−103	»	−104	»	−112	−111	−108	−110	−119	−122
48	»	−103	»	−104	»	−103	»	−111	»	−107	»	−120	»
49	−102	−104	−102	−103	−110	−104	−113	−110	−112	−106	−109	−120	−123

96000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	-123	-118	-117	-106	-109	-119	-123	-121	-126	-128	-123	-118	-110
1	-124	-119	-118	-107	»	-120	-122	-122	-125	-129	-124	-117	-109
2	»	-120	»	-108	»	-119	»	-121	»	-130	»	»	»
3	»	-121	-117	-107	-108	-120	-123	-120	»	»	-125	-110	-108
4	-123	»	»	»	-109	»	-124	»	-124	»	-124	»	-109
5	-124	-120	-116	-106	-110	»	-125	-119	-125	-129	-123	-115	-108
6	»	-121	»	»	»	-119	»	-120	»	-130	»	-110	»
7	-123	»	-115	-107	-111	-118	-126	-121	-126	-131	»	-115	-109
8	-122	»	-114	»	-110	»	-125	»	»	»	-122	»	-108
9	-123	-120	»	-108	-109	-117	»	-120	-127	-130	-123	-114	-107
10	»	-119	»	-107	»	-118	»	-121	»	-131	»	-113	»
11	-124	-118	»	»	-110	-119	-124	-122	-128	-130	-122	»	»
12	»	»	-115	»	-109	»	-123	»	-127	»	-123	»	-108
13	-123	-117	-114	-108	-110	-120	-122	»	-126	-131	-122	-112	-109
14	»	-116	»	-107	»	»	»	-123	»	-132	»	-111	»
15	-122	-117	»	»	-111	-119	-123	-122	-127	-131	-121	-112	»
16	-123	»	-115	»	-110	»	-122	»	-128	»	»	»	-110
17	-122	-118	-114	-108	-109	»	-121	-123	»	-132	-120	-111	-111
18	»	-117	»	-109	»	-120	»	-124	»	-131	»	-110	»
19	-123	-116	-115	-110	»	-121	-122	-123	-127	-130	-121	-109	-110
20	-122	»	»	»	-108	»	-123	»	-128	»	-120	»	-109
21	»	-117	-114	-109	-109	-122	-122	-124	-129	»	-119	-108	-108
22	»	-118	»	-108	»	-121	»	»	»	-131	»	-109	»
23	-121	-117	-113	-109	-110	»	-123	-125	-128	-130	-118	»	-100
24	-120	»	-112	»	-111	»	»	»	-129	»	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-118	»	-110	»	-122	»	-124	»	»	»	-108	»
27	-119	-119	-111	-111	-110	-121	»	-125	-128	-129	-117	-107	-108
28	-120	»	-112	»	»	»	-122	»	-129	»	-116	»	-109
29	-119	-120	»	-110	»	-122	-121	-126	-128	-128	-117	»	-110
30	»	-119	»	-109	»	»	»	-125	»	»	»	-108	»
31	-120	-120	-111	-110	-111	-121	-122	»	-127	-129	-116	-109	-111
32	-119	»	-110	»	-112	»	-123	»	-126	»	-117	»	-110
33	-120	-121	-109	»	-113	-120	-124	-126	-125	-128	-118	-108	»
34	»	»	»	-111	»	-119	»	-125	»	-127	»	-109	»
35	-121	-122	-110	-112	-112	-120	-125	-126	»	-126	-119	-110	-109
36	-120	»	-109	»	-113	»	»	»	-126	»	-120	»	-110
37	-119	-123	-108	-113	»	-119	-126	-127	-127	-125	-119	-111	»
38	»	-122	»	-112	»	-120	»	-126	»	-126	»	»	»
39	»	-121	-107	-111	-114	-119	-125	-125	-128	»	»	-110	-109
40	»	»	-106	»	-115	»	-124	»	-127	»	-118	»	-110
41	-118	-122	-107	-110	-116	»	-125	-124	»	-125	-117	-111	-109
42	»	-121	»	»	»	-120	»	»	»	-126	»	-112	»
43	-117	»	-108	-109	-117	-119	»	-123	-126	-127	»	-111	-110
44	-116	»	-107	»	-118	»	-124	»	»	»	-118	»	-111
45	-117	-120	-106	-108	»	-120	»	-124	-127	-126	-117	-110	»
46	»	-119	»	»	»	-121	»	-125	»	-125	»	-109	»
47	-118	-118	»	-109	-117	-122	-123	-126	-128	-124	-118	»	-112
48	»	»	-107	»	-118	»	-122	»	-129	»	-117	»	-113
49	-118	-117	-106	-109	-119	-123	-121	-126	-128	-123	-118	-110	-114

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	−114	−119	−119	−127	−118	−119	−124	−121	−116	−105	−109	−113	−120
1	»	−118	−120	−126	−119	−120	−125	−122	−117	»	−110	−112	−121
2	−115	»	−121	»	−120	»	−124	»	−118	»	−109	»	−122
3	−114	−117	−122	−127	−119	»	−125	−123	−119	−104	−110	−111	−121
4	»	−116	»	»	»	−121	»	−124	»	−103	»	−112	»
5	−115	»	−121	−128	−120	−122	−124	−123	»	−104	»	−113	−122
6	−116	»	−120	»	−119	»	−125	»	»	»	−109	»	−123
7	−115	−115	−119	−127	−120	−123	»	−124	−120	−103	−110	−114	»
8	»	−114	»	−126	»	−124	»	»	»	−104	»	−115	»
9	−116	−115	»	−125	−119	−123	−126	−123	−119	−103	−109	»	−122
10	»	»	−120	»	−118	»	−125	»	−120	»	−108	»	−123
11	−117	−116	−121	−124	−119	−124	−124	»	−119	−104	−107	−116	−124
12	»	−115	»	−125	»	»	»	−122	»	−105	»	−117	»
13	−118	−116	−120	»	−118	−123	−125	−121	−118	−106	−106	−118	»
14	−119	»	−119	»	−119	»	−124	»	−117	»	»	»	−123
15	−120	−117	−120	−124	−120	−122	−125	−120	»	−105	»	−119	»
16	»	−118	»	−125	»	−123	»	−121	»	−106	»	−118	»
17	−119	−117	−121	−124	»	−122	−126	−120	−116	−107	−107	−119	−122
18	−118	»	»	»	−119	»	−125	»	−117	»	−108	»	−121
19	»	−118	−120	−123	−120	−123	−124	−119	−116	»	−109	−120	−122
20	»	−117	»	−122	»	−122	»	»	»	−106	»	−121	»
21	−119	−118	−121	−121	−119	»	−123	−118	−115	−107	»	−120	−123
22	−120	»	−122	»	−120	»	−124	»	−114	»	−110	»	»
23	−121	»	−123	−120	−119	−123	−123	−117	−113	−106	»	−121	−124
24	»	−119	»	−119	»	−122	»	−118	»	−105	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−122	»	−122	»	»	»	»	»	−112	»	»	»	−123
27	−121	−118	»	−120	−118	−121	−124	−117	−113	»	−109	»	−124
28	»	»	»	−121	»	−120	»	−118	»	»	»	−120	»
29	−122	−119	−123	−120	−117	−121	−123	»	−112	»	−110	−121	−123
30	−123	»	»	»	−118	»	»	»	−111	»	−109	»	−122
31	−122	−120	−124	»	−119	»	−124	−119	−110	−104	−110	−120	»
32	»	»	»	−119	»	−122	»	−120	»	−103	»	−119	»
33	−123	−119	−125	»	−118	−123	−123	−119	»	−102	−111	−118	−121
34	−122	»	»	»	−119	»	»	»	−111	»	−112	»	−122
35	−123	»	−124	−120	»	−124	−124	−118	−110	−103	−113	−119	−123
36	»	−120	»	−119	»	−123	»	−119	»	−104	»	»	»
37	»	−119	−125	»	»	−124	−125	−120	−109	»	−114	−120	»
38	−122	»	−124	»	−120	»	−124	»	−110	»	−113	»	−124
39	−123	−120	−125	−118	−121	»	−123	−121	−109	−103	−114	−119	−123
40	»	−121	»	»	»	−125	»	−120	»	−104	»	−120	»
41	−122	»	−124	−117	−120	−124	−122	−121	−108	−105	»	−119	−122
42	−121	»	−125	»	−119	»	−121	»	»	»	−113	»	−123
43	−122	−122	−124	−116	−120	−125	»	−120	−109	−106	−112	−118	−124
44	»	−121	»	−115	»	−124	»	−119	»	−107	»	−117	»
45	−121	−120	»	−116	−119	−123	−120	−118	−108	−108	−113	»	−125
46	»	»	−125	»	»	»	−121	»	−107	»	»	»	−126
47	−120	−119	−126	−117	−120	−124	−122	»	−106	−109	−112	−118	−127
48	»	−120	»	−118	»	»	»	−117	»	−110	»	−119	»
49	−119	−119	−127	−118	−119	−124	−121	−116	−105	−109	−113	−120	−127

97000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	−127	−126	−121	−117	−116	−101	− 96	−103	−93	−89	−83	−86	−92	−87
1	−128	−127	−122	−118	−117	»	− 97	−102	−92	−90	−82	−85	−93	−88
2	»	−128	»	»	»	−102	»	−101	»	−91	»	−86	»	−87
3	−127	»	−123	−119	−116	−103	− 96	−100	−91	−92	»	−85	−94	−88
4	−128	»	−124	»	−115	»	− 97	»	»	»	−81	»	−95	»
5	−127	−127	−123	−118	−114	−102	»	− 99	−92	−91	−80	»	−94	−87
6	»	−126	»	»	»	−103	»	− 98	»	−92	»	−86	»	»
7	−128	−127	»	−119	−113	−102	− 98	− 97	−93	−91	−79	»	−93	−86
8	»	»	−122	»	−114	»	− 99	»	−94	»	−78	»	−92	»
9	−129	−126	−123	−118	−113	»	−100	»	−95	−92	−77	−87	−93	−85
10	»	−125	»	−117	»	»	»	− 98	»	−91	»	−88	»	»
11	−130	−126	−122	»	»	−101	−101	− 97	−94	−92	−78	−87	»	−86
12	−131	»	−121	»	−112	»	−100	»	−95	»	»	»	−92	»
13	−130	−125	−120	−116	−111	−100	»	− 98	»	−91	»	−88	−93	»
14	»	−126	»	−117	»	−101	»	− 99	»	»	»	−89	»	−85
15	−129	−127	−119	−116	»	−100	− 99	−100	»	−90	−79	−88	−94	»
16	−130	»	»	»	−110	»	−100	»	−96	»	−80	»	−93	»
17	»	−126	−118	−117	−109	−101	»	− 99	−95	»	−81	−87	−94	−84
18	»	−125	»	−118	»	»	»	»	»	−89	»	−88	»	−85
19	−129	−124	−117	−119	»	»	−101	− 98	−94	−88	−82	−89	−93	−84
20	−128	»	−118	»	−108	»	−102	»	−93	»	−83	»	»	»
21	−127	»	»	−120	−107	−102	−103	− 99	−92	−87	»	−88	−92	−83
22	»	»	»	−121	»	−103	»	− 98	»	−86	»	−87	»	−82
23	»	−123	−119	−120	−108	−104	»	− 97	−93	−85	−84	−88	−91	−83
24	−126	»	−118	»	»	»	−102	»	−94	»	−85	»	−90	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−122	»	−119	»	−103	»	− 98	»	»	»	−89	»	»
27	−125	−121	−117	−120	−107	−104	−103	»	−93	−86	−86	−90	−89	−82
28	−126	»	−116	»	−106	»	−102	»	−92	»	−87	»	−88	»
29	−127	−122	−117	»	−105	−105	−103	− 97	−93	−85	−88	−91	»	−81
30	»	»	»	−119	»	−104	»	− 98	»	−86	»	−92	»	−80
31	−126	−123	−116	−118	−106	−103	−102	− 99	»	−85	−89	−93	−87	−79
32	−125	»	−115	»	−105	»	»	»	−94	»	−88	»	−88	»
33	−126	−124	−114	−117	»	−102	−101	− 98	−95	−84	−87	−94	−87	»
34	»	−125	»	−116	»	−103	»	− 99	»	−85	»	»	»	−78
35	»	−124	−113	−117	−104	−102	−102	− 98	−94	»	−86	−95	−86	−77
36	−127	»	−114	»	−103	»	−101	»	−95	»	−87	»	−87	»
37	−126	−125	−115	−116	−102	»	−102	− 99	−94	−86	−88	−94	−86	−76
38	»	−126	»	»	»	−103	»	− 98	»	−87	»	−93	»	−77
39	−127	»	−116	−117	−101	−102	−101	− 97	−93	−86	»	−92	−87	−76
40	−128	»	−117	»	−102	»	−102	»	»	»	−89	»	−88	»
41	−127	−125	−116	−118	−101	−101	»	− 98	−94	−87	−88	−93	−87	−75
42	»	−124	»	»	»	−100	»	− 97	»	−86	»	−94	»	»
43	−128	−125	»	−117	−100	− 99	−101	− 96	−93	−85	»	»	−86	−74
44	»	»	−115	»	−101	»	−100	»	−92	»	−87	»	−87	»
45	−127	−124	−116	−118	−102	− 98	−101	»	−91	−84	−86	−93	−86	−73
46	»	−123	»	−117	»	»	»	− 95	»	−83	»	−92	»	−72
47	−126	−122	−117	»	−101	− 97	−102	− 94	−90	−84	−87	−91	»	−73
48	−125	»	−118	»	−102	»	−103	»	−89	»	»	»	»	»
49	−126	−121	−117	−116	−101	− 96	−103	− 93	−89	−83	−86	−92	−87	−74

98000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	-74	-77	-74	-76	-69	-64	-69	-70	-75	-70	-73	-64	-66	-74	-70	-77	-71
1	»	-78	-75	-77	-68	-65	»	-69	»	»	-72	-65	-65	-73	-71	-76	-70
2	»	-79	»	-78	»	-66	»	»	»	-71	»	-66	»	-72	»	-77	»
3	-75	-80	-76	-77	-67	»	»	-70	-76	-70	-71	-67	-64	-71	»	-76	-69
4	-74	»	-77	»	-68	»	-68	»	-75	»	-72	»	»	»	-72	»	-68
5	-75	»	-76	-76	»	-67	-67	-69	-74	-71	»	-68	-65	-72	-73	-75	-67
6	»	-81	»	»	»	-68	»	-68	»	-70	»	-67	»	-71	»	-74	»
7	-76	-82	»	-75	-67	-67	»	-67	-73	-69	-73	-68	-64	-72	-74	»	-66
8	-75	»	-75	»	»	»	-68	»	-74	»	-72	»	-65	»	-75	»	»
9	»	-83	»	-74	-66	-66	-69	-68	-73	-70	-73	»	-64	-73	-76	-73	-65
10	»	-82	»	-73	»	-67	»	-69	»	»	»	-69	»	-74	»	-74	»
11	-76	-81	-74	-74	-65	-68	-70	»	-74	-71	-72	-68	-65	-75	-75	-73	»
12	-75	»	-73	»	-66	»	-71	»	-73	»	-71	»	-64	»	»	»	-64
13	-76	-82	-72	»	-65	-69	-70	-68	-72	-72	-70	-67	»	-76	-74	-72	-65
14	»	»	»	-73	»	-68	»	-69	»	-73	»	-66	»	-77	»	-71	»
15	-75	-83	-71	-72	-64	-69	»	-68	»	-72	-71	-65	-65	-78	-75	»	-66
16	-76	»	-72	»	-63	»	»	»	-71	»	-70	»	-66	»	-76	»	-67
17	-75	-84	-71	-73	»	-68	-69	-69	-72	-73	-71	-64	-65	»	-75	-72	-66
18	»	-83	»	-72	»	-69	»	-70	»	-72	»	»	»	-77	»	-71	»
19	»	-84	-72	-71	-62	-68	-68	-71	»	»	-70	-65	-66	-76	-76	-72	-67
20	-74	»	-73	»	-61	»	-69	»	-71	»	-71	»	-67	»	-75	»	»
21	-75	-83	-74	-70	-62	»	-70	-70	»	-71	-70	-64	-66	-77	»	-73	-66
22	»	-82	»	»	»	-69	»	-71	»	»	»	-65	»	-78	»	-72	»
23	-76	»	-75	-69	-61	-68	-69	-72	-72	-70	»	-66	-65	-79	-76	-73	»
24	-75	»	-74	»	-60	»	-70	»	»	»	-69	»	-66	»	-75	»	-67
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-81	»	-70	»	-69	»	-71	»	-71	»	-65	»	»	»	-74	»
27	-76	-80	»	-71	-61	-68	-69	-72	-73	-70	-68	»	-65	-80	-74	-75	-68
28	»	»	-75	»	-62	»	-68	»	-72	»	-67	»	-66	»	-73	»	-69
29	-77	-81	-76	-72	-61	-69	-69	»	-71	-69	-66	-66	-67	-81	-72	-76	»
30	»	-80	»	-71	»	»	»	-71	»	-70	»	-65	»	-82	»	-77	»
31	-78	-79	-77	»	-60	»	-68	-72	-70	-71	-67	»	»	-81	-71	-78	-68
32	-79	»	»	»	-59	»	-69	»	-69	»	»	»	-68	»	-72	»	-67
33	-80	-78	-76	-70	-60	-68	-70	-73	»	-70	-66	-66	-67	-80	»	-77	-66
34	»	-77	»	-71	»	-69	»	-74	»	-71	»	-67	»	-79	»	»	»
35	-81	-76	-77	-72	»	-70	-69	-75	-68	-72	-65	-68	-68	»	-73	-78	-65
36	-82	»	»	»	-61	»	-70	»	-67	»	-64	»	-69	»	-74	»	-64
37	»	-75	-78	-71	-62	-69	-71	-76	-68	»	-65	-67	-70	-78	-75	-77	-65
38	»	-76	»	-70	»	-68	»	»	»	-71	»	-66	»	-77	»	-76	»
39	-81	-75	-77	-69	-63	»	»	-75	-69	-72	-64	-65	»	-76	»	-75	-66
40	-80	»	-78	»	-64	»	-72	»	-68	»	-63	»	»	»	-76	»	-67
41	-79	»	-79	-68	-65	-69	-71	-74	-69	-73	»	-66	-69	-75	-75	-74	-66
42	»	-74	»	-67	»	-68	»	-75	»	-72	»	-65	»	-74	»	-73	»
43	-78	-73	-78	-68	-64	-69	»	-76	-68	-73	-62	-66	-70	-73	-74	»	-65
44	-79	»	-77	»	»	»	-70	»	-69	»	-63	»	-71	»	»	»	»
45	-80	-74	»	-69	-63	-68	-71	-77	-68	-72	-64	»	-72	»	-75	-72	-66
46	»	-73	»	-68	»	-67	»	-76	»	»	»	-67	»	-72	»	-71	»
47	-79	»	-76	-69	-64	-68	-70	»	»	-73	-65	»	-73	-71	-76	-72	»
48	-78	»	-75	»	-65	»	-71	»	-69	»	»	»	-74	»	»	»	-65
49	-77	-74	-76	-69	-64	-69	-70	-75	-70	-73	-64	-66	-74	-70	-77	-71	-64

99000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	-64	-59	-65	-64	-61	-63	-62	-65	-59	-57	-64	-66	-64	-64	-54	-64	-74
1	-63	»	-64	-63	-62	-64	-61	-64	-60	-56	»	-65	-63	-65	-53	-65	-75
2	-62	»	-65	»	-63	»	-62	»	»	»	-63	»	-64	»	-52	»	-76
3	-61	-60	-64	»	-62	-63	»	-65	-59	-57	-64	-66	-65	-66	-53	»	»
4	»	-59	»	-62	»	-64	»	-64	»	-56	»	-65	»	»	»	-66	»
5	-60	-58	»	-63	-61	-65	-63	-63	-58	-57	-65	»	-64	-67	-54	-67	-75
6	»	»	-63	»	-62	»	-64	»	-59	»	-66	»	-63	»	-55	»	-74
7	-61	-59	-64	-62	-61	-64	-65	»	-60	»	-65	-64	-62	-66	-56	-66	»
8	»	-60	»	-61	»	»	»	»	»	-56	»	-65	»	-65	»	-67	»
9	-60	-61	-63	»	-60	-63	-66	-62	-61	-57	-66	-66	»	-64	-57	-66	-75
10	-59	»	-64	»	-61	»	-67	»	-60	»	»	»	-63	»	-58	»	-74
11	-60	-60	-65	-62	-60	-62	-68	-63	»	-58	-67	-65	-62	-65	-57	-67	-73
12	»	-59	»	-63	»	-61	»	-62	»	-59	»	-64	»	-64	»	»	»
13	-61	-60	-66	-64	»	-62	-69	-63	-61	-58	-66	-65	-63	»	-56	-66	-72
14	-60	»	»	»	-59	»	-68	»	-60	»	»	»	-64	»	-57	»	-73
15	»	-61	-65	-65	»	-63	-69	-62	-59	»	-67	-64	-65	-63	-58	-65	-72
16	»	-62	»	-64	»	-62	»	»	»	-57	»	-65	»	-64	»	-66	»
17	-61	-63	-64	-63	-58	»	-70	-61	-58	-58	-68	-66	-66	-63	»	-65	-71
18	-60	»	-63	»	-59	»	-71	»	-57	»	-67	»	»	»	-57	»	-70
19	-61	»	-64	-62	-60	-63	-70	-60	-58	-59	»	-67	-65	-62	-58	-66	-69
20	»	-62	»	-63	»	-62	»	-61	»	-60	»	-66	»	-63	»	-65	»
21	-62	-61	-63	-62	-61	-61	»	-60	-57	-59	-66	-65	-66	-62	-57	»	-68
22	-61	»	-62	»	»	»	-71	»	-56	»	-67	»	-65	»	-58	»	-67
23	-62	-62	»	-63	-62	-62	-70	-61	-55	-60	»	»	-66	-61	-57	-66	-68
24	»	-63	»	-62	»	-63	»	-60	»	»	»	-64	»	-60	»	-67	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-63	»	-63	»	-63	»	-69	»	-56	»	-66	»	-67	»	»	»	-67
27	-62	-64	»	»	-64	-62	-68	-61	-55	-61	-67	-63	»	-59	»	-68	-66
28	»	»	»	-63	»	-61	»	-60	»	-62	»	»	»	»	»	-69	»
29	-63	-65	-62	-62	-65	-60	-69	-61	»	-63	-68	-62	»	-60	-58	»	-67
30	-64	»	-61	»	-64	»	»	»	-56	»	-67	»	-66	»	-57	»	-68
31	-63	-66	-60	-61	»	-59	-70	-62	-55	-62	»	-63	-65	»	-58	-70	-67
32	»	-67	»	-62	»	-60	»	-61	»	»	»	»	»	-61	»	-71	»
33	»	-68	-61	-63	-63	-59	-69	-60	»	»	-68	»	-66	-62	-59	-72	-68
34	-62	»	-62	»	-62	»	-68	»	-54	»	-67	»	»	»	-58	»	»
35	-61	-67	-63	-62	-61	»	»	-61	-53	-61	-68	-64	-67	-61	»	-73	-69
36	»	-68	»	»	»	»	»	-60	»	-62	»	-65	»	-60	»	-72	»
37	-60	»	-62	-61	»	-60	-69	-59	-54	-63	»	-66	-66	-59	-59	-73	-70
38	-61	»	-61	»	-62	»	-68	»	»	»	-67	»	-67	»	-60	»	»
39	-60	-67	»	-62	-63	-61	»	-58	-53	-62	-68	-65	-66	-60	-61	»	-69
40	»	»	»	-63	»	-60	»	-59	»	-63	»	-64	»	»	»	-74	»
41	»	-68	»	-62	-64	-61	-67	-60	-54	-62	-67	»	-67	-59	-62	-75	-70
42	»	»	-62	»	-63	»	-66	»	-55	»	-68	»	-66	»	-63	»	-69
43	-61	-67	-63	-61	-64	-62	-65	»	-54	-63	-67	-65	-65	-58	-62	-74	»
44	»	»	»	-60	»	»	»	-61	»	-64	»	-64	»	-57	»	-73	»
45	-62	-66	-62	»	-65	-61	-64	-60	-55	-63	-66	-65	»	-56	-63	-72	-70
46	-61	»	-63	»	-64	»	-65	»	-56	»	»	»	-64	»	-64	»	-71
47	-60	-65	-64	-61	-63	-62	-66	-59	»	-64	-67	-64	-65	-55	-63	-73	-70
48	»	-66	»	-62	»	-63	»	-60	»	-63	»	-63	»	-54	»	»	»
49	-59	-65	-64	-61	-63	-62	-65	-59	-57	-64	-66	-64	-64	-54	-64	-74	-69

100000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	-69	-70	-62	-60	-61	-56	-60	-55	-52	-53	-53	-60	-66	-58	-57	-48	-38
1	-70	-69	»	-61	-60	-57	-61	-54	-53	-52	-52	»	-65	-59	-56	-47	-37
2	»	-68	»	-62	»	-56	»	-53	»	»	»	-61	»	-58	»	-46	»
3	-71	-69	-61	-61	-59	-55	-60	»	-52	-51	-53	-62	-64	-57	-57	-47	»
4	-70	»	-60	»	-58	»	-59	»	-51	»	-52	»	-63	»	»	»	-38
5	-69	-68	-61	»	-57	-56	-60	-54	-52	»	-53	-61	»	-56	-56	-46	-37
6	»	»	»	-62	»	-57	»	-53	»	-50	»	-62	»	-57	»	-47	»
7	-70	-67	-60	-63	-56	-58	-59	-54	»	-51	-52	-61	-62	-58	-55	-46	-38
8	-69	»	-59	»	»	»	»	»	-53	»	-53	»	-63	»	-54	»	»
9	-70	-68	-58	-64	»	-57	-60	-53	-54	-52	-54	-62	-64	»	-53	»	-37
10	»	-69	»	-65	»	-58	»	-52	»	»	»	»	»	-57	»	-45	»
11	»	-68	-57	-66	-55	-57	-59	-53	-55	»	-55	-61	-63	»	-54	-44	-38
12	-71	»	-56	»	»	»	-60	»	-54	»	-54	»	»	»	-55	»	»
13	-70	-67	-57	-65	-56	»	-61	-54	-55	-53	-53	»	-62	-58	»	-43	-37
14	»	-66	»	»	»	-56	»	-53	»	-54	»	-60	»	-57	»	-42	»
15	-69	»	-56	-66	-55	-57	-60	-52	-56	»	»	-59	-61	-58	-54	-43	-36
16	-68	»	-57	»	-56	»	-59	»	»	»	-54	»	-60	»	-55	»	-35
17	-67	-67	-58	-67	-55	-58	»	»	-57	-55	-55	-60	-59	-57	-54	»	»
18	»	-68	»	-68	»	-59	»	-53	»	-56	»	-61	»	»	»	-44	»
19	-66	-67	»	-67	-56	»	-58	-54	-56	-57	-56	»	-60	-56	-55	-45	-36
20	»	»	-57	»	»	»	-57	»	-57	»	-55	»	-59	»	-54	»	-37
21	-65	-66	-58	»	-57	-58	-58	»	-56	-58	-56	-60	-60	-57	-55	-44	»
22	»	-67	»	-66	»	»	»	-53	»	-57	»	-59	»	-58	»	-45	»
23	-64	»	-57	»	-56	-59	-57	-54	-57	-58	-55	-60	»	-59	-54	-44	-38
24	»	»	-58	»	-55	»	-56	»	-56	»	»	»	-59	»	-53	»	-37
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-66	»	-65	»	-60	»	-55	»	-57	»	-59	»	-60	»	»	»
27	-65	-67	-59	-64	»	-61	-57	-56	-55	-56	-56	-60	-60	»	-52	-43	-36
28	-64	»	»	»	-54	»	-56	»	-54	»	-57	»	-59	»	-51	»	-37
29	»	-66	-58	-63	-53	-62	-57	-55	-55	»	-56	-61	»	-61	-52	-42	»
30	»	-65	»	-62	»	-61	»	»	»	-57	»	-60	»	-60	»	-41	»
31	-65	-64	-59	-63	-52	»	-58	-56	-56	-58	-57	-61	-60	-59	»	-40	-36
32	-66	»	-58	»	-51	»	-57	»	-55	»	-56	»	»	»	-51	»	-37
33	-65	»	-59	-62	-50	-62	»	-55	-54	-59	»	-62	-61	-58	-50	-39	-38
34	»	-63	»	-63	»	-61	»	-56	»	-60	»	-61	»	-59	»	-40	»
35	-66	-62	-58	-62	-51	-62	»	-55	-53	-59	-57	-62	-62	-58	-49	»	-39
36	-67	»	-57	»	»	»	-56	»	-52	»	-58	»	-61	»	-48	»	-38
37	-66	-63	»	-61	-52	-61	-55	-54	-51	-58	-59	»	-60	»	-47	-41	-37
38	»	-62	»	-62	»	-62	»	-53	»	»	»	-61	»	-59	»	-42	»
39	-67	-61	-56	-63	-53	-61	-56	»	-52	-57	-58	-62	-61	-60	-48	-41	»
40	-68	»	-55	»	-54	»	-55	»	-51	»	-57	»	-60	»	»	»	-38
41	-69	»	-56	»	-55	»	-56	-52	-50	-56	-56	-63	»	-59	-49	-40	-37
42	»	»	»	-64	»	-62	»	-53	»	-55	»	-62	»	-60	»	-39	»
43	-68	-60	-57	-63	-54	-61	-57	-54	»	-54	-57	-63	-59	-59	-48	-40	-38
44	-69	»	-56	»	-53	»	»	»	-51	»	-58	»	-60	»	»	»	-37
45	-70	-59	-57	-62	»	-62	-56	-55	-52	-53	-59	-64	-59	»	-49	-39	-38
46	»	-60	»	-63	»	-61	»	-54	»	-54	»	»	»	»	»	-38	»
47	»	-61	-58	-62	-54	-60	-55	-53	-51	»	-58	-65	-58	-58	»	-37	-37
48	-71	»	-59	»	-55	»	-56	»	-52	»	-59	»	-59	»	-48	»	»
49	-70	-62	-60	-61	-56	-60	-55	-52	-53	-53	-60	-66	-58	-57	-48	-38	-36

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	−36	−35	−35	−31	−31	−21	−22	−20	−30	−31	−27	−21	−21	−16	−11	−2	2
1	−37	−36	−34	»	−30	−20	»	−19	−31	»	−26	−20	»	−17	−12	−1	1
2	−36	»	−33	»	−29	»	−23	»	−32	»	»	»	−22	»	−13	»	2
3	−37	−37	−34	−30	»	−21	−24	−20	»	−30	−25	−21	−23	−16	−12	−2	3
4	»	−36	»	»	»	−20	»	−19	»	−31	»	−22	»	−15	»	»	»
5	−36	−35	»	−29	»	−19	−25	−18	−31	»	−24	−23	−24	»	−11	−3	»
6	−35	»	»	»	−28	»	−26	»	−30	»	−23	»	−25	»	−10	»	2
7	»	−34	−35	−30	−27	−20	−25	−19	−29	»	−24	−24	−24	−14	− 9	−2	1
8	»	−35	»	−29	»	»	»	»	»	−32	»	−23	»	−13	»	−3	»
9	−36	−34	−34	−28	»	»	−26	−20	−28	−33	−25	−22	−23	−12	»	−4	0
10	−37	»	−33	»	−26	»	−25	»	»	»	−26	»	»	»	− 8	»	−1
11	−38	»	−32	−27	−27	−21	−26	−19	−29	−32	»	−21	−24	−11	− 9	»	0
12	»	−35	»	−26	»	−20	»	−18	»	−31	»	−20	»	−12	»	−3	»
13	−37	−36	−33	−27	−28	−21	»	−17	−30	−30	−27	−19	−25	−13	− 8	»	−1
14	−38	»	−34	»	»	»	−25	»	−31	»	−26	»	−26	»	− 7	»	»
15	−37	−35	»	−28	−27	−22	−24	−18	−32	−29	−25	»	−25	−14	− 8	−2	0
16	»	−34	»	−27	»	−21	»	−19	»	»	»	−18	»	−13	»	−3	»
17	−36	−35	»	−28	−26	−20	−25	»	−33	−30	−26	−19	−26	−12	− 7	−2	»
18	−37	»	−35	»	−25	»	−24	»	−32	»	−27	»	−25	»	»	»	1
19	−38	−36	−36	»	−24	−19	−23	−20	−33	−31	−26	−20	»	−13	− 6	−1	0
20	»	»	»	−27	»	−20	»	−21	»	−30	»	−21	»	−12	»	−2	»
21	−37	−35	−37	−28	−23	−19	−22	−22	»	−29	−27	−22	−24	−11	− 7	−1	1
22	−38	»	−36	»	−24	»	»	»	−32	»	−26	»	−25	»	− 6	»	2
23	−37	−34	−37	−27	»	−20	−21	−23	−33	−30	−27	−23	−24	»	− 7	0	3
24	»	−33	»	−28	»	−21	»	−24	»	−29	»	»	»	−10	»	−1	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−38	»	−38	»	−23	»	−22	»	−32	»	−26	»	−23	»	− 8	»	»
27	−37	−34	−37	−27	−22	»	−21	−25	−33	−28	−25	−24	−22	− 9	»	0	2
28	»	−35	»	»	»	−22	»	−26	»	−29	»	−25	»	−10	»	−1	»
29	−38	»	−36	−28	−23	−23	−20	−25	−32	−28	»	−24	−21	−11	− 9	0	1
30	−39	»	−37	»	−22	»	»	»	»	»	−24	»	−20	»	− 8	»	0
31	−38	−36	−36	−27	−23	−22	»	−24	−31	−29	−23	−25	−19	−10	− 7	»	−1
32	»	−35	»	−28	»	−23	»	−25	»	−28	»	−24	»	»	»	1	»
33	−37	−36	»	»	−24	−22	−19	−26	−30	−27	−22	»	−20	− 9	− 6	2	0
34	»	»	−37	»	−23	»	−18	»	−29	»	−23	»	−19	»	− 5	»	−1
35	−38	−37	−36	−29	−24	−23	−19	»	−28	−26	−24	−25	−18	−10	− 4	3	»
36	»	−36	»	−30	»	»	»	−27	»	−27	»	−24	»	− 9	»	2	»
37	−39	−35	−37	»	−23	−22	−18	−28	−29	−26	−23	−23	»	−10	− 5	3	−2
38	−38	»	−36	»	−22	»	−19	»	−30	»	»	»	−17	»	− 6	»	−3
39	−37	−36	−35	−29	−21	−23	−18	»	»	−27	−24	−22	−16	− 9	− 5	4	−2
40	»	−35	»	−28	»	−24	»	−27	»	−28	»	−23	»	−10	»	»	»
41	−36	−34	−34	−29	»	−25	−19	−26	−31	−29	−23	−22	−17	»	− 4	»	−1
42	−35	»	»	»	−22	»	−18	»	−30	»	−22	»	−18	»	»	»	−2
43	»	−35	−35	−30	−23	−26	−19	−27	−29	»	−21	−23	−17	»	− 3	»	−3
44	»	−36	»	−29	»	−25	»	»	»	−28	»	−22	»	− 9	»	3	»
45	−34	−37	−34	−30	−22	»	−18	−28	−30	−27	−20	»	−16	−10	»	2	−4
46	−35	»	−33	»	−23	»	−19	»	−29	»	»	»	»	»	− 2	»	−5
47	−36	»	−32	−31	−22	−24	−20	−29	−30	»	»	−21	−17	− 9	− 3	3	−6
48	»	−36	»	−30	»	−23	»	−30	»	−28	»	−20	»	−10	»	2	»
49	−35	−35	−31	−31	−21	−22	−20	−30	−31	−27	−21	−21	−16	−11	− 2	2	−6

101000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	− 6	−13	−15	−11	−17	−18	−10	−12	−19	−19	−20	−26	−34	−37	−44	−37	−40
1	− 5	−14	−16	−10	»	−17	»	−11	−18	−18	−21	−27	−33	»	−43	−38	−41
2	»	−15	»	− 9	»	−16	»	−10	»	−19	»	»	»	−38	»	−39	»
3	»	−16	−15	−10	−18	−17	− 9	−11	−17	»	−22	−28	−32	−39	−44	−38	−40
4	− 6	»	−14	»	−17	»	− 8	»	−16	»	−21	»	−31	»	−43	»	»
5	− 7	−15	−15	−11	−16	»	− 7	−10	−15	−20	−22	−27	−32	−40	»	−37	−41
6	»	−14	»	»	»	−18	»	»	»	−21	»	−26	»	−41	»	−38	»
7	− 8	»	−14	−12	−17	−19	− 6	− 9	−14	−20	»	−27	−31	−42	−42	−39	−42
8	− 7	»	−15	»	−18	»	− 7	»	»	»	−23	»	−30	»	−43	»	−43
9	− 8	−15	−14	−11	−19	−20	»	− 8	−15	−19	−22	−26	−31	−43	−42	»	−42
10	»	−14	»	−12	»	−19	»	− 9	»	−20	»	−27	»	»	»	−38	»
11	− 7	−13	»	−13	−20	−20	− 6	−10	−14	−21	−21	»	−32	−44	−41	−39	»
12	»	»	»	»	−19	»	− 5	»	−15	»	−22	»	−33	»	−42	»	−41
13	− 6	−14	−15	−14	−18	−21	− 4	»	−16	−22	−23	−28	−34	−43	−43	−38	»
14	»	−15	»	−15	»	»	»	−11	»	−21	»	−27	»	»	»	−37	»
15	− 5	−16	−14	»	−17	−22	− 3	−12	−15	−22	−22	−28	»	−42	−42	−38	−40
16	− 6	»	−15	»	−16	»	− 4	»	−14	»	»	»	−35	»	−41	»	−39
17	− 5	−15	−16	−16	−17	−21	− 5	−11	»	−21	−23	−27	−34	−41	−40	−39	−38
18	»	−16	»	−15	»	−20	»	−12	»	−22	»	−28	»	−40	»	»	»
19	− 6	−17	−15	−16	»	−19	− 4	−11	−13	−23	−24	»	»	»	−39	−40	−37
20	− 5	»	»	»	−16	»	− 5	»	−14	»	−23	»	−33	»	−38	»	−38
21	»	−18	−14	−17	−17	−20	− 4	−12	−15	»	−22	−27	−32	−39	−37	−41	−39
22	»	−17	»	−16	»	−19	»	»	»	−22	»	−28	»	−40	»	−42	»
23	− 4	−18	−15	−17	−18	»	− 5	−13	−14	−21	−23	−29	−33	−39	»	−43	»
24	− 5	»	−16	»	−17	»	− 6	»	−13	»	−24	»	»	»	−38	»	−40
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−17	»	−18	»	−20	»	−14	»	−20	»	−30	»	»	»	−44	»
27	− 6	−18	−15	−19	−18	−19	»	−13	−14	−19	−25	−31	»	−40	−37	»	−39
28	− 7	»	−14	»	»	»	− 7	»	−15	»	−24	»	−32	»	−36	»	−40
29	− 6	−17	»	−18	−19	−20	− 8	−12	−16	−20	»	»	−31	−39	−35	−43	−39
30	»	−18	»	−17	»	−19	»	−13	»	»	»	−32	»	−40	»	−42	»
31	− 7	−17	−15	−16	−20	»	− 9	»	»	−19	−23	−33	−32	−41	−36	−41	»
32	− 8	»	−14	»	−19	»	−10	»	−15	»	−22	»	−33	»	»	»	−38
33	− 9	−16	−13	»	−20	−18	»	−14	−16	−18	−23	−34	»	−40	−35	−40	−39
34	»	»	»	−17	»	»	»	−15	»	−19	»	−33	»	−39	»	−39	»
35	−10	»	−12	−18	»	−17	−11	−16	»	−18	−22	−32	−34	−38	−36	−38	−38
36	−11	»	−11	»	−19	»	»	»	−17	»	−21	»	−35	»	−37	»	−37
37	−12	−15	»	−17	»	−16	−12	−17	−18	−19	−20	−33	−36	»	−36	−39	−36
38	»	»	»	−18	»	−15	»	−18	»	−20	»	»	»	−39	»	»	»
39	»	»	−12	−17	−18	−14	−13	−19	−17	»	−21	−32	−35	−40	−37	−40	−37
40	−13	»	−11	»	−17	»	−12	»	−18	»	−22	»	−36	»	−38	»	»
41	−12	−14	−12	−18	−16	»	−11	−20	−17	»	−23	−31	−37	−41	»	−41	−36
42	»	−15	»	»	»	−15	»	−19	»	−21	»	−32	»	−40	»	−40	»
43	−11	»	−11	−17	−17	−14	−12	−18	−16	−20	»	−33	−36	−41	−39	−39	−35
44	−10	»	−12	»	−18	»	−11	»	»	»	−24	»	−37	»	−38	»	−34
45	−11	−16	−11	−16	−19	−13	»	−17	−17	−21	−25	−34	−36	−42	»	»	−33
46	»	−15	»	−17	»	−12	»	−18	»	−20	»	−33	»	»	»	−38	»
47	−12	−14	»	−16	−20	−11	−12	−19	−18	−19	−24	»	−35	−43	−39	−39	−34
48	»	»	−10	»	−19	»	−13	»	»	»	−25	»	−36	»	−38	»	−35
49	−13	−15	−11	−17	−18	−10	−12	−19	−19	−20	−26	−34	−37	−44	−37	−40	−35

102000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-35	-34	-41	-34	-35	-45	-49	-53	-65	-63	-68	-69	-59	-58	-55	-51	-58
1	-34	-33	-40	-33	-36	»	-50	-52	-64	-64	-69	-70	-58	-59	»	-52	-59
2	»	»	-39	»	-35	»	-49	»	-65	»	-68	»	»	»	-56	»	»
3	-35	»	-38	-32	»	-46	-50	-53	-66	-65	»	-69	-57	-58	-57	-51	-60
4	»	-34	»	-33	»	-45	»	-54	»	-64	»	-68	»	-59	»	-52	»
5	-34	-35	-39	-32	-36	-44	»	-53	-65	-63	-67	-69	-58	-60	-56	»	-59
6	-35	»	-38	»	»	»	-51	»	-66	»	»	»	-57	»	-57	»	»
7	-36	-34	»	-33	-35	-43	-52	-54	-65	-62	-66	»	-58	-59	-58	»	-60
8	»	-33	»	-34	»	-44	»	-55	»	»	»	-70	»	-58	»	-53	»
9	-35	-34	-37	-33	-36	-45	-53	»	-64	-63	-67	-71	-59	»	-57	-54	»
10	-36	»	-38	»	»	»	-54	»	-63	»	-66	»	»	»	»	»	-59
11	-35	-33	-37	»	-35	-46	-55	-56	-62	-64	-67	»	»	-59	-56	-55	-60
12	»	»	»	-34	»	-45	»	-57	»	-63	»	-70	»	-60	»	-56	»
13	-36	-34	-36	-35	-36	-46	-54	»	»	»	-66	-71	-58	-59	-55	-57	-61
14	-35	»	-35	»	-37	»	»	»	»	»	-65	»	»	»	-54	»	-60
15	-36	-35	-34	-34	»	-47	-55	»	-61	-64	-64	-72	-57	»	-53	-58	-61
16	»	»	»	-35	»	-48	»	-58	»	-63	»	»	»	-58	»	-57	»
17	»	-36	-35	-36	»	»	-54	-59	-62	»	-65	-73	-58	-57	-52	-58	-60
18	-35	»	-36	»	»	»	-53	»	-61	»	-66	»	-59	»	-53	»	»
19	-34	-37	-37	»	-38	»	-52	-58	-62	-62	-67	-72	-60	-56	»	-57	-61
20	»	-36	»	»	»	-47	»	-57	»	-63	»	-71	»	-57	»	-58	»
21	-35	»	-38	-35	-39	-48	-53	-56	-63	-62	»	-70	-59	-56	-52	-57	-62
22	»	»	-39	»	-40	»	-52	»	»	»	-68	»	-60	»	-51	»	-63
23	-34	-37	-38	-36	-41	-47	»	-55	-62	-63	-69	-69	-59	-55	-52	»	-62
24	»	-38	»	-37	»	-46	»	-56	»	-62	»	-70	»	»	»	-56	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	-37	»	-42	»	-53	»	-63	»	-70	»	-58	»	-51	»	»
27	-33	-39	-36	-38	-43	-47	-52	»	-62	-63	-71	-71	-57	-54	-52	-55	»
28	»	-38	»	-37	»	»	»	-57	»	-64	»	-70	»	-53	»	-54	»
29	-32	-39	-37	»	-42	-48	-53	-58	-63	-65	-72	-69	»	-52	-53	-55	-61
30	-31	»	-38	»	-43	»	-52	»	-64	»	»	»	-58	»	-54	»	-62
31	-30	-40	-39	-38	-44	-49	-53	-59	»	-64	-71	-68	-57	-53	-53	-54	-61
32	»	»	»	-37	»	-50	»	-60	»	-65	»	-67	»	-52	»	»	»
33	-31	-39	-38	-38	»	-51	-52	-59	-65	-64	-70	-66	-58	»	-54	»	-60
34	-32	»	»	»	-45	»	-53	»	-64	»	-71	»	-57	»	-53	»	-61
35	»	-38	-37	-37	-44	-52	-52	-60	-63	»	-72	-65	-58	-53	-52	-53	-62
36	»	-39	»	-36	»	-51	»	»	»	-65	»	-64	»	-54	»	-54	»
37	-33	-38	-38	-37	-45	»	-51	-59	-64	-64	-73	-63	-59	»	»	-55	-61
38	-32	»	-37	»	-46	»	-50	»	-63	»	-72	»	»	»	-53	»	-60
39	-33	»	-38	-36	-45	-50	-51	-60	-62	-65	»	-62	-58	-55	-54	-54	-59
40	»	-37	»	-37	»	-51	»	-59	»	-64	»	-61	»	-54	»	-55	»
41	-34	-38	-37	-36	-44	-50	»	-60	-63	-65	-71	-62	-57	-53	»	»	-58
42	-35	»	-36	»	»	»	-50	»	-62	»	-70	»	-56	»	-53	»	-59
43	-34	-39	»	-35	-45	-49	-49	-61	-63	-66	-69	»	-57	-52	-52	-56	-60
44	»	-40	»	-34	»	-48	»	-62	»	»	»	-61	»	-53	»	-57	»
45	-33	-41	-35	-33	-46	-49	-50	»	»	-67	-70	-60	-58	-54	-51	»	»
46	-32	»	-34	»	-45	»	-51	»	-64	»	-71	»	-59	»	»	»	-61
47	-33	-42	-33	»	-44	»	-52	-63	-63	-66	-70	-61	»	-55	-52	-58	-62
48	»	»	»	-34	»	-50	»	-64	»	-67	»	-60	»	-54	»	-59	»
49	-34	-41	-34	-35	-45	-49	-53	-65	-63	-68	-69	-59	-58	-55	-51	-58	-61

103000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	-61	-57	-53	-50	-53	-53	-49	-43	-46	-42	-37	-33	-35	-33	-27	-23	-18
1	-60	-58	-52	-49	»	-52	»	-44	-45	-41	-38	-34	-36	-32	-26	»	-19
2	»	-59	»	»	»	-53	»	-45	»	-40	»	-35	»	»	»	-22	»
3	-61	-58	»	-48	-52	-52	-50	-46	-44	-39	-37	»	-35	-31	-27	-21	-18
4	»	»	-53	»	-51	»	-51	»	-43	»	-36	»	-36	»	-28	»	-17
5	»	-57	-52	-49	-52	-53	-52	»	-42	-40	»	-34	-37	-30	-29	-20	»
6	»	-58	»	-50	»	»	»	-45	»	-41	»	-33	»	-29	»	-21	»
7	-62	-57	-51	»	-51	-54	-51	-46	-41	-40	-35	-34	»	-30	-30	-20	-18
8	-61	»	-52	»	-52	»	-50	»	»	»	»	»	-38	»	-29	»	-17
9	-60	-56	-51	-51	-53	-53	-49	-45	»	-39	-34	-33	»	-31	-30	-21	-16
10	»	-57	»	-52	»	-52	»	-46	»	-40	»	-34	»	-32	»	»	»
11	-61	-56	-52	-53	»	-53	-48	-45	-40	-39	-35	-33	-37	»	-29	-20	-15
12	-62	»	»	»	-52	»	-47	»	-39	»	-34	»	-36	»	-30	»	»
13	»	-55	-53	-54	-51	-54	-48	-44	-38	»	-33	»	-35	-31	-29	-19	-14
14	»	-56	»	-53	»	-55	»	»	»	-38	»	-32	»	-30	»	-20	»
15	-61	-55	-54	-52	-52	»	-47	-45	-39	-39	-34	-31	-36	-29	»	-19	-13
16	-60	»	-53	»	-53	»	»	»	-40	»	-35	»	»	»	-28	»	-14
17	-61	»	-54	-53	-54	-54	-48	-46	-41	-38	»	-32	-35	-28	-27	-18	-13
18	»	-56	»	-54	»	-53	»	-47	»	-39	»	-33	»	-27	»	-17	»
19	-62	-55	-55	-53	-55	-52	»	-46	-42	-40	-36	-32	-36	-28	-26	»	-12
20	-63	»	-54	»	»	»	-47	»	-41	»	-37	»	-35	»	-27	»	-11
21	-62	-54	»	-52	-56	»	»	-45	-40	-39	-38	»	-34	-27	-26	-18	-12
22	»	-53	»	-53	»	-51	»	-44	»	»	»	-31	»	-28	»	-17	»
23	-63	-54	-53	-54	-57	-50	»	»	-39	-40	»	-30	-33	-27	-25	-18	»
24	-62	»	-52	»	-56	»	-46	»	-38	»	-39	»	-32	»	»	»	-11
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	-53	»	-51	»	-45	»	-39	»	-29	»	-26	»	-17	»
27	-63	-53	-51	»	-57	-52	-47	-44	»	-38	-40	-30	-31	-27	-26	-16	-12
28	-62	»	-50	»	-56	»	»	»	-37	»	-41	»	-30	»	-25	»	-13
29	-63	»	-49	-54	»	-53	-48	-45	-38	-37	-42	-29	-31	»	-24	-15	-14
30	»	-54	»	-55	»	-54	»	-46	»	-38	»	»	»	-28	»	-16	»
31	»	-53	-48	-56	-57	-55	-47	-45	-37	»	-41	-30	-32	-27	-23	-17	-13
32	-62	»	-49	»	-56	»	-46	»	-36	»	-40	»	-33	»	-22	»	»
33	-61	-52	-48	-57	-57	»	-47	-46	-35	-37	-41	-31	-32	-28	»	-16	-14
34	»	-53	»	»	»	-54	»	-45	»	-38	»	-32	»	»	»	-17	»
35	-62	»	-49	-58	»	-53	-48	-46	-36	-37	»	-33	-31	»	-21	-18	-15
36	-61	»	-48	»	-58	»	-47	»	»	»	-40	»	-32	»	-22	»	-16
37	-62	-52	-49	-57	-57	-52	»	-45	-37	-38	-39	-34	-31	-27	-23	»	-15
38	»	-53	»	-56	»	-53	»	-44	»	-37	»	-35	»	»	»	-17	»
39	-61	-54	»	-55	-56	-52	-46	-43	-38	-36	-38	»	-32	-26	-22	»	-14
40	»	»	-48	»	-57	»	-45	»	»	»	-37	»	-33	»	»	»	-13
41	-60	-55	-47	-56	-56	-51	-44	»	-39	-37	-36	-34	-34	»	-23	-18	»
42	»	-56	»	-55	»	»	»	-42	»	-38	»	-35	»	-27	»	-17	»
43	-59	-55	-48	»	-55	-50	-45	-43	-40	-37	-35	»	»	-26	-24	»	-14
44	-58	»	-49	»	-54	»	-46	»	-41	»	»	»	-33	»	-25	»	-13
45	-57	-54	-50	-56	-55	-51	-45	-44	»	»	-34	-36	-34	-27	-24	-18	-14
46	»	-53	»	-55	»	-50	»	-45	»	-38	»	»	»	-26	»	»	»
47	-58	-54	-51	-54	»	-49	-44	»	-40	-37	-35	»	-33	»	-23	-19	-13
48	-57	»	»	»	-54	»	»	»	-41	»	-34	»	-32	»	-22	»	-12
49	-57	-53	-50	-53	-53	-49	-43	-46	-42	-37	-33	-35	-33	-27	-23	-18	-12

104000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	-12	- 7	-6	4	4	10	15	14	16	20	7	2	4	6	-1	7	5
1	-13	- 8	-5	3	3	»	14	»	17	19	8	3	5	5	0	6	»
2	-14	»	-4	»	2	»	15	»	16	»	7	»	6	»	»	»	»
3	-13	- 9	-3	»	1	9	14	13	15	20	6	2	»	6	1	7	6
4	»	»	»	4	»	8	»	14	»	21	»	3	»	5	»	8	»
5	-14	-10	-4	5	0	7	13	15	»	20	7	4	5	4	0	7	5
6	-13	»	-3	»	1	»	»	»	14	»	6	»	4	»	1	»	6
7	-12	- 9	»	4	»	8	14	14	15	21	5	5	3	»	0	8	5
8	»	- 8	»	5	»	7	»	15	»	20	»	»	»	3	»	9	»
9	»	- 7	-2	4	2	6	15	14	16	»	4	4	4	2	1	8	4
10	-11	»	-1	»	3	»	16	»	15	»	5	»	5	»	2	»	»
11	-12	- 8	0	5	4	»	15	15	14	19	6	5	4	1	»	9	3
12	»	- 9	»	»	»	5	»	14	»	18	»	4	»	2	»	8	»
13	-11	»	-1	4	3	6	14	13	13	17	»	5	3	3	»	9	4
14	-12	»	0	»	2	»	15	»	»	»	5	»	4	»	3	»	3
15	-11	- 8	1	3	3	7	»	14	12	18	4	4	5	2	2	»	2
16	»	- 7	»	2	»	»	»	15	»	17	»	3	»	»	»	8	»
17	-10	- 8	»	3	4	8	16	14	13	16	3	»	6	1	3	9	3
18	»	»	0	»	5	»	»	»	12	»	4	»	5	»	2	»	2
19	- 9	- 7	-1	2	6	7	15	»	11	15	5	4	4	0	3	10	»
20	»	- 8	»	3	»	»	»	13	»	16	»	5	»	1	»	9	»
21	-10	- 9	-2	»	5	8	16	14	12	15	4	6	»	2	4	10	»
22	-11	»	-3	»	6	»	17	»	13	»	»	»	3	»	»	»	1
23	-12	-10	-4	4	5	9	»	15	»	16	3	5	2	1	»	»	0
24	»	- 9	»	5	»	10	»	14	»	15	»	4	»	»	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-13	»	»	»	6	»	18	»	12	»	2	»	1	»	5	»	1
27	»	-10	-3	4	5	11	17	15	13	»	»	5	0	2	6	11	0
28	»	- 9	»	5	»	10	»	»	»	»	»	4	»	3	»	10	»
29	-14	- 8	-2	6	6	»	18	16	»	14	3	5	1	2	»	11	»
30	-13	»	-1	»	5	»	19	»	14	»	4	»	»	»	7	»	-1
31	-12	»	0	5	4	11	»	15	15	13	»	4	2	»	6	10	-2
32	»	- 9	»	4	»	»	»	16	»	14	»	3	»	1	»	9	»
33	-11	-10	1	5	»	12	»	15	»	15	3	4	1	0	5	»	-1
34	-10	»	2	»	»	»	18	»	14	»	4	»	2	»	6	»	-2
35	- 9	- 9	»	4	5	11	17	14	»	14	5	»	1	-1	5	10	-1
36	»	»	»	5	»	12	»	13	»	»	»	3	»	-2	»	9	»
37	»	- 8	3	4	4	11	16	»	15	13	6	2	2	-1	6	8	»
38	- 8	»	4	»	5	»	15	»	16	»	5	»	3	»	»	»	-2
39	- 7	- 7	5	»	6	12	16	12	»	12	4	1	»	0	5	9	-1
40	»	»	»	3	»	13	»	13	»	11	»	2	»	-1	»	8	»
41	- 6	- 8	4	4	7	12	15	14	»	10	3	3	4	0	6	7	0
42	- 7	»	5	»	8	»	»	»	17	»	4	»	5	»	7	»	1
43	- 6	- 9	4	5	»	13	14	15	16	9	3	4	6	»	6	6	2
44	»	- 8	»	4	»	12	»	16	»	10	»	»	»	-1	»	7	»
45	»	- 7	3	5	9	13	13	15	17	»	4	3	7	0	7	8	1
46	- 7	»	2	»	8	»	12	»	18	»	3	»	8	»	6	»	»
47	- 6	»	3	»	9	»	13	16	19	9	2	2	7	1	»	7	0
48	»	- 6	»	»	»	14	»	17	»	8	»	3	»	0	»	6	»
49	- 7	- 6	4	4	10	15	14	16	20	7	2	4	6	-1	7	5	-1

105000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	-1	-4	0	1	4	0	8	-2	-12	-18	-15	-22	-22	-30	-33	-29	-25
1	-2	-3	-1	2	3	1	7	-3	»	-19	-16	-23	-21	-31	»	-28	-24
2	»	-2	»	1	»	2	»	-4	»	-20	»	-22	»	-30	»	»	»
3	-1	-3	0	2	»	3	8	-5	-13	-21	-17	-21	-22	»	-32	-27	-23
4	0	»	»	»	2	»	9	»	-14	»	-18	»	-23	»	-33	»	»
5	»	-2	-1	1	1	4	8	-6	-13	»	-19	-20	-24	-29	-32	»	-22
6	»	-3	»	2	»	3	»	»	»	-20	»	-19	»	-30	»	-26	»
7	-1	-2	0	3	2	»	9	-7	-12	-19	-20	»	-23	»	»	-27	-21
8	-2	»	-1	»	1	»	8	»	-11	»	-19	»	»	»	-31	»	-20
9	-1	»	-2	4	2	4	7	-6	-12	-18	»	»	-24	-29	-30	-26	-19
10	»	-1	»	5	»	3	»	-5	»	-17	»	-20	»	-30	»	-25	»
11	-2	0	-1	4	1	»	»	-6	-13	»	-18	-21	-25	-29	-29	»	-20
12	-1	»	-2	»	»	»	6	»	»	»	-19	»	-24	»	-30	»	-19
13	-2	1	»	3	2	4	5	»	-14	-16	-18	»	-23	-28	-31	-24	-18
14	»	2	»	2	»	3	»	-7	»	»	»	-20	»	-27	»	-25	»
15	-1	1	-3	3	1	»	»	»	-15	-15	-19	-19	-24	-28	-30	-24	»
16	0	»	-2	»	»	»	4	»	-14	»	-18	»	-25	»	»	»	-17
17	-1	0	-1	»	2	4	3	-8	-13	-14	-19	-20	»	-27	-29	-25	-18
18	»	»	»	4	»	»	»	-7	»	-15	»	-19	»	-26	»	»	»
19	-2	»	-2	5	3	3	2	-8	»	-16	-20	-20	-24	-27	-28	-24	-17
20	»	»	-1	»	2	»	»	»	-14	»	-21	»	-23	»	-29	»	-16
21	-3	1	-2	6	»	4	1	-9	-13	-15	-22	-19	-24	»	-30	-23	-17
22	»	0	»	5	»	3	»	-8	»	-16	»	»	»	-26	»	-22	»
23	»	»	-3	6	3	2	2	-9	-14	»	-23	-20	-25	-27	-29	-23	-18
24	-4	»	-2	»	4	»	1	»	-13	»	-24	»	-26	»	-30	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-1	»	»	»	3	»	-8	»	-17	»	-21	»	-28	»	-22	»
27	-3	»	-1	5	3	4	0	-9	-12	-18	»	-20	-25	-29	-31	-23	-17
28	-2	»	0	»	4	»	-1	»	»	»	-25	»	-24	»	-30	»	-18
29	-3	-2	-1	6	3	5	»	-10	-13	-19	-26	-19	-25	-28	-31	»	-19
30	»	»	»	5	»	4	»	-9	»	-18	»	-18	»	»	»	-24	»
31	-4	-1	»	4	4	5	-2	-8	-14	-19	-25	»	-24	-29	-30	-23	-18
32	»	»	0	»	5	»	-1	»	-13	»	»	»	-25	»	-29	»	-17
33	-5	-2	1	5	4	6	-2	»	-12	-18	-24	-19	-24	-30	-30	-24	»
34	»	-1	»	6	»	»	»	-9	»	-17	»	-20	»	-29	»	-23	»
35	-6	0	2	»	3	5	-1	-8	-13	-16	-25	-21	»	-30	-29	-22	-18
36	-5	»	1	»	2	»	-2	»	»	»	»	»	-25	»	-28	»	-17
37	-4	1	0	5	1	4	-3	-9	»	-15	-24	-20	-26	-31	-29	-23	-16
38	»	0	»	4	»	3	»	-8	»	-14	»	-21	»	-32	»	»	»
39	-3	-1	1	5	»	2	-2	-7	-14	-15	-23	-20	-25	»	-28	-22	-17
40	-4	»	»	»	0	»	»	»	-15	»	-22	»	-26	»	-29	»	-16
41	»	0	0	6	1	3	-1	-8	-14	»	-23	-19	-27	-31	-28	-23	-15
42	»	»	»	5	»	4	»	»	»	-14	»	-20	»	-32	»	-22	»
43	-5	-1	-1	4	0	»	-2	-9	-15	-13	-22	-19	-28	-33	»	-23	-16
44	-4	»	-2	»	1	»	-3	»	-16	»	-23	»	»	»	-27	»	-17
45	-3	»	-1	5	2	5	-2	-10	-15	-14	»	-20	-27	-32	-26	-24	-18
46	»	0	»	4	»	6	»	-11	»	-15	»	-21	»	-33	»	-25	»
47	-2	-1	0	5	1	7	»	-12	-16	-14	-22	-22	-28	-32	-27	»	-17
48	-3	»	1	»	»	»	-3	»	-17	»	-23	»	-29	»	-28	»	-16
49	-4	0	1	4	0	8	-2	-12	-18	-15	-22	-22	-30	-33	-29	-25	-17

106000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	-17	-25	-26	-33	-34	-30	-25	-29	-30	-24	-35	-33	-32	-26	-30	-21	-20
1	»	-26	»	-32	-35	-29	-24	-28	-31	»	-36	-34	-31	-25	-29	-20	-21
2	-18	»	-27	»	-34	»	-23	»	-30	»	-35	»	-30	»	-28	»	»
3	»	-27	-28	-31	-33	»	-24	-29	-29	-25	-36	-33	-29	-24	»	-21	-20
4	»	-26	»	»	»	-28	»	-30	»	-26	»	»	»	-25	»	-22	»
5	-19	»	-27	-32	-34	-27	-23	-29	-28	-25	»	-34	-30	-26	-29	-21	-19
6	-20	»	-28	»	-35	»	-24	»	»	»	-37	»	-29	»	-28	»	-18
7	-19	-25	-29	-31	-36	-26	»	-30	-29	-26	-36	-33	-30	-25	-29	»	-19
8	»	-24	»	-32	»	-27	»	-29	»	-27	»	-32	»	»	»	-22	»
9	-18	-25	»	-33	-35	-26	-25	-28	-28	-28	-35	»	-29	-26	-30	-21	-18
10	»	»	-30	»	-34	»	-24	»	-27	»	»	»	-28	»	-31	»	-19
11	-19	-26	-29	-34	-35	-25	-23	»	-26	-27	-36	-33	-27	»	-30	-22	»
12	»	-25	»	-35	»	»	»	-29	»	-28	»	-34	»	-27	»	-21	»
13	-20	-26	-28	»	»	-24	-22	-30	-27	-27	-35	-35	»	-28	-31	»	-20
14	-21	»	-29	»	-36	»	-21	»	-26	»	»	»	-28	»	-30	»	-21
15	-22	-27	-30	-36	-37	-23	-22	-31	»	-28	-34	-34	-27	-29	-29	-20	-20
16	»	-26	»	-35	»	-22	»	-30	»	-27	»	-33	»	-30	»	»	»
17	-21	-25	-31	-36	»	-23	-23	-29	-25	-28	-35	-34	-28	»	-28	-21	-19
18	-20	»	»	»	-36	»	-24	»	-24	»	-34	»	-29	»	-27	»	-18
19	»	-26	-32	-35	-35	-22	-25	-28	-25	»	-33	-35	-30	-29	-26	-20	-19
20	»	»	»	-34	»	-21	»	»	»	-29	»	-34	»	-28	»	-21	»
21	-19	»	-31	-33	-34	»	-24	-27	-24	-28	-34	-33	-31	-29	»	-22	-18
22	-20	»	-32	»	-33	»	-23	»	-25	»	-33	»	»	»	-27	»	-19
23	-19	»	-33	-34	-32	-20	-24	-28	-26	-29	»	»	-32	-28	-26	-21	-20
24	»	-27	»	-33	»	-21	»	-29	»	-28	»	»	»	-27	»	-22	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-20	»	-34	»	»	»	-25	»	-25	»	-32	»	-33	»	-25	»	-19
27	-21	-28	»	-32	-31	-20	-26	-28	-26	-29	-33	»	-32	-26	-24	-23	-18
28	»	-27	»	-33	»	-21	»	-29	»	»	»	-32	»	-27	»	-22	»
29	-22	-28	-35	-34	-32	-22	-27	»	-25	-30	-34	-31	-33	-28	-25	-21	»
30	-21	»	-34	»	-31	»	-26	»	-26	»	-33	»	-32	»	»	»	-17
31	-22	-29	-35	»	-32	-21	-27	-28	-25	-29	-32	-32	»	-27	-26	-20	-18
32	»	»	»	-33	»	-22	»	-29	»	-30	»	-33	»	-26	»	-21	»
33	-21	-28	-34	-32	-31	-23	-28	-28	»	-31	-33	-34	-33	-27	-25	-22	-19
34	-22	»	-33	»	-30	»	»	»	-24	»	-34	»	-32	»	-24	»	-18
35	-23	-29	-32	-33	»	»	-27	-29	-25	-32	-35	-33	-33	»	-23	-21	-19
36	»	-30	»	-32	»	-24	»	-28	»	-33	»	»	»	-28	»	-22	»
37	»	»	-33	-31	-31	-23	-28	-27	-24	»	-34	-34	-32	-27	-24	»	-18
38	-24	»	-34	»	-32	»	-27	»	-23	»	-35	»	-31	»	»	»	»
39	-25	-29	-33	-32	-31	»	-26	-28	-24	-32	-34	-35	-30	»	»	-23	-17
40	»	-30	»	»	»	-24	»	-29	»	-33	»	-34	»	-28	»	-22	»
41	-26	»	-34	»	-32	-25	-27	-30	-23	-34	»	»	-29	-29	-23	-21	-18
42	-27	»	-33	»	-31	»	-28	»	»	»	»	»	-28	»	-24	»	-19
43	-26	-29	-34	»	-30	-26	»	-29	-22	»	-33	-33	-27	-28	-25	»	-18
44	»	-30	»	-31	»	-25	»	-30	»	-35	»	»	»	»	»	-20	»
45	-25	-29	»	-32	-29	-24	-27	»	-23	-34	-32	»	-26	-27	-24	-19	-19
46	»	»	-33	»	-30	»	»	»	-24	»	-33	»	-27	»	-23	»	-20
47	-26	-28	-34	-33	-29	»	-28	»	-23	-33	-34	-32	-26	-28	-22	-20	»
48	»	-27	»	-34	»	»	»	-31	»	-34	»	-33	»	-29	»	-19	»
49	-25	-26	-33	-34	-30	-25	-29	-30	-24	-35	-33	-32	-26	-30	-21	-20	-19

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	-19	-20	-23	-22	-21	-28	-24	-27	-36	-30	-27	-21	-21	-25	-32	-32	-24
1	-20	»	-22	-21	-22	»	-23	-28	-37	-31	»	»	-20	-26	-33	-33	-23
2	»	-19	»	-20	»	-27	»	-27	»	-30	»	-20	»	-27	»	-32	»
3	-19	-20	-23	-19	-23	-28	»	-28	-38	-31	-28	-21	-21	-28	-34	»	-24
4	-20	»	-22	»	»	»	-24	»	-37	»	-29	»	-20	»	-33	»	-23
5	-19	-19	»	-20	-24	-27	-25	-29	-36	-30	-30	»	-21	-27	-32	-33	-22
6	»	-20	»	-19	»	-28	»	-30	»	»	»	-22	»	-26	»	-32	»
7	-20	-21	-21	-20	-23	-29	-26	»	-37	-29	-31	-21	-22	-25	-33	»	»
8	-21	»	-20	»	-22	»	-25	»	-36	»	-30	»	-23	»	»	»	»
9	-20	-22	-19	»	-21	-28	»	-29	-35	-30	-29	-22	»	-24	-34	-31	-23
10	»	»	»	-21	»	-29	»	-28	»	-31	»	-21	»	-23	»	-30	»
11	-19	-21	-20	-20	-22	-28	-26	-29	»	-30	-28	-20	-24	-24	-35	-31	-24
12	-18	»	-21	»	-21	»	»	»	-34	»	-27	»	-23	»	-34	»	-23
13	»	-20	-22	-21	»	-27	-27	-30	-35	-31	-26	-21	-24	»	-33	-30	-24
14	»	-21	»	-22	»	-28	»	-29	»	-32	»	»	»	-25	»	-29	»
15	»	-22	-23	-21	-22	-29	-26	-28	-36	»	-25	-20	-23	-26	-34	-30	-23
16	-19	»	-24	»	-21	»	-27	»	-35	»	-26	»	-22	»	-33	»	»
17	-20	»	-25	-22	-20	»	-28	-29	-36	-31	-27	-21	-21	-25	»	-29	-24
18	»	-23	»	»	»	-28	»	-30	»	-30	»	-20	»	-24	»	-28	»
19	-19	»	-26	-23	-19	-29	-27	-31	-35	-29	»	-21	-22	-23	-34	-27	»
20	-20	»	-25	»	-20	»	-26	»	»	»	-28	»	-23	»	-33	»	-25
21	-21	-24	-24	-22	-19	-30	»	-32	-34	-28	-29	-22	»	-24	»	»	-26
22	»	-23	»	-23	»	-29	»	-33	»	-27	»	-23	»	»	»	-26	»
23	-20	-24	»	-22	-20	-28	-27	-32	-33	-26	-28	»	»	-25	-32	-27	-25
24	»	»	-23	»	-21	»	-28	»	-34	»	-29	»	-22	»	-33	»	-24
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-25	»	-21	»	»	»	-33	»	»	»	-22	»	-24	»	-28	»
27	-21	-24	-22	»	-22	-27	-29	-34	»	-25	-28	-23	»	-25	-34	-29	-25
28	-22	»	-21	»	-23	»	-28	»	-33	»	»	»	-21	»	-33	»	-24
29	-23	-25	-20	-20	-24	»	»	-33	»	-24	-27	-22	-20	-26	-32	-28	-23
30	»	-26	»	-19	»	»	»	-32	»	-25	»	-23	»	-25	»	»	»
31	-22	-27	-21	-18	»	-28	-29	-33	-32	-26	-26	-22	-21	»	-33	-27	-24
32	-21	»	»	»	-25	»	-30	»	-33	»	-25	»	-22	»	»	»	-23
33	»	-26	»	-19	-24	-27	-29	-34	-32	»	-24	-21	-23	-26	-34	-28	-22
34	»	»	»	-18	»	-28	»	»	»	-25	»	-20	»	-27	»	-27	»
35	»	-25	-22	-17	-25	»	-28	-35	-31	-24	-23	-21	-24	-26	»	-28	-21
36	-22	»	-21	»	-26	»	-29	»	-32	»	-24	»	»	»	-35	»	-22
37	-23	»	-22	-18	-27	-29	-28	-36	-33	-25	»	-22	-23	-27	-36	-27	-21
38	»	-24	»	»	»	-28	»	-37	»	-24	»	-21	»	-28	»	-26	»
39	-22	-23	-23	-19	-26	-27	»	-36	-32	-25	-23	»	-22	-29	-35	»	-20
40	»	»	-24	»	»	»	-29	»	-31	»	-22	»	-21	»	-34	»	-21
41	-21	-24	»	-18	-27	-26	-30	-37	-30	-26	-23	»	-22	-28	-33	-25	-20
42	»	-25	»	-19	»	-25	»	-38	»	»	»	-22	»	»	»	-26	»
43	-20	-24	-23	-20	-28	-26	-29	»	-29	-27	-22	-21	-23	-29	-32	»	»
44	-19	»	-22	»	-27	»	-28	»	-30	»	-23	»	-24	»	»	»	-19
45	-18	-23	-23	»	-28	-25	-27	-39	»	-28	-22	-20	»	-30	-31	-25	-18
46	»	»	»	-21	»	-24	»	-38	»	-27	»	-19	»	-31	»	-26	»
47	»	-22	-22	-20	-29	-23	-28	-37	»	-28	-23	-20	-23	-32	-32	-25	-17
48	-19	»	-23	»	-28	»	»	»	-31	»	-22	»	-24	»	-33	»	-16
49	-20	-23	-22	-21	-28	-24	-27	-36	-30	-27	-21	-21	-25	-32	-32	-24	-17

107000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	-17	-22	-23	-24	-28	-26	-21	-17	-11	-19	-19	-13	-10	-7	2	4	4
1	-16	-23	»	-25	-29	-25	-22	-18	-12	-20	-20	»	- 9	-6	3	5	5
2	»	»	-24	»	-28	»	-21	»	-13	»	-21	»	-10	»	4	»	»
3	-17	-22	-23	-26	-29	-24	-22	»	-12	-19	-20	-14	-11	-5	3	»	»
4	»	-23	»	-25	»	»	»	-17	»	-20	»	-15	»	-4	»	4	»
5	-18	-22	-22	»	-30	-25	-21	-18	-13	-19	-19	-14	»	»	4	3	4
6	-17	»	-21	»	-31	»	»	»	-12	»	»	»	»	»	3	»	5
7	-18	-23	-22	-26	-30	-26	-20	-17	»	-20	-18	»	-12	-3	4	4	4
8	»	-22	»	-25	»	-27	»	-16	»	-19	»	-15	»	-4	»	»	»
9	-17	-23	-21	-24	»	-26	-21	-15	-13	»	-17	-14	-13	»	3	5	5
10	-18	»	»	»	-31	»	-20	»	»	»	-16	»	-12	»	2	»	4
11	»	-24	-20	-25	-30	-25	-21	»	-12	»	-15	-13	-11	-3	3	4	5
12	»	-25	»	-26	»	-26	»	»	»	-18	»	-12	»	-4	»	5	»
13	-19	-26	-19	-25	-31	»	-20	-16	-11	-17	-14	-13	-10	-5	»	4	4
14	-18	»	-18	»	»	»	-19	»	-10	»	-15	»	»	»	2	»	5
15	-17	»	-19	»	-30	-25	-20	-17	»	-18	»	-12	- 9	-4	3	3	6
16	»	-27	»	-24	»	-24	»	-16	»	-19	»	-13	»	-3	»	4	»
17	-18	»	-18	-25	-29	-23	»	-15	- 9	-20	-14	-14	- 8	-2	4	»	5
18	»	»	-19	»	»	»	-19	»	-10	»	-15	»	- 7	»	3	»	6
19	-17	-26	»	-26	-30	-24	»	-16	-11	-19	-14	»	- 6	»	2	5	5
20	»	-25	»	-27	»	-23	»	-15	»	»	»	-13	»	-1	»	4	»
21	-18	-26	-20	-28	-31	-24	-18	»	-12	-20	-15	-14	- 5	-2	1	3	»
22	-19	»	-21	»	-32	»	-17	»	-11	»	-16	»	- 6	»	»	»	6
23	-20	-25	-20	»	-33	-23	-18	-16	-12	-21	-17	-15	»	-1	2	2	5
24	»	»	»	-27	»	-24	»	-15	»	-22	»	-14	»	-2	»	1	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-19	»	-21	»	-34	»	»	»	-13	»	-16	»	- 7	»	3	»	4
27	-18	»	-22	-28	»	-25	-19	-14	»	-23	-15	-13	- 6	»	2	0	3
28	»	-26	»	-29	»	-26	»	-13	»	-24	»	»	»	»	»	-1	»
29	»	-27	-21	-30	-33	-25	-20	-14	-12	»	-16	-12	- 7	-1	3	0	4
30	»	»	-22	»	-32	»	-21	»	-13	»	-15	»	- 8	»	4	»	»
31	-17	-26	-21	-29	-31	»	-20	-13	-12	-23	-14	-13	- 7	-2	»	1	5
32	»	-27	»	»	»	-24	»	-12	»	-22	»	-14	»	-1	»	2	»
33	-16	»	-22	-28	-30	-25	-19	-13	-11	-21	»	-13	- 6	0	5	3	6
34	-17	»	-23	»	-29	»	-18	»	»	»	-13	»	- 7	»	4	»	7
35	-18	-26	-22	»	-30	-24	»	-14	-10	-22	-12	-12	- 6	1	5	»	6
36	»	-25	»	-29	»	-23	»	-15	»	-21	»	-13	»	»	»	2	»
37	-19	-24	»	-28	-31	-22	-19	-14	-11	»	-11	»	- 5	2	6	1	7
38	»	»	-23	»	-30	»	-18	»	-12	»	-10	»	- 6	»	7	»	6
39	-18	-25	-22	-29	-31	-21	-17	»	-13	-20	-11	-12	- 5	3	8	2	»
40	»	-24	»	-30	»	»	»	-15	»	-21	»	-11	»	2	»	»	»
41	-19	-23	-23	»	-30	-20	-16	-14	-14	-20	-12	-10	»	3	7	3	5
42	-20	»	-22	»	-29	»	»	»	-15	»	»	»	- 6	»	6	»	4
43	-19	-24	-23	-29	-28	-19	-17	-13	»	-21	-11	- 9	- 7	4	5	2	5
44	»	-25	»	-28	»	-18	»	-14	»	-20	»	-10	»	3	»	»	»
45	-20	-24	-24	-27	»	-19	-18	-13	-16	-21	-12	- 9	- 8	»	6	3	6
46	-21	»	»	»	»	»	-17	»	-17	»	-13	»	- 7	»	5	»	5
47	»	-25	-23	-28	-27	-20	-18	-12	-18	»	-12	- 8	- 8	2	4	4	4
48	»	-24	»	-27	»	-21	»	»	»	-20	»	- 9	»	3	»	5	»
49	-22	-23	-24	-28	-26	-21	-17	-11	-19	-19	-13	-10	- 7	2	4	4	3

108000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	3	6	3	−1	−4	8	16	14	18	15	19	11	15	9	5	3	−7
1	»	5	4	»	−5	9	17	15	»	16	18	10	»	8	6	2	−6
2	»	»	»	0	»	10	»	16	»	17	»	11	»	7	»	3	»
3	4	6	5	−1	−4	11	»	17	»	16	19	10	14	8	7	2	−7
4	3	»	6	»	−3	»	»	»	17	»	18	»	13	»	6	»	−6
5	2	5	7	−2	»	12	18	16	16	17	19	11	12	»	5	3	−7
6	»	4	»	−3	»	13	»	15	»	18	»	»	»	7	»	2	»
7	»	5	6	−2	−2	12	17	14	17	»	20	10	11	6	4	1	−8
8	3	»	5	»	−1	»	16	»	16	»	19	»	10	»	5	»	»
9	4	6	4	»	0	»	15	13	15	19	20	9	9	5	»	2	−9
10	»	5	»	»	»	13	»	14	»	20	»	8	»	6	»	3	»
11	3	»	5	»	1	12	14	15	14	19	»	9	10	7	4	2	−8
12	4	»	4	»	0	»	13	»	»	»	19	»	11	»	3	»	−7
13	3	6	3	−3	1	11	»	16	15	18	18	10	10	6	2	»	−8
14	»	5	»	−4	»	10	»	17	»	17	»	9	»	»	»	3	»
15	2	6	»	−5	2	11	14	16	14	16	17	»	11	7	3	2	−7
16	»	»	2	»	1	»	13	»	15	»	18	»	10	»	2	»	−8
17	1	5	1	−4	2	10	14	»	16	15	17	8	9	6	3	1	»
18	»	6	»	−3	»	»	»	17	»	14	»	9	»	5	»	0	»
19	2	7	2	»	3	11	15	18	17	15	18	10	»	6	4	−1	−7
20	3	»	1	»	2	»	16	»	18	»	»	»	8	»	3	»	−6
21	4	6	0	−2	1	12	17	19	»	16	17	11	9	5	4	−2	−7
22	»	»	»	−3	»	13	»	18	»	17	»	10	»	4	»	»	»
23	3	5	−1	−4	»	12	18	17	17	16	18	11	8	»	5	−1	−6
24	4	»	»	»	2	»	19	»	»	»	17	»	7	»	6	»	−5
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	4	»	−3	»	13	»	»	»	15	»	12	»	5	»	−2	»
27	3	3	0	−4	3	»	18	16	16	16	18	13	6	6	»	−1	−4
28	2	»	1	»	2	»	17	»	15	»	19	»	»	»	5	»	»
29	1	»	2	−3	3	14	16	17	14	17	»	»	5	5	6	−2	−5
30	»	4	»	−2	»	13	»	18	»	18	»	12	»	6	»	−3	»
31	0	5	1	−1	2	14	»	17	15	17	18	13	6	7	7	»	−4
32	1	»	2	»	»	»	15	»	16	»	17	»	5	»	6	»	−5
33	2	6	»	−2	3	15	16	18	17	16	16	»	4	6	7	−4	−4
34	»	7	»	−3	»	14	»	17	»	»	»	14	»	7	»	−5	»
35	3	6	3	−2	4	15	17	»	18	17	15	13	3	6	6	»	»
36	2	»	2	»	5	»	»	»	17	»	14	»	4	»	»	»	−3
37	3	5	1	»	6	14	16	18	16	16	13	14	»	»	7	»	−4
38	»	»	»	−3	»	13	»	19	»	17	»	13	»	5	»	−4	»
39	2	4	2	»	7	14	15	18	»	18	12	»	5	4	»	−3	−3
40	3	»	1	»	6	»	»	»	17	»	»	»	6	»	8	»	−4
41	2	3	2	−4	»	13	16	19	16	»	13	14	7	»	7	−4	−5
42	»	2	»	−5	»	14	»	18	»	19	»	»	»	3	»	−5	»
43	»	1	3	−6	7	15	15	»	15	»	12	13	8	4	6	−6	»
44	3	»	2	»	8	»	»	»	14	»	11	»	9	»	5	»	»
45	4	2	1	−5	9	»	14	17	13	20	»	14	10	»	»	−7	−6
46	»	3	»	»	»	14	»	16	»	19	»	15	»	5	»	−6	»
47	»	»	0	»	10	15	13	17	14	18	»	14	11	4	4	−7	−7
48	5	»	»	»	9	»	14	»	»	»	10	»	10	»	»	»	−8
49	6	3	−1	−4	8	16	14	18	15	19	11	15	9	5	3	−7	−7

109000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	−7	−2	5	7	5	11	0	0	−1	5	10	3	4	7	8	5	−2
1	−6	−1	6	6	»	10	1	−1	−2	6	9	2	3	»	9	6	−1
2	−7	»	»	»	6	»	0	»	−1	»	8	»	4	»	8	»	−2
3	»	0	5	7	5	11	−1	»	0	»	7	3	3	6	7	7	−1
4	»	−1	»	8	»	10	»	»	»	5	»	4	»	7	»	8	»
5	−6	−2	4	9	4	»	−2	0	»	4	8	5	4	8	»	9	0
6	−5	»	5	»	5	»	−1	»	1	»	7	»	»	»	8	»	−1
7	−4	»	4	10	6	11	−2	1	2	5	»	6	5	7	7	8	0
8	»	»	»	11	»	10	»	0	»	4	»	5	»	8	»	9	»
9	−5	−1	3	10	7	11	»	−1	3	5	8	4	4	9	8	»	1
10	−6	»	4	»	»	»	−3	»	4	»	9	»	5	»	9	»	0
11	−5	»	»	9	8	10	−2	−2	5	6	8	»	4	10	8	8	−1
12	»	0	»	8	»	11	»	−1	»	»	»	5	»	11	»	9	»
13	−4	−1	5	9	9	10	−1	»	4	5	7	6	3	»	7	8	»
14	−5	»	4	»	8	»	0	»	3	»	6	»	4	»	»	»	−2
15	−4	−2	3	»	7	11	1	0	4	6	5	5	»	»	8	9	−3
16	»	»	»	10	»	10	»	−1	»	5	»	6	»	10	»	8	»
17	−3	»	4	11	6	9	0	−2	»	6	6	7	5	9	7	7	»
18	−2	»	3	»	7	»	»	»	5	»	7	»	6	»	6	»	−2
19	−3	−1	4	10	»	8	−1	−3	6	7	8	6	7	»	»	6	−1
20	»	−2	»	11	»	7	»	−2	»	8	»	»	»	»	»	5	»
21	»	−1	3	10	6	6	0	−3	»	»	7	5	»	10	5	6	−2
22	−2	»	4	»	7	»	−1	»	»	»	8	»	6	»	4	»	»
23	−1	0	5	9	6	»	−2	−2	7	7	»	4	7	11	»	5	−3
24	»	−1	»	»	»	7	»	»	»	»	»	»	»	10	»	4	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−2	»	4	»	7	»	−3	»	»	»	9	»	6	»	3	»	−2
27	−1	−2	3	8	6	6	»	−1	8	6	8	5	5	9	2	»	−1
28	»	−1	»	7	»	»	»	0	»	7	»	4	»	»	»	3	»
29	0	0	»	»	»	7	−4	−1	9	8	9	»	4	8	1	2	−2
30	»	»	4	»	5	»	−3	»	8	»	10	»	3	»	»	»	−1
31	−1	−1	»	8	6	6	−2	»	9	9	9	3	4	7	0	3	»
32	»	»	»	7	»	»	»	−2	»	10	»	4	»	6	»	4	»
33	»	0	5	»	7	5	−3	−1	10	9	8	5	»	7	1	»	−2
34	−2	»	6	»	6	»	−2	»	11	»	»	»	5	»	2	»	−3
35	−1	1	7	8	7	4	−1	−2	»	10	9	6	4	6	3	3	−4
36	»	0	»	7	»	5	»	−1	»	9	»	7	»	5	»	»	»
37	−2	1	6	8	»	4	0	−2	10	8	8	6	5	»	4	2	−3
38	−1	»	»	»	8	»	1	»	11	»	7	»	4	»	3	»	−4
39	»	2	5	9	9	3	2	−1	10	»	6	7	3	6	4	1	−3
40	»	3	»	8	»	2	»	»	»	7	»	8	»	7	»	0	»
41	−2	2	4	7	10	»	1	−2	9	»	5	7	4	6	»	−1	−4
42	−1	»	5	»	11	»	2	»	10	»	»	»	»	»	3	»	−3
43	−2	»	6	6	12	1	1	−3	9	8	»	6	5	5	»	0	»
44	»	3	»	7	»	0	»	−2	»	9	»	5	»	6	»	−1	»
45	−3	4	7	6	11	−1	»	−1	8	10	4	6	4	7	2	»	−2
46	−2	»	6	»	»	»	2	»	7	»	3	»	5	»	3	»	−3
47	−1	5	»	7	12	0	1	−2	6	9	2	»	6	6	4	−2	−2
48	»	6	»	6	»	1	»	−1	»	»	»	5	»	7	»	−3	»
49	−2	5	7	5	11	0	0	−1	5	10	3	4	7	8	5	−2	−2

110000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	250	300
0	-2	-3	-8	-8	-9	4	-1	5	-5	-15	-15	-12	-13	-12	2	9	13
1	-3	-2	»	-7	-8	»	-2	6	-6	-16	-14	-13	-14	-11	»	»	12
2	»	-1	»	»	»	5	»	5	»	-15	»	-12	»	-10	»	8	»
3	-4	»	-7	-6	-7	6	-1	4	-5	-16	»	-11	-13	»	3	9	13
4	-3	»	»	»	-8	»	0	»	»	»	-15	»	»	»	4	»	14
5	-4	»	-6	-7	-7	5	»	5	-6	-15	-14	»	-14	»	5	»	15
6	»	-2	»	-8	»	4	»	4	»	-16	»	-12	»	»	»	10	»
7	-3	-3	»	-7	-6	5	1	3	-7	»	-13	»	-13	-9	4	11	14
8	»	»	-5	»	-5	»	2	»	»	»	-12	»	-14	»	5	»	13
9	-4	-4	-4	-8	-6	6	3	»	-8	-15	-11	-11	-15	»	6	10	»
10	»	-3	»	-7	»	»	»	4	»	-14	»	-12	»	»	»	11	»
11	-3	-2	»	»	-7	»	4	5	-7	-13	-12	-13	»	-8	5	10	12
12	-4	»	-5	»	»	»	5	»	-8	»	»	»	-16	»	6	»	11
13	-5	-1	-6	»	-8	7	4	4	»	-14	-13	-12	-17	-7	7	11	12
14	»	-2	»	-8	»	6	»	5	»	-13	»	-13	»	-6	»	»	»
15	-4	»	-7	-9	»	7	3	4	-7	-12	-14	-12	-16	»	6	12	11
16	»	»	»	»	-7	»	2	»	-8	»	-13	»	-17	»	5	»	10
17	»	-3	-8	-10	-6	6	1	5	-7	»	-14	-13	-18	-5	6	13	11
18	»	-4	»	-11	»	7	»	»	»	-11	»	-12	»	-6	»	14	»
19	-5	-5	-7	-12	-5	»	0	4	-8	-12	-13	»	-19	-7	»	15	10
20	-6	»	-8	»	-4	»	1	»	-9	»	-12	»	»	»	7	»	9
21	-7	»	-9	-13	-5	6	2	5	-10	-13	»	-11	-18	-6	»	14	10
22	»	-6	»	-14	»	5	»	4	»	-12	»	-10	»	-5	»	13	»
23	-6	-5	-10	-13	-6	6	»	3	-11	-13	-11	-11	-17	-6	8	»	9
24	-7	»	-9	»	»	»	1	»	-12	»	-12	»	-18	»	7	»	8
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-6	»	»	»	5	»	2	»	»	»	-10	»	-5	»	12	»
27	-6	-7	-8	-12	-5	6	2	»	-11	-12	-13	-9	-17	-4	8	11	»
28	-5	»	-7	»	-4	»	1	»	-12	»	-14	»	-18	»	»	»	7
29	-4	-6	-8	»	-3	7	2	1	-13	-11	-13	-8	»	-5	9	12	6
30	»	»	»	-11	»	6	»	0	»	-12	»	-9	»	-4	»	13	»
31	-5	»	-7	-10	»	5	3	-1	»	-11	-12	-8	-19	-3	8	»	5
32	-4	»	-6	»	-4	»	»	»	-12	»	-13	»	-18	»	7	»	4
33	-5	-7	-7	-9	»	4	4	-2	-13	-10	-14	-9	-19	»	6	12	5
34	»	-6	»	-8	»	3	»	-1	»	-9	»	»	»	-4	»	13	»
35	»	-7	-6	-9	-3	2	5	-2	-12	»	-13	-10	-18	-3	7	12	6
36	-6	»	-7	»	-2	»	4	»	-11	»	-12	»	-19	»	6	»	»
37	-5	-8	-6	-8	-3	»	5	-1	-10	-10	-13	-11	-18	-2	»	11	7
38	»	-7	»	»	»	3	»	0	»	-9	»	-12	»	-3	»	12	»
39	-4	»	-7	-9	-2	2	4	1	-11	-10	»	-13	-17	-2	7	13	6
40	-5	»	-8	»	-1	»	3	»	»	»	-12	»	-16	»	8	»	7
41	-4	-8	-7	-8	0	1	»	0	-12	-11	-13	-12	-15	-1	9	»	6
42	»	-9	»	-9	»	0	»	-1	»	-12	»	-11	»	»	»	12	»
43	-3	-8	»	-8	1	-1	2	-2	-13	-13	-12	»	-14	0	8	13	7
44	»	»	-8	»	0	»	3	»	-14	»	-13	»	-13	»	9	»	8
45	-4	-7	-9	-7	1	-2	2	»	-15	-14	-14	-12	-14	1	10	12	»
46	»	-6	»	-8	»	»	»	-3	»	-13	»	-13	»	2	»	11	»
47	-3	-7	-10	»	2	»	3	-4	-16	-14	-13	-14	»	3	11	12	7
48	-4	»	-9	»	3	»	4	»	-15	»	»	»	-13	»	10	»	8
49	-3	-8	-8	-9	4	-1	5	-5	-15	-15	-12	-13	-12	2	9	13	8

111000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	8	8	9	20	13	16	4	2	10	13	23	16	13	2	−2	2	4
1	9	9	10	19	12	15	»	1	11	14	24	17	12	1	−1	»	5
2	8	»	11	»	»	»	3	»	12	»	25	»	»	»	0		4
3	9	10	»	18	11	14	2	0	13	13	24	»	11	2	−1	1	3
4	»	9	»	19	»	13	»	−1	»	»	»	16	»	1	»	2	»
5	8	10	10	20	12	14	1	»	12	12	25	17	10	2	»	3	»
6	7	»	9	»	11	»	0	»	11	»	24	»	9	»	»		2
7	6	»	10	»	12	13	1	0	12	13	23	18	»	»	0	4	3
8	»	»	»	21	»	14	»	−1	»	12	»	17	»	1	»	5	»
9	7	9	11	20	13	13	0	0	»	13	24	16	8	0	1	6	2
10	8	»	12	»	14	»	»	»	11	»	25	»	9	»	2	»	3
11	7	10	13	19	»	»	1	1	10	14	24	17	10	»	3	5	2
12	»	9	»	18	»	12	»	2	»	15	»	»	»	−1	»	4	»
13	»	8	14	19	15	11	2	3	11	»	23	16	9	0	4	5	3
14	6	»	15	»	16	»	1	»	10	»	22	»	10	»	3	»	»
15	7	9	16	20	»	»	2	4	»	16	21	17	9	1	»	4	2
16	»	8	»	»	»	10	»	5	»	15	»	16	»	0	»	5	»
17	8	»	17	19	17	9	1	4	11	16	»	17	8	−1	4	4	3
18	7	»	16	»	18	»	2	»	»	»	20	»	7	»	3	»	2
19	6	9	15	18	17	8	»	5	12	17	19	18	8	−2	4	»	1
20	»	8	»	17	»	7	»	6	»	16	»	17	»	»	»	5	»
21	5	7	»	18	18	8	3	7	13	15	18	»	7	−3	3	6	0
22	»	»	16	»	17	»	4	»	14	»	19	»	6	»	4	»	−1
23	4	8	17	»	18	7	3	»	15	16	20	16	5	−4	5	7	»
24	»	9	»	19	»	»	»	8	»	15	»	17	»	−3	»	8	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	5	»	18	»	»	»	4	»	16	»	»	»	4	»	4	»	−2
27	6	10	19	18	17	8	3	7	»	14	»	16	3	−4	5	9	−3
28	»	9	»	17	»	7	»	8	»	15	»	17	»	−5	»	»	»
29	7	10	20	16	»	8	2	7	15	16	21	16	4	»	4	10	−4
30	6	»	»	»	18	»	1	»	16	»	20	»	3	»	5	»	−5
31	»	9	19	15	19	7	2	6	15	»	19	15	2	−4	4	9	−4
32	»	8	»	14	»	8	»	»	»	17	»	16	»	−3	»	10	»
33	7	7	18	13	18	»	3	7	14	18	20	15	1	−4	»	»	−3
34	6	»	19	»	17	»	2	»	13	»	19	»	»	»	»	»	−4
35	7	»	18	12	16	7	3	8	14	19	»	14	0	»	3	9	−3
36	»	6	»	13	»	8	»	9	»	18	»	13	»	−5	»	8	»
37	8	7	17	12	17	7	»	»	15	19	18	»	1	−4	4	»	−4
38	7	»	18	»	»	»	4	»	14	»	»	»	2	»	3	»	−5
39	6	8	»	13	16	6	3	10	15	»	19	»	1	−5	4	9	−4
40	»	7	»	12	»	5	»	9	»	»	»	14	»	−4	»	»	»
41	5	6	17	11	17	4	2	»	14	20	20	13	2	−3	3	8	»
42	6	»	18	»	16	»	»	»	13	»	19	»	3	»	»	»	−5
43	7	7	19	»	15	»	1	8	14	21	20	14	»	−2	2	7	−6
44	»	»	»	10	»	»	»	9	»	20	»	»	»	−1	»	8	»
45	6	8	20	»	16	5	2	»	»	21	19	13	4	−2	3	7	−5
46	7	»	»	»	15	»	»	»	15	»	18	»	»	»	2	»	−4
47	8	»	21	11	»	4	1	10	14	22	17	14	3	»	3	6	−3
48	»	»	»	12	»	3	»	9	»	23	»	»	»	−1	»	5	»
49	8	9	20	13	16	4	2	10	13	23	16	13	2	−2	2	4	−4

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	−4	2	−2	2	0	9	16	11	13	17	16	19	26	28	32	39	37
1	−3	1	−3	1	1	10	17	»	14	16	17	20	25	27	33	40	»
2	»	»	»	2	»	»	»	10	»	15	»	19	»	28	»	39	»
3	−2	2	−4	»	0	11	16	9	15	16	16	20	»	29	»	38	36
4	−3	»	−3	»	1	»	17	»	»	»	»	»	24	»	34	»	37
5	−2	1	−4	1	2	12	18	8	»	17	15	21	25	28	33	39	38
6	»	2	»	2	»	11	»	7	»	16	»	22	»	29	»	»	»
7	−1	1	−3	3	»	12	19	8	16	17	16	23	24	»	32	40	37
8	0	»	»	»	1	»	18	»	15	»	17	»	25	»	33	»	38
9	»	2	−4	2	2	11	17	7	16	»	16	»	26	30	34	»	37
10	»	1	»	1	»	12	»	»	»	16	»	22	»	31	»	»	»
11	1	0	−3	2	3	»	18	8	15	15	17	21	27	32	»	39	38
12	2	»	−2	»	4	»	19	»	»	»	16	»	»	»	35	»	39
13	1	»	−3	3	3	13	20	9	16	16	»	22	28	33	34	38	40
14	»	−1	»	2	»	14	»	8	»	17	»	23	»	32	»	37	»
15	0	0	»	3	4	15	»	9	15	18	15	24	27	33	33	»	»
16	1	»	−2	»	»	»	21	»	16	»	16	»	28	»	34	»	39
17	2	−1	»	2	5	16	20	8	17	17	15	»	27	34	»	38	38
18	»	0	»	1	»	17	»	9	»	»	»	23	»	»	»	39	»
19	3	−1	−3	2	6	16	19	»	16	»	16	24	»	35	33	38	»
20	2	»	−2	»	5	»	20	»	17	»	17	»	26	»	»	»	37
21	3	0	−3	»	»	17	19	8	18	16	»	23	»	34	32	39	38
22	»	»	»	3	»	18	»	7	»	»	»	22	»	33	»	38	»
23	4	1	−4	2	4	17	20	8	»	15	18	21	25	34	31	37	37
24	5	»	−3	»	3	»	»	»	19	»	19	»	26	»	32	»	38
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	0	»	3	»	»	»	9	»	16	»	»	»	33	»	36	»
27	»	−1	−2	2	»	16	21	8	18	»	20	20	27	32	33	37	37
28	6	»	−1	»	4	»	20	»	17	»	21	»	28	»	»	»	»
29	7	−2	»	3	5	»	21	9	16	15	22	21	27	31	»	36	36
30	»	»	»	»	»	17	»	10	»	»	»	20	»	32	»	37	»
31	»	»	0	2	4	16	20	11	15	14	»	19	26	33	32	38	35
32	6	»	1	»	5	»	19	»	»	»	21	»	25	»	33	»	36
33	7	−1	2	3	6	17	»	10	16	13	»	18	24	32	34	»	37
34	»	−2	»	4	»	18	»	11	»	14	»	19	»	»	»	39	»
35	6	−1	»	3	7	17	18	12	17	13	20	»	23	33	33	38	38
36	»	»	1	»	8	»	19	»	18	»	21	»	24	»	32	»	39
37	5	−2	0	2	7	18	18	»	17	12	20	20	25	32	33	39	»
38	»	−1	»	1	»	»	»	13	»	13	»	21	»	31	»	38	»
39	4	0	1	»	6	17	17	12	18	14	21	22	»	30	34	39	40
40	3	»	2	»	5	»	16	»	17	»	»	»	26	»	35	»	41
41	2	−1	3	0	6	»	15	13	»	13	22	23	25	31	36	38	42
42	»	0	»	−1	»	18	»	12	»	14	»	24	»	32	»	»	»
43	3	−1	2	−2	»	17	14	13	16	13	21	25	26	»	35	37	41
44	2	»	»	»	7	»	13	»	17	»	20	»	27	»	36	»	42
45	»	−2	3	−1	8	16	12	12	16	»	19	26	28	33	37	38	41
46	»	−3	»	0	»	15	»	»	»	14	»	25	»	34	»	37	»
47	1	−2	2	−1	9	»	11	13	17	15	18	»	29	33	»	38	40
48	2	»	1	»	10	»	10	»	18	»	19	»	»	»	38	»	39
49	2	−2	2	0	9	16	11	13	17	16	19	26	28	32	39	37	38

112000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	38	50	43	35	42	40	34	31	34	38	38	45	35	33	42	50	52
1	39	51	44	36	41	41	33	32	»	39	37	46	34	»	43	51	53
2	40	»	43	»	42	»	»	»	33	»	36	»	»	»	42	»	54
3	41	50	42	35	»	40	32	31	32	40	37	»	33	»	43	52	53
4	»	49	»	34	»	41	»	30	»	39	»	»	»	34	»	53	»
5	»	48	41	33	43	42	31	29	33	»	38	47	32	35	44	52	54
6	42	»	42	»	42	»	30	»	»	»	39	»	33	»	45	»	»
7	43	47	43	34	41	»	29	»	32	40	38	46	32	34	»	51	53
8	»	46	»	»	»	»	»	30	»	39	»	45	»	35	»	50	»
9	44	»	44	35	40	»	28	31	»	38	»	44	33	»	46	49	52
10	45	»	43	»	»	»	29	»	»	»	37	»	32	»	»	»	53
11	46	45	42	»	»	41	»	30	33	37	38	45	33	36	47	»	54
12	»	46	»	36	»	42	»	31	»	38	»	44	»	»	»	48	»
13	45	»	»	35	39	41	30	30	34	37	39	»	34	35	48	47	55
14	»	»	41	»	38	»	29	»	35	»	38	»	»	»	49	»	54
15	44	47	40	36	37	42	28	»	36	36	39	43	33	34	50	46	»
16	»	46	»	35	»	»	»	29	»	35	»	44	»	35	»	47	»
17	45	45	41	»	38	43	27	30	37	36	40	43	»	36	51	48	55
18	46	»	40	»	39	»	26	»	38	»	»	»	32	»	52	»	54
19	45	44	41	36	40	44	27	31	»	37	39	42	33	37	53	49	53
20	»	45	»	37	»	45	»	32	»	36	»	41	»	38	»	»	»
21	44	46	40	38	»	»	28	31	»	37	40	40	32	»	54	48	54
22	43	»	»	»	39	»	29	»	39	»	39	»	33	»	53	»	53
23	»	45	41	37	38	44	30	32	38	»	40	39	34	39	»	49	54
24	»	44	»	38	»	43	»	»	»	38	»	38	»	40	»	48	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	42	»	40	»	39	»	31	»	37	»	41	»	»	»	52	»	53
27	43	»	41	39	40	42	30	31	38	39	»	37	»	»	51	49	54
28	»	45	»	38	»	41	»	32	»	40	»	38	»	39	»	50	»
29	42	44	40	37	39	40	»	33	37	41	42	39	33	40	52	»	55
30	43	»	39	»	»	»	31	»	36	»	»	»	34	»	51	»	56
31	42	43	»	36	40	39	30	34	35	40	43	»	33	41	50	51	55
32	»	44	»	37	»	38	»	33	»	»	»	38	»	40	»	50	»
33	43	45	38	38	41	39	31	»	36	41	44	37	34	41	51	51	»
34	44	»	39	»	40	»	32	»	37	»	45	»	33	»	»	»	56
35	43	44	38	»	41	38	31	»	36	40	44	38	»	40	50	52	57
36	»	»	»	39	»	37	»	32	»	39	»	37	»	41	»	53	»
37	44	43	39	40	40	36	30	31	»	40	45	38	34	40	51	52	58
38	45	»	40	»	39	»	»	»	35	»	46	»	33	»	52	»	59
39	46	44	39	41	»	35	29	32	36	39	47	37	34	»	51	»	58
40	»	45	»	42	»	34	»	31	»	40	»	»	»	41	»	51	»
41	»	44	40	43	38	33	30	32	37	»	46	36	35	40	50	52	59
42	47	»	39	»	39	»	31	»	38	»	45	»	34	»	49	»	»
43	48	45	38	44	40	»	30	33	37	39	44	35	33	39	»	53	58
44	»	44	»	»	»	34	»	34	»	38	»	34	»	»	»	54	»
45	49	»	37	43	41	33	31	35	36	37	»	33	32	40	50	53	57
46	»	»	36	»	42	»	32	»	»	»	43	»	31	»	49	»	56
47	»	43	35	42	41	32	»	34	37	38	44	34	32	41	50	»	»
48	»	42	»	43	»	33	»	33	»	39	»	35	»	»	»	»	»
49	50	43	35	42	40	34	31	34	38	38	45	35	33	42	50	52	57

113000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	57	58	62	67	57	62	58	52	48	51	52	51	54	58	58	68	74
1	»	57	61	66	56	63	59	51	49	»	53	52	53	57	59	67	75
2	»	58	»	67	»	64	»	»	»	50	»	53	»	56	»	66	»
3	58	»	60	68	57	»	58	52	48	51	54	52	52	57	»	67	76
4	59	»	61	»	58	»	57	»	47	»	»	»	»	»	58	»	77
5	60	»	62	67	57	65	58	51	48	52	»	51	53	56	57	68	76
6	»	59	»	68	»	66	»	»	»	51	»	52	»	57	»	67	»
7	61	60	63	67	56	67	»	52	49	50	53	51	52	58	56	»	75
8	60	»	64	»	»	»	57	»	50	»	54	»	53	»	57	»	76
9	59	59	»	68	57	66	56	51	49	51	53	»	54	57	58	68	75
10	»	60	»	69	»	65	»	50	»	»	»	52	»	56	»	67	»
11	58	59	63	68	»	64	55	»	50	52	52	51	55	55	59	66	»
12	59	»	64	»	58	»	56	»	51	»	53	»	56	»	»	»	74
13	58	58	65	»	57	65	55	49	52	51	52	52	»	54	58	67	75
14	»	»	»	»	»	64	»	48	»	50	»	51	»	53	»	68	»
15	59	57	66	67	58	63	54	49	»	49	53	50	55	52	59	67	74
16	60	»	65	»	59	»	»	»	53	»	52	»	54	»	60	»	75
17	61	58	64	66	»	62	53	48	52	50	53	49	53	»	59	68	76
18	»	59	»	67	»	63	»	47	»	51	»	»	»	51	»	69	»
19	»	58	65	66	58	62	54	48	53	»	54	50	52	52	»	»	77
20	60	»	64	»	59	»	53	»	54	»	55	»	53	»	60	»	»
21	59	57	65	65	58	»	52	47	53	50	54	51	54	53	»	68	78
22	»	56	»	»	»	61	»	48	»	49	»	52	»	52	»	69	»
23	60	»	66	64	59	60	51	49	54	50	»	53	55	51	61	68	77
24	61	»	67	»	58	»	50	»	»	»	55	»	56	»	62	»	76
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	55	»	63	»	61	»	50	»	51	»	54	»	»	»	69	»
27	60	54	»	62	59	60	49	49	53	50	»	»	57	52	»	»	75
28	»	»	68	»	60	»	50	»	54	»	54	»	56	»	61	»	74
29	59	55	67	61	61	59	51	»	53	49	53	55	57	53	62	70	»
30	»	56	»	62	»	»	»	»	»	50	»	54	»	52	»	71	»
31	58	57	68	»	60	58	50	50	54	49	52	55	»	53	63	»	75
32	59	»	67	»	61	»	51	»	53	»	»	»	56	»	»	»	74
33	60	58	66	61	60	57	52	49	»	50	51	56	57	»	64	72	73
34	»	59	»	60	»	56	»	48	»	51	»	55	»	54	»	»	»
35	59	58	65	61	»	»	53	47	52	50	50	»	58	»	65	73	72
36	60	»	»	»	61	»	52	»	53	»	»	»	57	»	66	»	73
37	»	59	66	60	62	57	51	48	52	»	51	54	58	53	67	74	72
38	»	60	»	61	»	58	»	»	»	49	»	53	»	54	»	73	»
39	61	59	67	60	61	»	50	»	51	48	52	54	57	53	»	74	73
40	60	»	66	»	62	»	»	»	50	»	51	»	»	»	68	»	72
41	61	»	67	59	63	»	51	49	51	47	»	55	56	54	67	75	73
42	»	58	»	58	»	59	»	48	»	48	»	54	»	55	»	76	»
43	»	59	»	»	62	58	»	47	52	49	50	55	57	56	68	»	72
44	60	»	»	»	»	»	52	»	51	»	49	»	58	»	69	»	73
45	59	»	»	57	63	59	53	48	50	50	50	»	59	57	68	77	74
46	»	60	»	58	»	60	»	47	»	»	»	54	»	58	»	76	»
47	58	61	60	57	64	59	52	»	49	51	51	55	58	57	67	75	»
48	57	»	67	»	63	»	53	»	50	»	»	»	»	»	»	»	73
49	58	62	67	57	62	58	52	48	51	52	51	54	58	58	68	74	74

114000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	74	73	67	70	82	87	87	87	82	87	80	86	90	83	86	80	79
1	73	»	68	71	83	88	86	86	81	88	»	87	91	82	85	85	80
2	72	»	69	»	84	»	87	»	»	»	81	»	90	»	86		81
3	71	74	70	72	83	87	»	87	»	87	80	88	89	83	87	»	82
4	»	73	»	73	»	86	»	86	»	88	»	87	»	»	»	84	»
5	72	74	»	72	84	87	»	87	80	»	81	»	90	84	88	83	83
6	»	»	71	»	»	»	86	»	79	»	80	»	89	»	89	»	82
7	73	73	72	73	83	86	87	»	80	87	81	88	90	85	88	82	»
8	»	72	»	74	»	»	»	86	»	86	»	89	»	86	»	81	»
9	72	71	71	»	82	87	88	87	81	87	82	88	»	»	89	82	83
10	73	»	72	»	83	»	89	»	80	»	»	»	89	»	90	»	82
11	74	70	71	»	84	88	90	88	»	86	83	87	88	85	89	83	83
12	»	69	»	75	»	87	»	89	»	87	»	88	»	84	»	»	»
13	75	68	70	76	»	86	89	88	79	86	82	89	89	»	»	84	»
14	76	»	»	»	85	»	88	»	80	»	83	»	88	»	88	»	82
15	»	67	71	75	86	85	89	87	79	»	82	90	87	83	»	85	81
16	»	68	»	»	»	86	»	»	»	85	»	91	»	»	»	»	»
17	75	69	70	74	87	»	90	86	80	84	81	90	»	82	»	84	80
18	76	»	71	»	88	»	91	»	81	»	82	»	»	»	87	»	81
19	75	»	70	75	89	85	90	85	82	83	»	89	86	81	86	85	80
20	»	70	»	76	»	84	»	84	»	»	»	88	»	80	»	84	»
21	76	71	71	77	88	83	»	85	»	82	81	89	85	79	87	»	79
22	75	»	72	»	»	»	89	»	81	»	80	»	84	»	88	»	78
23	74	72	»	78	89	84	»	84	80	81	81	»	83	80	87	83	79
24	»	71	»	77	»	»	»	85	»	»	»	88	»	81	»	82	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	73	»	73	»	90	»	90	»	81	»	82	»	84	»	»	»	78
27	72	70	»	»	91	85	89	84	82	80	83	87	»	80	86	81	79
28	»	»	»	76	»	86	»	83	»	81	»	88	»	81	»	80	»
29	»	69	72	77	92	87	90	82	»	82	82	87	83	82	85	79	80
30	71	»	71	»	91	»	»	»	83	»	81	»	82	»	84	»	81
31	70	70	72	78	»	86	89	81	84	83	82	86	83	»	85	80	82
32	»	71	»	79	»	»	»	82	»	82	»	»	»	83	»	81	»
33	»	70	73	78	90	85	90	81	85	»	83	85	82	84	84	80	83
34	71	»	74	»	91	»	91	»	84	»	84	»	81	»	83	»	»
35	»	69	73	79	92	»	92	82	85	81	85	86	80	85	»	79	84
36	»	70	»	»	»	86	»	83	»	80	»	87	»	86	»	78	»
37	»	»	72	80	91	87	91	82	86	81	»	88	81	87	»	77	83
38	72	»	71	»	90	»	90	»	»	»	86	»	80	»	82	»	84
39	71	71	70	81	89	86	»	81	87	80	87	87	81	88	83	»	85
40	»	72	»	82	»	85	»	82	»	81	»	88	»	»	»	»	»
41	72	71	»	81	90	86	89	83	88	80	88	»	82	89	82	78	86
42	»	»	71	»	89	»	90	»	89	»	»	»	81	»	83	»	87
43	73	70	70	82	88	85	89	»	88	79	87	89	80	88	84	77	»
44	»	71	»	83	»	»	»	84	»	80	»	90	»	87	»	78	»
45	72	70	71	»	87	84	88	83	87	81	86	91	»	86	83	79	86
46	73	»	72	»	88	»	87	»	88	»	»	»	81	»	84	»	87
47	74	69	71	82	87	85	88	84	»	80	85	90	82	87	85	80	86
48	»	68	»	83	»	86	»	83	»	81	»	91	»	86	»	»	»
49	73	67	70	82	87	87	87	82	87	80	86	90	83	86	86	79	87

115000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	87	90	88	96	96	90	88	89	92	96	95	92	97	100	87	90	85
1	88	89	»	97	»	89	87	88	93	95	96	»	96	99	86	89	»
2	»	90	»	98	»	88	»	87	»	»	»	93	»	100	»	90	»
3	87	91	87	99	95	89	88	»	94	»	97	92	95	99	87	89	»
4	88	»	88	»	94	»	89	»	»	»	98	»	96	»	»	»	84
5	89	92	87	»	93	90	88	»	93	94	99	93	»	100	88	88	85
6	»	»	»	98	»	89	»	88	»	95	»	92	»	99	»	89	»
7	90	93	88	99	92	»	89	89	»	96	98	93	97	100	87	90	86
8	91	»	89	»	»	»	»	»	92	»	99	»	98	»	»	»	87
9	92	94	88	»	»	88	88	90	91	97	98	94	»	»	86	89	88
10	»	95	»	98	»	87	»	89	»	96	»	»	»	101	»	90	»
11	»	»	87	99	91	86	89	90	90	»	97	95	97	100	87	»	87
12	»	»	88	»	92	»	90	»	89	»	98	»	96	»	86	»	»
13	91	94	87	98	93	»	89	89	90	95	97	96	95	99	»	»	86
14	»	93	»	»	»	87	»	90	»	96	»	97	»	98	»	89	»
15	90	»	88	99	94	88	90	91	91	97	»	96	94	97	87	90	85
16	91	»	89	»	95	»	89	»	»	»	96	»	93	»	86	»	84
17	92	92	90	100	94	89	»	90	90	96	95	95	92	»	87	»	85
18	»	93	»	99	»	90	»	91	»	95	»	96	»	»	»	89	»
19	91	94	»	100	93	91	88	92	89	94	96	»	»	98	88	88	86
20	»	»	89	»	94	»	87	»	88	»	97	»	91	»	87	»	87
21	90	93	88	101	93	90	88	»	89	93	»	95	92	97	88	87	»
22	»	92	»	100	»	»	»	91	»	»	»	96	»	96	»	»	»
23	89	93	89	»	92	91	»	92	88	92	96	95	»	95	89	86	88
24	90	»	88	»	91	»	87	»	89	»	»	»	93	»	90	»	87
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	92	»	99	»	92	»	91	»	93	»	94	»	94	»	»	»
27	89	91	89	100	»	91	88	90	90	94	95	93	94	»	91	85	88
28	88	»	»	»	92	»	87	»	89	»	94	»	95	»	90	»	89
29	»	92	88	99	91	»	86	91	90	»	93	94	96	95	89	84	88
30	»	93	»	98	»	90	»	»	»	93	»	95	»	94	»	85	»
31	89	92	89	99	90	»	87	90	91	94	94	96	95	95	»	84	87
32	»	»	88	»	89	»	88	»	92	»	93	»	»	»	90	»	86
33	90	»	89	»	90	89	87	91	93	95	»	95	94	94	89	83	87
34	»	91	»	100	»	88	»	92	»	94	»	96	»	93	»	84	»
35	89	90	90	99	89	89	»	91	94	93	94	97	95	92	90	»	86
36	90	»	91	»	»	»	88	»	95	»	93	»	96	»	89	»	85
37	»	89	»	98	90	88	89	92	96	94	92	»	97	91	88	83	86
38	»	»	»	99	»	87	»	91	»	»	»	96	»	90	»	84	»
39	89	90	90	100	89	88	88	»	97	93	»	97	98	89	89	85	»
40	90	»	91	»	90	»	87	»	98	»	93	»	97	»	»	»	87
41	91	89	90	»	91	89	86	90	99	92	94	96	»	88	88	86	86
42	»	»	»	99	»	90	»	89	»	91	»	97	»	87	»	85	»
43	90	88	91	98	»	91	87	90	»	92	95	96	98	88	89	84	87
44	91	»	92	»	92	»	»	»	98	»	94	»	99	»	88	»	88
45	92	87	93	97	»	90	86	91	97	93	93	97	100	»	89	85	»
46	»	88	»	98	»	89	»	90	»	94	»	»	»	87	»	»	»
47	»	89	94	97	91	88	87	91	96	»	94	98	101	88	»	86	89
48	91	»	95	»	»	»	88	»	95	»	93	»	100	»	90	»	»
49	90	88	96	96	90	88	89	92	96	95	92	97	100	87	90	85	88

116000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	88	94	97	97	93	91	100	99	90	92	83	80	76	78	80	84	80
1	89	95	98	»	92	92	101	98	89	»	82	79	»	77	79	83	79
2	88	»	99	»	91	»	102	»	90	»	»	»	75	»	78	»	80
3	89	94	100	96	90	91	103	97	»	91	81	80	76	76	»	84	81
4	»	95	»	95	»	92	»	96	»	90	»	81	»	77	»	»	»
5	90	96	99	»	»	93	102	95	91	91	80	80	77	»	77	83	82
6	89	»	»	»	91	»	103	»	90	»	81	»	76	»	78	»	81
7	»	97	98	94	92	92	104	94	89	»	80	79	77	78	77	82	80
8	»	98	»	93	»	93	»	»	»	90	»	78	»	»	»	81	»
9	90	97	97	94	93	»	103	93	90	89	81	79	76	79	»	80	81
10	91	»	96	»	94	»	104	»	91	»	82	»	»	»	78	»	86
11	92	»	97	93	93	94	105	92	90	88	»	80	77	78	79	81	81
12	»	98	»	94	»	95	»	93	»	87	»	79	»	79	»	»	»
13	93	97	96	93	92	94	»	92	91	86	81	78	78	80	78	»	82
14	94	»	97	»	»	»	104	»	90	»	80	»	79	»	79	»	83
15	93	96	»	92	91	95	105	»	91	87	79	»	80	79	78	80	82
16	»	95	»	91	»	94	»	91	»	»	»	77	»	78	»	81	»
17	94	94	98	92	90	93	104	»	90	88	80	78	79	77	79	80	»
18	95	»	99	»	91	»	105	»	91	»	»	»	78	»	»	»	83
19	94	93	100	»	90	94	104	90	92	87	81	79	»	78	80	81	82
20	»	»	»	91	»	95	»	89	»	86	»	78	»	77	»	80	»
21	93	92	99	90	89	96	105	88	»	87	80	79	79	76	81	79	83
22	92	»	100	»	88	»	»	»	91	»	79	»	80	»	82	»	84
23	91	91	99	91	»	97	106	89	90	86	78	78	81	»	81	80	83
24	»	92	»	92	»	98	»	88	»	87	»	»	»	75	»	79	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	92	»	98	»	89	»	105	»	89	»	»	»	82	»	80	»	»
27	»	93	97	93	90	»	104	87	90	86	79	77	81	76	»	78	84
28	»	94	»	»	»	99	»	88	»	85	»	76	»	75	»	»	»
29	91	»	98	94	91	98	105	89	91	84	»	75	82	76	81	»	85
30	90	»	99	»	92	»	106	»	»	»	78	»	83	»	»	»	86
31	89	95	100	93	91	99	»	88	90	»	77	74	84	»	80	»	87
32	»	96	»	94	»	98	»	89	»	83	»	75	»	»	»	77	»
33	90	97	»	93	92	99	105	88	91	82	76	»	83	75	81	78	88
34	»	»	99	»	93	»	104	»	92	»	»	»	84	»	82	»	87
35	91	96	98	94	94	98	103	»	93	»	77	76	83	76	83	77	»
36	»	97	»	95	»	»	»	89	»	83	»	77	»	77	»	78	»
37	92	98	99	»	93	97	102	»	92	84	78	76	»	78	82	79	88
38	93	»	98	»	92	»	»	»	91	»	»	»	82	»	81	»	87
39	94	99	97	94	93	»	101	90	»	»	79	»	»	77	82	78	86
40	»	98	»	95	»	98	»	89	»	85	»	77	»	76	»	»	»
41	95	97	98	»	»	99	100	88	92	84	78	78	81	»	81	77	87
42	94	»	»	»	92	»	99	»	93	»	77	»	80	»	82	»	»
43	»	»	99	94	93	98	98	87	94	»	»	79	79	77	81	78	86
44	»	96	»	93	»	99	»	»	»	85	»	78	»	78	»	79	»
45	93	97	98	92	92	»	97	88	93	84	78	77	80	79	»	78	85
46	94	»	99	»	91	»	98	»	94	»	79	»	»	»	82	»	86
47	95	»	98	91	90	100	99	»	93	85	»	76	79	80	83	79	87
48	»	98	»	92	»	101	»	89	»	84	»	75	»	81	»	80	»
49	94	97	97	93	91	100	99	90	92	83	80	76	78	80	84	80	88

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	88	81	85	80	83	89	88	91	95	95	103	107	110	111	110	103	90
1	89	82	84	81	»	90	89	92	96	94	104	108	111	»	111	104	89
2	»	83	»	»	»	89	»	91	»	95	»	»	»	112	»	103	»
3	»	82	85	82	84	90	90	»	95	»	103	107	110	111	110	102	88
4	88	»	84	»	85	»	89	»	96	»	102	»	111	»	111	»	»
5	89	81	83	81	86	»	90	92	95	94	101	108	112	110	»	101	87
6	»	82	»	»	»	89	»	91	»	95	»	109	»	111	»	100	»
7	88	»	84	82	85	88	91	90	94	94	»	110	111	112	110	»	88
8	89	»	83	»	86	»	90	»	»	»	102	»	112	»	111	»	87
9	90	83	82	83	85	89	»	91	95	95	103	111	113	»	110	»	86
10	»	84	»	84	»	90	»	»	»	96	»	110	»	»	»	99	»
11	89	83	»	83	84	89	91	92	94	97	104	»	114	111	109	100	»
12	»	»	81	»	85	»	90	»	95	»	103	»	113	»	110	»	87
13	88	82	82	82	86	88	91	»	94	98	104	111	114	112	»	101	»
14	»	83	»	83	»	»	»	91	»	»	»	110	»	»	»	100	»
15	89	82	»	»	87	87	92	90	95	99	»	109	»	111	109	101	86
16	88	»	81	»	86	»	91	»	94	»	»	»	113	»	108	»	87
17	89	83	80	84	»	88	92	91	»	100	»	108	112	112	107	100	88
18	»	82	»	83	»	89	»	92	»	»	»	107	»	111	»	»	»
19	88	83	79	84	»	90	93	93	»	99	105	106	113	»	106	99	89
20	87	»	»	»	87	»	92	»	95	»	104	»	112	»	105	»	90
21	»	84	78	83	86	91	»	94	96	»	105	107	111	112	106	98	89
22	»	83	»	84	»	»	»	»	»	98	»	108	»	113	»	99	»
23	86	84	79	83	»	»	93	95	97	99	106	107	112	112	»	98	88
24	85	»	78	»	87	»	92	»	98	»	107	»	»	»	107	»	89
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	82	»	90	»	96	»	100	»	106	»	113	»	99	»
27	»	85	79	»	88	91	»	97	99	101	108	105	113	112	106	»	»
28	84	»	80	»	»	»	93	»	98	»	107	»	114	»	105	»	88
29	83	84	»	83	89	92	92	98	99	102	»	»	113	111	106	100	87
30	»	83	»	84	»	93	»	99	»	»	»	106	»	112	»	99	»
31	»	82	79	85	88	92	93	»	98	101	108	107	112	113	105	100	»
32	82	»	78	»	87	»	92	»	97	»	109	»	113	»	»	»	86
33	81	83	79	»	86	91	93	98	96	100	110	106	»	112	104	99	87
34	»	»	»	86	»	90	»	99	»	101	»	107	»	111	»	98	»
35	80	82	78	87	87	91	92	100	»	100	111	106	112	112	105	97	88
36	79	»	79	»	88	»	»	»	95	»	112	»	»	»	104	»	89
37	80	83	78	86	»	90	91	99	94	101	111	107	113	»	105	96	88
38	»	84	»	85	»	89	»	98	»	102	»	»	»	111	»	95	»
39	»	85	77	84	89	88	90	97	93	»	110	108	112	112	104	94	87
40	81	»	78	»	88	»	91	»	94	»	109	»	111	»	103	»	»
41	80	84	77	»	87	»	92	96	93	101	108	109	112	113	»	93	88
42	»	85	»	»	»	89	»	97	»	100	»	110	»	112	»	92	»
43	79	»	78	83	88	90	91	96	94	101	»	111	113	111	102	91	87
44	80	»	79	»	89	»	90	»	»	»	107	»	112	»	101	»	86
45	79	86	80	84	88	91	»	95	95	102	108	112	111	110	102	»	85
46	»	85	»	85	»	90	»	94	»	103	»	111	»	»	»	90	»
47	80	84	»	84	89	89	91	95	94	102	107	»	112	111	101	89	86
48	»	»	81	»	88	»	90	»	95	»	106	»	111	»	102	»	87
49	81	85	80	83	89	88	91	95	95	103	107	110	111	110	103	90	87

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	87	86	86	84	86	87	87	76	87	80	83	75	79	78	80	80	84
1	86	87	85	83	87	»	86	77	86	»	84	76	78	77	»	85	85
2	87	»	86	»	86	»	87	»	»	»	83	»	»	»	81	»	84
3	88	»	85	84	85	86	86	»	85	79	»	77	77	78	82	80	85
4	»	86	»	83	»	85	»	78	»	78	»	76	»	79	»	»	»
5	89	87	84	82	84	»	»	»	84	79	82	77	76	78	83	»	86
6	88	»	85	»	»	»	85	»	83	»	83	»	75	»	84	»	87
7	89	88	»	»	83	86	86	79	84	80	82	»	76	77	83	87	88
8	»	89	»	81	»	87	»	80	»	»	»	76	»	76	»	88	»
9	88	»	84	80	84	86	87	»	85	81	81	75	75	75	82	87	»
10	»	»	85	»	83	»	88	»	86	»	82	»	76	»	»	»	89
11	87	90	84	»	84	85	87	81	85	80	81	76	»	76	81	86	88
12	»	»	»	81	»	86	»	80	»	79	»	77	»	77	»	85	»
13	»	89	83	82	85	87	86	81	»	78	82	78	77	76	80	86	89
14	88	»	82	»	86	»	»	»	86	»	83	»	78	»	81	»	90
15	87	90	83	81	»	88	85	82	85	77	82	77	77	»	82	85	91
16	»	89	»	80	»	89	»	83	»	76	»	»	»	77	»	84	»
17	»	88	84	81	85	90	86	82	84	»	81	76	78	78	83	83	90
18	86	»	85	»	84	»	85	»	83	»	80	»	77	»	84	»	»
19	85	89	84	80	83	»	86	81	82	77	79	75	76	77	»	84	91
20	»	88	»	»	»	»	»	82	»	78	»	»	»	76	»	85	»
21	86	»	83	79	84	89	87	83	81	77	»	74	75	75	85	86	90
22	85	»	84	»	85	»	88	»	»	»	78	»	74	»	86	»	89
23	86	87	83	80	86	88	»	84	80	78	»	73	75	74	87	»	88
24	»	88	»	79	»	89	»	85	»	79	»	72	»	»	»	87	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	84	»	85	»	87	»	81	»	77	»	76	»	88	»	89
27	85	87	85	80	86	90	86	»	82	78	78	73	75	75	87	86	»
28	»	86	»	79	»	»	»	84	»	79	»	74	»	76	»	85	»
29	86	87	86	»	85	91	85	85	81	80	77	73	»	75	86	86	88
30	85	»	87	»	86	»	84	»	80	»	»	»	76	»	85	»	89
31	84	86	86	78	85	90	83	84	»	81	78	74	75	76	86	85	88
32	»	85	»	79	»	89	»	85	»	80	»	73	»	77	»	»	»
33	83	86	87	80	»	88	84	86	81	81	77	74	»	»	85	84	87
34	84	»	»	»	»	»	83	»	82	»	76	»	»	»	86	»	88
35	»	85	88	81	84	87	82	87	81	»	75	75	76	78	87	85	87
36	»	84	»	»	»	88	»	»	»	82	»	»	»	79	»	86	»
37	85	85	89	82	85	»	81	88	82	83	76	76	77	78	»	85	86
38	86	»	»	»	84	»	»	»	81	»	75	»	»	»	88	»	85
39	85	»	88	83	85	87	80	89	80	84	»	75	78	79	87	84	86
40	»	84	»	84	»	88	»	90	»	85	»	76	»	78	»	83	»
41	86	83	87	85	86	89	»	»	79	84	76	77	77	79	86	»	87
42	85	»	»	»	»	»	79	»	80	»	77	»	76	»	87	»	88
43	86	82	»	86	87	88	78	91	81	83	76	»	77	»	86	84	»
44	»	83	»	87	»	87	»	90	»	»	»	76	»	80	»	»	»
45	85	84	86	88	86	86	77	»	82	82	75	77	78	79	»	85	»
46	86	»	85	»	85	»	76	»	81	»	74	»	77	»	»	»	87
47	85	85	84	»	86	85	75	89	80	83	75	78	»	78	87	84	88
48	»	»	»	87	»	86	»	88	»	82	»	»	»	79	»	85	»
49	86	86	84	86	87	87	76	87	80	83	75	79	78	80	86	84	87

118000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	87	85	88	88	93	99	95	88	94	101	106	106	107	102	97	95	103
1	88	84	87	89	92	»	»	89	95	100	107	107	106	103	98	»	102
2	»	85	»	90	»	98	»	88	»	99	»	100	»	»	»	96	»
3	89	86	»	91	93	»	94	89	96	100	106	»	107	102	99	95	103
4	»	»	86	»	94	»	93	»	»	»	105	»	106	»	98	»	104
5	88	85	85	92	93	97	92	»	97	101	106	105	105	101	97	96	»
6	»	84	»	93	»	»	»	88	»	100	»	104	»	100	»	97	»
7	89	85	84	»	92	98	93	89	98	99	105	105	»	101	98	98	103
8	90	»	85	»	93	»	92	»	99	»	»	»	100	»	97	»	102
9	89	86	86	94	94	99	91	90	»	98	»	106	107	102	96	97	103
10	»	85	»	93	»	98	»	89	»	99	»	107	»	103	»	»	»
11	90	84	85	92	»	97	90	88	98	98	104	108	108	»	95	98	102
12	»	»	»	»	95	»	89	»	97	»	103	»	109	»	94	»	103
13	»	83	86	93	94	96	88	87	96	»	102	109	110	102	95	97	104
14	»	82	»	92	»	97	»	»	»	99	»	108	»	103	»	98	»
15	91	83	87	93	95	»	89	88	97	98	103	107	109	102	»	99	105
16	90	»	88	»	96	»	90	»	98	»	104	»	»	»	96	»	104
17	»	»	89	94	97	»	91	89	99	99	»	108	110	101	97	98	105
18	»	84	»	93	»	96	»	90	»	100	»	107	»	100	»	99	»
19	91	85	88	94	96	95	»	91	98	99	»	108	109	99	96	»	»
20	92	»	87	»	»	»	90	»	97	»	103	»	110	»	95	»	104
21	91	86	»	93	95	94	91	92	98	100	102	»	109	98	94	100	105
22	»	87	»	92	»	93	»	91	»	»	»	107	»	99	»	101	»
23	90	88	88	93	94	94	90	»	97	99	103	106	108	100	93	100	»
24	89	»	89	»	95	»	89	»	98	»	102	»	107	»	»	»	106
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	94	»	95	»	90	»	100	»	107	»	101	»	101	»
27	88	87	90	93	96	96	88	89	»	99	103	108	108	102	94	»	107
28	»	»	89	»	95	»	»	»	99	»	104	»	107	»	»	»	106
29	87	88	88	94	»	97	87	90	100	98	103	107	»	»	95	102	»
30	»	87	»	93	»	96	»	89	»	99	»	»	»	101	»	103	»
31	»	86	87	»	96	97	86	90	101	»	104	»	»	102	94	102	107
32	88	»	88	»	95	»	87	»	100	»	»	»	106	»	95	»	»
33	89	85	87	94	96	»	88	91	101	»	105	108	105	101	»	103	106
34	»	84	»	»	»	96	»	92	»	98	»	109	»	100	»	102	»
35	88	»	88	95	95	97	87	»	102	99	»	108	104	101	94	103	105
36	89	»	87	»	96	»	»	»	»	»	106	»	103	»	95	»	106
37	88	83	88	94	97	»	»	93	101	100	107	109	102	100	94	»	105
38	»	84	»	95	»	98	»	»	»	101	»	108	»	»	»	104	»
39	87	85	»	»	96	97	86	94	102	102	108	»	101	101	95	103	106
40	»	»	»	»	97	»	87	»	101	»	»	»	100	»	94	»	107
41	86	»	89	94	98	98	88	»	100	103	107	107	101	100	93	104	»
42	»	86	»	93	»	»	»	95	»	104	»	108	»	99	»	103	»
43	85	85	88	»	99	97	89	94	99	103	106	107	»	98	94	104	108
44	86	»	87	»	98	»	90	»	100	»	»	»	102	»	93	»	109
45	87	86	86	94	99	96	89	95	»	104	105	108	103	97	94	105	108
46	»	87	»	93	»	97	»	94	»	105	»	109	»	96	»	»	»
47	86	»	87	92	»	96	88	93	101	106	106	108	104	»	95	104	107
48	85	»	»	»	98	»	89	»	102	»	105	»	103	»	96	»	108
49	85	88	88	93	99	95	88	94	101	106	106	107	102	97	95	103	107

119000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	107	114	118	111	112	114	110	120	113	108	109	112	110	117	125	130	132
1	106	113	117	112	113	113	109	»	114	107	108	»	111	116	126	129	»
2	105	»	116	»	114	»	110	»	113	»	109	»	110	»	»	»	131
3	»	114	115	»	115	112	»	119	114	106	110	113	»	117	125	128	130
4	»	»	»	111	»	113	»	120	»	107	»	112	»	118	»	»	»
5	106	113	114	110	116	112	111	121	»	108	109	113	111	117	126	129	129
6	105	»	115	»	115	»	»	»	113	»	»	»	112	»	127	»	128
7	»	114	114	111	»	111	110	122	114	109	110	»	113	»	128	128	129
8	»	113	»	112	»	110	»	121	»	110	»	»	»	118	»	129	»
9	»	112	115	111	114	111	111	120	113	»	111	112	112	119	127	128	»
10	»	»	114	»	115	»	112	»	112	»	110	»	111	»	126	»	»
11	104	111	113	112	116	»	113	119	111	111	109	111	112	120	»	127	128
12	»	110	»	»	»	110	»	120	»	110	»	110	»	»	»	126	»
13	103	»	112	113	117	109	114	121	112	111	»	109	»	121	125	125	127
14	104	»	111	»	116	»	115	»	»	»	»	»	113	»	124	»	126
15	»	111	110	112	115	110	»	122	111	110	»	110	114	122	125	»	125
16	»	112	»	111	»	109	»	121	»	»	»	109	»	»	»	124	»
17	105	113	»	110	116	110	116	122	»	109	110	»	113	123	126	125	124
18	»	»	109	»	117	»	115	»	110	»	111	»	114	»	125	»	125
19	104	114	110	111	116	109	»	»	111	110	110	110	113	122	126	124	»
20	»	113	»	110	»	»	»	123	»	109	»	109	»	123	»	125	»
21	105	114	109	»	»	108	114	122	112	108	109	110	»	124	127	126	124
22	»	»	108	»	117	»	115	»	113	»	»	»	»	»	126	»	123
23	106	113	»	109	118	107	116	121	»	107	110	111	114	125	127	127	122
24	»	»	»	110	»	106	»	120	»	108	»	110	»	126	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	107	»	»	»	119	»	117	»	114	»	111	»	113	»	128	»	123
27	»	112	107	111	118	107	118	121	113	»	110	109	»	127	127	126	122
28	»	111	»	112	»	108	»	»	»	107	»	108	»	126	»	125	»
29	108	112	106	111	119	»	117	120	112	108	111	107	112	127	»	126	121
30	107	»	107	»	118	»	»	»	111	»	110	»	»	»	126	»	122
31	106	»	106	112	117	109	116	121	112	109	»	108	113	128	127	125	123
32	»	113	»	111	»	110	»	120	»	110	»	109	»	127	»	126	»
33	107	114	107	110	116	109	»	119	111	111	111	110	112	»	126	»	122
34	108	»	108	»	»	»	117	»	112	»	110	»	113	»	125	»	123
35	109	115	»	109	117	110	118	»	111	112	109	»	114	126	126	127	122
36	»	116	»	110	»	109	»	118	»	»	»	111	»	127	»	128	»
37	110	115	107	109	118	108	119	»	110	113	110	112	115	128	127	129	»
38	111	»	108	»	117	»	118	»	109	»	111	»	116	»	»	»	121
39	110	116	109	»	116	107	117	119	108	112	110	111	»	127	128	130	122
40	»	»	»	110	»	106	»	118	»	113	»	110	»	126	»	129	»
41	111	115	108	111	117	107	118	117	»	112	111	109	115	»	129	128	123
42	112	»	109	»	118	»	»	»	109	»	112	»	116	»	130	»	122
43	111	116	»	110	»	108	119	116	108	111	111	108	117	»	131	129	121
44	»	117	»	111	»	109	»	115	»	110	»	»	»	127	»	130	»
45	»	118	110	110	117	110	»	114	107	»	112	109	116	128	132	129	122
46	112	»	111	»	116	»	118	»	106	»	111	»	117	»	131	»	»
47	113	117	110	111	115	»	119	113	107	109	112	110	116	127	»	130	121
48	»	118	»	»	»	111	»	112	»	110	»	111	»	126	»	131	»
49	114	118	111	112	114	110	120	113	108	109	112	110	117	125	130	132	122

120000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	122	118	119	114	109	107	105	104	105	101	104	105	102	103	117	111	112
1	123	117	118	115	108	106	106	»	»	102	105	104	103	104	118	110	113
2	»	116	»	116	»	107	»	103	»	103	»	105	»	105	»	»	»
3	122	117	119	117	»	»	105	104	106	102	»	106	102	»	119	111	114
4	121	»	»	»	»	»	104	»	105	»	106	»	103	»	120	»	113
5	»	116	118	»	109	108	105	105	104	»	105	105	102	106	121	112	114
6	»	117	»	116	»	107	»	»	»	103	»	106	»	105	»	113	»
7	120	»	119	117	110	»	106	106	103	104	104	105	103	106	»	112	115
8	»	»	120	»	111	»	105	»	104	»	103	»	»	»	120	»	116
9	119	»	119	116	112	108	106	105	105	103	»	104	104	107	121	»	117
10	»	116	»	115	»	107	»	106	»	102	»	105	»	108	»	111	»
11	120	117	118	116	113	»	»	105	104	103	104	104	105	109	122	»	116
12	121	»	117	»	»	»	107	»	103	»	105	»	104	»	121	»	117
13	122	118	»	115	114	108	106	106	102	104	104	»	»	110	120	110	118
14	»	119	»	116	»	109	»	105	»	»	»	105	»	109	»	109	»
15	123	120	116	115	115	108	107	»	103	105	103	106	103	110	121	110	»
16	124	»	115	»	114	»	106	»	102	»	104	»	104	»	»	»	119
17	123	121	116	»	113	107	107	104	101	106	103	107	»	111	120	111	120
18	»	»	»	114	»	106	»	105	»	107	»	108	»	112	»	112	»
19	»	122	117	115	112	105	108	106	»	108	104	107	105	111	121	111	121
20	124	»	116	»	111	»	»	»	100	»	105	»	104	»	120	»	122
21	123	121	115	»	»	104	107	105	99	107	104	108	105	»	119	112	121
22	»	120	»	114	»	103	»	104	»	106	»	»	»	112	»	111	»
23	»	119	114	113	112	102	108	105	100	»	105	107	104	113	118	110	120
24	122	»	115	»	111	»	107	»	101	»	104	»	»	»	117	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	120	»	»	»	101	»	106	»	105	»	106	»	112	»	109	»
27	121	»	114	112	110	102	106	107	100	»	»	107	103	111	116	108	119
28	120	»	113	»	109	»	105	»	»	»	105	»	104	»	115	»	118
29	121	121	114	111	110	101	»	106	99	104	106	108	105	112	114	»	117
30	»	120	»	112	»	102	»	107	»	105	»	109	»	»	»	107	»
31	122	121	»	111	109	101	104	108	98	104	105	»	106	111	115	106	118
32	»	»	115	»	108	»	103	»	99	»	106	»	105	»	114	»	117
33	123	120	114	112	107	102	102	»	»	105	107	108	104	112	113	107	»
34	»	119	»	113	»	»	»	109	»	104	»	109	»	113	»	108	»
35	124	120	115	»	108	»	103	110	100	103	»	108	»	112	114	107	118
36	125	»	114	»	107	»	102	»	99	»	»	»	103	»	113	»	119
37	124	119	115	114	108	103	101	109	»	104	108	107	104	113	114	108	120
38	»	120	»	113	»	104	»	108	»	103	»	106	»	114	»	»	»
39	123	119	116	112	»	103	102	109	98	102	109	105	103	»	115	109	121
40	122	»	»	»	109	»	»	»	99	»	108	»	104	»	116	»	120
41	»	120	115	111	108	104	103	108	98	»	109	104	103	115	115	108	»
42	»	121	»	112	»	105	»	»	»	103	»	103	»	116	»	»	»
43	123	120	114	111	109	»	102	107	99	104	108	102	102	117	»	109	121
44	122	»	113	»	108	»	103	»	100	»	107	»	»	»	114	»	120
45	121	»	114	110	107	106	102	108	101	105	»	103	»	118	»	110	121
46	»	119	»	109	»	105	»	107	»	104	»	»	»	117	»	111	»
47	120	118	113	110	108	104	»	106	100	103	»	102	103	118	113	»	»
48	119	»	114	»	»	»	103	»	101	»	106	»	104	»	112	»	120
49	118	119	114	109	107	105	104	105	101	104	105	102	103	117	111	112	121

121000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	121	129	127	119	120	109	113	112	105	94	81	76	74	74	70	80	79
1	»	128	128	118	119	110	112	111	104	»	80	77	73	73	71	79	80
2	122	»	127	»	118	»	»	»	103	»	79	»	72	»	72	»	»
3	121	129	126	119	119	»	113	112	102	93	80	78	73	74	»	78	81
4	»	130	»	»	»	109	»	113	»	94	»	79	»	73	»	79	»
5	122	»	127	118	120	110	112	114	103	93	»	80	72	74	71	80	80
6	121	»	126	»	121	»	111	»	»	»	79	»	71	»	70	»	79
7	122	129	125	117	122	109	»	115	102	92	78	81	72	73	71	»	78
8	»	130	»	118	»	»	»	114	»	91	»	80	»	»	»	79	»
9	123	131	»	117	121	110	112	115	101	90	77	»	73	74	70	78	77
10	»	»	126	»	120	»	113	»	102	»	76	»	72	»	69	»	78
11	122	130	127	116	121	111	112	»	101	91	77	79	73	75	70	77	»
12	»	129	»	117	»	»	»	116	»	90	»	78	»	74	»	78	»
13	»	128	128	»	120	110	113	115	100	89	76	77	»	73	71	77	77
14	123	»	127	»	119	»	112	»	101	»	»	»	74	»	72	»	76
15	124	129	126	118	118	111	111	114	»	88	77	78	75	72	71	76	75
16	»	128	»	»	»	112	»	113	»	87	»	77	»	71	»	»	»
17	125	129	127	119	»	111	110	114	100	86	78	76	76	»	72	75	76
18	126	»	»	»	117	»	109	»	101	»	79	»	75	»	73	»	77
19	»	128	126	120	118	112	110	113	100	»	78	75	74	70	74	76	76
20	»	129	»	121	»	113	»	»	»	85	»	74	»	69	»	77	»
21	127	128	125	120	117	»	111	112	99	86	77	75	»	68	»	76	75
22	128	»	124	»	116	»	112	»	98	»	76	»	»	»	75	»	76
23	127	»	123	121	117	112	111	111	99	87	»	76	73	»	76	77	75
24	»	»	»	122	»	111	»	110	»	86	»	77	»	67	»	78	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	126	»	122	»	»	»	112	»	98	»	77	»	72	»	»	»	76
27	127	127	»	121	116	110	111	109	97	85	78	»	73	»	75	77	75
28	»	128	»	120	»	109	»	108	»	»	»	78	»	68	»	76	»
29	128	129	123	121	115	108	110	»	96	86	79	»	74	67	74	77	»
30	129	»	124	»	114	»	111	»	95	»	»	»	73	»	»	»	76
31	130	128	123	»	113	109	112	109	94	»	80	77	»	66	73	78	77
32	»	»	»	120	»	108	»	108	»	85	»	76	»	67	»	77	»
33	129	129	122	119	114	109	111	»	»	86	81	77	74	68	74	76	76
34	128	»	123	»	115	»	»	»	95	»	80	»	75	»	75	»	77
35	129	128	122	120	»	»	»	107	»	87	79	76	74	»	76	75	76
36	»	129	»	121	»	110	»	108	»	88	»	»	»	69	»	76	»
37	»	128	»	»	114	»	110	107	94	»	80	77	73	68	77	77	77
38	128	»	»	»	113	»	109	»	93	»	79	»	72	»	76	»	»
39	127	»	123	120	112	»	110	106	94	87	78	76	71	67	»	78	78
40	»	129	»	»	»	111	»	105	»	86	»	75	»	66	»	77	»
41	128	»	122	119	111	110	109	104	93	85	»	»	»	67	77	76	77
42	129	»	121	»	110	»	110	»	»	»	79	»	72	»	»	»	»
43	128	128	122	120	109	111	»	105	92	84	80	76	71	68	78	»	76
44	»	129	»	121	»	112	»	104	»	85	»	75	»	»	»	77	»
45	129	128	»	120	110	111	111	105	93	84	79	»	72	69	79	76	75
46	»	»	121	»	111	»	112	»	94	»	78	»	73	»	80	»	76
47	128	127	120	121	110	112	111	»	93	83	77	76	74	68	81	77	»
48	»	126	»	120	»	»	»	106	»	82	»	75	»	69	»	78	»
49	129	127	119	120	109	113	112	105	94	81	76	74	74	70	80	79	75

122000

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	75	68	64	64	65	59	52	51	47	54	62	63	66	64	54	56	56
1	74	»	63	63	64	58	53	50	48	»	»	64	65	63	53	57	55
2	»	67	»	62	»	59	»	49	»	55	»	65	»	64	»	58	»
3	73	66	62	61	63	60	»	50	49	54	61	66	66	63	52	»	54
4	72	»	63	»	»	»	52	»	48	»	62	»	67	»	53	»	53
5	71	67	»	60	64	»	51	49	47	53	63	»	68	62	54	59	52
6	»	68	»	59	»	59	»	50	»	»	»	67	»	61	»	60	»
7	70	69	64	58	65	58	»	»	48	54	62	66	69	60	53	61	»
8	71	»	65	»	66	»	50	»	47	»	63	»	»	»	»	»	51
9	70	70	66	»	65	57	49	51	48	53	64	65	»	61	»	62	52
10	»	»	»	59	»	56	»	52	»	54	»	66	»	»	»	61	»
11	71	71	67	»	64	55	48	51	»	55	65	67	»	60	54	60	53
12	72	»	66	»	65	»	»	»	47	»	66	»	68	»	55	»	52
13	»	72	67	60	»	56	49	50	46	56	»	68	67	»	56	61	51
14	»	71	»	61	»	55	»	49	»	»	»	»	»	61	»	62	»
15	»	70	66	60	64	54	48	48	»	»	67	67	68	60	57	63	50
16	71	»	67	»	63	»	47	»	45	»	68	»	67	»	56	»	»
17	70	71	66	61	64	»	»	49	44	57	67	68	66	61	»	62	49
18	»	70	»	»	»	»	»	50	»	58	»	67	»	»	»	61	»
19	69	»	65	62	»	53	»	49	45	59	»	68	67	60	55	62	48
20	70	»	66	»	63	»	»	»	»	»	68	»	66	»	54	»	49
21	69	69	»	63	62	52	»	48	46	58	69	67	65	59	55	»	48
22	»	»	»	64	»	53	»	47	»	57	»	68	»	»	»	61	»
23	»	68	»	63	63	52	48	48	47	58	68	»	66	60	54	62	47
24	»	»	67	»	62	»	49	»	48	»	69	»	67	»	53	»	48
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	67	»	64	»	»	»	»	»	59	»	69	»	61	»	61	»
27	70	68	68	»	61	53	50	47	49	60	68	68	»	60	52	62	47
28	71	»	67	»	62	»	49	»	50	»	»	»	66	»	53	»	48
29	70	69	68	65	61	54	50	48	»	61	69	67	65	59	54	61	49
30	»	68	»	66	»	53	»	47	»	60	»	68	»	58	»	»	»
31	71	67	67	65	»	52	51	48	51	61	70	67	66	»	53	60	48
32	70	»	»	»	62	»	50	»	50	»	69	»	65	»	52	»	49
33	»	68	68	64	61	51	49	47	51	»	68	68	64	57	53	59	50
34	»	69	»	63	»	50	»	»	»	62	»	67	»	»	»	58	»
35	69	68	67	62	62	»	50	46	52	»	67	68	63	58	»	57	49
36	68	»	68	»	63	»	51	»	51	»	68	»	»	»	54	»	48
37	69	»	67	63	64	49	50	45	50	63	»	67	64	57	53	58	»
38	»	69	»	62	»	48	»	46	»	64	»	66	»	58	»	57	»
39	68	68	68	63	63	49	»	45	49	63	67	67	65	57	»	»	47
40	69	»	67	»	»	»	51	»	50	»	66	»	66	»	54	»	48
41	70	67	»	62	62	48	52	46	51	»	65	»	67	56	55	58	49
42	»	66	»	63	»	49	»	45	»	»	»	66	»	55	»	57	»
43	71	65	66	64	63	50	53	»	50	62	64	67	66	54	56	58	»
44	70	»	65	»	62	»	52	»	51	»	63	»	65	»	»	»	48
45	69	64	»	»	61	51	51	44	52	61	64	»	»	55	57	59	49
46	»	»	»	65	»	50	»	45	»	62	»	68	»	54	»	58	»
47	68	63	66	64	60	51	50	46	»	»	65	67	64	»	58	57	50
48	67	»	65	»	59	»	»	»	53	»	64	»	63	»	57	»	51
49	68	64	64	65	59	52	51	47	54	62	63	66	64	54	56	56	51

123000

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	51	46	44	37	33	38	42	42	39	39	36	36	37	43	38	41	44
1	50	45	»	38	32	»	41	41	40	38	35	»	36	44	37	42	43
2	»	»	45	»	»	»	42	»	39	»	34	»	37	»	38	»	42
3	49	46	44	»	33	37	41	»	40	37	33	35	38	43	39	41	»
4	»	45	»	37	»	»	»	40	»	36	»	36	»	44	»	40	»
5	48	»	43	»	34	36	40	39	41	35	34	37	»	45	38	41	41
6	»	»	44	»	35	»	41	»	40	»	»	»	39	»	37	»	40
7	47	46	43	38	36	37	42	38	»	36	35	38	40	46	36	40	39
8	»	47	»	37	»	36	»	37	»	35	»	39	»	45	»	»	»
9	46	46	44	38	»	37	41	38	39	36	36	40	41	»	37	41	38
10	»	»	»	»	35	»	40	»	38	»	37	»	40	»	36	»	37
11	»	47	43	39	36	38	39	37	37	»	38	39	41	44	37	40	38
12	»	46	»	38	»	39	»	»	»	37	»	40	»	43	»	39	»
13	47	45	44	37	37	»	40	38	36	36	»	39	42	»	»	38	37
14	46	»	43	»	36	»	41	»	35	»	39	»	»	»	38	»	38
15	47	»	42	38	35	38	40	37	34	37	»	38	»	42	39	39	39
16	»	44	»	39	»	37	»	38	»	38	»	37	»	41	»	40	»
17	48	43	»	38	34	36	»	»	33	37	38	38	43	40	40	»	38
18	47	»	41	»	»	»	39	»	32	»	39	»	44	»	39	»	37
19	46	44	»	39	33	37	40	39	31	38	38	»	43	39	40	39	38
20	»	43	»	40	»	38	»	38	»	»	»	37	»	40	»	40	»
21	45	42	40	41	34	37	39	»	32	39	37	38	44	39	39	39	»
22	44	»	39	»	35	»	40	»	33	»	36	»	45	»	»	»	39
23	43	41	38	»	36	38	41	»	34	38	37	39	»	38	40	38	40
24	»	»	»	40	»	39	»	39	»	37	»	40	»	37	»	39	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	44	»	37	»	35	»	»	»	35	»	38	»	40	»	41	»	39
27	43	42	36	41	»	38	40	40	36	38	37	39	45	»	40	40	38
28	»	41	»	40	»	39	»	39	»	39	»	»	»	38	»	39	»
29	»	40	37	»	36	40	41	38	37	»	36	40	44	39	39	40	39
30	44	»	38	»	37	»	40	»	36	»	37	»	45	»	40	»	»
31	43	41	»	41	38	»	41	39	35	40	36	41	46	40	»	41	38
32	»	42	»	»	»	39	»	40	»	39	»	40	»	41	»	42	»
33	44	»	39	40	37	40	40	39	36	38	»	41	45	42	41	43	39
34	43	»	38	»	38	»	39	»	»	»	35	»	46	»	42	»	38
35	44	41	37	41	37	41	»	40	37	37	36	40	47	41	41	»	37
36	»	42	»	40	»	42	»	39	»	38	»	»	»	»	»	44	»
37	45	43	»	39	38	43	40	40	38	39	37	»	46	40	40	45	38
38	»	»	38	»	37	»	41	»	37	»	38	»	47	»	41	»	39
39	46	44	39	38	38	42	42	»	38	38	37	39	46	41	40	46	»
40	»	45	»	37	»	»	»	39	»	37	»	40	»	40	»	»	»
41	45	44	38	»	39	43	43	38	39	38	36	39	»	39	»	45	40
42	46	»	39	»	38	»	42	»	40	»	»	»	45	»	41	»	39
43	47	45	38	36	37	44	41	39	»	37	35	»	»	40	40	46	40
44	»	44	»	35	»	43	»	40	»	»	»	»	»	39	»	»	»
45	46	45	39	36	»	44	42	41	39	36	»	38	44	»	39	45	41
46	45	»	»	»	38	»	41	»	38	»	34	»	43	»	40	»	40
47	»	46	38	35	39	43	42	40	»	»	35	37	44	40	41	44	41
48	»	45	»	34	»	42	»	»	»	35	»	36	»	39	»	43	»
49	46	44	37	33	38	42	42	39	39	36	36	37	43	38	41	44	40

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850
0	40	39	43	50	43	37	38	45	44	37	33	24	21	26	24	28	25
1	41	»	42	»	44	38	39	44	45	36	32	23	»	25	25	27	24
2	»	»	»	49	»	39	»	45	»	37	»	22	»	26	»	28	»
3	42	40	43	48	43	38	40	»	»	36	31	23	20	27	26	27	23
4	41	»	42	»	44	»	»	»	44	»	30	»	21	»	25	»	24
5	42	41	43	47	»	39	41	46	45	35	29	22	20	»	24	26	25
6	»	42	»	48	»	38	»	47	»	34	»	»	»	26	»	25	»
7	»	43	44	47	»	37	40	46	44	»	28	21	19	25	23	26	26
8	41	»	45	»	43	»	39	»	45	»	27	»	18	»	24	»	»
9	40	42	44	46	42	»	40	45	44	35	28	22	19	24	»	25	27
10	»	43	»	»	»	36	»	44	»	34	»	23	»	25	»	26	»
11	41	»	45	45	41	35	41	43	45	35	»	24	18	26	25	27	28
12	40	»	46	»	42	»	42	»	»	»	29	»	»	»	24	»	27
13	41	42	45	44	43	36	»	44	46	34	28	25	19	27	25	»	26
14	»	»	»	45	»	37	»	45	»	35	»	24	»	»	»	26	»
15	40	43	»	41	42	36	41	46	45	34	27	»	20	26	26	27	25
16	»	»	46	»	43	»	42	»	44	»	26	»	19	»	25	»	26
17	41	44	47	43	42	37	41	»	45	33	27	23	18	27	26	26	»
18	»	45	»	44	»	»	»	45	»	32	»	24	»	26	»	27	»
19	42	44	46	»	41	36	42	44	44	33	28	23	»	25	27	26	27
20	43	»	47	»	40	»	»	»	43	»	»	»	19	»	26	»	28
21	44	43	48	43	41	37	43	45	»	34	27	22	18	24	27	25	29
22	»	44	»	44	»	36	»	46	»	33	»	21	»	25	»	»	»
23	45	43	49	45	»	35	42	47	42	34	26	22	19	»	28	»	28
24	46	»	»	»	42	»	43	»	43	»	27	»	20	»	»	»	27
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	42	»	46	»	36	»	»	»	33	»	23	»	26	»	24	»
27	45	41	48	47	41	»	42	46	42	32	28	»	19	25	»	25	»
28	46	»	»	»	40	»	41	»	41	»	»	»	»	»	27	»	26
29	45	»	49	46	41	37	40	47	40	»	»	24	20	26	28	24	27
30	»	42	»	45	»	38	»	46	»	33	»	23	»	25	»	23	»
31	44	43	50	46	40	37	»	»	39	34	27	22	21	24	29	»	28
32	45	»	49	»	»	»	»	»	38	»	28	»	22	»	28	»	29
33	44	44	»	45	41	»	41	45	39	33	27	»	23	23	»	22	»
34	»	45	»	44	»	38	»	46	»	»	»	21	»	22	»	21	»
35	43	44	48	»	40	37	42	»	40	32	26	20	22	23	27	22	»
36	44	»	»	»	41	»	43	»	41	»	25	»	23	»	»	»	28
37	43	»	49	»	40	38	42	45	42	33	26	19	»	22	26	21	27
38	»	»	»	43	»	37	»	46	»	32	»	20	»	23	»	22	»
39	44	45	48	42	39	38	43	45	»	»	27	21	24	22	27	23	28
40	43	»	49	»	38	»	»	»	43	»	28	»	25	»	26	»	29
41	42	46	48	43	»	37	44	44	42	»	27	20	26	»	25	24	28
42	»	45	»	42	»	38	»	45	»	31	»	»	»	23	»	23	»
43	»	44	49	43	39	39	45	44	41	»	26	21	27	22	26	24	27
44	43	»	48	»	38	»	44	»	40	»	25	»	26	»	27	»	»
45	42	43	49	»	39	»	45	43	39	32	24	20	27	23	»	25	26
46	»	42	»	»	»	40	»	44	»	33	»	19	»	22	»	24	»
47	41	»	50	44	38	39	44	45	38	32	»	20	26	23	28	25	27
48	40	»	49	»	37	»	45	»	»	»	23	»	25	»	29	»	28
49	39	43	50	43	37	38	45	44	37	33	24	21	26	24	28	25	29

124000

	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	29	25	25	34	35	33	32	33	36	23	21	23	19	19	19	28	24
1	30	24	24	35	»	32	31	32	35	22	22	24	18	»	18	29	23
2	29	»	»	»	34	»	32	»	34	»	23	»	17	»	19	»	24
3	»	23	25	36	35	31	31	33	33	»	24	23	16	»	20	28	23
4	»	24	»	35	»	30	»	»	»	21	»	22	»	18	»	29	»
5	30	23	26	34	36	»	32	34	32	20	23	21	15	17	»	28	»
6	31	»	27	»	37	»	33	»	33	»	22	»	»	»	21	»	22
7	30	»	28	35	36	31	34	35	34	21	»	22	16	18	»	27	21
8	»	24	»	34	»	30	»	36	»	20	»	21	»	»	»	26	»
9	29	23	29	33	37	31	»	37	33	21	23	20	»	»	»	»	20
10	28	»	28	»	»	»	33	»	34	»	24	»	15	»	22	»	21
11	27	24	»	32	38	32	34	38	33	22	»	»	16	17	21	27	22
12	»	25	»	31	»	33	»	39	»	»	»	19	»	16	»	28	»
13	26	24	27	32	37	34	33	»	»	21	23	20	15	17	22	27	»
14	27	»	28	»	38	»	32	»	32	»	24	»	14	»	»	»	21
15	28	25	27	»	37	33	»	38	»	20	23	21	»	16	23	26	22
16	»	»	»	33	»	»	»	39	»	19	»	22	»	17	»	25	»
17	29	26	26	32	»	34	33	»	»	18	24	21	15	16	24	26	21
18	30	»	25	»	36	»	»	»	31	»	23	»	14	»	23	»	20
19	31	»	»	33	»	35	34	38	30	17	22	22	15	»	24	25	19
20	»	»	»	34	»	36	»	»	»	16	»	»	»	15	»	24	»
21	»	27	24	35	35	35	33	37	29	»	23	21	16	16	23	23	18
22	32	»	25	»	36	»	34	»	28	»	24	»	15	»	24	»	»
23	31	26	26	36	35	»	33	38	27	17	23	22	16	17	»	22	19
24	»	27	»	»	»	34	»	39	»	18	»	23	»	16	»	23	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	32	»	27	»	34	»	32	»	»	»	24	»	17	»	23	»	20
27	31	26	28	35	33	35	»	38	28	17	23	22	18	15	24	»	21
28	»	25	»	36	»	34	»	37	»	18	»	21	»	»	»	24	»
29	32	24	»	37	34	35	33	36	29	19	22	»	17	»	25	23	22
30	»	»	29	»	33	»	32	»	28	»	23	»	16	»	»	»	21
31	31	»	30	38	34	34	31	»	29	20	24	22	17	14	26	24	»
32	»	25	»	37	»	»	»	37	»	21	»	21	»	13	»	23	»
33	30	24	31	»	33	33	32	38	28	20	23	22	»	12	25	24	20
34	31	»	32	»	34	»	31	»	29	»	»	»	16	»	24	»	19
35	30	23	31	38	35	34	32	39	»	21	22	23	17	13	25	23	20
36	»	22	»	37	»	33	»	40	»	20	»	22	»	14	»	»	»
37	29	21	32	36	»	32	33	39	28	21	23	23	18	»	26	24	21
38	28	»	»	»	34	»	34	»	27	»	24	»	17	»	25	»	20
39	»	20	33	37	33	31	35	40	26	»	23	22	18	15	26	23	19
40	»	21	»	36	»	32	»	»	»	22	»	23	»	16	»	24	»
41	27	22	32	35	34	»	34	39	27	23	24	22	17	17	»	23	20
42	26	»	31	»	35	»	33	»	28	»	23	»	»	»	27	»	19
43	27	»	32	36	36	31	34	38	27	24	»	21	16	18	26	22	18
44	»	23	»	37	»	32	»	37	»	»	»	20	»	19	»	23	»
45	26	24	33	36	35	31	»	38	26	23	24	19	»	20	25	»	17
46	25	»	»	»	»	»	35	»	25	»	25	»	17	»	26	»	18
47	24	23	»	35	34	32	34	37	24	22	24	»	18	19	27	24	17
48	»	24	»	34	»	33	»	36	»	»	»	18	»	20	»	25	»
49	25	25	34	35	33	32	33	36	23	21	23	19	19	19	28	24	17

125000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
0	17	9	17	23	27	32	23	24	13	15	13	12	11	16	13	7	10
1	»	10	18	»	26	»	24	23	12	14	12	11	12	17	»	8	9
2	»	11	»	»	»	33	»	22	»	13	»	12	»	18	»	9	»
3	16	»	17	22	27	32	23	23	11	14	»	11	11	19	12	10	10
4	»	»	16	»	28	»	22	»	»	»	13	»	10	»	11	»	11
5	15	10	17	23	27	31	»	22	12	15	14	10	11	18	10	»	12
6	»	9	»	»	»	30	»	23	»	16	»	11	»	»	»	11	»
7	16	10	»	22	28	31	23	22	13	15	13	»	12	17	11	10	11
8	»	»	16	»	27	»	24	»	12	»	14	»	13	»	10	»	10
9	15	11	17	21	26	32	25	»	13	14	13	»	14	16	11	9	»
10	»	12	»	20	»	»	»	21	»	15	»	12	»	15	»	8	»
11	16	13	18	»	25	33	26	20	14	16	12	11	»	14	12	9	11
12	17	»	17	»	26	»	25	»	15	»	»	»	13	»	13	»	12
13	16	14	18	21	27	32	24	19	»	17	13	12	14	15	12	10	13
14	»	13	»	22	»	33	»	»	»	18	»	11	»	14	»	»	»
15	17	14	19	23	»	32	25	20	16	17	14	10	15	»	11	9	14
16	18	»	»	»	28	»	26	»	17	»	15	»	16	»	12	»	13
17	»	13	18	22	29	31	25	19	18	»	»	11	17	15	13	10	»
18	»	14	»	23	»	30	»	»	»	16	»	12	»	14	»	9	»
19	17	13	17	22	30	»	24	18	17	15	14	11	18	15	»	10	14
20	18	»	16	»	29	»	23	»	16	»	13	»	»	»	12	»	15
21	17	»	17	23	30	29	24	17	15	14	»	12	17	14	11	11	14
22	»	12	»	22	»	30	»	16	»	15	»	11	»	13	»	12	»
23	18	11	18	23	31	29	»	17	14	16	14	12	»	12	12	»	15
24	17	»	17	»	»	»	23	»	13	»	13	»	18	»	11	»	14
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	10	»	24	»	28	»	18	»	»	»	11	»	»	»	11	»
27	16	11	18	23	32	27	22	»	14	17	14	12	19	13	»	10	»
28	15	»	19	»	33	»	23	»	15	»	15	»	20	»	»	»	13
29	16	12	20	»	32	26	22	19	16	»	14	11	»	12	12	11	12
30	»	»	»	»	»	25	»	18	»	18	»	12	»	11	»	10	»
31	15	11	21	24	31	24	21	17	»	17	13	13	21	12	11	9	13
32	16	»	20	»	30	»	»	»	17	»	12	»	20	»	10	»	14
33	15	12	21	25	»	25	20	16	16	18	13	12	19	»	11	10	13
34	»	13	»	26	»	24	»	17	»	19	»	»	»	11	»	9	»
35	»	14	22	25	29	23	21	16	17	»	14	11	20	12	12	8	14
36	14	»	21	»	30	»	22	»	16	»	13	»	19	»	13	»	»
37	13	15	22	26	29	»	23	»	17	20	12	10	18	13	»	9	»
38	»	16	»	»	»	22	»	15	»	19	»	9	»	12	»	»	»
39	14	»	23	27	28	23	24	16	18	18	»	8	19	13	»	8	15
40	13	»	22	»	29	»	25	»	»	»	11	»	18	»	12	»	16
41	14	17	»	28	28	24	»	15	17	17	12	7	»	12	13	»	15
42	»	16	»	27	»	23	»	14	»	16	»	»	»	»	»	7	»
43	13	17	»	26	»	24	24	15	16	15	»	»	19	11	12	6	16
44	»	»	23	»	29	»	23	»	17	»	13	»	18	»	11	»	15
45	12	16	24	27	30	23	22	»	»	14	12	8	17	10	10	7	»
46	»	17	»	28	»	»	»	»	»	13	»	9	»	11	»	8	»
47	11	16	23	»	31	24	»	14	16	12	13	10	»	12	9	9	14
48	10	»	22	»	32	»	23	»	15	»	»	»	»	»	8	»	»
49	9	17	23	27	32	23	24	13	15	13	12	11	16	13	7	10	13

126000

	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400
0	13	5	−3	0	−6	3	6	10	15	12	14	5	4	6	18	13	16
1	12	4	−2	−1	−5	2	»	9	14	13	15	4	5	7	19	»	17
2	13	»	−1	»	»	»	»	»	»	»	14	»	4	»	18	»	16
3	12	5	»	−2	−6	3	7	8	13	14	15	»	»	8	19	14	17
4	»	6	»	−3	»	4	»	7	»	»	»	3	»	9	»	13	»
5	13	5	−2	−4	−7	5	»	»	14	13	16	2	3	10	20	12	»
6	12	»	−3	»	−6	»	8	»	13	»	15	»	4	»	»	»	16
7	11	4	−4	»	−5	6	9	8	12	14	14	1	»	9	19	13	17
8	»	»	»	−5	»	7	»	9	»	15	»	2	»	10	»	14	»
9	10	3	−3	−4	−4	8	10	8	»	16	15	1	5	9	18	13	18
10	9	»	−2	»	−3	»	»	»	11	»	14	»	4	»	19	»	17
11	10	4	−3	−3	»	9	9	»	10	17	13	0	3	»	18	14	16
12	»	3	»	−2	»	10	»	9	»	18	»	»	»	10	»	15	»
13	»	4	−2	−1	−4	9	»	8	9	»	12	1	4	11	19	14	17
14	9	»	−3	»	−3	»	8	»	8	»	11	»	3	»	18	»	»
15	10	3	»	0	−2	»	9	9	9	17	10	2	4	12	»	13	16
16	»	2	»	»	»	10	»	10	»	16	»	1	»	13	»	12	»
17	9	»	−4	1	−3	11	10	9	10	15	»	2	5	14	17	13	17
18	8	»	−3	»	−4	»	11	»	»	»	11	»	4	»	18	»	16
19	7	1	»	2	−3	12	»	10	9	16	10	3	5	13	19	»	17
20	»	0	»	1	»	13	»	11	»	17	»	2	»	»	»	12	»
21	6	−1	»	2	−4	14	10	12	10	16	11	»	6	12	20	»	16
22	»	»	−2	»	−5	»	11	»	11	»	10	»	7	»	»	»	17
23	7	−2	−3	3	−4	15	12	»	10	17	9	1	6	»	19	13	»
24	»	−3	»	2	»	»	»	13	»	»	»	2	»	11	»	12	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	6	»	−4	»	−3	»	11	»	9	»	»	»	7	»	18	»	18
27	5	−2	−5	1	−2	16	10	14	»	»	8	1	6	12	17	13	19
28	»	−1	»	0	»	17	»	15	»	16	»	2	»	11	»	»	»
29	4	0	−4	1	»	16	9	»	10	15	9	1	5	»	18	14	20
30	5	»	»	»	−3	»	»	»	11	»	8	»	6	»	19	»	21
31	»	1	−5	2	−2	»	8	16	10	»	7	2	5	12	18	13	»
32	»	0	»	1	»	15	»	»	»	»	»	1	»	13	»	12	»
33	6	−1	−4	»	−1	»	7	15	9	16	6	2	4	14	»	13	20
34	5	»	»	»	−2	»	8	»	10	»	7	»	»	»	19	»	21
35	6	»	−3	0	−3	14	7	16	11	15	»	3	5	13	18	14	20
36	»	0	»	−1	»	13	»	15	»	14	»	2	»	12	»	13	»
37	7	−1	−4	−2	−4	12	»	16	10	15	8	3	4	13	17	»	21
38	8	»	−3	»	»	»	8	»	11	»	7	»	5	»	16	»	22
39	7	−2	»	−3	−3	11	»	»	12	16	6	»	6	14	15	14	23
40	»	−3	»	−4	»	10	»	17	»	»	»	2	»	15	»	13	»
41	6	−2	−2	−5	−2	»	7	»	11	17	5	1	5	16	14	14	»
42	5	»	−1	»	−1	»	8	»	12	»	4	»	6	»	»	»	22
43	6	−3	−2	»	0	11	9	16	13	16	3	2	»	»	15	15	21
44	»	»	»	−4	»	10	»	15	»	15	»	3	»	15	»	16	»
45	5	−4	−1	−5	1	9	10	14	»	16	4	4	5	16	14	15	»
46	6	»	0	»	2	»	»	»	14	»	5	»	6	»	13	»	20
47	5	−3	1	−4	»	8	9	15	13	15	4	5	5	»	14	14	19
48	»	−4	»	−5	»	7	»	14	»	14	»	»	»	17	»	15	»
49	5	−3	0	−6	3	6	10	15	12	14	5	4	6	18	13	16	20

127000

	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	20	7	11	12	16	23	13	21	24	26	25	28	37	51	41	49	51
1	19	6	10	11	17	22	12	»	23	27	24	29	36	50	42	50	»
2	»	5	»	10	»	»	»	20	»	26	»	30	»	49	»	51	»
3	18	4	9	»	16	21	13	21	24	25	25	31	»	48	43	50	»
4	17	»	10	»	15	»	14	»	23	»	»	»	37	»	44	»	52
5	16	5	9	11	14	20	13	20	»	24	26	30	38	47	»	51	51
6	»	4	»	10	»	21	»	21	»	25	»	31	»	»	»	»	»
7	15	5	10	11	»	20	12	20	22	24	25	30	»	»	43	50	»
8	14	»	»	»	15	»	11	»	21	»	26	»	39	»	42	»	52
9	»	6	11	10	16	21	12	21	20	»	»	31	38	48	43	51	51
10	»	7	»	11	»	20	»	»	»	»	»	32	»	47	»	50	»
11	13	8	12	10	17	»	11	22	»	25	25	33	39	48	»	49	50
12	14	»	13	»	18	»	12	»	19	»	26	»	»	»	44	»	51
13	13	»	14	9	19	19	»	21	18	24	»	34	40	47	43	50	50
14	»	»	»	10	»	»	»	20	»	25	»	33	»	46	»	51	»
15	12	9	13	11	»	20	»	19	19	24	25	34	41	47	42	»	51
16	11	»	»	»	»	»	11	»	18	»	26	»	42	»	43	»	50
17	12	8	»	12	20	21	12	20	17	25	25	»	43	48	44	50	51
18	»	»	»	13	»	20	»	21	»	»	»	33	»	49	»	49	»
19	»	7	14	14	21	19	13	»	18	»	26	34	44	50	43	48	»
20	11	»	15	»	22	»	14	»	19	»	25	»	45	»	»	»	50
21	12	8	16	»	23	18	15	22	»	26	26	35	»	51	»	49	49
22	»	»	»	15	»	19	»	23	»	25	»	36	»	50	»	50	»
23	11	9	15	16	22	18	16	22	»	24	27	35	46	49	44	49	50
24	12	»	14	»	23	»	»	»	20	»	28	»	45	»	45	»	49
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	8	»	17	»	17	»	21	»	25	»	»	»	48	»	48	»
27	»	9	13	18	24	18	15	20	21	»	27	36	46	49	46	49	48
28	11	»	12	»	25	»	16	»	22	»	26	»	47	»	47	»	»
29	12	10	13	19	26	»	17	21	23	»	27	37	46	50	»	50	49
30	»	9	»	»	»	17	»	22	»	26	»	36	»	49	»	51	»
31	11	»	»	18	27	16	16	21	24	27	»	35	45	48	48	52	48
32	12	»	»	»	26	»	17	»	»	»	26	»	46	»	47	»	47
33	13	10	12	19	25	15	»	22	25	26	27	34	45	47	48	»	48
34	»	9	»	20	»	16	»	21	»	27	»	33	»	»	»	53	»
35	12	10	»	21	24	15	18	22	26	26	26	»	44	46	49	54	49
36	»	»	11	»	23	»	17	»	27	»	27	»	45	»	48	»	48
37	11	11	12	20	»	16	18	»	28	27	26	32	46	47	49	53	»
38	»	10	»	19	»	»	»	23	»	26	»	33	»	46	»	52	»
39	10	11	13	»	24	15	17	22	29	27	25	34	»	45	48	53	47
40	9	»	12	»	23	»	18	»	28	»	»	»	47	»	47	»	48
41	8	10	13	18	22	14	17	21	»	28	»	35	48	44	48	52	47
42	»	11	»	17	»	15	»	22	»	27	»	36	»	43	»	»	»
43	7	12	14	16	»	14	18	23	27	26	26	37	49	»	47	51	46
44	8	»	»	»	23	»	19	»	26	»	27	»	50	»	46	»	47
45	»	13	13	15	24	15	20	22	25	»	26	38	51	42	47	52	46
46	»	12	»	14	»	14	»	»	»	27	»	37	»	41	»	53	»
47	7	11	12	15	23	»	21	23	26	26	27	38	52	42	»	52	45
48	8	»	13	»	24	»	22	»	25	»	28	»	»	»	48	»	46
49	7	11	12	16	23	13	21	24	26	25	28	37	51	41	49	51	47

128000

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100
0	47	57	58	60	66	66	69	69	73	70	75	71	67	64	63	65	66
1	46	»	59	61	65	67	68	70	»	69	70	70	68	63	64	64	67
2	»	»	58	»	64	»	»	»	72	»	77	»	67	»	65	»	»
3	45	58	57	60	»	68	69	69	71	70	78	69	66	»	66	63	68
4	»	57	»	61	»	69	»	68	»	69	»	»	»	64	»	62	»
5	»	58	56	62	63	68	70	»	72	»	79	70	65	63	67	61	69
6	44	»	57	»	64	»	71	»	73	»	78	»	64	»	66	»	»
7	45	59	56	63	63	»	70	67	74	70	77	71	65	64	»	62	70
8	»	60	»	»	»	69	»	68	»	71	»	72	»	63	»	63	»
9	44	»	57	64	62	70	69	67	73	72	»	71	66	64	67	64	71
10	45	»	56	»	63	»	70	»	»	»	76	»	65	»	66	»	72
11	46	59	57	65	64	71	»	68	72	71	77	72	64	65	65	»	71
12	»	58	»	64	»	72	»	67	»	70	»	71	»	»	»	63	»
13	47	57	»	63	65	71	71	66	73	69	»	»	63	66	64	64	70
14	»	»	58	»	64	»	70	»	74	»	78	»	62	»	65	»	69
15	48	58	57	64	63	70	71	»	75	70	77	70	63	67	66	63	»
16	»	57	»	65	»	»	»	67	»	69	»	71	»	66	»	64	»
17	»	58	58	»	62	71	72	68	74	70	76	70	»	65	67	65	68
18	49	»	59	»	63	»	73	»	73	»	»	»	62	»	»	»	69
19	50	59	60	66	64	70	74	67	»	71	75	69	61	66	66	66	68
20	»	60	»	65	»	69	»	68	»	72	»	70	»	67	»	»	»
21	49	61	59	66	»	68	75	69	72	73	74	71	60	»	65	67	67
22	50	»	»	»	65	»	74	»	73	»	73	»	59	»	66	»	»
23	»	60	58	67	66	69	73	70	74	»	72	70	60	66	67	66	68
24	»	59	»	68	»	68	»	»	»	72	»	69	»	65	»	67	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	49	»	»	»	65	»	74	»	75	»	73	»	»	»	68	»	69
27	50	»	59	69	66	69	73	71	74	73	»	68	61	64	»	68	70
28	»	60	»	68	»	70	»	72	»	72	»	67	»	63	»	67	»
29	51	59	60	67	65	69	»	71	73	71	74	68	62	62	67	»	71
30	50	»	59	»	»	»	72	»	74	»	75	»	63	»	66	»	72
31	49	58	»	66	66	»	73	70	75	70	76	»	62	61	67	68	73
32	»	59	»	65	»	70	»	71	»	»	»	67	»	60	»	67	»
33	50	60	»	66	65	69	72	»	74	71	77	68	»	59	66	68	»
34	51	»	60	»	»	»	71	»	75	»	78	»	61	»	»	»	74
35	52	59	61	»	64	70	72	72	74	72	77	69	»	60	65	67	»
36	»	»	»	67	»	71	»	73	»	71	»	68	»	61	»	»	»
37	53	58	60	66	65	70	71	74	»	72	76	67	62	62	»	68	75
38	54	»	61	»	64	»	»	»	»	»	75	»	61	»	66	»	74
39	55	59	62	»	»	69	72	73	73	73	74	66	»	»	67	67	»
40	»	58	»	65	»	70	»	»	»	74	»	»	»	61	»	66	»
41	»	57	63	66	63	69	71	72	74	»	»	67	60	62	66	67	75
42	56	»	62	»	64	»	70	»	73	»	73	»	61	»	65	»	»
43	55	58	61	65	65	»	69	73	»	75	72	66	62	63	»	66	76
44	»	59	»	»	»	68	»	»	»	»	»	65	»	64	»	67	»
45	56	»	60	64	66	»	»	72	72	74	»	66	63	63	66	68	75
46	55	»	61	»	67	»	70	»	»	»	71	»	62	»	65	»	74
47	56	58	60	65	»	67	»	73	71	73	72	»	63	62	64	»	73
48	»	59	»	»	»	68	»	72	»	74	»	67	»	»	»	67	»
49	57	58	60	66	66	69	69	73	70	75	71	67	64	63	65	66	74

	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	74	77	68	60	64	63	58	56	56	59	55	53	54	60	60	62	57
1	»	76	69	61	63	64	57	55	55	»	56	54	53	61	61	63	56
2	»	77	»	62	»	65	»	»	»	60	»	55	»	60	»	64	»
3	73	76	70	63	64	»	56	56	54	59	57	56	54	61	»	63	55
4	72	»	69	»	63	»	57	»	55	»	58	»	»	»	60	»	56
5	»	»	68	62	64	64	56	57	54	»	»	57	53	62	61	64	55
6	»	75	»	63	»	63	»	58	»	60	»	58	»	63	»	65	»
7	73	74	67	62	65	64	»	59	55	59	57	57	52	64	60	»	56
8	72	»	66	»	»	»	55	»	56	»	58	»	53	»	59	»	55
9	71	75	»	63	64	63	56	58	57	»	57	»	54	65	60	66	54
10	»	74	»	64	»	62	»	59	»	»	»	58	»	66	»	67	»
11	70	75	65	63	65	61	55	»	58	58	56	59	53	67	59	68	»
12	71	»	64	»	64	»	56	»	59	»	55	»	54	»	»	»	53
13	72	74	65	»	65	60	57	58	58	57	54	60	»	66	58	67	54
14	»	»	»	64	»	61	»	57	»	56	»	59	»	67	»	66	»
15	73	75	66	63	66	62	58	58	»	55	55	58	55	68	»	67	55
16	74	»	65	»	67	»	»	»	59	»	56	»	56	»	59	»	56
17	75	74	66	62	»	63	57	59	60	56	57	57	55	»	60	68	57
18	»	75	»	61	»	64	»	58	»	55	»	»	»	67	»	67	»
19	»	74	65	62	68	65	58	57	61	»	56	58	56	66	59	»	56
20	76	»	66	»	67	»	59	»	60	»	57	»	57	»	»	»	»
21	77	73	»	61	66	»	60	56	59	54	58	57	58	»	»	66	55
22	»	72	»	»	»	64	»	55	»	53	»	56	»	65	»	65	»
23	76	»	65	62	65	65	59	56	58	»	»	»	59	64	58	64	54
24	75	»	64	»	66	»	60	»	»	»	»	»	»	»	59	»	53
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	71	»	63	»	64	»	57	»	52	»	55	»	»	»	63	»
27	76	72	»	62	65	65	59	»	59	53	57	»	58	65	»	64	54
28	»	»	63	»	66	»	»	»	58	»	56	»	»	»	60	»	55
29	77	73	64	63	67	»	60	»	59	52	55	56	59	66	59	65	»
30	»	72	»	64	»	»	»	56	»	53	»	55	»	67	»	64	»
31	78	71	65	»	»	64	59	57	60	52	54	54	»	66	»	63	54
32	79	»	»	»	66	»	58	»	59	»	»	»	58	»	58	»	53
33	78	»	64	65	65	63	57	58	»	53	53	55	59	65	59	62	52
34	»	70	»	66	»	64	»	57	»	54	»	54	»	64	»	»	»
35	77	71	65	67	»	63	56	56	60	53	54	55	58	»	58	61	51
36	76	»	»	»	64	»	55	»	61	»	»	»	57	»	57	»	»
37	»	70	64	66	65	62	56	57	62	»	53	54	58	63	58	62	50
38	»	69	»	67	»	61	»	»	»	54	»	53	»	64	»	61	»
39	75	68	65	66	64	»	55	58	63	55	54	52	59	65	»	60	51
40	76	»	64	»	65	»	56	»	62	»	55	»	»	»	57	»	50
41	77	»	63	65	66	60	57	57	61	56	»	53	60	64	58	59	51
42	»	67	»	66	»	59	»	58	»	55	»	54	»	63	»	58	»
43	78	68	62	65	65	58	»	59	62	54	54	55	59	64	59	»	50
44	77	»	61	»	»	»	56	»	61	»	55	»	58	»	»	»	49
45	78	67	»	66	66	57	55	58	60	53	54	»	59	63	60	59	50
46	»	68	»	65	»	58	»	57	»	»	»	56	»	62	»	58	»
47	79	69	60	64	65	59	56	»	61	54	55	55	»	61	61	»	»
48	78	»	59	»	64	»	55	»	60	»	54	»	60	»	»	»	51
49	77	68	60	64	63	58	56	56	59	55	53	54	60	60	62	57	52

129000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
0	52	47	36	28	27	27	22	28	29	19	13	4	−1	−3	−6	−14	−6
1	51	»	37	27	28	28	21	29	28	20	»	5	−2	−4	−7	−13	»
2	50	»	36	»	29	»	20	»	»	»	12	»	−1	»	−8	»	−5
3	49	46	37	28	30	29	»	28	27	21	11	4	0	−3	»	»	−6
4	»	47	»	29	»	30	»	27	»	»	»	3	»	»	»	−12	»
5	50	46	»	28	31	31	19	26	26	20	10	»	»	−2	−9	−11	−7
6	»	»	38	»	32	»	20	»	25	»	11	»	−1	»	−8	»	−8
7	49	47	»	29	31	32	21	»	26	19	»	4	−2	−3	−9	−12	»
8	»	46	»	30	»	»	»	27	»	»	»	3	»	−4	»	−11	»
9	50	45	37	»	30	31	22	28	»	18	10	2	»	−5	−8	−10	−7
10	49	»	36	»	29	»	23	»	25	»	»	»	−1	»	−9	»	−6
11	48	44	37	31	30	30	»	27	»	17	11	1	−2	−4	−8	»	−5
12	»	43	»	30	»	»	»	26	»	16	»	2	»	−5	»	»	»
13	49	42	36	31	»	29	22	27	26	17	10	1	−1	»	−7	−11	−4
14	48	»	»	»	»	»	23	»	25	»	»	»	−2	»	−6	»	−5
15	»	41	»	32	29	28	24	28	26	»	11	2	−3	−4	−5	−10	−6
16	»	»	»	33	»	29	»	»	»	16	»	3	»	−5	»	−11	»
17	»	42	35	34	28	»	25	29	25	15	10	4	−2	−4	»	−12	−5
18	47	»	34	»	29	»	26	»	26	»	9	»	»	»	−6	»	−6
19	46	»	33	33	28	28	27	28	25	14	»	5	−1	−3	−7	−13	−7
20	»	41	»	32	»	27	»	29	»	»	»	4	»	−4	»	−12	»
21	45	42	32	31	27	28	»	28	24	13	10	5	0	−5	−6	»	−6
22	44	»	33	»	»	»	28	»	23	»	9	»	1	»	−7	»	−7
23	43	43	»	32	26	27	29	29	22	14	8	»	»	−6	−8	−11	−6
24	»	42	»	31	»	26	»	28	»	»	»	6	»	−7	»	−10	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	44	»	32	»	27	»	30	»	21	»	9	»	2	»	»	»	−7
27	43	43	31	»	28	25	29	29	22	15	8	5	»	−6	−9	−11	−6
28	»	»	»	30	»	24	»	28	»	14	»	4	»	−7	»	−10	»
29	44	44	30	31	27	25	30	27	»	13	7	3	1	−6	−10	−11	−7
30	45	»	31	»	26	»	»	»	»	»	6	»	0	»	−11	»	−8
31	46	43	32	30	»	24	31	28	23	12	7	2	−1	»	−12	−10	−9
32	»	42	»	31	»	25	»	27	»	11	»	»	»	−5	»	−9	»
33	»	41	33	»	27	26	30	28	24	»	6	3	−2	−4	−13	−8	»
34	45	»	34	»	26	»	31	»	25	»	5	»	−1	»	−14	»	
35	44	40	33	30	27	»	32	27	24	12	4	4	−2	−5	»	−9	−10
36	»	41	»	»	»	25	»	28	»	13	»	5	»	−6	»	−8	»
37	43	»	32	29	26	24	33	29	»	14	»	4	−1	−7	−15	−7	−11
38	44	»	31	»	»	»	32	»	»	»	3	»	−2	»	−14	»	−10
39	45	40	32	30	25	23	»	28	23	13	2	3	−3	−8	−13	»	−9
40	»	39	»	29	»	24	»	27	»	14	»	2	»	»	»	−8	»
41	46	40	»	28	24	23	31	28	22	13	3	»	−4	−7	−14	−7	−10
42	»	»	31	»	25	»	30	»	21	»	4	»	−5	»	−13	»	−9
43	47	39	30	27	24	22	31	»	20	12	3	1	−6	−8	−12	−8	»
44	»	38	»	26	»	»	»	27	»	13	»	0	»	−9	»	−7	»
45	48	39	29	»	25	21	30	26	21	14	2	1	»	−8	−11	−6	−8
46	47	»	28	»	26	»	29	»	20	»	»	»	−5	»	−12	»	−9
47	48	38	29	25	27	22	28	27	»	13	3	0	−4	−7	−13	−7	−8
48	»	37	»	26	»	21	»	28	»	14	»	−1	»	−6	»	»	»
49	47	36	28	27	27	22	28	29	19	13	4	−1	−3	−6	−14	−6	−7

130000

	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	−7	−10	−6	−5	−6	−15	−11	−3	5	0	−5	−6	−20	−21	−29	−22	−25
1	−6	−11	»	−4	−7	−16	−10	−4	4	1	−6	»	−19	−22	−28	−21	−26
2	»	−10	»	−3	»	−17	»	−3	»	»	»	−7	»	−23	»	−22	»
3	−7	−9	−7	−4	−6	−16	−9	»	3	0	−5	−8	−18	−24	−29	−23	»
4	−6	»	»	»	−5	»	−10	»	4	»	−6	»	−19	»	»	»	−25
5	−5	−8	−6	»	»	−15	−11	−2	3	−1	»	−9	»	−25	−28	−24	−26
6	»	»	»	−3	»	−14	»	−3	»	−2	»	−8	»	−26	»	−23	»
7	−6	−7	−5	−2	−6	−15	−10	−2	»	−3	−5	−9	−20	−25	−29	−22	−27
8	−5	»	−6	»	−5	»	»	»	4	»	−4	»	−19	»	−30	»	−28
9	−6	−8	−7	−3	»	−14	−9	−1	3	−2	−5	−10	−18	»	»	−21	−29
10	»	−7	»	−4	»	−13	»	0	»	−1	»	»	»	−24	»	−20	»
11	»	−6	»	−3	−4	−12	−10	−1	2	»	−6	−11	−17	−23	−29	−19	−28
12	−7	»	−8	»	−3	»	−11	»	3	»	−7	»	−16	»	−30	»	»
13	−6	−7	−7	−4	−2	»	−10	0	2	0	−8	−12	−15	−24	»	−20	»
14	»	−8	»	»	»	−13	»	1	»	1	»	−13	»	−23	»	−19	»
15	−7	»	−6	−3	−3	−14	−11	0	3	0	»	−12	−16	−24	−29	−20	−27
16	−8	»	−7	»	−2	»	−12	»	»	»	−7	»	−17	»	−28	»	−28
17	−9	−9	−8	−4	−3	−13	»	1	2	»	−8	−13	−18	−25	−27	»	−27
18	»	8	»	−3	»	−12	»	2	»	−1	»	−14	»	»	»	−19	»
19	−8	−9	»	−2	−4	−13	−11	3	1	0	−9	»	−19	−24	−28	−20	−28
20	»	»	−7	»	−5	»	−10	»	2	»	−10	»	−18	»	−27	»	−27
21	−7	−8	−8	−3	−6	−14	−11	»	1	»	−9	−13	−19	−25	−28	−21	»
22	»	−7	»	−2	»	»	»	4	»	−1	»	−14	»	−26	»	−22	»
23	−6	−6	−7	»	7	−15	−10	3	0	0	−8	−15	»	−27	−27	−21	−26
24	−5	»	−8	»	−8	»	−9	»	−1	»	»	»	−20	»	−26	»	−25
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−7	»	−1	»	−14	»	4	»	−1	»	−14	»	−26	»	»	»
27	−4	−6	−7	−2	»	−15	−8	3	−2	0	−9	−15	−21	»	−25	−20	−26
28	−5	»	»	»	−9	»	−7	»	−3	»	−8	»	−20	»	−24	»	−27
29	»	−5	−6	−3	−10	−14	−8	4	−4	»	−9	−16	−19	−27	−25	−19	−26
30	»	−6	»	−4	»	»	»	»	»	−1	»	−17	»	−28	»	−20	»
31	−4	−5	−7	−3	−9	»	»	5	−3	»	−8	−18	−18	−29	»	−21	−27
32	−5	»	−8	»	−10	»	−7	»	−2	»	−7	»	»	»	−26	»	»
33	−6	»	−9	−2	−11	−13	−8	6	−1	−2	»	−19	−19	−30	−25	−22	»
34	»	−6	»	−3	»	»	»	5	»	−1	»	−20	»	−29	»	»	»
35	−5	−7	−8	−4	−10	−14	»	»	−2	−2	−8	−21	−20	−28	»	»	−28
36	−6	»	−9	»	»	»	−7	»	−3	»	−7	»	−21	»	−24	»	−27
37	−7	−8	»	−3	−11	−15	−6	4	−4	−3	−6	»	»	−27	−23	»	−28
38	»	−7	»	−4	»	−16	»	5	»	»	»	»	»	−26	»	−23	»
39	−6	−6	−8	−5	−12	−15	5	»	−3	»	»	−22	−22	−27	−24	−24	»
40	−5	»	−9	»	−13	»	−4	»	−4	»	−7	»	−23	»	»	»	−27
41	−6	−7	−8	»	−12	−14	−3	4	»	−4	−6	−21	»	−26	−23	−25	»
42	»	»	»	−4	»	−13	»	»	»	−3	»	−20	»	−27	»	−26	»
43	−7	−6	−7	−5	−13	−12	»	5	»	−4	−5	−19	−22	−28	−24	−27	−28
44	−8	»	−6	»	−14	»	»	»	−3	»	−6	»	−23	»	−23	»	−29
45	−9	−7	−5	−6	»	−11	−4	6	−2	−5	−7	−20	−22	»	−22	−20	−30
46	»	−8	»	»	»	−10	»	7	»	−4	»	»	»	−29	»	−25	»
47	»	−7	»	−7	−13	−11	−3	6	−1	»	−6	−21	−21	−30	−21	−24	−29
48	−10	»	−4	»	−14	»	−2	»	0	»	−5	»	−22	»	−22	»	»
49	−10	−6	−5	−6	−15	−11	3	5	0	−5	−6	−20	−21	−29	−22	−25	−30

131000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500
0	−30	−25	−16	−18	−10	− 8	−10	−14	−18	−17	−11	−6	−2	4	8	11	7
1	−31	−24	»	»	− 9	− 7	−11	−13	−19	−16	−10	−7	»	5	9	10	6
2	−30	»	−17	»	−10	»	−12	»	−18	»	»	»	−1	»	10	»	5
3	−29	−23	−18	−19	− 9	− 6	−11	−14	»	−15	−11	−8	−2	6	11	9	6
4	»	−22	»	−18	»	− 7	»	−15	»	−16	»	−7	»	7	»	»	»
5	−28	−21	−17	−17	»	− 8	−10	−16	−19	−17	−12	−6	−1	»	10	8	7
6	−27	»	»	»	− 8	»	−11	»	−20	»	»	»	0	»	»	»	6
7	»	−20	−18	−18	− 7	− 9	−10	−15	−19	»	−11	−7	1	6	11	7	5
8	»	−21	»	−17	»	− 8	»	»	»	−16	»	−6	»	5	»	8	»
9	−26	−20	−19	−18	− 6	»	−11	−16	−18	−17	−10	−5	2	6	»	9	6
10	−25	»	−18	»	− 7	»	−12	»	−17	»	−11	»	»	»	12	»	5
11	−26	»	−19	−17	− 8	− 7	−13	»	−18	−16	»	−6	1	7	13	10	4
12	»	−19	»	−18	»	− 8	»	−17	»	−15	»	−5	»	8	»	11	»
13	−25	−18	−18	−19	− 9	− 9	»	−18	−19	−14	−12	−4	»	7	12	»	5
14	−24	»	−17	»	»	»	−14	»	−18	»	−11	»	2	»	13	»	6
15	−25	−17	»	−20	− 8	−10	−13	−19	−19	−15	−10	»	3	8	12	12	5
16	»	−18	»	−19	»	−11	»	»	»	»	»	−3	»	7	»	11	»
17	−24	−17	−18	−18	»	−12	−12	»	−18	−14	−11	−4	2	8	11	»	»
18	−25	»	−19	»	− 9	»	−13	»	»	»	−10	»	3	»	»	»	4
19	−24	−18	−20	»	− 8	−13	−12	−18	−19	−15	−11	−3	»	»	12	10	3
20	»	»	»	−17	»	−12	»	−19	»	−14	»	−4	»	7	»	9	»
21*	−23	−17	−19	−16	− 9	−13	−13	−20	»	−15	−12	»	2	6	11	10	2
22	−24	»	−20	»	»	»	»	»	−20	»	»	»	3	»	10	»	3
23	−23	−16	−21	−17	»	−14	−14	−19	−19	»	−11	−3	4	»	11	11	2
24	»	−17	»	−16	»	−13	»	−18	»	−14	»	»	»	7	»	10	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−24	»	−20	»	−10	»	»	»	−18	»	−12	»	3	»	12	»	»
27	−23	−16	−19	−15	−11	»	−13	−19	−19	−13	−11	−2	2	8	»	9	»
28	»	−17	»	»	»	−14	»	−18	»	−14	»	−3	»	9	»	10	»
29	−24	»	−20	»	−12	−13	−12	−19	−20	−13	»	»	3	10	13	9	1
30	−23	»	»	»	−13	»	−13	»	»	»	−10	»	4	»	12	»	2
31	−22	»	−19	−14	−12	−14	»	−18	−19	−14	−11	−2	5	9	11	»	3
32	»	−16	»	−15	»	−15	»	−17	»	−15	»	−3	»	»	»	»	»
33	−21	−17	»	−14	−11	−14	−12	−16	−18	−14	−10	»	6	»	10	10	4
34	»	»	−18	»	−12	»	−13	»	−19	»	− 9	»	5	»	11	»	3
35	−22	−18	−19	−13	−13	−13	−14	»	−18	−13	− 8	»	6	10	10	11	»
36	»	−17	»	−14	»	»	»	−15	»	−12	»	−4	»	9	»	10	»
37	−21	−18	−18	»	−12	−14	−15	−16	−17	−13	− 7	−3	»	8	9	9	4
38	−22	»	−17	»	−11	»	−14	»	−18	»	»	»	5	»	10	»	5
39	−23	−17	−16	−15	−10	−15	−13	−17	»	−12	− 6	−4	6	9	11	8	6
40	»	−18	»	−14	»	−16	»	−18	»	−11	»	−3	»	10	»	»	»
41	−24	−17	−17	»	»	−15	−14	−19	−17	−10	− 5	−2	5	»	10	9	3
42	−23	»	»	»	− 9	»	−13	»	−16	»	− 6	»	4	»	11	»	2
43	»	−16	−18	−13	− 8	−14	»	−18	−17	»	− 5	−3	5	9	12	8	3
44	»	−17	»	−12	»	−13	»	»	»	−11	»	−2	»	10	»	9	»
45	−24	−16	−19	−13	− 7	»	−12	−19	−16	−12	− 4	−3	4	9	»	»	4
46	−25	»	−18	»	− 8	»	−13	»	−17	»	− 5	»	»	»	13	»	5
47	−24	»	−17	−12	− 7	−12	−14	−20	−16	−11	»	−4	3	8	12	8	4
48	»	−17	»	−11	»	−11	»	−19	»	−10	»	−3	»	9	»	7	»
49	−25	−16	−18	−10	− 8	−10	−14	−18	−17	−11	− 6	−2	4	8	11	7	5

132000

	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	5	1	−5	4	2	−6	−11	−8	−10	2	−4	6	8	7	1	0	−5
1	6	2	»	3	»	−5	−10	−7	−9	1	−3	7	7	»	»	1	−6
2	»	1	»	4	»	−4	»	−6	»	0	»	»	»	»	»	0	»
3	»	2	−4	5	3	−5	−9	−5	−8	»	−4	6	»	8	»	1	−5
4	7	»	−3	»	4	»	−8	»	−9	»	−3	»	6	»	0	»	»
5	6	3	−2	6	3	»	−7	−4	−8	−1	»	5	7	7	»	0	−6
6	»	2	»	»	»	−6	»	−5	»	»	»	4	»	8	»	−1	»
7	7	»	»	5	2	−5	−6	−4	»	0	»	3	6	7	−1	−2	−5
8	6	»	−3	»	3	»	−5	»	»	»	−2	»	»	»	−2	»	−4
9	7	3	−2	4	2	−4	»	−5	−9	−1	−3	2	7	8	−1	»	−3
10	»	2	»	3	»	»	»	−4	»	0	»	3	»	»	»	−1	»
11	6	1	»	2	»	−5	−6	−5	−8	»	−2	»	8	7	0	−2	−4
12	»	»	−1	»	3	»	−7	»	−7	»	−3	»	7	»	−1	»	»
13	5	0	»	1	2	−6	−6	»	−6	1	−2	2	8	8	−2	−3	»
14	»	»	»	0	»	»	»	−4	»	0	»	3	»	9	»	−2	»
15	»	−1	−2	»	»	−7	−5	−5	−5	1	−3	4	»	8	−3	−3	−5
16	4	»	−3	»	1	»	−6	»	−4	»	»	»	9	»	−4	»	−4
17	5	−2	−2	1	0	−8	−5	−6	»	2	−2	3	8	9	−3	−2	−5
18	»	−1	»	2	»	−9	»	−7	»	1	»	2	»	10	»	»	»
19	6	−2	−1	1	»	−8	−4	−6	−5	0	−1	3	7	»	−2	−3	−4
20	7	»	»	»	−1	»	−5	»	−6	»	0	»	6	»	−1	»	−5
21	»	−1	−2	»	−2	−7	−6	−5	−7	»	−1	4	5	11	0	−4	−6
22	»	−2	»	0	»	−8	»	»	»	1	»	3	»	10	»	−3	»
23	6	−1	−1	1	−1	»	−5	−6	−6	»	»	4	4	9	»	−2	−5
24	5	»	0	»	−2	»	−4	»	−5	»	0	»	»	»	1	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	0	»	»	»	−7	»	−5	»	0	»	»	»	8	»	−3	»
27	4	−1	−1	0	−3	−6	»	−6	−4	−1	1	5	5	9	0	»	−4
28	5	»	0	»	»	»	−5	»	−3	»	0	»	6	»	»	»	−5
29	6	−2	»	1	−4	−5	−6	−7	−2	0	1	»	7	8	−1	−4	−6
30	»	−3	»	2	»	−6	»	−6	»	»	»	6	»	9	»	−5	»
31	5	−2	1	1	−3	−7	−5	»	−1	1	2	7	6	8	0	−6	»
32	4	»	2	»	−4	»	−4	»	−2	»	3	»	7	»	»	»	−5
33	3	−1	3	»	−5	−6	−3	−7	−1	0	4	8	»	7	−1	−5	−6
34	»	»	»	2	»	−7	»	−6	»	−1	»	9	»	6	»	−6	»
35	4	−2	2	3	−4	−8	−4	−5	»	0	5	10	8	5	−2	−5	−5
36	3	»	3	»	−5	»	»	»	0	»	4	»	7	»	−1	»	−6
37	4	−3	2	4	»	−9	−5	−4	1	»	5	9	6	»	−2	−4	−5
38	»	−2	»	3	»	−10	»	−5	»	−1	»	»	»	4	»	−3	»
39	»	−3	1	4	−6	−11	−4	−6	»	»	6	8	5	5	−1	−4	−4
40	3	»	2	»	−7	»	»	»	2	»	7	»	4	»	−2	»	»
41	2	−4	1	5	−6	»	−5	−7	3	−2	8	7	5	4	»	−5	−3
42	»	−5	»	»	»	−10	»	−8	»	−1	»	8	»	3	»	−6	»
43	1	»	2	4	−7	−9	−6	−7	4	0	»	7	6	2	−1	−5	−2
44	0	»	3	»	−6	»	−7	»	»	»	9	»	5	»	0	»	−3
45	1	−6	4	3	−7	−10	»	−8	5	−1	8	8	6	3	1	»	−2
46	»	−5	»	2	»	−9	»	−9	»	−2	»	7	»	»	»	−4	»
47	2	−4	»	3	−8	−10	−6	−10	4	−3	7	»	7	2	2	−5	−1
48	»	»	5	»	−7	»	−7	»	3	»	»	»	8	»	1	»	»
49	1	−5	4	2	−6	−11	−8	−10	2	−4	6	8	7	1	0	−5	−1

133000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200
0	− 1	− 7	− 8	−16	−15	−24	−27	−28	−36	−29	−36	−43	−46	−47	−40	−40	−42
1	0	− 6	− 9	−15	−16	»	−28	−29	−35	−30	−35	−42	−47	−48	»	−39	−43
2	− 1	»	−10	»	−17	»	−27	»	−36	»	−34	»	»	»	−41	»	−42
3	− 2	»	−11	−16	−16	−23	−26	−28	−35	−29	»	−43	»	−47	−42	−40	−43
4	»	− 7	»	−17	»	−24	»	−27	»	−30	»	−44	»	−48	»	−41	»
5	− 3	− 8	−10	−18	−17	−25	»	−28	−34	−29	−35	−43	−48	−47	−43	»	−42
6	− 4	»	− 9	»	»	»	−27	»	−33	»	−34	»	−49	»	−42	»	»
7	− 3	− 9	»	−17	−18	−26	−28	−29	−32	−30	−33	»	−48	−48	−43	−42	−41
8	»	−10	»	−18	»	−27	»	−30	»	»	»	−44	»	−47	»	−43	»
9	− 4	−11	− 8	−19	−17	−26	−29	»	−31	−31	−34	−43	−47	−48	−44	−42	»
10	− 5	»	− 9	»	−16	»	−28	»	−32	»	−35	»	−46	»	»	»	−42
11	− 4	−12	−10	»	−17	−27	−29	−31	−31	−32	−36	−44	»	−47	−43	−41	−41
12	»	»	»	−20	»	−28	»	−32	»	−31	»	−45	»	−46	»	−42	»
13	− 3	−11	− 9	−19	»	−27	−28	−33	»	−32	−37	−44	−47	−45	−42	−43	−42
14	− 2	»	−10	»	−16	»	»	»	−32	»	−36	»	−46	»	−41	»	−43
15	− 3	−12	−11	−18	»	»	−27	−32	−33	−31	−37	−43	−47	»	−42	−42	−42
16	»	−13	»	−17	»	−28	»	−31	»	−32	»	»	»	−44	»	−43	»
17	»	−12	−12	−16	−17	−29	−26	−30	−34	»	−36	−44	−48	−43	−43	−42	−41
18	− 2	»	−13	»	»	»	−25	»	−33	»	−37	»	−47	»	−44	»	»
19	− 1	−13	−14	−15	−18	»	−26	−31	−32	−33	−36	−45	−46	−44	»	−43	−40
20	»	−12	»	»	»	−30	»	−32	»	−34	»	−46	»	−43	»	−44	»
21	− 2	»	−13	−14	−17	−31	−27	−31	−33	−35	»	−47	−47	−42	−45	−45	»
22	− 3	»	−12	»	−18	»	−26	»	»	»	−37	»	−48	»	−44	»	−41
23	− 4	−11	−13	−13	−19	−30	»	−30	−32	−36	−38	−46	−47	−43	−43	»	−40
24	»	−12	»	−14	»	−29	»	−31	»	−37	»	−47	»	»	»	−44	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	−12	»	−20	»	−25	»	−31	»	−37	»	−48	»	−42	»	−41
27	− 3	−11	−13	−13	−21	−28	−26	»	−30	−36	−38	−48	−47	−44	−43	−43	»
28	»	−10	»	−14	»	»	»	−32	»	»	»	−47	»	−43	»	−44	»
29	− 4	− 9	−14	»	−20	−29	−27	»	−29	−35	−39	»	»	−42	−42	−45	»
30	− 5	»	−13	»	−19	»	−26	»	−28	»	»	»	−46	»	−43	»	−40
31	− 6	− 8	−14	−13	−20	−30	−25	−31	»	−36	−38	−48	−45	−43	−44	−44	»
32	»	− 9	»	−12	»	−29	»	−32	»	−37	»	−47	»	−42	»	»	»
33	− 5	− 8	−15	−13	»	−28	−26	−33	−29	−36	−39	−46	−46	»	»	−45	−41
34	− 6	»	»	»	−19	»	−25	»	»	»	−38	»	−47	»	−45	»	−40
35	»	− 7	−16	−14	−20	−27	−26	−32	−30	»	−39	−45	»	−43	−44	−44	−39
36	»	− 6	»	−13	»	−26	»	»	»	−35	»	»	»	−42	»	−43	»
37	− 7	»	−15	−12	−21	»	»	−33	−29	−36	»	−46	−46	−43	»	−44	−40
38	− 8	»	−16	»	−22	»	−27	»	−30	»	−40	»	»	»	−43	»	−39
39	− 9	»	−15	−13	−21	−27	−28	−32	»	−35	»	−47	−47	−42	−42	−45	−40
40	»	− 7	»	−14	»	−26	»	»	»	−34	»	−46	»	−43	»	−44	»
41	−10	− 8	−16	−15	−22	−27	»	−33	−29	−35	−39	−45	−48	−42	−41	»	−41
42	− 9	»	−15	»	»	»	−29	»	−30	»	−40	»	−49	»	−40	»	−40
43	− 8	− 7	»	−14	»	−28	−28	»	−29	−36	−39	»	−48	−41	−39	−43	−39
44	»	− 8	»	»	»	−27	»	−34	»	»	»	−46	»	−42	»	−42	»
45	− 7	»	»	−15	−21	−26	−29	»	»	−37	−40	−47	−47	−41	−40	−43	»
46	− 8	»	−16	»	−22	»	−28	»	−28	»	−41	»	−46	»	»	»	−40
47	»	− 7	−17	»	−23	−27	−27	−35	−29	−38	−42	−46	»	−42	−41	−44	−39
48	»	»	»	−16	»	−28	»	−36	»	−37	»	−45	»	−41	»	−43	»
49	− 7	− 8	−16	−15	−24	−27	−28	−36	−29	−36	−43	−46	−47	−40	−40	−42	−38

134000

	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	-38	-45	-45	-47	-45	-40	-40	-34	-34	-39	-40	-31	-35	-24	- 9	-15	-10
1	-37	-46	-46	-48	-46	-39	»	-35	-35	-40	-39	-32	-34	-23	-10	»	- 9
2	»	-45	»	-47	»	-38	»	-34	»	-39	»	-33	»	»	»	-16	»
3	-38	-46	»	-48	-45	-37	-39	-35	-34	-40	-38	»	-35	-22	- 9	-15	-10
4	»	»	-45	»	-46	»	-40	»	-35	»	-37	»	-34	»	- 8	»	-11
5	-39	-47	-46	-47	-47	-36	-39	»	-34	»	-36	-34	-35	-21	- 9	-14	»
6	»	-46	»	-46	»	»	»	-36	»	-39	»	-33	»	-20	»	-13	»
7	-40	-45	-45	»	-46	-37	-38	-37	-35	-40	-35	»	»	-19	- 8	-14	-12
8	-39	»	-46	»	-47	»	-39	»	-36	»	»	»	-34	»	- 9	»	-13
9	-38	-44	-45	-45	-46	-38	-40	-36	»	-41	-34	-32	-35	-18	-10	-13	-14
10	»	-45	»	-44	»	»	»	-35	»	-40	»	-33	»	-17	»	»	»
11	-39	-46	-44	-43	»	-37	-39	-34	-37	-41	-33	-34	-36	»	- 9	-12	-13
12	-40	»	»	»	-47	»	-38	»	-38	»	-34	»	-35	»	- 8	»	-14
13	»	-45	-43	-44	»	-36	»	-33	-37	»	-35	-35	-34	-16	- 9	-11	-13
14	»	-44	»	-45	»	-37	»	»	»	-42	»	-36	»	-15	»	-12	»
15	-41	-43	-42	-44	-46	»	-37	-32	-38	-43	-36	-35	-35	-14	»	»	-12
16	-42	»	-41	»	-45	»	-36	»	-37	»	-35	»	»	»	»	»	-11
17	-41	»	-40	-45	-46	-38	-35	-33	-36	-44	»	-34	-34	»	-10	»	-10
18	»	-44	»	-46	»	»	»	-32	»	-43	»	-35	»	-13	»	-13	»
19	-42	-45	-39	-45	-47	-39	»	-31	-37	»	-36	»	-33	-14	-11	»	- 9
20	-43	»	-40	»	»	»	»	»	-38	»	»	»	-32	»	-12	»	-10
21	-44	-46	»	-44	-46	-38	-36	-30	-39	»	-35	»	-31	-13	-11	-12	-11
22	»	-45	»	-43	»	-39	»	-31	»	»	»	-36	»	-14	»	-11	»
23	-45	-46	-39	-42	-45	-38	-35	»	-40	-44	-34	-35	-32	-13	-10	-10	»
24	-46	»	-40	»	-46	»	»	»	-41	»	-35	»	-31	»	»	»	-12
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	-41	»	-37	»	-32	»	-43	»	»	»	-14	»	-11	»
27	-47	-47	-41	»	-45	-38	-34	-33	»	-42	-36	-36	-32	-13	- 9	-10	-13
28	-46	»	»	»	-44	»	»	»	-42	»	-35	»	-31	»	-10	»	-12
29	-47	»	-42	-42	»	-39	»	-32	»	-41	-36	-35	-30	»	-11	-11	-11
30	»	-46	»	-41	»	-38	»	-33	»	-40	»	»	»	-12	»	-10	»
31	»	-45	-41	-42	-45	-37	-35	-34	-41	»	-37	-36	-31	»	-12	-11	-12
32	-48	»	-42	»	-46	»	-34	»	-40	»	-36	»	-30	»	-13	»	»
33	-49	-44	-43	-43	-45	»	-35	-35	-41	-41	-37	-37	-29	-11	»	-12	-11
34	»	-45	»	»	»	-38	»	-36	»	-40	»	-38	»	-12	»	-11	»
35	-48	»	-42	-42	-44	-39	-34	-35	-40	-41	»	-37	-28	-13	-14	-12	-10
36	-47	»	-43	»	-45	»	-35	»	»	»	-38	»	-27	»	-13	»	- 9
37	-46	-40	-44	-43	-44	-38	»	-36	-39	-40	-37	»	-28	-12	-12	»	-10
38	»	-45	»	-44	»	-39	»	-37	»	-41	»	-36	»	»	»	-13	»
39	-45	-44	»	-45	-43	-40	-36	-36	-38	-40	-36	»	-29	-11	-13	-14	-11
40	»	»	-45	»	-42	»	-37	»	-37	»	-35	»	-28	»	-14	»	-12
41	-44	»	-46	-46	-41	-41	-36	»	-38	-39	-34	-35	-27	-10	-15	-13	»
42	»	»	»	-45	»	»	»	-35	»	-38	»	-36	»	-11	»	-12	»
43	-45	-45	-47	»	-42	-42	-35	-34	-39	-39	-33	-37	»	-10	-16	-11	-13
44	-46	»	-46	»	-41	»	-34	»	-38	»	»	»	-26	»	-15	»	-14
45	-47	-44	-47	-46	-40	-41	-33	-33	»	-40	-32	-38	-27	- 9	-16	-10	-15
46	»	-45	»	-45	»	-42	»	-34	»	-41	»	-37	»	- 8	»	»	»
47	-46	-44	-48	-46	»	-41	-34	-33	-39	-40	-33	-36	-26	»	-15	-11	-14
48	-45	»	»	»	-39	»	-35	»	-40	»	-32	»	-25	»	-14	»	-13
49	-45	-45	-47	-45	-40	-40	-34	-34	-39	-40	-31	-35	-24	- 9	-15	-10	-12

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0	−12	−9	−21	−23	−28	−27	−23	−15	−11	−7	−14	−7	−8	−8	−3	0	0
1	−13	−10	−20	−24	−29	−28	−24	»	−10	−6	−13	−6	»	−7	−2	−1	»
2	−14	»	−21	»	−28	»	−23	»	−9	»	−12	»	−9	»	»	»	−1
3	−13	−11	−20	»	−27	−29	−24	−16	−10	−5	»	»	»	−8	−1	−2	0
4	»	»	»	−25	»	−28	»	−17	»	»	»	−7	»	−7	»	−1	»
5	−12	−12	−19	−26	−26	»	−23	−16	»	−6	−11	−6	−10	−6	−2	−2	1
6	−13	»	−18	»	−25	»	»	»	−11	»	−10	»	−11	»	−3	»	2
7	−12	−13	−19	−27	»	−29	»	−15	−12	−5	−11	»	−12	»	−4	−3	1
8	»	−12	»	−26	»	»	»	−14	»	−6	»	»	»	−5	»	−2	»
9	»	−13	−18	−25	»	−30	−24	−13	−11	»	−12	−5	−13	−4	−3	−1	0
10	−13	»	−19	»	»	»	−25	»	−12	»	−13	»	−12	»	−4	»	»
11	−12	−14	»	−26	−24	»	−24	−14	−13	−7	−12	−4	−11	−3	»	0	1
12	»	»	»	»	»	−29	»	−13	»	−6	»	−5	»	−4	»	»	»
13	»	»	−20	−27	−23	−30	−23	−12	−14	−7	»	−4	−10	−5	−3	1	2
14	−11	»	−21	»	−22	»	−24	»	»	»	−11	»	−11	»	−4	»	1
15	−12	−13	−22	−28	−21	−29	»	−11	−13	−8	−10	−5	−10	−4	−5	»	»
16	»	−12	»	−27	»	»	»	−10	»	−9	»	−6	»	»	»	2	»
17	−11	−11	»	−26	−20	−28	−25	−9	−12	−8	−9	»	−11	−5	−4	1	0
18	»	»	−23	»	−21	»	−24	»	−13	»	−8	»	−12	»	−3	»	1
19	−10	−12	−24	−27	−20	−29	−23	»	−14	−7	−9	−7	−13	−6	−2	2	»
20	»	−13	»	−26	»	»	»	−10	»	−8	»	»	»	−7	»	1	»
21	−9	−14	−23	»	−19	−30	−22	−11	−15	−9	−8	−6	»	−8	−1	2	0
22	−8	»	−24	»	−18	»	−21	»	−14	»	»	»	−14	»	0	»	1
23	−9	−13	−23	−27	−19	−31	−20	−10	»	−8	−7	»	−13	−7	−1	1	0
24	»	−14	»	−28	»	−30	»	−11	»	−7	»	»	»	−8	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−10	»	»	»	−20	»	−19	»	−13	»	−8	»	−12	»	0	»	−1
27	»	−15	−24	−27	−21	−29	−18	−10	−12	»	−7	−7	−11	−9	1	2	−2
28	»	−16	»	−26	»	−28	»	»	»	−6	»	−6	»	−8	»	1	»
29	−11	−15	−25	−25	−20	»	−17	−9	−11	−5	−6	−5	−12	−7	»	2	−1
30	−12	»	−24	»	−21	»	−16	»	−10	»	−7	»	»	»	2	»	0
31	−11	»	−23	−24	−20	−27	»	−10	−9	−6	»	−6	−13	−6	3	1	−1
32	»	−16	»	−23	»	−28	»	−11	»	−7	»	−7	»	−5	»	0	»
33	−10	−17	−22	−24	−21	−27	»	−10	−8	−8	−8	−8	−14	−4	4	»	0
34	−11	»	−23	»	»	»	−15	»	−9	»	−7	»	−13	»	3	»	1
35	−12	−18	»	−25	−22	»	−14	−11	−10	−9	−6	»	−12	−5	4	−1	2
36	»	»	»	−26	»	−26	»	−12	»	»	»	−7	»	−6	»	−2	»
37	−11	−17	−22	−27	−23	−27	−15	»	−11	−10	−5	−8	−11	−7	3	−3	»
38	−12	»	−21	»	−22	»	−14	»	−10	»	−4	»	−10	»	»	»	3
39	−13	»	−22	»	−23	−26	−15	−13	−11	−11	−5	»	»	−8	2	−2	2
40	»	»	»	−26	»	−25	»	−12	»	−10	»	−9	»	−7	»	−3	»
41	−12	−18	−23	−27	−24	−24	−14	−11	»	−11	−4	−8	−11	−6	1	−2	3
42	−11	»	−22	»	−25	»	»	»	−10	»	−5	»	−10	»	2	»	2
43	−10	−19	−23	−28	»	−25	−15	−12	−9	−12	−6	»	−9	»	1	−1	1
44	»	−20	»	−29	»	−24	»	−11	»	−13	»	»	»	»	»	0	»
45	»	−19	−22	−28	−26	−23	−16	−12	−10	»	−7	−7	−8	−5	0	»	0
46	−9	»	−21	»	−27	»	−17	»	−9	»	−8	»	−9	»	−1	»	»
47	−10	−20	−22	−27	−26	»	−16	−11	−8	−14	−7	−8	−8	−4	»	»	−1
48	»	−21	»	»	»	−22	»	−10	»	−15	»	−7	»	−3	»	−1	»
49	−9	−21	−23	−28	−27	−23	−15	−11	−7	−14	−7	−8	−8	−3	0	0	0

135000

	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0	0	7	3	11	3	4	8	6	5	10	3	−2	4	5	−2	−6	−7
1	−1	8	4	10	2	5	9	5	»	»	4	»	5	4	−3	−7	−6
2	»	7	»	9	»	6	»	6	»	9	»	−1	»	5	»	»	»
3	−2	6	5	10	»	7	10	7	4	8	3	0	6	»	−2	−6	−7
4	−1	»	»	»	3	»	9	»	5	»	4	»	7	»	−1	»	−8
5	»	7	6	9	4	6	10	8	6	»	5	−1	8	4	−2	−5	−9
6	»	6	»	8	»	5	»	»	»	7	»	−2	»	5	»	−4	»
7	0	5	5	9	»	»	9	9	7	6	4	−3	9	4	»	»	−10
8	1	»	6	»	5	»	8	»	8	»	3	»	»	»	−1	»	−11
9	2	»	5	8	6	4	9	10	7	5	»	−4	8	3	0	−3	»
10	»	6	»	9	»	5	»	11	»	6	»	−3	»	4	»	−2	»
11	3	7	6	8	5	4	»	12	8	7	2	−4	7	5	−1	»	−10
12	4	»	7	»	»	»	10	»	7	»	3	»	8	»	−2	»	»
13	»	6	»	7	6	3	11	13	8	8	2	»	9	4	−3	−1	−9
15	»	»	»	8	»	4	»	12	»	»	»	−3	»	5	»	−2	»
15	5	5	8	7	5	5	10	»	9	9	3	−2	8	4	−4	−1	»
16	6	»	7	»	4	»	9	»	8	»	4	»	9	»	»	»	−8
17	5	4	8	»	5	6	8	11	7	10	3	−1	»	3	−3	−2	−7
18	»	»	»	8	»	7	»	12	»	11	»	0	»	4	»	−1	»
19	6	3	7	7	4	8	7	11	»	12	2	−1	8	5	−4	−2	−6
20	5	»	8	»	5	»	»	»	6	»	1	»	9	»	−5	»	−7
21	6	4	9	6	»	7	6	10	7	11	0	0	8	»	−6	−3	−8
22	»	5	»	5	»	8	»	9	»	12	»	»	»	6	»	−4	»
23	»	6	10	4	4	7	5	10	6	»	−1	1	9	5	−5	−3	−7
24	7	»	11	»	5	»	4	»	5	»	0	»	8	»	−4	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	5	»	»	»	8	»	9	»	11	»	2	»	4	»	−4	»
27	»	»	10	5	6	9	3	8	4	10	»	1	9	3	−5	−5	−6
28	8	»	11	»	7	»	»	»	»	»	−1	»	10	»	−6	»	−7
29	7	4	10	4	8	10	»	7	5	9	−2	2	9	4	−7	»	»
30	»	3	»	3	»	9	»	6	»	10	»	1	»	»	»	»	»
31	6	»	»	2	7	10	2	7	6	9	−1	»	8	5	»	−6	−8
32	»	»	11	»	6	»	3	»	7	»	0	»	9	»	−8	»	−7
33	7	4	12	3	7	11	2	»	8	8	1	0	»	4	−7	−7	»
34	»	3	»	4	»	»	»	6	»	7	»	»	»	3	»	−6	»
35	6	2	13	»	6	12	3	7	9	6	»	1	»	4	−8	−7	−8
36	7	»	12	»	5	»	4	»	8	»	»	»	8	»	−7	»	−9
37	8	1	11	5	6	11	5	6	»	7	0	2	9	3	−8	−6	−10
38	»	0	»	6	»	12	»	»	»	6	»	»	»	4	»	»	»
39	7	1	10	7	»	11	»	5	7	5	−1	1	8	»	−7	−5	−9
40	6	»	»	»	7	»	6	»	8	»	0	»	7	»	−6	»	−8
41	»	2	11	6	»	10	5	6	7	»	1	»	8	»	−5	−4	−7
42	»	3	»	»	»	9	»	»	»	4	»	2	»	3	»	−5	»
43	7	2	»	7	6	»	6	5	8	3	0	3	7	2	»	−6	−8
44	8	»	12	»	5	»	5	»	9	»	−1	»	»	»	−4	»	−9
45	»	»	11	6	4	8	6	6	8	2	»	4	6	1	−5	−7	−8
46	»	3	»	5	»	7	»	7	»	3	»	3	»	0	»	−6	»
47	7	4	12	4	3	»	»	6	9	4	−2	4	7	−1	−6	»	−7
48	8	»	11	»	»	»	5	»	10	»	−1	»	6	»	−7	»	−6
49	7	3	11	3	4	8	6	5	10	3	−2	4	5	−2	−6	−7	−7

136000

	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-7	-13	-9	-12	-8	-10	-15	-20	-21	-15	-17	-18	-28	-32	-31	-36	-36
1	»	-14	-8	-11	-7	-11	-16	-19	-20	»	-16	-19	-29	-33	-32	-37	-37
2	-6	»	-9	»	-6	»	-17	»	-19	»	-17	»	-30	»	-33	»	»
3	-5	-13	-10	»	-5	»	-16	-18	-20	-16	-18	-18	-31	-34	»	-36	-38
4	»	-12	»	»	»	-12	»	-19	»	-17	»	-19	»	-33	»	-35	»
5	-6	»	-9	-10	-6	-11	-17	-18	-19	-16	»	-18	-30	-32	-34	-36	-37
6	-7	»	-10	»	-7	»	-16	»	»	»	-17	»	-31	»	-35	»	-38
7	-6	-11	-11	-9	-6	-12	»	-19	-20	-17	-16	-19	-32	-31	-34	»	-39
8	»	-12	»	-8	»	-13	»	-18	»	-18	»	-20	»	»	»	-35	»
9	-5	-13	»	-7	-5	-14	-15	-17	-19	-17	-17	»	-33	-32	-33	-36	»
10	»	»	-12	»	-6	»	-16	»	-18	»	-16	»	-32	»	-34	»	-38
11	-6	-12	-13	-6	-5	-13	-17	»	-19	-18	-17	-21	-31	-33	-35	-37	»
12	»	-11	»	-7	»	»	»	-18	»	-19	»	-22	»	»	»	-36	»
13	-7	-12	-14	»	-6	-12	-18	-19	-18	-20	-16	-21	»	-34	-34	»	-37
14	-6	»	-13	»	-7	»	-17	»	»	»	»	»	-30	»	»	»	-38
15	-7	-13	-14	-8	-8	-11	-18	-20	»	-19	-17	-22	-29	»	-33	-35	-39
16	»	-12	»	-9	»	-12	»	-21	»	-18	»	-23	»	-35	»	»	»
17	-6	-11	-13	-8	»	-13	-17	-20	-19	-17	-16	»	-30	»	-32	-34	-38
18	-7	»	»	»	-9	»	-16	»	-18	»	»	»	-29	»	-31	»	-39
19	»	-10	-12	-9	-8	-14	»	-19	-17	»	-17	-24	-30	-34	-32	-33	-40
20	»	-11	»	-10	»	-13	»	»	»	-18	»	-23	»	-33	»	-32	»
21	-6	-10	-11	-11	-7	»	-15	»	-18	-19	-16	-24	-31	-34	»	-31	-41
22	-7	»	-10	»	-8	»	»	»	-17	»	-15	»	»	»	-31	»	-40
23	-6	»	-11	-10	-7	»	-16	-20	-18	-20	»	-25	-30	-33	-32	-32	-39
24	»	-11	»	-9	»	-14	»	-19	»	-21	»	-26	»	-32	»	-33	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-7	»	»	»	»	»	-17	»	-17	»	-16	»	-29	»	-31	»	-38
27	-6	»	»	-10	-8	-15	-16	-20	-16	-22	-17	»	-28	-33	-32	-34	-37
28	»	-10	»	-9	»	-16	»	-19	»	»	»	-27	»	-32	»	-35	»
29	-7	-9	-12	-10	-7	-15	-15	»	-15	-23	-18	-28	-29	-31	-31	-34	»
30	»	»	-13	»	-6	»	-16	»	-16	»	-19	»	-28	»	»	»	-36
31	-8	-8	-12	»	-5	-16	-15	-18	-15	-22	-18	-27	»	-32	-32	-35	-35
32	»	»	»	-9	»	-15	»	-19	»	-21	»	-26	»	»	»	-36	»
33	-7	»	-13	-10	-6	-14	-16	-20	»	-20	-19	»	-29	-33	-33	-35	-36
34	-8	»	-12	»	-7	»	»	»	-14	»	-20	»	-30	»	-34	»	-37
35	-9	-9	-13	-9	»	-15	-17	-19	-15	-21	-19	-25	-31	»	-33	-36	-38
36	»	-8	»	-8	»	-14	»	-20	»	-22	»	»	»	-34	»	-37	»
37	»	-9	-14	-7	-8	-13	-18	-19	-16	»	-20	-24	-30	-33	-34	-38	-37
38	-10	»	-13	»	-9	»	-19	»	-17	»	-19	»	-29	»	-35	»	»
39	-11	-8	-14	-6	-8	»	-20	-20	-16	-21	-18	-25	-30	-32	»	-37	-36
40	»	-7	»	»	»	-12	»	-21	»	-20	»	-24	»	-33	»	-38	»
41	-12	»	-13	-5	-9	-13	-19	-22	-15	-19	»	-25	-29	-32	-36	-37	-37
42	-11	»	-12	»	-10	»	-18	»	»	»	-17	»	-30	»	-35	»	-38
43	-10	-8	-11	-4	-11	-14	»	-23	-14	-20	-18	-26	-29	-31	-34	»	-39
44	»	-9	»	-5	»	-15	»	-24	»	-19	»	-27	»	»	»	-38	»
45	-11	-8	»	-6	»	-14	-19	-23	-13	-18	-17	»	-30	-30	-35	-39	-38
46	»	»	-12	»	-10	»	-20	»	»	»	-18	»	-31	»	-36	»	-39
47	-12	-9	-11	-7	-11	»	-19	»	-14	-17	-19	-28	-32	-31	-37	-38	»
48	»	-8	»	-8	»	»	»	-22	»	-18	»	-27	»	-32	»	-37	»
49	-13	-9	-12	-8	-10	-15	-20	-21	-15	-17	-18	-28	-32	-31	-36	-36	-40

137000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	-40	-35	-46	-47	-50	-57	-59	-59	-49	-49	-56	-62	-65	-66	-67	-74	-82
1	-41	»	-47	-46	»	-56	-60	-58	-48	-48	»	-63	-66	-65	-66	-73	-81
2	»	-34	»	-47	»	-57	»	-57	»	»	»	-62	»	»	»	-72	»
3	-40	-35	-48	-48	-49	-56	»	-56	»	-49	-57	-61	-65	-66	-67	»	-82
4	-39	»	-49	»	»	»	-59	»	-47	»	-58	»	-66	»	-68	»	-81
5	-40	-36	»	-47	-50	-57	»	-55	-48	-50	-57	»	-67	-67	-69	-71	-82
6	»	-37	»	»	»	»	»	-56	»	»	»	-62	»	-68	»	-72	»
7	-41	-36	-48	-46	»	-56	-58	»	-49	-49	-58	-63	-66	-69	-68	-71	»
8	-40	»	-47	»	-51	»	»	»	-48	»	-57	»	-65	»	»	»	-81
9	-39	-37	»	»	-52	-55	-59	-55	»	-50	-58	-64	»	-70	-69	-72	-82
10	»	»	»	-47	»	-56	»	-54	»	-51	»	-65	»	-71	»	-73	»
11	»	-38	-46	-48	-53	-57	-58	»	»	-52	-57	-64	-64	-70	-68	-74	-81
12	-40	»	-45	»	-54	»	»	»	-47	»	-56	»	-65	»	-69	»	-80
13	-39	-39	-44	-49	»	-56	-59	-55	-46	-51	-57	-63	-64	»	-70	-75	-79
14	»	-40	»	-50	»	-55	»	-54	»	-52	»	»	»	-71	»	-76	»
15	»	-41	-45	-49	-55	-56	-58	-55	-47	»	-58	-64	-65	-72	-71	-77	-80
16	-40	»	-46	»	-56	»	-57	»	-48	»	-59	»	-64	»	-70	»	»
17	-39	-40	-45	-50	-57	»	-56	-54	-47	-53	-58	-65	-63	-71	»	-78	-79
18	»	-41	»	»	»	-57	»	-55	»	-54	»	-64	»	-70	»	-77	»
19	-38	»	-46	»	-58	-56	-57	-54	-46	-55	»	-65	-62	-69	-71	-76	-78
20	-37	»	-47	»	-59	»	-58	»	»	»	-59	»	-63	»	-72	»	-77
21	-36	»	-46	-51	-58	-55	»	-53	-47	-54	-58	-64	-62	-70	-71	»	-78
22	»	-42	»	-50	»	-56	»	-52	»	-53	»	-63	»	»	»	-75	»
23	-35	-41	»	-49	-59	-55	-59	-51	-46	-54	-57	»	-63	-69	-72	»	-79
24	»	»	-47	»	-58	»	-58	»	-47	»	-58	»	-62	»	-71	»	-78
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-42	»	»	»	»	»	-52	»	-53	»	-64	»	-68	»	-74	»
27	-36	-43	-48	»	-57	-56	-57	-51	-48	-54	-59	-63	»	-67	-70	-75	-79
28	-37	»	-47	»	-56	»	-56	»	-47	»	»	»	-61	»	-71	»	-78
29	-36	-42	-48	-50	-57	-57	-57	-52	»	-53	-58	-64	-62	-66	-70	-74	-77
30	»	»	»	-49	»	-58	»	-51	»	-54	»	-65	»	-65	»	»	»
31	-35	-41	-49	-48	»	-57	-58	-50	-46	-55	-59	-64	-61	»	-71	-75	-76
32	-34	»	»	»	-58	»	-57	»	-47	»	-60	»	-62	»	-70	»	-77
33	»	-42	-48	-49	-59	-56	-56	-51	»	»	-61	-63	-63	-66	-71	-76	-78
34	»	-41	»	-50	»	-57	»	»	»	-54	»	-64	»	-65	»	-77	»
35	-33	-40	-47	-49	-60	»	-55	-50	-48	-53	-60	-63	-62	»	»	-76	-79
36	-34	»	-48	»	-59	»	»	»	-47	»	-59	»	»	»	-72	»	-78
37	-33	»	-47	-48	-60	-56	-56	-51	-48	-52	»	-64	-63	-64	-73	-77	-79
38	»	-41	»	-47	»	-55	»	-52	»	-53	»	-63	»	-63	»	-78	»
39	-32	-42	-46	-46	-61	-56	»	-51	-49	-54	-60	-64	-62	-64	-74	»	-80
40	-33	»	-47	»	»	»	-57	»	-50	»	-61	»	-63	»	-73	»	-79
41	-34	-43	»	-47	-60	-57	-58	-50	-49	-53	-62	»	-64	-65	-74	-77	-80
42	»	-42	»	-48	»	-56	»	-49	»	»	»	-65	»	-66	»	-78	»
43	-35	-43	-48	-49	-59	-57	-59	»	»	-54	-61	-64	-65	-67	-75	-79	»
44	-36	»	-47	»	-58	»	-58	»	-48	»	-60	»	-66	»	»	»	»
45	-35	-44	-48	»	-57	-58	-59	-48	-49	-53	-61	-63	»	-68	-74	»	-81
46	»	»	»	-50	»	-57	»	-49	»	-54	»	-64	»	-67	»	-80	»
47	»	-45	-47	-49	-58	-58	-58	-48	»	-55	-62	-65	-65	»	»	-81	-80
48	-36	»	-46	»	-57	»	»	»	-50	»	-63	»	»	»	-73	»	-79
49	-35	-46	-47	-50	-57	-59	-59	-49	-49	-56	-62	-65	-66	-67	-74	-82	-78

138000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	-78	-77	-80	-78	-77	-83	-78	-82	-74	-74	-80	-82	-83	-89	-90	-90	-87
1	-79	-76	»	-77	-76	-82	-77	-83	-75	-73	-79	»	-84	-88	-91	-91	-88
2	»	»	-81	»	-77	»	-78	»	»	»	-78	»	-85	»	-92	»	-87
3	-78	-77	-80	-78	-78	-83	-79	»	-74	-74	-79	-83	-86	-87	-91	-90	»
4	»	-76	»	-79	»	»	»	-82	»	-75	»	-84	»	-88	»	-89	»
5	-77	-75	-79	»	-77	-82	-80	-83	-73	-74	-80	-83	»	-87	-92	-88	-88
6	-78	»	-80	»	-76	»	-79	»	-74	»	»	»	-87	»	-93	»	-89
7	-79	-76	-79	-78	-77	-83	-78	-82	»	-75	-81	-84	-88	-88	-94	-87	-88
8	»	-77	»	-79	»	-82	»	-81	»	-76	»	-83	»	-89	»	»	»
9	-78	-76	-80	-80	»	-81	-77	-80	-75	-77	-82	-84	-87	»	-95	-86	-87
10	-79	»	»	»	-76	»	-78	»	-74	»	-81	»	-86	»	-96	»	-88
11	»	-75	-79	-79	-77	-80	-79	-79	-75	»	-80	»	-87	-88	-95	-87	-89
12	»	-74	»	-80	»	-79	»	»	»	-78	»	-83	»	-89	»	-88	»
13	-78	-73	-80	-81	-78	»	-78	-80	-74	-77	-79	-82	-88	-90	»	»	-88
14	-79	»	-81	»	-79	»	-77	»	-75	»	-80	»	»	»	-96	»	-89
15	-80	»	-82	-82	-80	-80	-78	-81	-74	-78	»	-83	-89	-89	-95	-87	-90
16	»	»	»	-83	»	-81	»	-82	»	-79	»	-84	»	-88	»	-88	»
17	-81	-74	-81	-84	-79	-80	»	-83	»	-78	-79	-83	-90	-87	-94	»	-89
18	-82	»	-80	»	»	»	-77	»	-75	»	-80	»	-91	»	-93	»	-90
19	-83	-73	»	-85	-78	-81	»	-84	-76	-77	-79	»	-90	-86	-92	»	-91
20	»	-74	»	-86	»	-80	»	-83	»	»	»	-84	»	-85	»	-89	»
21	-82	-75	-79	-85	-79	-81	-76	»	-75	-76	-80	-85	-89	-84	-91	-88	»
22	-83	»	-80	»	-80	»	-77	»	-74	»	-79	»	-88	»	»	»	-90
23	-82	-76	-81	»	-81	-80	-78	-84	-73	-75	-80	»	»	-83	-90	-87	-91
24	»	»	»	-86	»	-79	»	-83	»	-76	»	-84	»	-84	»	-88	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-83	»	-80	»	-80	»	»	»	-72	»	-81	»	-89	»	-89	»	-90
27	-84	»	-79	»	»	-80	-79	-82	-73	-77	-82	-85	-90	»	-90	-87	»
28	»	-75	»	-85	»	-81	»	-83	»	-78	»	»	»	-85	»	»	»
29	»	-76	-78	-84	-79	-80	-78	-82	-72	»	-81	-86	-91	-86	»	-86	-91
30	-83	»	-79	»	-78	»	-79	»	-71	»	-82	»	-90	»	-89	»	»
31	-82	-75	-80	-83	-79	»	-80	-81	-72	-77	-81	-85	»	-87	»	-87	-90
32	»	-74	»	»	»	-79	»	-82	»	-78	»	»	»	»	»	-86	»
33	-81	»	-81	-82	-80	-78	-79	-81	-73	-79	»	-84	-89	-86	-88	-87	-91
34	-80	»	-82	»	-81	»	-78	»	»	»	-82	»	-88	»	-89	»	-90
35	-79	-75	-81	-81	»	-79	»	-80	»	-80	-83	-83	-89	-87	-88	»	-91
36	»	-74	»	-82	»	-80	»	»	»	-79	»	-82	»	»	»	-86	»
37	-80	-75	»	-81	-82	-81	»	-79	-72	-78	-82	»	-88	-88	-87	-85	-92
38	»	»	-80	»	-83	»	-79	»	-73	»	-81	»	-87	»	-86	»	»
39	-79	-74	-81	-80	»	-80	-80	»	-72	-77	80	-81	-88	-89	-87	-86	»
40	»	-75	»	»	»	»	»	-80	»	-78	»	-80	»	-88	»	-87	»
41	»	-74	»	»	-82	-81	-81	-79	-73	-79	-81	-79	»	-89	-88	-88	-91
42	-78	»	-80	»	-81	»	»	»	-72	»	»	»	»	»	»	»	-92
43	»	-75	-79	-79	-82	-82	-80	-78	»	-80	-82	-80	-89	-90	-87	-87	-91
44	»	-76	»	-78	»	-81	»	-77	»	-79	–»	-81	»	-91	»	»	»
45	-77	-77	-78	-77	»	-80	-81	-76	-73	-78	-83	-82	-90	»	-88	-88	-90
46	-78	»	»	»	-83	»	-82	»	-72	»	-84	»	-89	»	-89	»	-89
47	»	-78	-77	-76	-84	-79	-81	-75	-73	»	-83	-81	-88	-92	-90	-87	-88
48	»	-79	»	»	»	-78	»	»	»	-79	»	-82	»	-91	»	-86	»
49	-77	-80	-78	-77	-83	-78	-82	-74	-74	-80	-82	-83	-89	-90	-90	-87	-89

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	−89	−94	−94	−91	−92	−104	−107	−104	−107	−106	−100	−99	−100
1	−90	−95	−95	»	−91	−105	−108	−103	−106	−107	−99	−98	»
2	»	»	»	−90	»	−106	»	−104	»	−106	»	−99	»
3	−89	−96	−94	−89	−90	−107	−107	−105	»	−107	−100	−98	−99
4	−90	»	−95	»	»	»	»	»	−107	»	−99	»	−100
5	−89	−97	−94	−88	»	−108	−108	−104	−106	−106	−100	−99	−99
6	»	−96	»	−89	»	−107	»	−105	»	−105	»	»	»
7	»	−97	−95	−90	−89	−106	−107	−104	−107	»	−99	−98	−98
8	−88	»	−96	»	−88	»	−108	»	−106	»	−100	»	−97
9	−89	−96	−95	−91	−89	»	−107	−103	−107	−104	−101	−99	−98
10	»	−97	»	»	»	−105	»	−104	»	−105	»	−98	»
11	−88	»	−96	−92	−88	−104	−108	−103	−108	−104	»	−97	−97
12	−89	»	−95	»	−89	»	−107	»	»	»	−100	»	−96
13	−90	−96	−94	−91	−90	−103	»	−104	−109	−103	−101	−96	−97
14	»	−97	»	−90	»	−104	»	−103	»	−102	»	−95	»
15	−89	−96	»	−91	−89	−105	−106	−102	»	−101	−100	»	−96
16	»	»	−93	»	−90	»	»	»	−108	»	»	»	−97
17	−88	−95	−94	−92	−91	−106	−105	»	−107	»	−101	−96	−98
18	»	−96	»	−91	»	»	»	−103	»	−102	»	»	»
19	−87	−95	−95	»	−92	−105	−106	»	−106	−101	−102	−97	»
20	−86	»	−94	»	−93	»	»	»	−107	»	»	»	−97
21	−87	−94	−95	−90	−94	»	−105	−102	»	−102	−101	−96	−96
22	»	−95	»	−91	»	−106	»	−103	»	−101	»	−97	»
23	−88	−94	−94	»	»	−105	−104	−104	−106	−100	−100	−98	−95
24	−89	»	»	»	−95	»	−103	»	−105	»	−101	»	−96
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−95	»	−90	»	−104	»	»	»	−101	»	−97	»
27	−88	−96	−95	−89	−96	»	−104	−105	−106	−102	−100	−96	−97
28	−89	»	−94	»	−97	»	−103	»	−105	»	−99	»	»
29	−88	»	−93	−90	−98	−105	−104	−106	−104	−103	»	−97	−96
30	»	−95	»	−89	»	−104	»	−107	»	−104	»	−98	»
31	−89	»	−94	−90	−99	−103	»	−108	−103	−103	−98	−97	−95
32	−88	»	−95	»	»	»	−103	»	−102	»	−97	»	−94
33	−89	−96	»	−91	−98	−104	−104	−107	−101	−102	−98	»	−93
34	»	−97	»	−90	»	−103	»	−108	»	»	»	−96	»
35	−90	−96	−94	−91	−99	−102	−103	»	−102	−101	−97	−97	»
36	−89	»	−95	»	−98	»	−104	»	−103	»	−96	»	−92
37	−90	−97	−94	»	−99	−103	−103	−107	»	−100	−95	−98	»
38	»	»	»	−92	»	−104	»	−106	»	−99	»	−99	»
39	−91	−96	−93	−93	−100	−105	−102	−107	»	−98	−96	−100	−91
40	−92	»	−92	»	−101	»	»	»	−104	»	−97	»	−92
41	−93	−95	−93	−92	»	−106	−101	−108	−103	−99	−98	−101	−91
42	»	−94	»	−93	»	−105	»	−107	»	−100	»	»	»
43	»	−93	−94	−92	−102	−104	−102	−106	−104	»	−99	−102	−92
44	−92	»	−93	»	−103	»	−103	»	−105	»	−98	»	−91
45	−93	−92	−92	»	−104	»	−102	−105	−104	−101	−97	−101	−90
46	»	−93	»	»	»	−105	»	−106	»	−100	»	−100	»
47	−94	»	−93	−93	−103	−106	−103	−107	−105	−99	»	−101	−89
48	−95	»	−92	»	»	»	−104	»	»	»	−98	»	−88
49	−94	−94	−91	−92	−104	−107	−104	−107	−106	−100	−99	−100	−89

139000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	-89	-90	-88	-93	-96	-97	-103	-103	-108	-107	-104	-99	-96
1	-88	-89	-89	-92	-97	-96	-104	-102	»	-108	-105	-100	»
2	-89	»	-90	»	-96	»	»	»	-109	»	-104	»	-95
3	-88	-88	-89	-93	»	-95	-105	-101	-108	-107	»	-99	-94
4	»	-89	»	-94	»	-96	»	-100	»	»	»	»	»
5	»	-88	-90	-95	-97	-95	-104	-101	»	»	-103	-98	-93
6	-89	»	-91	»	-98	»	-103	»	-109	»	-104	»	»
7	-88	-87	-92	-94	-97	»	»	-102	-110	-108	-103	-99	-92
8	»	-88	»	»	»	»	»	-103	»	-107	»	-98	»
9	»	»	-93	»	»	-94	-104	-102	-111	-108	»	-97	-93
10	-89	»	-92	»	-98	»	-105	»	»	»	-102	»	-92
11	-88	-89	»	-95	-97	-93	»	-103	-110	-107	-103	-96	-93
12	»	»	»	-96	»	-94	»	-104	»	-108	»	-97	»
13	»	-88	»	-95	-98	-95	-106	-105	-109	-107	»	»	-92
14	»	»	-91	»	-99	»	-107	»	-110	»	-104	»	-93
15	-87	-87	-90	-96	-100	-94	-106	»	-109	-106	-103	-98	-94
16	»	-88	»	-97	»	»	»	-106	»	-107	»	-97	»
17	-88	-89	-89	»	-99	-95	-105	-107	-110	-106	-104	-96	»
18	-87	»	-88	»	-100	»	-106	»	-109	»	»	»	-93
19	-88	-88	-89	-98	-99	-96	-105	-108	»	-107	-105	-95	-94
20	»	-89	»	-97	»	-95	»	-109	»	-106	»	-94	»
21	-89	-90	-90	-96	»	»	-106	-108	-108	-105	-104	-95	-95
22	-90	»	»	»	-100	»	-105	»	-107	»	-103	»	-96
23	»	-91	-91	-97	-99	-96	-104	-109	-108	»	»	-96	-97
24	»	-90	»	-98	»	-97	»	»	»	-104	»	-97	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-91	»	-92	»	-100	»	-103	»	-107	»	-102	»	»
27	-90	»	»	-99	-101	-98	-102	-110	-106	-103	»	-96	-98
28	»	-89	»	-98	»	-97	»	-111	»	-102	»	-95	»
29	»	-90	»	-99	-100	-98	»	-110	-107	-103	-101	-94	-97
30	-91	»	-93	»	»	»	-103	»	-106	»	-100	»	-98
31	-90	-89	»	-100	-101	-99	-102	-109	-105	-102	-101	»	-97
32	»	-90	»	-101	»	-98	»	-108	»	»	»	-95	»
33	-91	-89	-94	-100	-100	-97	-103	»	-104	-103	-100	-94	-98
34	-92	»	-95	»	-101	»	-102	»	-103	»	-99	»	»
35	-93	-88	-94	»	-100	-98	-101	-109	-104	-102	-98	-93	»
36	»	»	»	-99	»	-99	»	-108	»	-103	»	-94	»
37	-92	»	-95	-100	-99	-100	-102	-109	»	-104	-99	»	-97
38	-93	»	-96	»	-100	»	»	»	-103	»	-100	»	»
39	-92	-89	-95	-99	»	-99	-103	-110	-104	-103	-101	-95	-96
40	»	-88	»	-98	»	-98	»	-109	»	-104	»	»	»
41	»	-89	-94	-97	-101	-99	-102	-108	-105	»	-100	-96	-97
42	-93	»	-95	»	-100	»	-101	»	-106	»	-99	»	-96
43	-92	-88	-94	-96	-99	»	-102	-109	-107	-105	-98	-95	-95
44	»	-89	»	»	»	-100	»	-108	»	-104	»	»	»
45	-91	»	-95	-95	-100	-101	»	-109	»	-105	»	-94	-96
46	-92	»	-94	»	-99	»	»	»	»	»	-99	»	-95
47	-91	-90	-93	-94	-98	-102	»	-110	-108	-104	-100	-95	-94
48	»	-89	»	-95	»	»	»	-109	»	-105	»	-96	»
49	-90	-88	-93	-96	-97	-103	-103	-108	-107	-104	-99	-96	-93

140000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0	-93	-85	-88	-94	-93	-94	-88	-90	-83	-82	-82	-84	-84	-77	-73	-74	-74
1	-92	-84	-89	-95	»	-95	-87	-91	-82	»	-81	-85	-83	»	-74	-75	-73
2	»	-85	»	-94	»	-94	»	-90	»	-81	»	»	»	-76	»	-74	»
3	»	-86	-90	-93	-92	-93	-88	-89	-83	»	-80	-84	-82	-75	-75	-75	-74
4	-91	»	-89	»	-93	»	-87	»	-84	»	-81	»	-83	»	-74	»	»
5	-90	-85	»	-92	-94	»	-88	-88	-85	-82	-80	-83	-82	-76	»	-74	-75
6	»	-84	»	»	»	-94	»	-87	»	-81	»	-84	»	»	»	-73	»
7	-91	»	-88	-91	-93	-95	-87	-86	-86	-82	»	-85	-81	-75	-73	-74	-74
8	-90	»	-89	»	-92	»	-86	»	»	»	-79	»	-82	»	-72	»	-73
9	-91	-85	-90	-92	-93	-94	»	-87	-85	-81	-80	-84	-83	-76	-71	»	»
10	»	-84	»	-93	»	-93	»	-88	»	-82	»	-83	»	»	»	-73	»
11	-92	-85	»	-92	-94	-94	-85	-87	-84	-83	-79	»	-84	-75	-70	-74	-74
12	»	»	-89	»	-93	»	-86	»	-85	»	-78	»	-83	»	-69	»	-73
13	-93	-86	»	-93	-94	-93	-85	»	-84	-82	-79	-82	-84	-74	-70	-75	»
14	»	-85	»	-94	»	»	»	-86	»	-81	»	-83	»	-73	»	-74	»
15	-94	-84	-88	»	-95	-92	-86	-87	-85	-82	»	-84	»	-72	-71	-75	-74
16	-93	»	-89	»	-96	»	-87	»	-86	»	»	»	-83	»	-70	»	-73
17	-92	-83	-88	-93	-95	-91	-88	-86	»	-81	-80	-83	-84	-73	-71	-76	-72
18	»	-82	»	-92	»	-90	»	-85	»	»	»	-84	»	-74	»	»	»
19	-91	-81	-89	-91	»	-91	-89	-86	-87	-82	-79	-83	-85	»	-72	-77	-73
20	-92	»	»	»	-94	»	-90	»	-86	»	-78	»	»	»	-71	»	-72
21	»	-82	-90	-90	-95	-92	-89	-87	-87	»	-79	-84	-84	-75	-72	-76	-71
22	»	-83	»	-89	»	-93	»	»	»	-81	»	-83	»	-76	»	-77	»
23	-91	-82	-89	-88	-94	»	-90	-86	-86	-82	-78	-84	-85	-75	»	-78	-72
24	-92	»	-90	»	-93	»	-89	»	-87	»	-79	»	»	»	-73	»	-71
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-83	»	-89	»	-94	»	-87	»	-83	»	-85	»	-74	»	-77	»
27	-91	-82	-91	-90	-92	-93	»	-86	-86	-84	-80	-86	-84	-73	-72	»	-72
28	-90	»	-92	»	»	»	-88	»	-85	»	-79	»	-83	»	-71	»	-71
29	-89	-83	»	-89	-91	-92	-87	-85	-86	-83	-80	»	-82	-72	-72	»	-70
30	»	-82	»	-90	»	-91	»	-86	»	»	»	-85	»	-73	»	-78	»
31	-90	-83	-91	-91	-92	-90	-88	»	-85	-82	-79	-84	-83	-74	-73	-77	»
32	-91	»	-92	»	-91	»	-87	»	-84	»	-80	»	-82	»	»	»	-69
33	-92	-82	-93	»	-92	-89	-88	-85	-83	-83	-79	-85	»	-75	-72	-76	»
34	»	»	»	-92	»	-88	»	-86	»	-82	»	-84	»	-74	»	»	»
35	-91	-81	-94	-91	-93	-87	-87	-87	»	-81	»	-85	-81	-73	»	-75	-68
36	-90	»	-95	»	-94	»	»	»	-84	»	-80	»	-80	»	-73	»	-69
37	-89	-82	-96	-92	»	-86	-88	-86	-85	-80	-81	-86	»	»	-72	-76	-68
38	»	-83	»	-93	»	-85	»	-85	»	-81	»	»	»	-74	»	-75	»
39	»	-84	-95	-94	-93	-86	-87	-84	-84	»	»	»	-81	-75	-73	»	-67
40	-88	»	-94	»	-92	»	-88	»	-85	»	-80	»	-82	»	-72	»	»
41	-87	-83	-95	-95	-93	»	-89	-85	»	-80	-81	-85	-81	-74	»	-74	-68
42	»	-84	»	»	»	-87	»	»	»	-81	»	-84	»	-75	»	-73	»
43	-86	»	-94	-94	-92	-88	»	-84	-84	-82	»	-83	-80	-74	-71	-74	-67
44	-85	»	-93	»	-93	»	-88	»	»	»	-82	»	-79	»	-72	»	-68
45	-84	-85	-94	-95	»	-89	»	-85	-83	-83	-83	-84	-78	-73	-73	»	-67
46	»	-86	»	»	»	-90	»	-84	»	-84	»	-83	»	»	»	-73	»
47	-85	-87	»	-94	-94	-89	»	-83	-82	-83	-84	»	-79	-72	-74	»	-66
48	»	»	-93	»	-95	»	-89	»	-83	»	-83	»	-78	»	-73	»	-65
49	-85	-88	-94	-93	-94	-88	-90	-83	-82	-82	-84	-84	-77	-73	-74	-74	-65

141000

	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000	050
0	−65	−78	−82	− 89	−103	−104	−106	−103	− 99	−104	−104	−100
1	−64	−79	−81	− 90	−102	»	−105	−102	−100	−103	−103	− 99
2	−65	»	»	»	−101	»	−104	»	− 99	»	−102	»
3	−66	»	−82	− 89	−100	−103	−103	−103	− 98	−102	»	− 98
4	»	−80	»	− 88	»	−104	»	−104	»	−101	»	− 99
5	−67	−79	−83	− 89	−101	−103	»	−103	− 97	−102	−101	− 98
6	−68	»	−84	»	»	»	−104	»	− 98	»	−100	»
7	−69	−80	»	− 90	−100	−102	−103	−102	− 99	−101	»	»
8	»	−81	»	− 91	»	−101	»	−101	»	»	»	− 97
9	−68	−80	−85	− 92	− 99	−102	−102	»	−100	−102	−101	− 96
10	−69	»	−86	»	−100	»	−103	»	− 99	»	−100	»
11	−70	−79	−87	»	− 99	−103	−102	−100	−100	−103	− 99	− 97
12	»	»	»	− 93	»	−102	»	− 99	»	−102	»	− 98
13	−69	−80	−88	− 94	− 98	−103	−103	−100	»	−101	− 98	− 99
14	−68	»	−89	»	»	»	»	»	− 99	»	− 97	»
15	−69	−81	−88	− 95	»	−104	−102	−101	− 98	»	− 98	−100
16	»	−82	»	− 96	»	−103	»	−100	»	−102	»	»
17	»	−83	−89	− 95	− 99	−104	−103	−101	− 99	»	− 97	−101
18	−70	»	−88	»	− 98	»	−104	»	− 98	»	− 96	»
19	−69	−84	−89	− 94	− 97	»	−103	−102	− 99	−101	− 95	−102
20	»	−85	»	»	»	−103	»	−103	»	−102	»	−103
21	−70	»	−90	− 95	− 98	−104	−102	−102	−100	−101	»	»
22	−71	»	−89	»	− 99	»	−101	»	»	»	»	»
23	−72	−84	−88	− 96	»	−105	»	−101	− 99	»	− 96	−104
24	»	−83	»	− 97	»	−106	»	−100	»	−100	»	−103
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	−87	»	−100	»	»	»	−100	»	− 97	»
27	−73	−84	−88	− 98	−101	»	−102	»	− 99	−101	− 98	−102
28	»	−83	»	− 99	»	»	»	− 99	»	−100	»	−101
29	−74	−82	−89	»	−102	−107	−101	− 98	−100	− 99	− 97	−102
30	−75	»	»	»	−101	»	−102	»	− 99	»	»	»
31	−74	»	−88	−100	−102	−108	−103	− 97	»	− 98	− 96	−101
32	»	−83	»	−101	»	−109	»	− 96	»	− 99	»	−102
33	−75	−82	−87	−102	»	−108	−102	− 97	−100	−100	− 97	−103
34	−76	»	»	»	−103	»	−103	»	− 99	»	− 98	»
35	»	−83	−88	−101	−104	−109	−102	− 98	−100	»	− 99	−102
36	»	−84	»	−100	»	−108	»	»	»	−101	»	»
37	−75	−85	−87	− 99	−105	»	−103	− 97	−101	−102	−100	−103
38	−74	»	−88	»	−106	»	−104	»	−102	»	−101	»
39	−75	»	−89	−100	−107	−107	−105	− 98	−103	−103	»	−102
40	»	−84	»	− 99	»	»	»	− 97	»	−102	»	−101
41	−76	−83	−88	−100	−108	−106	»	− 98	−102	−101	−102	−100
42	−75	»	−87	»	»	»	−106	»	−103	»	−101	»
43	−76	−84	»	−101	»	−107	−105	− 99	−104	−100	−100	»
44	»	−83	»	−100	»	−106	»	−100	»	»	»	− 99
45	−75	−84	−88	−101	−107	−107	−106	»	−105	−101	−101	− 98
46	−76	»	−87	»	−106	»	−105	»	»	»	−102	»
47	−77	−83	−88	»	−105	−108	−104	−101	−104	−102	−101	− 99
48	»	»	»	−102	»	−107	»	−100	»	−103	»	− 98
49	−78	−82	−89	−103	−104	−106	−103	− 99	−104	−104	−100	− 99

	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	−99	−92	−89	−95	−92	−101	−100	−93	−101	−96	−102
1	−100	»	»	−94	−93	−100	−101	−92	−102	−97	−103
2	»	»	−90	»	−94	»	−102	»	−103	»	−104
3	−99	−91	−89	−95	−93	−101	−103	»	−102	−96	−103
4	»	−90	»	−94	»	»	»	−93	»	−97	»
5	−98	−89	−90	»	−94	−102	−102	−94	−101	−98	−104
6	−99	»	−91	»	−93	»	−103	»	−100	»	»
7	−100	−90	»	−95	−94	−101	−102	−95	»	−97	−105
8	»	−91	»	−94	»	−100	»	−94	»	−98	»
9	−99	−92	−92	−93	»	−101	−101	−95	−101	−99	−106
10	−98	»	»	»	−93	»	−100	»	−102	»	»
11	»	−93	−91	−92	−94	−102	−99	−96	−103	»	−107
12	»	−92	»	−93	»	−103	»	»	»	−100	»
13	−99	−93	−92	−94	−93	»	−100	»	−104	−99	−108
14	−98	»	−91	»	−92	»	»	»	−105	»	−107
15	»	»	−92	−95	−93	»	−99	−97	−104	−100	»
16	»	−92	»	−94	»	−104	»	−98	»	−99	»
17	−99	−91	−91	»	−94	−103	»	−97	−103	−98	−106
18	−100	»	»	»	»	»	−98	»	−104	»	−107
19	−99	»	»	−95	−95	−102	−97	−96	−103	−97	−108
20	»	−90	»	−96	»	−101	»	−97	»	»	»
21	−100	−89	−92	−95	»	−102	−98	»	−102	−96	−107
22	−101	»	−93	»	−96	»	−99	»	−101	»	»
23	−100	−88	−94	»	−97	−101	−98	−96	−100	−97	−108
24	»	»	»	−96	»	−100	»	−97	»	−98	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−99	»	−95	»	−96	»	»	»	−99	»	−109
27	−98	−87	−94	−97	»	−99	−97	−98	−98	−97	−110
28	»	−86	»	−96	»	−100	»	−99	»	−98	»
29	»	−87	−95	−95	−97	−101	−96	−98	−99	»	−111
30	−97	»	−94	»	−98	»	−97	»	−100	»	−110
31	−98	−88	−95	−94	−97	»	−96	−99	−99	−99	−109
32	»	−89	»	»	»	−102	»	−98	»	−98	»
33	−97	»	−96	−95	−96	−101	−95	−97	−98	−97	»
34	−96	»	−97	»	−95	»	−94	»	»	»	−110
35	»	−88	−98	−96	−96	−100	»	−96	−97	−98	−111
36	»	−89	»	−97	»	−101	»	−97	»	−97	»
37	−95	−88	»	−96	−97	−100	−93	−96	−98	−98	−112
38	»	»	−97	»	−98	»	−92	»	−97	»	−111
39	−94	−89	−96	−95	−99	−99	−93	»	−98	−99	−112
40	»	−88	»	−94	»	»	»	−97	»	−100	»
41	−95	−87	−97	»	−100	−98	−92	−96	−97	−101	−111
42	−94	»	−96	»	−101	»	−93	»	−96	»	»
43	−95	−86	»	−93	−100	−99	−94	−97	»	−100	−110
44	»	−87	»	−94	»	−100	»	−98	»	−101	»
45	−94	−88	−95	−93	»	−99	−93	−99	−95	−100	−111
46	−93	»	»	»	−101	»	−94	»	−94	»	−110
47	»	−89	−94	−94	−100	−100	−93	−100	−95	»	−111
48	»	−88	»	−93	»	»	»	»	»	−101	»
49	−92	−89	−95	−92	−101	−100	−93	−101	−96	−102	−112

142000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150
0	-112	-122	-122	-128	-129	-126	-123	-119	-118	-119	-120
1	»	-123	-121	-129	-130	-125	-122	-118	»	»	-121
2	»	-124	»	-128	»	-124	»	»	»	-120	»
3	-113	-125	-120	-129	-131	»	»	-117	-117	-121	-120
4	-114	»	-119	»	-132	»	-121	»	»	»	-119
5	-115	»	-118	-130	»	-125	-120	-118	-116	-122	»
6	»	-124	»	»	»	-124	»	-117	»	-123	»
7	-116	-125	»	-129	-131	-125	»	-118	-117	-122	-120
8	-115	»	-117	»	»	»	-119	»	-116	»	-121
9	»	-126	»	-128	-130	-124	-120	-117	-115	-121	-122
10	»	-125	»	-129	»	-123	»	-116	»	»	»
11	-116	-124	-118	-130	-129	-122	-121	»	-116	-122	-121
12	-117	»	-119	»	-130	»	-120	»	-117	»	-120
13	-116	-125	-120	»	-131	-121	-121	-117	-116	-123	-121
14	»	»	»	-129	»	-120	»	-118	»	-124	»
15	-117	-126	-119	-130	-132	-121	-120	-117	»	-125	-120
16	-116	»	-120	»	-133	»	»	»	-117	»	-121
17	-117	-127	-121	-129	»	-122	-121	-116	-118	-126	-120
18	»	-128	»	-130	»	-123	»	-117	»	-125	»
19	»	-129	-122	-131	-134	-122	-122	-118	-119	»	-121
20	-116	»	-123	»	-133	»	-123	»	-120	»	-122
21	-117	-128	-122	-130	-134	»	-124	-117	-119	-126	-121
22	»	-127	»	»	»	-123	»	-116	»	-127	»
23	-118	»	-123	-129	»	-122	-125	-117	-118	-128	»
24	-119	»	-124	»	-133	»	-126	»	»	»	-122
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-128	»	-128	»	-123	»	-118	»	-129	»
27	-120	-127	»	-127	-132	-122	-125	-117	-119	-128	-123
28	»	»	-125	»	-133	»	-126	»	-118	»	-122
29	-121	-126	-124	-128	-132	-121	-125	»	-117	»	-123
30	»	-127	»	-127	»	»	»	-116	»	-127	»
31	-122	-128	-123	»	-131	-122	-126	-117	-116	-126	-122
32	-121	»	-122	»	-132	»	-125	»	-117	»	»
33	-120	-127	-123	-128	-131	»	-124	-116	»	-125	-123
34	»	-126	»	-129	»	-121	»	-117	»	-126	»
35	-121	-125	-124	-130	»	-120	-125	-116	-118	-125	-124
36	-120	»	»	»	-132	»	-124	»	-119	»	-123
37	»	-124	-123	-129	-133	-121	-123	-117	-118	»	-122
38	»	-125	»	-128	»	-120	»	»	»	-124	»
39	-121	-124	-124	-129	-132	»	-122	-118	-117	-123	-123
40	-120	»	-123	»	-131	»	-121	»	-116	»	-122
41	»	»	»	-130	-130	-121	-122	-119	-115	-122	»
42	»	-125	»	-129	»	-120	»	-118	»	-123	»
43	-121	-124	-124	-130	-129	-119	»	-119	-116	-122	-123
44	-120	»	-125	»	»	»	-121	»	-117	»	-122
45	-121	-123	»	-131	-128	-120	-122	-118	-118	-121	-121
46	»	-122	»	-130	»	-121	»	-117	»	»	»
47	-122	-123	-126	-129	-127	-122	-121	»	-119	-120	-120
48	-121	»	-127	»	-126	»	-120	»	-118	»	»
49	-122	-122	-128	-129	-126	-123	-119	-118	-119	-120	-119

	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0	−119	−119	−109	− 98	− 97	−109	−105	−107	−103	−102	−94
1	−118	−118	»	− 97	− 98	−108	−106	»	−104	−101	−95
2	−119	»	−108	»	− 99	»	−107	»	−105	»	−96
3	−120	−117	−109	»	−100	−109	−106	−108	−104	−102	−95
4	»	»	»	− 98	»	−110	»	−107	»	−101	»
5	−119	−118	−108	− 99	−101	−111	−107	−108	»	−102	−94
6	−118	»	−107	»	−102	»	»	»	−105	»	−93
7	−117	−117	−108	−100	»	−112	−106	−107	−106	−103	−92
8	»	−116	»	− 99	»	−113	»	−108	»	−102	»
9	»	−117	−107	−100	−101	−112	−107	−109	−107	»	−91
10	−118	»	−108	»	−102	»	−108	»	−106	»	−92
11	−119	−116	−107	− 99	−101	»	−109	−108	−107	−101	−93
12	»	−117	»	»	»	−111	»	−107	»	−102	»
13	−118	»	−106	−100	−102	−110	−108	−106	−106	−101	»
14	−119	»	−107	»	−103	»	−107	»	»	»	−92
15	−118	−118	−106	−101	−102	−109	»	−105	−107	−102	−91
16	»	−117	»	−102	»	−108	»	−106	»	−101	»
17	−119	−116	»	−103	»	»	−106	−107	−108	−102	−90
18	»	»	−107	»	−101	»	−107	»	−107	»	−89
19	−120	−117	−108	−104	−102	−109	−108	»	−108	−101	−90
20	»	−116	»	−103	»	»	»	−106	»	−100	»
21	−119	−117	−107	»	−103	−108	−107	−107	−107	−101	»
22	−118	»	−106	»	−102	»	−106	»	−108	»	»
23	−119	−116	−105	»	−101	−107	−105	−108	»	−102	−89
24	»	−115	»	−102	»	−106	»	−107	»	−103	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−120	»	»	»	−100	»	−104	»	−107	»	−88
27	»	−114	−106	−101	−101	»	−103	−106	−106	»	−87
28	»	−113	»	−102	»	−107	»	»	»	−102	»
29	−119	−112	−105	−101	−100	»	−104	−105	−105	−101	−86
30	−120	»	−104	»	−101	»	−103	»	−104	»	−85
31	−121	»	−103	−102	−102	−106	−102	−104	−105	−100	»
32	»	−113	»	−101	»	−107	»	−105	»	− 99	»
33	−120	−112	−102	−102	−103	−106	»	−104	−104	−100	−86
34	»	»	−101	»	»	»	−103	»	−103	»	−87
35	−119	−111	»	−101	−104	−107	−104	−103	−102	− 99	−86
36	»	−110	»	−100	»	−108	»	−102	»	»	»
37	−120	−111	−100	− 99	−105	−107	−105	»	−101	− 98	»
38	−119	»	− 99	»	−106	»	»	»	−102	»	−85
39	−120	−110	− 98	»	−107	−106	−104	−103	»	− 97	−84
40	»	»	»	− 98	»	−107	»	»	»	− 96	»
41	−121	−109	− 99	− 99	−106	−106	»	−104	»	− 95	−83
42	−120	»	− 98	»	−107	»	»	»	−103	»	−84
43	−119	−108	− 97	−100	»	−107	−105	−103	−102	− 94	−83
44	»	−107	»	»	»	−108	»	−104	»	− 93	»
45	»	−108	»	− 99	−108	−107	−106	»	−103	»	−82
46	−120	»	− 98	»	−109	»	−107	»	−102	»	−81
47	»	−109	− 99	− 98	−108	»	−108	−105	−103	− 94	−82
48	»	»	»	»	»	−106	»	−104	»	− 93	»
49	−119	−109	− 98	− 97	−109	−105	−107	−103	−102	− 94	−82

143000

	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300	350
0	-82	-78	-75	-77	-68	-67	-60	-54	-54	-53	-53	-67	-59
1	-81	-77	-76	»	-67	»	-59	-53	-53	-52	-52	-68	-58
2	»	-78	»	»	»	-68	»	-52	»	-51	»	-69	»
3	-82	»	-75	-78	-68	-69	-60	-51	-54	-50	»	-68	-57
4	-83	»	-74	»	-69	»	-59	»	»	»	-53	»	-58
5	-82	»	-73	-77	-68	-70	»	-50	-53	-51	-54	-67	-57
6	»	-79	»	-76	»	-69	»	-51	»	-50	»	-68	»
7	-83	-80	»	-77	-67	-70	-58	-52	-52	-49	-55	»	-58
8	»	»	-72	»	-66	»	-57	»	-53	»	-56	»	-59
9	-84	-81	-71	-76	-65	-69	-58	»	-54	-50	»	-67	»
10	»	-82	»	-75	»	»	»	-51	»	-51	»	-68	»
11	-85	-83	-72	»	-66	-68	-59	-52	-53	-50	-57	-69	»
12	-86	»	-73	»	-67	»	-60	»	-54	»	»	»	-60
13	-85	-82	-74	-74	-68	-67	-61	-53	»	-51	-58	-68	-59
14	»	»	»	-75	»	-68	»	-54	»	-52	»	-69	»
15	-86	-83	-73	-76	»	-67	-60	-55	-53	-51	-59	-68	-60
16	»	»	»	»	-67	»	-59	»	-52	»	-58	»	-61
17	»	-84	-74	-75	-68	-66	-60	-56	-51	»	-57	»	-62
18	»	-83	»	-76	»	-67	»	»	»	-52	»	-67	»
19	-85	-82	-73	-77	-69	»	-59	-55	-52	-51	-58	-66	-61
20	-84	»	-74	»	»	»	-60	»	-51	»	-59	»	»
21	-85	»	-75	-76	-68	-68	-59	-56	-52	-52	»	-65	-60
22	»	-81	»	-75	»	»	»	-57	»	-53	»	-66	»
23	-84	-80	-76	-74	-69	-67	»	-56	-51	-52	-60	-65	-59
24	-83	»	-75	»	»	»	-58	»	-52	»	-61	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-79	»	-75	»	-68	»	-55	»	»	»	-64	»
27	-82	-78	-74	-74	-68	-67	-57	»	-53	»	-62	-63	-60
28	-81	»	-75	»	-67	»	-58	»	»	»	-63	»	-61
29	-80	-77	-76	»	-68	-66	-59	»	-52	-51	-62	-64	»
30	»	»	»	-75	»	-67	»	-56	»	-52	»	-63	»
31	-79	-76	-77	-74	-69	»	-58	-55	»	-53	-63	-62	-60
32	-78	»	-78	»	»	»	»	»	-53	»	-64	»	-59
33	-79	-77	-79	»	»	-66	-57	-54	-52	-52	-65	-63	-58
34	»	-78	»	-73	»	-65	»	-55	»	-51	»	»	»
35	»	»	»	-72	-68	-64	-58	-54	-53	»	-64	-64	»
36	»	»	-78	»	-69	»	-59	»	-52	»	-65	»	-57
37	-80	-79	-77	-71	-70	»	-58	-55	-53	-50	-66	-63	-58
38	»	-78	»	»	»	-63	»	-54	»	-51	»	-62	»
39	-81	»	-76	-72	-69	-62	-59	-53	»	-52	»	-61	-57
40	-80	»	-77	»	-68	»	-58	»	»	»	-67	»	-56
41	-81	-79	-78	-71	-67	-61	»	-54	-52	-51	-68	-62	-55
42	»	-80	»	-70	»	-62	»	-55	»	-50	»	-61	»
43	-80	-79	»	-69	-68	-61	-59	»	-53	-51	-67	»	-54
44	»	»	-79	»	-67	»	-58	»	-52	»	-66	»	-55
45	-79	-78	-78	-68	-68	-60	-57	»	-53	-50	-65	-60	-54
46	»	-77	»	-67	»	»	»	-56	»	-51	»	-59	»
47	-78	-76	-79	»	-67	-59	-56	-55	-54	-52	-66	-58	»
48	-77	»	-78	»	-68	»	-55	»	-53	»	»	»	-53
49	-78	-75	-77	-68	-67	-60	-54	-54	-53	-53	-67	-59	-52

144000

	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	000
0	−52	−49	−60	−63	−59	−51	−60	−58	−47	−48	−44	−37	−39
1	−53	»	−61	−64	−60	−52	−61	−57	−46	−47	»	−36	−38
2	−54	»	−62	»	−61	»	−62	»	»	»	−43	»	−39
3	−55	−48	−63	−65	−60	−53	»	−56	−47	−46	−42	−37	−40
4	»	−49	»	−64	»	−52	»	−57	»	−47	»	−38	»
5	−54	−50	»	−63	−59	−51	−63	−56	−48	−46	−43	»	−41
6	»	»	»	»	−60	»	−62	»	−49	»	−42	»	−42
7	−53	−49	−62	−62	−59	−50	−61	»	−50	−45	−41	−39	−43
8	»	−50	»	−63	»	»	»	−55	»	−44	»	−40	»
9	−54	−49	−63	»	−60	−49	−60	−56	−49	−45	−42	−39	»
10	−55	»	−62	»	−59	»	−59	»	−48	»	»	»	−44
11	−54	−50	−61	−64	−58	−50	−60	−55	»	−44	−41	−40	»
12	»	−51	»	−63	»	−51	»	−54	»	−45	»	»	»
13	−55	−50	−62	−62	»	−52	−59	−55	−49	−44	»	−39	−45
14	−54	»	»	»	−57	»	−60	»	−48	»	−42	»	−44
15	»	−51	−61	−61	−56	−53	−61	−54	»	»	−43	−38	−45
16	»	−52	»	−62	»	−54	»	»	»	−43	»	−37	»
17	−53	−53	−62	−63	−57	»	»	−53	−47	−42	−42	−38	−44
18	−54	»	−63	»	−56	»	−60	»	−46	»	−43	»	»
19	−55	»	−64	−64	»	−55	−61	−54	»	»	»	−39	−43
20	»	−54	»	»	»	−54	»	−53	»	−43	»	−38	»
21	−54	−53	»	−63	−55	−55	»	−52	−47	−44	−42	−39	−44
22	−53	»	−63	»	»	»	−60	»	−48	»	»	»	−45
23	»	−52	»	−64	−56	−56	−59	−51	−49	−45	−41	»	−44
24	»	−53	»	−65	»	−55	»	−50	»	»	»	−38	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−52	»	−62	»	−57	»	−58	»	−50	»	−40	»	−43
27	−51	−54	−63	»	»	−56	−59	−49	−51	−46	−41	−39	»
28	»	»	»	−64	»	»	»	−48	»	−45	»	−40	»
29	−50	−55	−62	−63	−58	−57	−60	−49	»	−46	−40	−41	−42
30	−51	»	−61	»	−57	»	»	»	−50	»	−39	»	−41
31	−50	»	−60	−62	»	−56	−59	−50	−51	−47	−38	−42	−42
32	»	−54	»	−61	»	−57	»	−49	»	−46	»	»	»
33	»	−55	−61	−60	»	−56	−58	−48	−52	»	−37	−43	−43
34	−51	»	−62	»	−56	»	−57	»	−51	»	−38	»	−44
35	−50	−54	−61	»	−57	»	−56	−49	−50	−47	−39	−42	−43
36	»	−53	»	»	»	−55	»	−50	»	−48	»	−41	»
37	−51	»	−62	−59	−56	−56	−57	−49	−49	−47	»	−40	−44
38	−50	»	−61	»	−57	»	−58	»	»	»	−40	»	−43
39	−51	−54	−60	−60	−56	−57	»	−48	−48	−46	−39	−39	»
40	»	−53	»	−59	»	−58	»	−47	»	−47	»	»	»
41	−50	−54	»	−60	»	−59	−57	−48	−47	−48	−38	»	−44
42	»	»	−61	»	−55	»	−58	»	−46	»	−37	»	−45
43	−51	−55	»	−61	−54	−58	−59	»	−45	−47	−36	−38	−44
44	»	−56	»	−60	»	»	»	−49	»	−46	»	−37	»
45	−50	−57	−62	»	−53	−59	»	−48	−46	−45	−35	−38	»
46	−51	»	−63	»	−52	»	−60	»	−47	»	»	»	−45
47	−50	−58	−64	−59	−51	−60	−59	−49	»	−44	−36	−39	−44
48	»	−59	»	−60	»	−59	»	−48	»	−43	»	−38	»
49	−49	−60	−63	−59	−51	−60	−58	−47	−48	−44	−37	−39	−43

	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	-43	-36	-37	-36	-37	-35	-43	-39	-51	-54	-51	-52	-52
1	-42	-35	-36	-37	-36	-34	»	-38	-52	»	-52	-51	-53
2	»	-36	»	-36	»	-35	»	-37	»	-53	»	-52	»
3	-43	-37	»	-37	-37	-36	»	»	-53	-52	-51	»	-54
4	»	»	-35	»	-36	»	»	»	-52	»	-50	»	-55
5	-44	-36	-36	-38	-35	»	-42	»	-53	-51	-49	-51	-56
6	»	-35	»	-37	»	»	»	-38	»	-50	»	-52	»
7	-45	-34	»	»	-34	-37	-41	-39	-52	-49	-50	-51	»
8	-44	»	»	»	-35	»	-42	»	-51	»	»	»	-57
9	-43	»	-37	-36	-36	-38	-41	-40	»	-50	-49	-50	-58
10	»	-35	»	-35	»	-39	»	-39	»	-49	»	-51	»
11	-44	»	-38	»	»	-40	-42	-40	-52	-50	-48	-52	-57
12	-43	»	»	»	-37	»	-41	»	-53	»	-49	»	-58
13	»	-34	-39	-36	-38	-41	-40	-41	-54	»	-50	-53	-57
14	»	-35	»	-37	»	-42	»	»	»	-51	»	-52	»
15	-42	-34	-38	-36	-37	»	-41	-42	-55	-52	-51	-51	-56
16	-41	»	-39	»	-38	»	-42	»	-54	»	»	»	»
17	-42	»	-40	-35	-39	-41	-41	»	-53	-51	»	-50	-57
18	»	-33	»	-34	»	-40	»	-43	»	-52	»	-51	»
19	-41	-32	-41	-33	-38	-41	»	-44	-52	-53	-52	-52	»
20	-42	»	-40	»	»	»	-42	»	-53	»	-53	»	-58
21	-43	-31	»	-34	-39	-42	-41	-43	-52	-52	-54	»	-59
22	»	-32	»	»	»	-41	»	-42	»	»	»	-53	»
23	-44	-33	-41	-35	-38	-42	-40	»	-51	-51	-53	-52	-58
24	-43	»	-42	»	-37	»	-41	»	»	»	-52	»	-57
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	»	»	-36	»	»	»	-43	»	-52	»	-51	»
27	-42	-32	-41	-35	-36	-41	-40	-44	»	-51	-53	-50	-58
28	-43	»	-40	»	-35	»	»	»	-50	»	-52	»	-59
29	-42	-33	-41	-34	»	-40	-41	-45	-51	-52	-51	-51	-58
30	»	-34	»	-35	»	-41	»	-46	»	-51	»	»	»
31	»	-33	-40	-36	-34	-40	-40	-47	-52	»	-50	-50	-59
32	-43	»	-39	»	-33	»	-41	»	-53	»	-51	»	-58
33	-42	-32	-40	-35	-32	»	-42	-46	-54	-50	-52	-51	-59
34	»	-33	»	»	»	-39	»	-47	»	-51	»	-52	»
35	-41	»	-39	-34	-33	-38	-43	-48	-53	-52	»	-51	-60
36	-40	»	-38	»	-34	»	-44	»	»	»	-51	»	-61
37	-39	-34	-37	-33	-35	-39	»	-47	-52	-51	-50	-50	-62
38	»	-35	»	-34	»	-38	»	-48	»	-50	»	-51	»
39	-38	-36	»	-33	-36	-39	-43	-49	-51	-51	-51	»	-61
40	»	»	-38	»	-35	»	-42	»	-52	»	-50	»	-60
41	-37	-37	-37	-34	-36	-40	-43	»	-53	-52	-49	-50	-59
42	»	-38	»	-35	»	»	»	-48	»	-51	»	-51	»
43	-38	-39	-36	»	-35	-41	-42	-49	-52	-52	-50	-50	»
44	-37	»	-37	»	-36	»	-41	»	-53	»	»	»	-60
45	-36	-40	-38	-36	-35	-42	-40	-50	»	-51	»	-51	-61
46	»	-39	»	-35	»	-41	»	-49	»	-52	»	-52	»
47	-35	-38	-37	-36	»	-42	-39	-50	-54	-51	-51	-53	»
48	-36	»	»	»	-34	»	-38	»	-55	»	-52	»	-62
49	-36	-37	-36	-37	-35	-43	-39	-51	-54	-51	-52	-52	-63

145000

	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250	300
0	-63	-56	-54	-56	-57	-51	-58	-58	-45	-45	-47	-43	-48
1	-64	-57	»	-55	-56	-52	-57	-57	-46	-44	-46	»	-47
2	»	»	-55	»	-57	»	»	»	-45	»	-47	»	-46
3	-63	-56	-54	-54	-58	-51	-56	»	-46	-43	-48	-44	-47
4	»	-57	»	-53	»	»	»	-56	»	-42	»	-43	»
5	-62	-56	-53	»	-59	-52	-55	-57	-45	-43	-49	-42	»
6	-61	»	-54	»	-60	»	-54	»	-46	»	»	»	-46
7	-60	-57	-53	-52	-61	-53	-55	-56	»	-42	-50	-43	-47
8	»	-56	»	-51	»	»	»	-55	»	-41	»	-44	»
9	-61	-57	-54	-52	»	-52	-56	-54	-47	-42	-51	-45	-46
10	-60	»	»	»	-60	»	-55	»	-48	»	-50	»	-45
11	»	»	-53	-53	-61	-53	-54	-53	»	»	-51	-44	-44
12	»	-56	»	-52	»	-52	»	»	»	-43	»	-43	»
13	-59	-57	-52	-51	-62	»	-53	-54	-47	-42	-52	-44	-43
14	-58	»	-53	»	-61	»	-54	»	»	»	-53	»	»
15	-59	»	-54	-52	-62	-53	-53	-53	-46	-41	»	-45	-42
16	»	-56	»	-53	»	-52	»	-52	»	-42	»	-46	»
17	-58	-55	-55	-54	-63	-53	»	-51	-45	-41	-52	-47	-43
18	-59	»	-54	»	»	»	-54	»	-44	»	-53	»	-44
19	-60	-54	»	-53	-62	-52	-53	-52	»	-40	-54	»	-43
20	»	-53	»	-54	»	-53	»	-51	»	»	»	-46	»
21	-59	-52	-53	-53	-61	-52	-54	»	-45	»	-53	-45	»
22	»	»	-54	»	-60	»	-55	»	»	»	-54	»	-42
23	-60	-53	-55	»	-59	-53	-54	-50	-46	-39	-53	-44	»
24	»	»	»	-54	»	-54	»	-51	»	-40	»	-45	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-61	»	-54	»	-60	»	»	»	-47	»	-52	»	-41
27	-62	-52	-53	-53	»	-55	-55	-52	-46	-41	-51	-46	-42
28	»	-53	»	-54	»	-54	»	»	»	-42	»	»	»
29	»	-54	-54	-55	-59	-53	-56	»	-45	»	-50	-45	-43
30	-61	»	-53	»	-58	»	-57	»	-44	»	-51	»	-44
31	-62	-53	-54	-54	-59	»	-58	-51	-45	-41	-50	-46	-43
32	»	-54	»	»	»	-54	»	-50	»	-42	»	-47	»
33	-61	»	»	-55	-58	-55	-57	-51	-46	-41	»	-48	-44
34	-60	»	-53	»	-57	»	-58	»	»	»	-49	»	»
35	-61	-55	-54	-54	-56	-56	»	-50	-45	-42	-50	»	-45
36	»	-54	»	-53	»	-55	»	-51	»	-43	»	-47	»
37	-62	-53	»	-54	-55	-56	-59	-50	-46	»	-49	»	-46
38	»	»	-55	»	-54	»	-58	»	»	»	-50	»	-47
39	-61	»	-56	-55	-53	-57	-57	»	-47	-44	-49	-48	-46
40	»	-54	»	-56	»	»	»	-49	»	-45	»	-49	»
41	-60	-55	-55	»	-54	»	-58	-50	-46	-44	-48	-48	»
42	-59	»	-54	»	»	»	-59	»	-47	»	»	»	-45
43	-58	-54	-53	»	-53	-58	-60	-49	»	-45	-47	-49	-46
44	»	-55	»	-57	»	-57	»	-48	»	-44	»	-48	»
45	-57	»	-54	-56	»	-58	-59	-47	-48	-45	-46	-47	-47
46	»	»	»	»	»	»	-58	»	-47	»	-45	»	-46
47	»	-54	-55	-55	-52	-57	-59	-46	-46	»	-44	-48	-45
48	»	-55	»	-56	»	-58	»	»	»	-46	»	-47	»
49	-56	-54	-56	-57	-51	-58	-58	-45	-45	-47	-43	-48	-46

	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	−46	−48	−45	−56	−61	−62	−61	−60	−60	−59	−53	−47	−42
1	−45	−49	−46	−57	−60	−63	−60	»	−59	−58	−54	−48	−43
2	»	−48	»	−56	»	»	»	−61	»	−57	»	−49	»
3	−46	−47	−47	»	−59	−64	−61	−62	−60	−56	−53	−50	»
4	−47	»	−46	»	−58	»	−62	»	−59	»	»	»	−42
5	−48	−48	−47	−55	−59	−63	−61	−61	»	»	−54	−49	−41
6	»	−47	»	−56	»	−64	»	−60	»	−55	»	−48	»
7	−47	−48	−48	−55	»	−63	−60	−61	−60	−56	−53	−47	−42
8	−46	»	»	»	−58	»	−61	»	−59	»	−54	»	−41
9	»	−47	−49	»	−59	−62	−62	−62	−60	»	−55	−46	−42
10	»	−48	»	−56	»	−63	»	»	»	−55	»	−47	»
11	−47	−47	−48	−57	−58	»	−63	−61	−59	−54	−56	−48	−41
12	−46	»	−49	»	−59	»	−62	»	−60	»	−55	»	»
13	−45	»	−50	−58	»	−64	−61	−60	−59	−53	»	−47	−42
14	»	−46	»	−59	»	−63	»	−61	»	−52	»	−46	»
15	−44	−47	−51	−58	−60	−62	»	−62	−58	−53	−54	−45	−41
16	−45	»	−50	»	»	»	−62	»	−57	»	−55	»	−42
17	»	−48	»	−59	−59	−61	−61	−63	−56	−54	−54	»	−43
18	»	−49	»	−58	»	−62	»	−62	»	»	»	−44	»
19	−46	−48	−51	−57	−58	−61	−62	»	−55	−55	−53	−43	−44
20	−47	»	−52	»	−59	»	−61	»	−56	»	−52	»	−43
21	−48	−47	−53	»	−58	−62	−62	−63	−57	−56	−53	−42	»
22	»	»	»	−56	»	−63	»	−62	»	−55	»	»	»
23	−47	−48	−52	−55	−57	−62	−61	−63	»	−56	»	−43	−42
24	−48	»	−53	»	−56	»	»	»	−58	»	−52	»	−43
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−47	»	−54	»	−61	»	»	»	−57	»	»	»
27	»	−46	−54	−55	−57	−60	»	−62	−59	»	−51	−42	−42
28	−47	»	−53	»	−56	»	»	»	−58	»	−50	»	−43
29	−48	−45	−54	−54	»	»	−62	−61	−57	−58	−51	−43	−44
30	»	−46	»	»	»	−61	»	−62	»	−57	»	−44	»
31	−49	»	»	−55	−55	−60	−63	−63	−56	−58	»	−45	−45
32	−50	»	−55	»	−56	»	−64	»	»	»	−50	»	−46
33	»	−47	»	−56	−55	−61	»	−64	−57	−57	−49	−46	−45
34	»	−48	»	−55	»	−60	»	−63	»	−56	»	−47	»
35	−49	−47	»	−56	−56	−61	−63	−62	−58	−55	−50	»	−44
36	»	»	−54	»	−57	»	−64	»	−57	»	−49	»	−43
37	−48	−46	−55	−57	−58	−62	−65	»	−56	−54	−50	−46	−44
38	»	−45	»	−58	»	»	»	−61	»	−53	»	−45	»
39	−47	−46	−54	»	−59	−63	−64	−60	−57	−54	−49	−44	»
40	−48	»	−55	»	−60	»	−63	»	−56	»	»	»	−43
41	−49	−47	−54	−59	−61	−64	−64	−59	»	−55	−48	−43	−44
42	»	»	»	−58	»	−63	»	−58	»	−54	»	−44	»
43	−48	−46	»	−59	»	−64	−63	−57	−55	−55	−49	−43	−43
44	−49	»	»	»	−60	»	−64	»	»	»	−48	»	−42
45	»	−47	−55	−58	−61	−63	−63	−58	−56	»	−47	»	−43
46	»	−46	»	−59	»	−62	»	»	»	−54	»	−42	»
47	−48	−45	−56	−60	−62	»	−62	−59	−57	»	−48	−41	−42
48	−47	»	−57	»	−63	»	−61	»	−58	»	−47	»	»
49	−48	−45	−56	−61	−62	−61	−60	−60	−59	−53	−47	−42	−41

146000

	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	−41	−41	−47	−44	−43	−50	−42	−46	−48	−45	−46	−55	−44
1	−42	−42	−46	»	−42	−51	−41	−45	−47	−44	−45	−54	»
2	−43	»	−45	»	»	»	−40	»	−48	»	»	»	−45
3	−44	−41	−46	−43	−43	−50	−39	−44	»	−43	−44	−55	−46
4	»	−42	»	−44	»	−49	»	»	»	−44	»	−54	»
5	−43	−43	−45	−43	»	−48	−40	−43	−47	−45	−45	−53	−47
6	−44	»	»	»	−44	»	−41	»	−46	»	−44	»	−46
7	»	−44	−44	−42	−43	−47	−42	−42	−47	»	−43	−54	−45
8	»	−43	»	−41	»	−46	»	»	»	−44	»	−55	»
9	−45	−44	−45	−40	−42	»	−43	−43	−48	−43	−44	»	−46
10	−46	»	−44	»	−43	»	−42	»	»	»	»	»	»
11	−47	»	−43	−41	−42	−47	−43	−42	−47	»	»	−54	−45
12	»	−45	»	−42	»	−46	»	−41	»	−44	»	−53	»
13	−46	−46	−44	−43	−43	−45	»	»	−46	−43	−45	−54	−44
14	−47	»	−45	»	»	»	»	»	−47	»	−46	»	−45
15	−46	−47	»	−42	−42	»	−44	−42	−46	−44	−45	»	−44
16	»	−48	»	−41	»	−44	»	−43	»	»	»	»	»
17	−45	−49	−46	»	−41	−43	−45	»	−47	−43	−46	−53	−45
18	−44	»	»	»	−42	»	−46	»	−46	»	−45	»	−44
19	−43	»	−45	»	−41	−42	−45	−44	−47	−42	−46	−52	»
20	»	»	»	−40	»	−43	»	−43	»	−41	»	−53	»
21	−44	»	−46	−39	−42	−42	−44	−42	»	−42	−47	−52	−43
22	−45	»	−45	»	−43	»	»	»	−48	»	−48	»	−42
23	−46	−48	−44	−40	»	−43	−45	−43	−49	−41	»	−51	−41
24	»	−47	»	−39	»	−44	»	−44	»	−40	»	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−45	»	−43	»	−44	»	−46	»	−50	»	−49	»	−42
27	−46	−48	−44	−38	−45	»	−45	−45	−49	−41	−50	−50	−41
28	»	−47	»	»	»	−43	»	−44	»	−42	»	−51	»
29	−47	»	−43	−39	−46	−42	−46	−45	−48	−41	»	−50	−40
30	−46	»	−42	»	−45	»	−47	»	»	»	−51	»	−41
31	−45	−48	−41	−40	−44	−41	»	−46	−47	−42	»	−51	−42
32	»	−47	»	−39	»	−40	»	−45	»	−43	»	−50	»
33	−46	−48	»	−38	−43	−39	−48	−46	−46	»	»	»	−41
34	»	»	−42	»	»	»	»	»	−47	»	−52	»	−42
35	−45	−49	−43	»	−44	−40	−47	»	−46	−42	−53	−51	−41
36	»	−48	»	−39	»	»	»	−47	»	−41	»	−50	»
37	−44	−47	−42	»	−45	−39	−46	−48	−47	−40	−54	−51	»
38	−43	»	−43	»	−46	»	−47	»	−46	»	»	»	−42
39	−42	−46	−44	»	−47	»	−46	−49	»	−41	−55	−52	−43
40	»	−45	»	−40	»	−40	»	−50	»	−42	»	−51	»
41	−43	−44	−45	−41	»	−41	−45	−51	−45	−41	−54	−50	−42
42	−42	»	»	»	−46	»	−46	»	−46	»	−55	»	−41
43	»	−45	−44	−40	−47	−40	−45	−50	−45	»	−56	−49	−42
44	»	−44	»	−41	»	−41	»	»	»	−42	»	−48	»
45	−41	−45	−45	−42	−48	»	−44	−49	−44	−43	−55	−47	−43
46	−40	»	−46	»	−49	»	−45	»	−45	»	−56	»	»
47	»	»	−45	−43	»	−42	−46	−48	−44	−44	»	−46	−44
48	»	−46	»	−44	»	−41	»	−49	»	−45	»	−45	»
49	−41	−47	−44	−43	−50	−42	−46	−48	−45	−46	−55	−44	−43

147000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	-43	-47	-38	-37	-48	-48	-45	-48	-48	-46	-36	-37	-42
1	-42	-48	-39	-38	-49	-49	»	-49	»	»	-37	-38	-43
2	»	-47	»	-37	»	»	»	-50	»	-47	»	-39	»
3	-43	-48	-38	-36	»	-48	-46	-51	-47	-48	-38	-40	-44
4	-42	»	»	»	-50	»	-45	»	-48	»	-37	»	-43
5	»	-47	»	-37	-51	-49	-44	-50	-47	»	-38	-41	-44
6	»	»	»	-38	»	-48	»	»	»	-47	»	-42	»
7	»	-46	-37	-39	-52	»	-43	-49	-46	-48	-39	-41	»
8	-43	»	-36	»	-53	»	-42	»	-45	»	-40	»	»
9	-42	»	-35	-40	-52	-49	-41	-48	-46	-47	»	-42	-45
10	»	-45	»	-39	»	-50	»	-47	»	-46	»	-43	»
11	-41	-44	-36	-40	»	-49	»	-48	-45	-45	-39	-44	-40
12	-40	»	-35	»	»	»	-42	»	»	»	-40	»	-47
13	-41	-43	»	-39	-53	-50	-41	-47	-44	-44	-41	»	-48
14	»	-44	»	-40	»	-49	»	-48	»	»	»	-43	»
15	-40	-45	-36	-39	-54	-48	-42	»	-45	-43	-42	-42	-47
16	-41	»	-35	»	-53	»	-41	»	-44	»	-41	»	-40
17	-40	-44	-36	»	-52	-49	-40	-49	-45	-42	-40	-41	»
18	»	»	»	-40	»	-48	»	-48	»	-43	»	-40	»
19	-41	-45	-35	-41	-51	-47	-41	-47	»	-42	-41	-41	-47
20	-40	»	-34	»	-50	»	»	»	-46	»	-42	»	-46
21	-41	-44	-33	-40	»	-48	-42	-48	-45	-41	-41	-42	-45
22	»	-43	»	-41	»	-47	»	-47	»	-40	»	»	»
23	»	-42	»	-42	-49	-48	-41	-46	-46	»	-40	-43	-46
24	-40	»	-32	»	-50	»	-42	»	-47	»	-39	»	-45
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	-41	»	»	»	-49	»	-45	»	-41	»	-42	»
27	-41	»	-33	-43	-51	»	-43	-44	-46	-40	»	-43	-44
28	-42	»	-32	»	-50	»	-44	»	»	»	-38	»	-45
29	-43	-40	-31	-44	-49	-48	»	-45	-45	-39	-39	-44	-46
30	»	-41	»	-45	»	-47	»	»	»	-40	»	-45	»
31	-44	-40	»	-44	-48	-46	-43	-46	-46	-39	-38	»	-45
32	»	»	-32	»	»	»	-44	»	-47	»	-39	»	-40
33	-45	-41	-33	-45	-49	-47	-45	»	-48	-38	-40	-44	-47
34	»	-40	»	-44	»	»	»	-45	»	-39	»	-43	»
35	-46	-39	-34	»	-50	-46	-44	-46	-49	-38	-39	-44	»
36	-47	»	-35	»	-51	»	-45	»	-50	»	»	»	-40
37	-46	-38	-36	-45	-50	-47	-46	-45	»	-39	-38	-45	-47
38	»	-37	»	-46	»	-48	»	-46	»	-38	»	-44	»
39	»	-38	-35	-47	»	-49	-47	-47	-51	-39	-37	-43	-48
40	-47	»	»	»	-49	»	-48	»	-50	»	-36	»	-49
41	»	-37	-34	-46	-50	-50	-49	-48	-49	»	-35	-42	-50
42	»	-36	»	-45	»	-49	»	»	»	-38	»	-43	»
43	-46	-37	-35	-46	-51	»	-48	-47	-48	-37	-36	-42	-51
44	-45	»	-36	»	»	»	-49	»	-47	»	-35	»	»
45	-44	»	-35	-47	-50	-48	-48	-48	-46	-36	»	»	-52
46	»	-38	»	-46	»	-47	»	-47	»	-35	»	-43	»
47	-45	-37	-36	-47	-49	-46	»	-48	-47	»	-36	-42	-53
48	-46	»	-37	»	»	»	-49	»	»	»	-37	»	-54
49	-47	-38	-37	-48	-48	-45	-48	-48	-46	-36	-37	-42	-55

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	-55	-60	-61	-57	-60	-58	-62	-58	-59	-64	-65	-65	-64	-57
1	-56	-59	-62	-58	»	-59	-61	-57	-58	-63	-66	-64	-65	»
2	-55	»	»	»	-59	»	-60	»	-57	»	-67	»	-64	»
3	»	-60	-61	-59	-60	-60	-59	-58	-58	»	-66	-65	-65	-58
4	»	-59	»	-58	»	-59	»	»	»	-62	»	-64	»	-59
5	-56	-60	-60	-57	-59	»	-60	-57	-57	-63	-65	-65	-64	-60
6	-57	»	-61	»	-60	»	-59	»	»	»	-66	»	»	»
7	-56	»	-60	-58	-59	-60	-60	-58	-56	-62	»	-64	-63	-61
8	»	-59	»	-59	»	-61	»	-57	»	-63	»	-63	»	-62
9	-55	-58	-61	-58	-58	-62	»	-56	-57	-62	-65	-64	-64	-63
10	-56	»	-62	»	»	»	-59	»	-58	»	-66	»	-63	»
11	-57	-59	»	-57	-59	-63	-60	-57	-59	-63	-67	»	-62	-62
12	»	-58	»	-56	»	-64	»	-56	»	»	»	»	»	-63
13	-56	-57	-61	-55	-58	-63	-61	»	-58	-62	-68	-65	-63	-62
14	-57	»	-60	»	-57	»	-62	»	-57	»	-67	»	-64	»
15	-58	-56	-59	»	-58	-64	-61	-57	-58	-63	-66	-64	»	-63
16	»	»	»	-56	»	-63	»	-58	»	-62	»	-65	»	-64
17	-57	-55	-58	-57	-59	-64	-62	-59	»	-61	-65	-66	-63	-63
18	-56	»	-57	»	-58	»	»	»	-57	»	-66	»	-62	»
19	-57	-54	-58	-56	»	-63	-61	-58	-58	-62	-67	-65	-63	»
20	»	-55	»	-57	»	-62	»	-59	»	-61	»	»	»	-64
21	»	-56	-57	-56	-57	-63	-60	-60	-59	»	-66	-64	-62	-63
22	-56	»	-58	»	-56	»	-61	»	-60	»	-65	»	-61	»
23	-57	-55	-59	-55	-55	»	-60	-61	-61	-62	-66	-65	-60	-62
24	»	-56	»	»	»	-62	»	-62	»	-61	»	-66	»	-63
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-58	»	-60	»	-56	»	-61	»	»	»	-67	»	-61	»
27	-57	-57	-59	-54	-55	-61	»	-61	-62	-60	-68	-67	-62	-64
28	»	»	»	-55	»	-62	»	-60	»	-61	»	-66	»	»
29	-58	-56	»	-54	-54	-61	-62	»	-63	-62	-69	»	-61	-63
30	»	»	-58	»	-55	»	-61	»	-64	»	-70	»	-60	»
31	-59	-57	-57	-55	-54	-62	-60	»	-63	-61	-69	-67	»	-64
32	»	-58	»	-56	»	»	»	-61	»	-62	»	»	»	-65
33	-60	-57	-58	»	-55	-63	-59	-60	-62	-61	»	-66	»	»
34	-59	»	-59	»	-54	»	-60	»	-61	»	»	»	-59	»
35	-60	-58	-60	-57	-55	-64	-59	-59	»	-62	-68	-67	-58	-66
36	»	-57	»	-56	»	-65	»	»	»	-63	»	-66	»	-67
37	-59	-58	-59	-57	»	-64	»	-60	-60	-64	-67	-65	-59	»
38	-60	»	»	»	-56	»	-58	»	-61	»	-68	»	-60	»
39	»	-57	-58	-58	»	-63	-59	-61	-62	»	-69	-66	-61	-66
40	»	»	»	»	»	-64	»	»	»	-65	»	-65	»	-65
41	-61	-58	»	-57	-57	»	-60	-60	»	-66	-68	-64	-60	-64
42	-60	»	-57	»	-56	»	-59	»	-61	»	-69	»	»	»
43	»	»	-56	-56	-55	-63	-58	-59	-62	-67	»	-63	-59	-63
44	»	-59	»	-57	»	-62	»	-58	»	-66	»	»	»	»
45	-61	-60	-57	-58	-56	-63	»	-59	-63	-65	-68	-64	-58	-62
46	-60	»	-56	»	»	»	-57	»	-64	»	-67	»	-57	»
47	-61	-61	»	-59	-57	-62	-58	-60	-65	-64	-66	»	-56	-63
48	»	-60	»	-60	»	-63	»	-59	»	»	»	-65	»	-62
49	-60	-61	-57	-60	-58	-62	-58	-59	-64	-65	-65	-64	-57	-61

148000

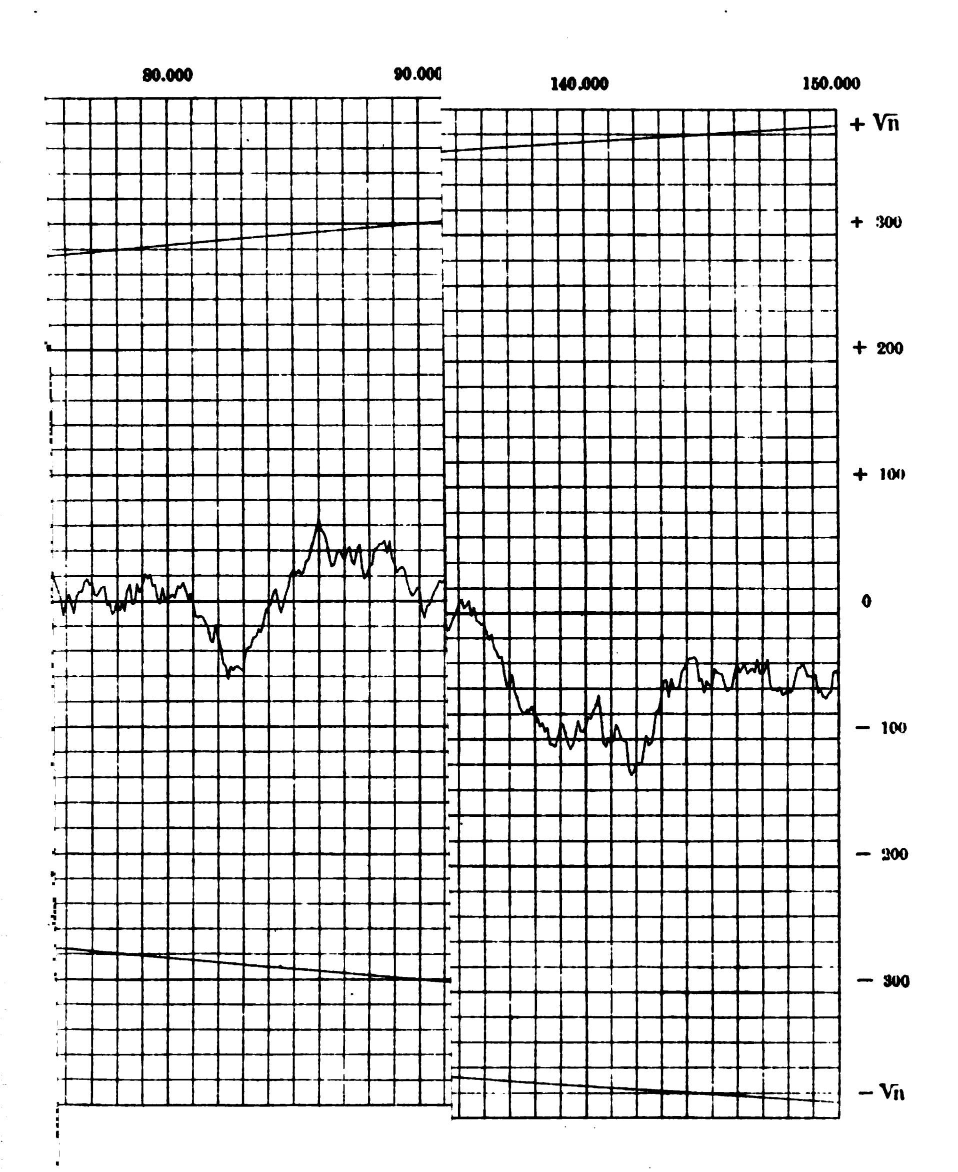
	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	−61	−56	−63	−57	−61	−62	−52	−51	−44	−46	−44	−47	−41
1	−60	−57	−62	−58	−62	−61	−53	−50	»	−45	−45	»	−40
2	−59	»	−61	»	−61	»	»	»	−43	»	−46	»	−41
3	»	−58	−60	−59	»	−60	−54	−49	−44	−44	−47	−46	−40
4	»	−57	»	−58	»	−61	»	−48	»	−45	»	»	»
5	»	−56	−61	−59	−60	−62	−55	−47	−45	»	−48	−45	−41
6	−60	»	−60	»	−59	»	−56	»	−44	»	−47	»	−42
7	−59	−57	−59	−60	−60	»	−55	−46	−43	−46	−46	−46	−41
8	»	−58	»	»	»	−61	»	−47	»	−45	»	−45	»
9	−58	»	−58	−59	−61	−60	−54	−48	−44	−44	»	−44	−42
10	»	»	−57	»	−62	»	−55	»	»	»	−47	»	−43
11	−59	−59	−56	−58	−63	−59	»	−49	−45	−43	−48	−45	−42
12	»	−60	»	−57	»	−58	»	−48	»	−42	»	−46	»
13	−60	−61	»	−56	»	−59	−56	−47	−46	−43	−49	»	−41
14	»	»	−57	»	−64	»	−55	»	−47	»	−48	»	−42
15	−61	−62	−58	−55	−63	−60	−54	»	−46	−44	−49	−47	−41
16	»	−63	»	−56	»	»	»	−48	»	−45	»	−46	»
17	−60	−62	−57	»	−62	−61	−55	−49	−45	»	−50	−47	»
18	−61	»	−58	»	−61	»	−54	»	−44	»	»	»	−42
19	−60	−61	−59	−57	−62	−62	−53	−50	»	−46	»	−46	−41
20	»	−62	»	−58	»	−63	»	−49	»	»	»	−45	»
21	−61	−61	−58	−59	»	−62	−52	»	»	−47	−51	−44	−42
22	−60	»	»	»	−63	»	−51	»	−43	»	−50	»	−41
23	»	−62	−59	−58	−62	−61	»	−48	−44	»	−49	−45	−42
24	»	−63	»	−57	»	»	»	»	»	−48	»	−44	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	−61	»	−60	»	−63	»	−50	»	−45	»	»	»	»
27	−60	»	»	−56	−62	−60	−49	−47	−44	−47	»	−45	−43
28	»	»	»	−57	»	−59	»	−46	»	−46	»	−46	»
29	»	−64	−59	−56	−63	−60	»	−45	−45	−47	−48	−47	−42
30	−59	»	−60	»	»	»	−50	»	−46	»	−47	»	−41
31	−60	−63	»	−57	−62	−59	−51	−46	−45	−46	−48	»	−42
32	»	−62	»	−58	»	−60	»	»	»	»	»	−48	»
33	−59	−63	−59	−57	−61	−59	−52	»	−44	−47	−47	−47	−43
34	−58	»	−58	»	−62	»	−51	»	−45	»	−48	»	−42
35	−57	−64	−57	»	−63	−60	−52	−47	−46	−46	−49	−46	»
36	»	»	»	−56	»	−59	»	−46	»	−47	»	−45	»
37	−56	−65	»	−55	−62	−58	−51	−47	»	−46	−50	−44	−41
38	−55	»	−58	»	−61	»	»	»	−45	»	−49	»	−40
39	−54	−64	−59	−56	»	−57	−52	−46	−46	−45	−50	−43	−41
40	»	−63	»	−57	»	−56	»	−47	»	−44	»	»	»
41	»	−64	−58	−58	−60	−55	−53	−46	−45	»	−49	−42	−40
42	−53	»	−57	»	−59	»	−54	»	−44	»	−48	»	−41
43	−52	−63	−56	−59	−60	»	−53	−45	−43	−43	−47	−41	−40
44	»	−62	»	»	»	−56	»	−44	»	−44	»	−40	»
45	−53	»	−55	−60	−61	−55	−52	−43	−44	−45	»	−41	−39
46	−54	»	−56	»	−62	»	»	»	»	»	»	»	−38
47	−55	−63	−57	−61	−61	−54	»	−42	−45	−44	−46	−40	−37
48	»	−64	»	−60	»	−53	»	−43	»	−45	»	−41	»
49	−56	−63	−57	−61	−62	−52	−51	−44	−46	−44	−47	−41	−37

149000

	650	700	750	800	850	900	950	000	050	100	150	200	250
0	−37	−45	−48	−50	−44	−50	−51	−51	−46	−49	−56	−63	−57
1	−36	−44	−47	−49	»	−49	»	−50	−47	−50	−57	−64	−58
2	»	−45	»	−50	»	−50	»	−49	»	−49	»	»	»
3	»	−44	−46	−51	−45	−51	−50	−48	−48	»	−58	−63	−57
4	−35	»	−45	»	−46	»	−49	»	−47	»	−59	»	»
5	−36	−43	−44	−50	−47	»	»	−49	−46	−50	−60	»	−56
6	»	−42	»	»	»	−50	»	−48	»	−51	»	−64	»
7	−35	»	−45	−49	»	−49	−50	−47	−47	»	»	−63	−57
8	−36	»	−46	»	−48	»	−51	»	»	»	−59	»	−58
9	−37	»	−45	−48	−49	−48	»	»	−48	−52	−60	−64	−59
10	»	−41	»	−47	»	−49	»	−46	»	−53	»	−63	»
11	−36	−42	»	−46	−50	»	−52	−47	−49	−54	−61	»	−58
12	»	»	−44	»	»	»	−53	»	−48	»	−62	»	−59
13	−37	−43	−45	»	−49	−50	−52	»	−47	−55	−63	−64	−58
14	»	−42	»	−47	»	»	»	−46	»	−56	»	−63	»
15	−38	»	−44	»	−50	−49	−53	−45	−48	−57	−62	−64	»
16	»	»	−43	»	−49	»	−54	»	−49	»	»	»	−59
17	−39	−41	−44	−48	−50	−48	−55	−44	»	−56	−61	−63	−58
18	»	−40	»	−47	»	−47	»	−43	»	−55	»	−62	»
19	−40	−41	−43	−48	»	−46	−54	−44	−50	−56	−62	−61	−59
20	−41	»	»	»	−51	»	−55	»	−49	»	−61	»	−60
21	»	−42	−44	−49	−50	−47	−54	−45	−48	»	−62	»	−59
22	»	−41	»	−48	»	−48	»	»	»	−55	»	−60	»
23	−42	−42	−45	−47	−51	»	−55	−46	−47	−54	−63	−59	−58
24	−41	»	−46	»	−50	»	−54	»	−48	»	−62	»	»
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	»	−41	»	−46	»	−49	»	−47	»	−55	»	−58	»
27	−40	−42	−45	−45	»	−50	»	−48	−49	−56	−63	»	−59
28	−41	»	−46	»	»	»	−53	»	−50	»	»	»	−60
29	−40	−41	»	−46	−49	−51	−52	−47	−49	−55	−62	»	−59
30	»	−40	»	»	»	−50	»	−46	»	»	»	−59	»
31	−39	−41	−47	−45	−48	−51	−51	»	−48	−56	−61	−58	−60
32	−40	»	−46	»	−47	»	−52	»	−49	»	−62	»	−61
33	−41	−42	−47	»	−46	−52	−53	−47	−48	−55	−63	−57	»
34	»	»	»	−46	»	−53	»	−46	»	−54	»	−56	»
35	−42	−43	−48	»	−47	−54	−54	−47	»	−55	−62	−57	−62
36	−43	»	−49	»	−46	»	»	»	−47	»	−63	»	−61
37	−44	−44	−48	»	»	−53	−53	−46	−48	−54	»	−56	−62
38	»	−45	»	−45	»	−52	»	−47	»	−55	»	»	»
39	»	−44	−49	−44	»	−51	−52	−48	−49	»	−62	−57	−63
40	−45	»	−50	»	−47	»	−51	»	−48	»	−61	»	−64
41	−46	−45	−49	−45	−48	»	−52	−47	−47	−56	−60	−56	−63
42	»	−46	»	»	»	−50	»	−46	»	−57	»	−57	»
43	−47	»	−50	−44	−49	−49	−53	−45	»	−58	»	−56	−62
44	−48	»	−51	»	−50	»	−52	»	»	»	−59	»	−63
45	−47	−47	−50	−45	−51	−48	»	−46	−46	−57	−60	−57	−62
46	»	−46	»	−46	»	−49	»	−47	»	−56	»	−56	»
47	−46	−47	»	−45	−52	−50	−53	−46	−47	−57	−61	»	−63
48	»	»	−49	»	−51	»	−52	»	−48	»	−62	»	−62
49	−45	−48	−50	−44	−50	−51	−51	−46	−49	−56	−63	−57	−61

	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
0	-61	-66	-66	-63	-68	-71	-64	-66	-62	-59	-47	-47	-46	-50
1	»	-67	»	-64	-67	-72	-65	-65	-61	»	-46	-46	-47	-55
2	-62	»	-67	»	-68	»	-66	»	»	»	-47	»	-48	»
3	»	-66	-66	-63	-69	»	-67	-64	-62	-60	-48	-45	»	-56
4	»	-67	»	»	»	-71	»	-63	»	-59	»	-46	»	-57
5	-63	»	-65	-64	-70	-72	-66	-62	-63	-60	»	-45	-49	-56
6	-62	»	-64	»	-69	»	-65	»	»	»	-47	»	-50	»
7	-63	-66	-63	-63	-68	-71	»	-61	»	-59	-46	-44	-51	-55
8	»	-67	»	-62	»	-70	»	-62	»	-58	»	-43	»	»
9	-64	-68	»	-63	-67	-69	»	-61	-64	-59	-45	»	-52	-54
10	»	»	-62	»	-68	»	-64	»	-63	»	-44	»	-53	»
11	-63	-67	-63	-62	-67	-70	-63	»	-64	-58	-43	-44	-54	-53
12	»	-66	»	-61	»	»	»	-60	»	-59	»	-45	»	-54
13	-64	-65	»	»	-66	-71	-62	-59	-65	-58	-42	-46	»	-53
14	»	»	-62	»	-67	»	-63	»	-64	»	»	»	-55	»
15	-63	-64	-61	-62	-68	»	-64	-60	»	-57	»	-45	-54	-54
16	»	-63	»	-61	»	-70	»	-61	»	-56	»	-44	»	-55
17	-64	-62	-62	-60	»	-69	-65	-62	-65	-57	-41	-45	-53	»
18	-65	»	»	»	-67	»	-66	»	-66	»	-42	»	-52	»
19	»	-63	-63	-59	-68	-70	-67	-63	-65	»	-41	-44	»	-56
20	»	-64	»	-60	»	-71	»	»	»	-56	»	-43	»	-55
21	-66	-65	-62	-61	-69	»	-66	-62	-64	-57	-42	-42	-53	-56
22	-65	»	-61	»	-68	»	-65	»	-63	»	-43	»	»	»
23	-66	»	-62	-60	-67	-70	-66	-61	-64	-58	»	-43	-52	-55
24	»	-64	»	-61	»	-69	»	-62	»	-57	»	-44	»	-54
25	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
26	-67	»	-61	»	»	»	-67	»	-65	»	-44	»	-53	»
27	-66	-65	»	-62	-68	-70	-68	»	-66	-56	-45	»	-52	-53
28	»	-66	»	-61	»	-69	»	-63	»	»	»	-45	»	-52
29	-65	-65	-60	-62	-67	-70	-69	»	-67	-55	-44	-44	-53	-51
30	-64	»	-61	»	-66	»	-68	»	-66	»	-45	»	-54	»
31	-63	-66	-62	»	-67	-69	-67	-62	-67	-54	-46	-43	»	-52
32	»	»	»	-63	»	-70	»	-63	»	-53	»	-42	»	-51
33	-64	-65	-61	-62	-68	-69	-68	»	»	-52	-45	-43	-53	-50
34	-65	»	-60	»	-67	»	»	»	»	»	-46	»	-54	»
35	-64	-64	»	-63	»	-68	-67	-62	-66	-53	-45	-44	-55	»
36	»	-65	»	-64	»	-67	»	-61	»	-52	»	»	»	-51
37	»	-64	-59	-65	-66	-66	-68	-60	-65	»	-46	-43	-54	-50
38	-65	»	-58	»	-67	»	-69	»	-64	»	-47	»	-55	»
39	-66	-65	-59	-66	-66	»	-68	-61	-63	-51	-48	-44	-50	»
40	»	-66	»	»	»	-65	»	-62	»	-50	»	-43	»	-49
41	-67	»	-60	-67	-67	-66	-67	-63	-62	-51	»	»	-57	»
42	-68	»	-61	»	-66	»	-66	»	»	»	»	»	-56	»
43	-69	-67	-62	-66	-67	-65	»	-62	-61	»	-47	-44	-57	-50
44	»	-66	»	-65	»	-64	»	-61	»	-50	»	-45	»	»
45	-68	-65	»	-66	-68	-65	»	»	-60	-49	-48	»	-56	-51
46	»	»	-63	»	-69	»	»	»	-59	»	-47	»	-55	»
47	-67	-66	-64	-67	-70	»	-65	»	-58	-48	-48	-44	-56	-50
48	»	-65	»	-68	»	»	»	»	»	»	»	-45	»	-51
49	-66	-66	-63	-68	-71	-64	-66	-62	-59	-47	-47	-46	-56	-50

√n im Intervalle vo



Optische Untersuchung der Luftstrahlen

von

M. U. Dr. **Ludwig Mach** in Jena.

(Mit 4 Tafeln und 26 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. October 1897.)

Vorliegende Mittheilung enthält den Bericht über eine Reihe von Versuchen, welche an eine ältere Arbeit[1] anknüpfen. Ich habe mich bemüht, die Methoden zu verbessern und reinere Resultate zu erzielen. Die Luftstrahlen wurden sowohl nach der Schlierenmethode, als auch mit dem von mir beschriebenen Interferenzrefractometer untersucht.[2] Dass in beiden Fällen, wegen der geringen Grösse des Compressionsgefässes und der raschen Druckänderung in demselben keine Dauerbeobachtungen angestellt werden konnten, sondern Momentphotographien aufgenommen werden mussten, vermindert wesentlich den Werth meiner Untersuchung, welche in Folge dieses Umstandes als eine vorwiegend qualitative angesehen werden muss. Dennoch sind die beobachteten Erscheinungen, die auch dem Mathematiker Anregungen bieten möchten, interessant genug, um mitgetheilt zu werden.

Ich werde zunächst die Versuche nach der Schlierenmethode, dann jene nach der Interferenzmethode beschreiben.

Aufstellung für die Schlierenversuche.

Es handelte sich darum, das kleine Feld der älteren Versuche zu vergrössern, und zugleich mehr ins Einzelne aus-

[1] E. Mach und P. Salcher, Optische Untersuchung der Luftstrahlen. Diese Sitzungsber., Bd. XCVIII, Abth. II. a., November 1889.

[2] L. Mach, Akademischer Anzeiger, 1891, Nr. 22, 5. November. — Über ein Interferenzrefractometer. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a., Jänner 1892. — Über ein Interferenzrefractometer. Ebendaselbst, Bd. CII, Abth. II. a., October 1893. — Akademischer Anzeiger, 1893, Nr. 19, S. 198.

gearbeitete Bilder der Strahlen zu erhalten. Dies wurde in folgender Weise erzielt:

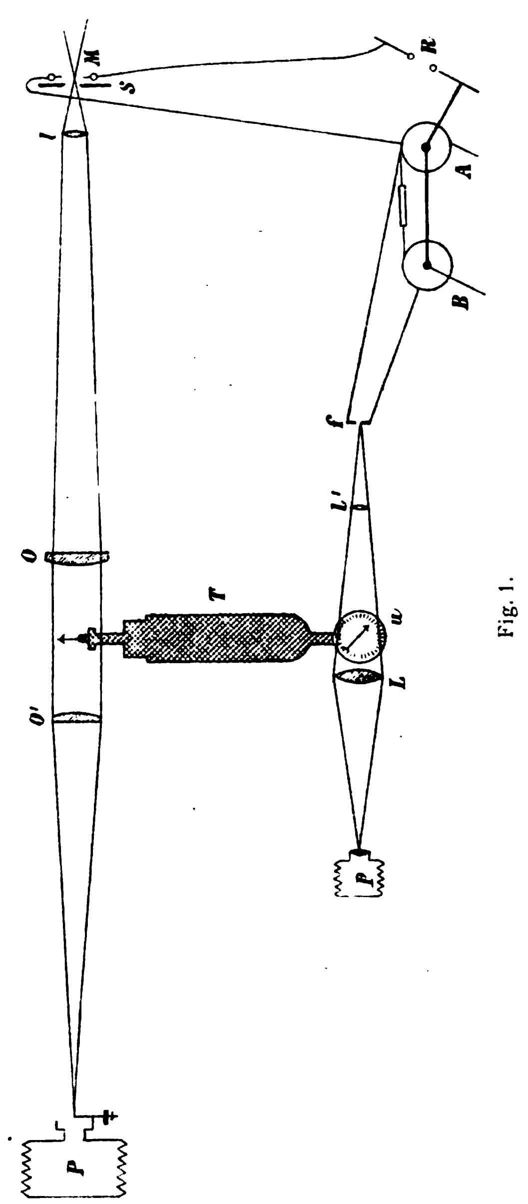


Fig. 1.

Das von der Spalte S (Fig. 1) ausgehende und durch die Beleuchtunglinse l zusammengehaltene Licht wird durch ein

grosses achromatisches Objectiv *O* (21 *cm* freie Öffnung und 3 *m* Brennweite) parallel gemacht. Ein zweites, kleineres Objectiv O′ von 10·2 *cm* Öffnung[1] sammelt dieses Licht in seinem Focus (von 143 *cm*) auf der Schlierenblende des photographischen Apparates *P*, welch letzterer auf den zwischen den beiden Objectiven hindurchfahrenden Luftstrahl eingestellt ist, und mit Hilfe eines Steinheil'schen Gruppen-Antiplanetes (von 78 *mm* Öffnung und 44 *cm* Focus) ein etwa 36 *mm* im Durchmesser haltendes Bild des 10 *cm* grossen Objectivfeldes entwirft.

Als Lichtquelle diente diesmal eine kleine genau zugemessene Quantität Magnesium-Blitzpulver, die hinter der Spalte *S* mit Hilfe eines Flaschenfunkens entzündet wurde. Bei Anwendung einer Zündlunte verbrennt, wie es scheint, das Pulver langsamer und gibt verwischte Bilder.[2]

Die beiden Flaschen *A* und *B*, deren äussere Belegungen durch eine Wasserröhre getrennt sind, werden durch die Maschine geladen. Sobald man das Sausen des Strahles hört, wird die Flasche *A* durch einen Schiebauslader *R* entladen, und bringt das Magnesiumpulver bei *M* zur Entzündung. Ferner entlädt sich *B* durch die Funkenstrecke *f* und den Bogen der äusseren Belegungen nach *A*, wodurch gleichzeitig mit der Aufnahme des Schlierenbildes der Stand des Manometers *u* durch den kleinen photographischen Apparat *p* registrirt wird. Die Rückwand und das Scalenblatt des Manometers waren diesmal aus Glas.

Gelegentlich habe ich auch den von einer kleinen hellen Lichtquelle geworfenen Schatten des Luftstrahles auf einem Schirm beobachtet, oder auf einer photographischen Platte aufgefangen (Dvořák's Verfahren).

---

[1] Herr Director Prof. Weiss hatte die besondere Freundlichkeit, mir dieses von Sir Howard Grubb in Dublin verfertigte Glas für diese Untersuchung auf einige Zeit zu überlassen.

[2] Das Licht einer elektrisch entzündeten Pulvermenge von 0·1 *g* Gewicht dauert ungefähr 0·04 bis 0·05″, wogegen eine gleiche Menge mit Luntentzündung in einer Zeit von 0·06 bis 0·1″ zur Verbrennung kommt.

Vergl.: »Über die Dauer verschiedener Momentbeleuchtungen«, von L. Mach, in Eder's Jahrbuch für Photographie und Reproductionstechnik. Jahrgang 1893.

Ein verwandtes Verfahren, welches gestattet, den Strahl ohne Anwendung eines photographischen Objectives in natürlicher oder beliebiger anderer Grösse aufzunehmen, möge noch kurz erwähnt werden. Der Strahl strömt (Fig. 2) vor einem grossen achromatischen Objective *O*, in dessen doppelter Brennweite mit Hilfe der Linse *l* ein Sonnenbild *s* entworfen ist. Ein zweites achromatisches Objectiv *O'* kürzt das conjugirte Bündel ab, so dass man bei Anwendung der Schlierenblende *b* den

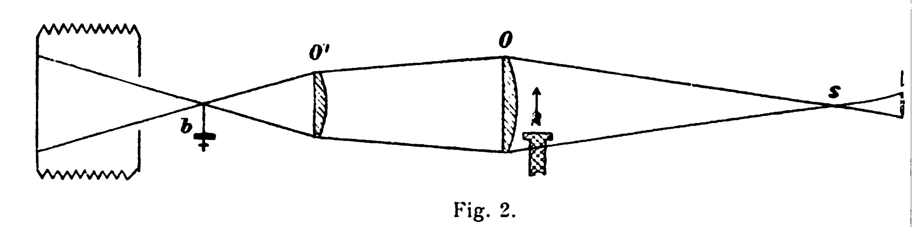


Fig. 2.

Strahl in natürlicher Grösse mit Hilfe eines vor das Sonnenbildchen *s* angebrachten und genau abgestimmten Momentverschlusses photographiren kann.

Auch ein Hohlspiegel wurde zuweilen, wie schon bei den älteren Versuchen, als Kopf des Schlierenapparates verwendet.

Der Verdichtungsrecipient.

Der Verdichtungsrecipient *T* (Fig. 1) bestand aus einem Mannesmannrohre,[1] und war, wie in Fig. 3 ersichtlich ist, wegen seines bedeutenden Gewichtes auf einem Gestelle fahrbar angebracht. Das Rohr lag in vertical verschiebbaren Backen, und während die unteren Schrauben die genaue Höhenstellung für den Pumpenansatz gestatteten, dienten die oberen bloss zur Fixirung in dieser Lage.

Der gebräuchliche Druckkegelverschluss[2] kann nur dann zur Anwendung kommen, wenn ausreichend grosse Com-

[1] Dieses Rohr wurde von der Filiale der deutschösterreichischen Mannesmannwerke in Komotau in Böhmen in der zuvorkommendsten Weise angefertigt.

[2] Bekanntlich sind die Compressionsgefässe so eingerichtet, dass durch eine Schraube mit grossem Torsionskopf ein Hartgusskegel in einen entsprechend fein ausgeschliffenen Hohlkegel hineingepresst wird. Beim Öffnen

pressionskessel zur Verfügung stehen, denn bevor ein solcher Verschluss genügend aufgeschraubt ist, hat ein kleinerer Recipient den grössten Theil seiner Ladung abgegeben. Nur wenn ein geräumiger in der Axe des Verdichtungsrohres liegender Ausflussschnabel durch eine genügend grosse und schön cylindrische Bohrung plötzlich mit dem Verdichtungsraume in Verbindung gesetzt wird, kann man, auch wenn ein kleineres Ver-

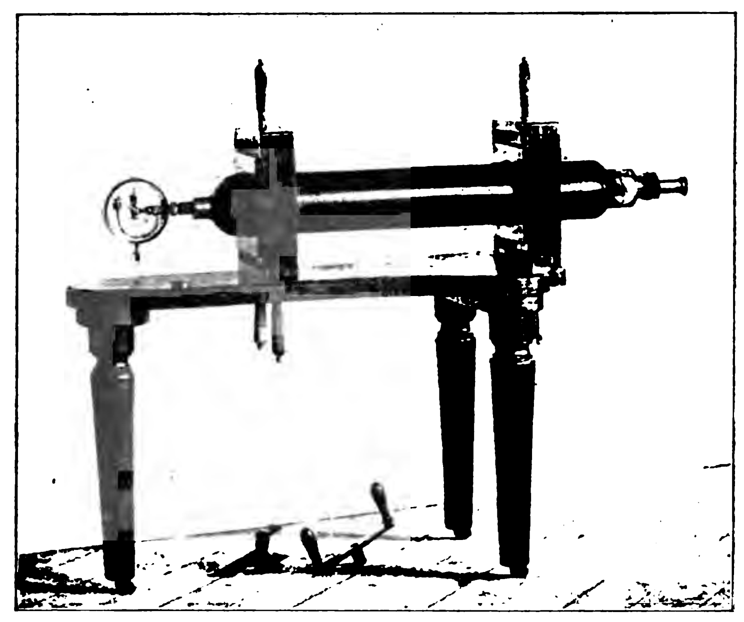


Fig. 3.

dichtungsrohr zur Verfügung steht, bei entsprechend raschem Experimentiren Strahlen hoch comprimirter Luft (bis gegen 100 Atmosphären) aufnehmen.

Diesen Zweck erfüllt der bei diesen Versuchen verwendete Verschluss. In Fig. 4 ist der Durchschnitt desselben in $^1/_3$ der natürlichen Grösse reproducirt. Fig. 3 gibt die Aussenansicht.

strömt nun die Luft durch die Spalte, füllt einen kleinen Vorraum aus und fliesst durch den unter rechtem Winkel zur Längsaxe des Gefässes stehenden Ausflussschnabel ab. Von der Verwendung eines solchen Verschlusses müsste man auch bei genügend grossen Compressionskesseln Abstand nehmen, da durch die Knickung des Luftstromes mannigfache Störungen im Luftstrahl hervorgebracht werden.

Die Stirnfläche des Mannesmannrohres *MM* ist mit einem Gewinde versehen, in das der aus Aluminiumbronce gefertigte Metalltheil *TT* unter Anwendung von Rose's Metall luftdicht eingeschraubt ist. Die cylindrische Bohrung ist durch den aus einer härteren Aluminiumlegirung (Ferroaluminium) hergestellten Hahnkörper *HH* unterbrochen. Derselbe trägt auf der breiteren Fläche einen eingefrästen Schnitt, so dass er mit Hilfe eines Schraubenziehers unter Anwendung von Ölstein

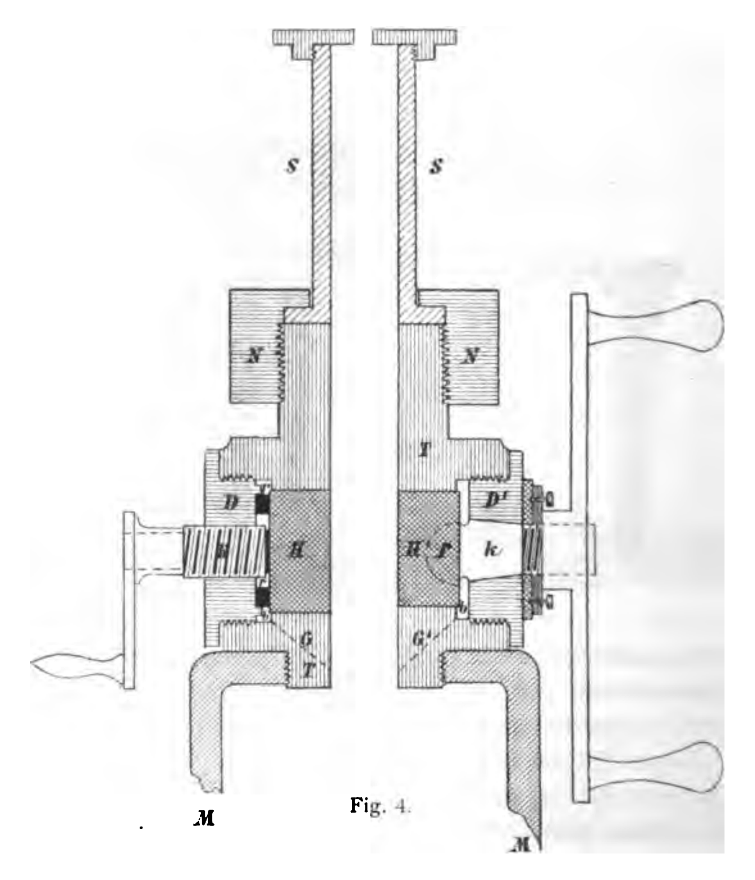


Fig. 4.

jederzeit bis zur Flächenadhärenz nachgeschliffen werden kann, wobei man aber sorgfältig darauf achten muss, dass alle Metalltheile die gleiche Temperatur haben. Der Ausflussschnabel oder der Pumpenansatz wird mit Hilfe der Holländermutter *NN* festgehalten.

Die zu beiden Seiten des Hahnes ausgedrehten Räume werden durch die mit Gewinden versehenen Metalldeckel *DD'* verschlossen. In einem derselben bewegt sich luftdicht ein Kegel *k*, dessen vorderes Ende scheibenförmig zugefräst ist, und in eine entsprechende (gestrichelt angedeutete) Ausfräsung des Hahnkörpers eingreift. Die den Kegel *k* in seiner Lage haltenden Muttern *mm'* haben an einem Hemmungsstift Anschlag, und ermöglichen es so, den Hahn mit Hilfe eines zweiarmigen Schlüssels rasch und sicher um 90° zu drehen. Würde aber der Hahn nicht von der anderen Seite in sein Lager gepresst, so würde die Luft zwischen den Contactflächen entweichen. Ein Gummiring *rr* hält nun den Hahn genau in seinem Lager, und wenn der gefüllte Recipient längere Zeit ohne Druckverlust stehen soll, so bedient man sich der an der Stirnfläche mit einer Hartgummiplatte versehenen Knebelschraube *k*, mit deren Hilfe der Hahnkörper in sein Lager gedrückt werden kann. Die auf diese Weise erzielte Dichtung ist sehr vollkommen. Der Druck des auf 80 Atmosphären geladenen Recipienten sinkt in 48 Stunden um kaum 3 Atmosphären. Eine Füllung von 30 Atmosphären hatte ich einmal durch 6 Wochen ohne merklichen Druckverlust stehen. *SS* ist der Ausflussschnabel, der mit der spaltförmig oder kreisrund durchbohrten Platte versehen wird.

Es sind noch zwei enge, durch kleine kegelförmig zulaufende Druckschräubchen absperrbare Bohrungen *GG'* an dem Verschlusse vorhanden, durch welche die Räume *b* und *b'* mit dem Compressionsraume communiciren. Um die Figur nicht zu compliciren, sind diese Canäle bloss durch gestrichelte Linien angedeutet.

Wird nun die Knebelschraube *k* durch einen einfachen Verschlusspfropfen ersetzt, und lässt man den Verdichtungsraum mit den Räumen *b* und *b'* in Verbindung, so wird der Hahn mit einem der Flächendifferenz der Stirnflächen entsprechenden und der Compression proportionalen Druck in sein Lager gepresst. Mit steigendem Druck wächst auch der Dichtungsdruck des Hahnes. Dies ist die zweite mögliche Verwendungsart des Verschlusses. Sperrt man die beiden Canälchen ab, so verwendet man die Vorrichtung in der schon früher beschriebenen Art und Weise.

In seltenen Fällen kommt es vor, dass der Hahn sich festsetzt, d. h., dass man ihn nicht mehr mit Hilfe des Schlüssels drehen kann. Ein Öffnen des Verschlusses bei geladenem Recipienten etwa durch Losschrauben der Platte *D* wäre gefährlich. In einem solchen Falle lüftet man die Verschlussschraube des Canales *G'*; die Luft dringt dann in den Raum *b'* ein und hebt den Hahn aus seinem Lager.

Die Verbindung des Recipienten mit der Pumpe geschah bei Compressionen bis zu 15 Atmosphären mit Hilfe der bekannten Verschraubung mit Bleizwischenlagen, bei hohem Druck dagegen durch Verlöthung mit Woods Metall.

Die zur Compression dienende Pumpe war in allen ihren Theilen mit Rose's Metall gedichtet, welches ein derbes Anziehen der Gewinde überflüssig machte, und gleichzeitig eine absolut sichere Dichtung bildete.[1]

Um rasch pumpen zu können, wurde bei einer guten Pumpenschmierung (Reissert'sche Fettpatronen) der Cylinder in einen Kühlmantel eingeschlossen, durch den fortwährend reichlich kaltes Wasser strömte. Trotzdem wurde das Lederhütchen des Plungers rasch verkohlt, da die Pumpe wie ein pneumatisches Feuerzeug wirkt. Imprägnirt man aber das Leder bevor es in die Form gepresst wird unter dem Recipienten einer Luftpumpe mit einer Fettmischuug (Lanolin und Wachs), so ist es beinahe unverwüstlich. Um die Luft gut zu trocknen, wurde dieselbe durch zwei Wulf'sche Flaschen mit concentrirter Schwefelsäure und ein circa 3 *m* langes Chlorcalciumrohr von der Pumpe angesaugt. Damit nicht durch das Spiel des Ventiles Öl in den Recipienten gelangt, wurde vor dasselbe ein kleiner Schirm angebracht, an dem das Öl in ein kleines Reservoire ablief, aus welchem es während des Pumpens zeitweilig abgelassen wurde.

Diese Vorsichten sind nothwendig, da sonst der Strahl durch Öl, niedergeschlagenes Wasser, beziehungsweise Eis, getrübt wird. Ohnehin kann man nicht verhindern, dass die den Strahl umgebende Luft durch Abkühlung sich trübt; man müsste denn in vollkommen wasserfreier Luft arbeiten.

[1] Vergl. L. Mach, Über Dichtungen für Vacuum und Druck. Zeitschrift für Instrumentenkunde, November 1893.

Der auf 400 Atmosphären geprüfte Recipient hatte einen Kubikinhalt von 12 *l*. Es wurden bei allen Versuchen nur zwei Ausflussöffnungen verwendet: eine kreisrunde von 7·5 *mm* Durchmesser und eine rechteckige von 23×3·5 *mm* Grösse.[1]

Theoretische Betrachtung des Ausströmens der Gase.

Die Vorgänge beim Ausströmen der Gase sind für gewisse einfache Fälle in den Hauptzügen wohl bekannt und theoretisch gut untersucht. In diesen allgemeinen Zügen stimmen auch die Beobachtungen mit der Theorie überein, während in den feineren Einzelheiten Erscheinungen auftreten, deren vollständige mathematische Erklärung der Theorie noch Schwierigkeiten bieten möchte, deren Beschreibung aber eben deshalb anregend wirken dürfte.

Der hier studirte Fall lässt sich in folgender Weise schematisiren. In einem grossen cylindrischen Gefäss (Fig. 5) stehe ein Gas unter dem Drucke p_1, während ausser dem Gefäss der Druck p_2 besteht. Der Querschnitt der Ausflussöffnung sei sehr klein gegen den Querschnitt des Cylinders, so dass die Geschwindigkeiten in dem Cylinder gegen jene in der Ausflussöffnung vernachlässigt werden können, und dass somit die ganze durch die Arbeit erzeugte lebendige Kraft in der Ausflussöffnung zu Tage tritt. In dem Cylinder denken wir uns einen Kolben, welcher entsprechend dem Ausflusse sehr langsam nachrückt und den Druck auf der Höhe p_1 erhält.

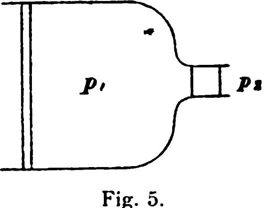


Fig. 5.

Wenn die Masseneinheit Gas vom Drucke $p_1 > p_2$ unter den Druck p_2 gelangt, vom Volum v_1 zum Volum v_2, von der Dichte ρ_1 zur Dichte ρ_2 übergeht, wobei also $v\rho = 1$ ist, so leistet

[1] Die Ausdehnung des Mannesmannrohres durch comprimirte Luft konnte man sehr gut mit Hilfe eines um den Recipienten gesteckten, mit drei Spitzschräubchen aufruhenden und an einem Punkte radial durchschnittenen Metallringes nachweisen, dessen Schnittenden mit einer Pistor-Martin'schen Fühlhebelumsetzung verbunden waren.

dieselbe die Arbeit

$$\int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{\rho_1}^{\rho_2} p d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Um diesen Betrag vermindert sich deren innere Energie. Findet der Übergang so rasch statt, dass keine Wärme zu- oder fortgeführt werden kann (adiabatisch), so hängen p, v, beziehungsweise p, ρ nach dem Poisson'schen Gesetz zusammen. Es ist $p = a\rho^{\varkappa}$, wobei a eine Constante, und $\varkappa$ das bekannte Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten (für Luft $\varkappa = 1 \cdot 408$) vorstellt. Das Integral rechter Hand nimmt dadurch die Form an

$$-a\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{\varkappa-2}.d\rho = \frac{a}{\varkappa-1}[\rho_1^{\varkappa-1} - \rho_2^{\varkappa-2}] = \frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right].$$

Gleichzeitig leistet der fingirte Kolben in dem Cylinder die Arbeit $p_1 v_1 = \frac{p_1}{\rho_1}$, und das austretende Gas verbraucht zum Wegschieben der äusseren Luft die Arbeit $p_2 v_2 = \frac{p_2}{\rho_2}$. Fügt man also dem obigen Betrage $\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$ hinzu, so stellt

$$\frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right] + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{\varkappa p_1}{\rho_1} - \frac{\varkappa p_2}{\rho_2}\right]$$

die gesammte Arbeit vor, welche sich (ohne Rücksicht auf Widerstände) in lebendige Kraft der Masseneinheit umsetzt. Für die Ausflussgeschwindigkeit u erhält man daher

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{\varkappa p_1}{\rho_1} - \frac{\varkappa p_2}{\rho_2}\right]. \qquad \ldots a)$$

Wie man sieht, stehen in der Klammer rechts die Quadrate der Schallgeschwindigkeiten im Gefäss und in der Masse des austretenden Strahles unter den thatsächlichen Umständen und man erhält also für die Ausflussgeschwindigkeit

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varkappa-1}(c_1^2 - c_2^2)}.$$

Da bei der höchsten denkbaren Druckdifferenz c_2 Null zur Grenze, so hat auch u den Grenzwerth

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}} \cdot c_1,$$

also für Luft

$$u = 2\ 214 . c_1 .$$

Ist die Temperatur in dem Gefässe 0° C., so ist der Grenzwerth der Ausflussgeschwindigkeit für Luft rund 730 *m*/sec.[1]

Nimmt der Druck im Cylinder beim Ausfluss ab, so sinkt daselbst auch die Temperatur, und c_1 nimmt ab. Da ferner die Ausdehnung nicht vollkommen adiabatisch sein wird, auch durch Reibung ein Theil der inneren Energie als Wärme an dem ausgeflossenen Gase wieder erscheint, wobei c_2 grösser wird, so wirkt Alles dahin zusammen, den wirklichen Werth der Ausflussgeschwindigkeit gegen den theoretischen zu verkleinern. Es versteht sich, dass schliesslich das ausgeströmte Gas wieder durch Reibung zur Ruhe kommt, und dass dann die ganze aus innerer Energie erzeugte lebendige Kraft wieder in Wärme verwandelt wird, so dass das Gas wieder die Temperatur erhält, welche es anfänglich im Recipienten hatte.

Die Temperaturen in dem austretenden Strahl sind natürlich tiefer als jene im Recipienten. Sie bestimmen sich entweder nach dem Poisson'schen Gesetz oder durch den Umstand, dass die Strahldichte und die Dichte der äusseren Luft sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen absoluten Temperaturen.

Bei den hier beschriebenen, im Sommer angestellten Versuchen war die absolute Temperatur im Recipienten und in der äusseren Luft rund 300° C., demnach die Schallgeschwindigkeit im Recipienten $c_1 = 346$ *m*/sec. Es ergibt sich somit folgende Tabelle, in welcher ρ_2 die Dichte im austretenden Strahl, T_2 dessen absolute Temperatur, c_2 die (normale) Schallgeschwindigkeit im austretenden Strahl und u die im Maximum theoretisch erreichbare Stromgeschwindigkeit bedeutet.

[1] Vergl. die reiche Literatur des Gegenstandes bei Lamb, Hydrodynamics. Cambridge 1895, p. 28.

$\frac{p_1}{p_2}$	5	10	15	20	25	30
p_2	1·59	1·95	2·19	2·39	2·55	2·69
T_2	188	153	137	126	118	112
c_2	274	247	233	224	216	211
u	468	535	565	583	596	606
$\frac{c_2}{u}$	0·586	0·463	0·413	0·384	0·363	0·349
α.........	36°	27° 30'	24° 20'	22° 30'	21° 20'	20° 20'

Auf die Bedeutung von α wird später hingewiesen.

Ausflussversuche von Wilde haben Osborne Reynolds[1] und ähnliche Versuche von Hirn haben Hugoniot[2] zur Entdeckung und Erklärung einer eigenthümlichen Anomalie geführt, die hier erwähnt werden muss. Es hat sich nämlich gezeigt, dass der Druckabfall in dem sich entleerenden Recipienten nur so lange vom äusseren Druck beeinflusst wird, als letzterer mehr als 0·527 des inneren Druckes beträgt. Sobald aber der äussere Druck unter diesen Betrag sinkt, hat die Abnahme desselben keinen Einfluss mehr auf die Geschwindigkeit der Entleerung. Die Auffassungen von Reynolds und Hugoniot stimmen überein. In jedem Stromfaden wechselt der Querschnitt ω, die Dichte ρ und die Geschwindigkeit u, jedoch so, dass bei stationären Strömungen wegen der Continuität $\omega\rho u =$ const. Es nimmt ω ab, wenn ρu zunimmt. Da bei adiabatischer Ausdehnung ρ und u in einfacher bekannter Weise von einander abhängen, so lässt sich zeigen, dass ρu ein Maximum und daher ω ein Minimum erreicht, sobald im Stromfaden der Druck p_2 auf

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 0{\cdot}527\, p_1$$

[1] Proc. Manch. Lit. and Phil. Soc. Nov. 17, 1885. — Phil. Mag. March 1876.

[2] Comptes-Rendus, 28 Juin, 26 Julliet, 13 Décembre 1886.

gesunken ist. Dann ist aber

$$u = \sqrt{\frac{\varkappa p_2}{\rho_2}},$$

d. h. die Schallgeschwindigkeit im Strahl ist gleich der Stromgeschwindigkeit. Die Zustände oder Vorgänge im weiteren Verlauf des Strahles können sich also nicht der Stromrichtung entgegen fortpflanzen, können daher auf den Verlauf des Ausströmens keinerlei Einfluss haben. Alles verhält sich so, als ob der Minimumquerschnitt (ω) die Öffnung, und der in derselben herrschende Druck der Aussendruck wäre. Der Minimumquerschnitt liegt nach der Vermuthung von Reynolds, welcher dieselbe auch durch einen Versuch mit ausströmenden Tabakrauch bestätigt findet, ausserhalb des sich entladenden Recipienten nahe an der Öffnung.

Bei genügend grossem $\frac{p_1}{p_2} > 1 \cdot 897 = \frac{1}{0 \cdot 527}$ herrscht also in der Ausflussöffnung jedenfalls ein Druck $> p_2$, der austretende Strahl muss sich noch weiter ausbreiten und die Lufttheile müssen noch weiter an Geschwindigkeit zunehmen. Wird $\frac{p_1}{p_2} < 1 \cdot 897$, so kann u im Stromfaden nicht so weit steigen, dass es der Schallgeschwindigkeit in demselben gleich wird. Dann herrscht in der Öffnung der Druck p_2, der Strahl breitet sich ausserhalb derselben nicht mehr aus, sondern tritt mit parallelen Stromfäden aus.

Im Allgemeinen wird diese Auffassung durch die von mir beobachteten Bilder bestätigt. Dass dieselbe quantitativ nicht ganz stimmt, liegt kaum daran, dass ich nicht mit einer Öffnung in einer dünnen Wand des Recipienten, sondern mit einem Ansatzrohr mit durchbohrter Schlussplatte experimentirte.

Ich habe mich nämlich nachträglich durch einige besondere Versuche überzeugt, dass das Bild eines Strahles, der unter 12 Atmosphären Druck ausströmt, durch die Beschaffenheit der Öffnung keine merkliche Änderung erfährt. Man kann dünne oder dicke Platten durchbohren, kann dieselben unmittelbar auf den Recipienten setzen, oder als Verschlussplatten eines Ansatzrohres verwenden — der durch die Öffnung austretende Strahl

bietet immer denselben nur durch den Druck bestimmten Anblick. Man kann den Strahl, ohne eine Änderung zu bemerken, auch durch eine seitliche Bohrung eines Ansatzrohres, also senkrecht zur Axe desselben austreten lassen. Nur wenn das Ansatzrohr zu eng ist (5 *cm*) und man kommt mit der Seitenbohrung zu nahe an die Verschlussplatte, so nähert sich die Strahlaxe der Rohraxe, der Strahl wird unruhig, pendelt hin und her, und die sonst symmetrischen Zickzacklinien, welche später erörtert werden, erfahren Verzerrungen.

Beobachtungen über den Luftstrahl nach der Schlierenmethode.

Man kann sich einen gewissen Überblick über die Vorgänge im Luftstrahl schon verschaffen, indem man diesen im verdunkelten Zimmer mit intensivem, von einem Punkte ausgehenden Lichte (am besten Sonnenlicht) beleuchtet. Bei 100 Atmosphären Druck im Compressionsgefäss sieht der Strahl wie ein 40 *cm* langer, glänzender Glasstab aus, der etwa den dreifachen Durchmesser der Ausflussöffnung hat. Weiterhin wird der cylindrische Theil des Strahles matter und übergeht in eine dicke Wirbelmasse, welche die Luft trübt, den Strahl, der allmälig dünner wird, umgibt und aufzehrt. Die letzten Ausläufer dieser Wirbelbewegung sieht man in ungefähr 1 *m* Abstand von der Ausflussöffnung. Der aus der Öffnung tretende Strahl verdickt sich daselbst plötzlich, und dort scheint in demselben ein dünnerer glänzender Cylinder vom Durchmesser der Öffnung zu stecken.

Mit abnehmendem Druck nimmt auch die Länge und Dicke des Luftstrahles ab, und zugleich ändert sich dessen Aussehen. Sinkt der Druck auf etwa 50 Atmosphären, so treten im Strahl gleichmässig vertheilte, fast äquidistante, leuchtende Knoten auf, deren Abstände bei weiter abnehmendem Druck kleiner werden. Dieselben übergehen hiebei in spitze Kegelchen, schrumpfen dann zu matteren Scheibchen oder Knötchen zusammen, und es entsteht dadurch der Eindruck, als ob der dünner werdende Strahl in das Compressionsgefäss hineinschlüpfen würde. Bei aufmerksamer Betrachtung sieht man, dass die Erscheinungen, welche bei sinkendem Druck an dem

Strahl nacheinander auftreten, auch in demselben Augenblicke nebeneinander an dem Strahl beobachtet werden können. Von der Öffnung weiter entfernte Strahlstücke nähern sich nämlich in ihrem Aussehen den Strahlenbildern, die man bei kleinerem Druck erhält. Schreitet man in der Ausflussrichtung fort, so wird der Strahl dünner, die Knoten rücken etwas näher aneinander und nehmen überhaupt die einem kleineren Druck entsprechenden Formen an. Diese Bemerkung wird uns die Interpretation der Vorgänge im Strahl erleichtern. Die ganze Folge von Erscheinungen lässt sich auch sehr schön nach dem an einer früheren Stelle angedeutetem Verfahren vergrössert auf einen Schirm projiciren und einem grossen Auditorium demonstriren.

Wem ein genügend grosser Recipient mit regulirbarem, constant zu haltendem Druck zur Verfügung steht, der kann die fraglichen Versuche sehr bequem und einfach anstellen und die Erscheinungen auch bei Dauerbeleuchtung photographiren. Bei meinen Vorrichtungen änderte sich der Druck und der Anblick des Strahles zu rasch, indem sich das Gefäss in wenigen Secunden entleerte. Ich war desshalb genöthigt, die Momentphotographie anzuwenden, wodurch namentlich die später zu beschreibenden Interferenzversuche, und insbesondere die quantitative Untersuchung wesentlich erschwert wurde.

Dass man den Strahl ohne weitere optische Vorkehrungen sehen kann, liegt an der bedeutenden Abkühlung und der derselben entsprechenden Dichte der im Strahl austretenden Luft. Auch der Umstand, dass bei kleinerem Druck der Strahl fast cylindrisch, mit dem Öffnungsdurchmesser, austritt, bei grösserem Druck aber beim Austritt seinen Durchmesser vergrössert, dass also in ersterem Falle schon in der Öffnung der äussere Luftdruck besteht, in letzterem Fall aber daselbst noch ein höherer Druck herrscht, ist nach der Theorie zu erwarten.

Schwieriger sind die im Strahl auftretenden Knoten, Kegel und Scheibchen zu verstehen. Bei Anwendung der Schlierenmethode zeigen sich nun aber an dem Strahl eine Menge der merkwürdigsten Einzelheiten. Von besonderer Wichtigkeit für die Beschaffenheit der Bilder ist hiebei die Dauer der Beleuchtung.

Das Schlierenbild, welches man bei Beleuchtung des Strahles mit einem kräftigen Flaschenfunken erhält, ist in Fig. 5, Tafel III, zu sehen. Der Strahl zeigt sich von Wirbeln überdeckt, welche durch die Mischung verschieden temperirter Luft sichtbar sind. Ausserdem ist das ganze Feld von sehr kurzen Schallwellen (ähnlich den Funkenwellen) durchzogen, die von der Öffnung auszugehen scheinen. Es ist kaum zweifelhaft, dass dieselben dem mächtigen Sausen des Strahles entsprechen, dessen Bewegung ja nur in erster Annäherung als eine stationäre angesehen werden kann. Von dem scheinbar ruhigen, glatten Strahl, den man bei Dauerbeleuchtung wahrnimmt, ist in diesem Bild nur das unmittelbar an der Öffnung liegende Stück zu sehen, und auch dieses ist durch die Wirbel- und Schallwellenbilder verzerrt. Das Bild entspricht ungefähr 33 Atmosphären. Bei geringerem Druck sind die Vorgänge in der den Strahl umgebenden Luft schwächer, und das Bild des Strahles kann auch bei Funkenbeleuchtung besser hervortreten, wie dies in Fig. 9, Tafel III, für einen Strahl bei 9 Atmosphären zu sehen ist. Immerhin ist aber auch dieses Bild getrübt und verzerrt.

Bei länger dauernder Beleuchtung können nun die turbulenten Vorgänge in der Umgebung des Strahles nicht mehr zur Abbildung gelangen. Dieselben müssen sich im Bilde verwischen. Dagegen treten die sich langsam ändernden Erscheinungen hervor, d. h. diejenigen, welche bei constantem Druck stationär sein würden. Im Allgemeinen wird also ein Bild die Überdeckung zweier verschiedener Erscheinungen enthalten, von welchen je nach der Dauer der Beleuchtung bald die eine, bald die andere besser hervortritt. Die stationäre Erscheinung wird aber in den von der Öffnung ferneren Strahlentheilen immer als durch die Wirbel getrübt sich darstellen. Von diesen Strahlentheilen kann man daher kein vollkommen reines Bild erhalten.

Von der stationären Erscheinung erhielt ich die besten Bilder bei Anwendung von elektrisch entzündetem Magnesiumblitzpulver. Fig. 1 und 2, Tafel I, sind bei dieser Lichtquelle gewonnen. Wenn die Verbrennung des Pulvers nicht auf einmal, sondern stossweise erfolgt, so erhält man mehrere inein-

andersteckende Strahlbilder, und das durch die spätere Belichtung fixirte Bild liegt, entsprechend der fortwährenden Zusammenziehung (Verkürzung) des Strahles, näher an der Ausflussöffnung. In Fig. 1 und 2, Tafel I, ist die Andeutung eines zweiten solchen natürlich schwächeren Bildes zu sehen.

Das Auffallendste an dem Schlierenbilde des Strahles sind eigenthümliche, den Strahl durchsetzende Zickzacklinien, welche zwischen sich abwechselnd helle und dunkle Felder einschliessen. Diese werden uns verständlich, wenn wir dieselben zunächst bei schwächerem Druck (6 Atmosphären) betrachten, wobei dieselben fast als einfache gebrochene Gerade erscheinen. Denken wir uns anstatt eines gewöhnlichen Projectiles eine durchbohrte ringförmige Platte, welche senkrecht

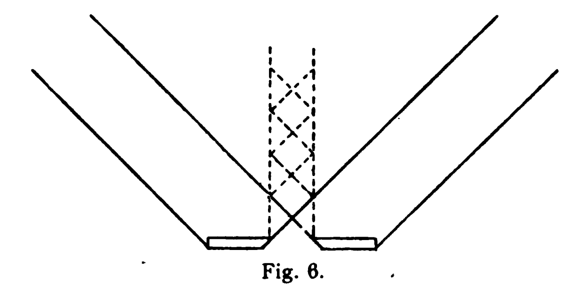


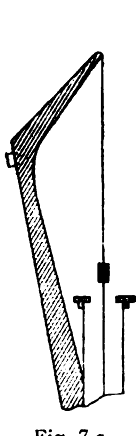
Fig. 6.

zu ihrer Ebene von oben nach unten (Fig. 6) mit grosser Geschwindigkeit fortfliegt. Dann entstehen am äusseren Rande der Platte und am inneren Rande der Bohrung die gewöhnlichen Projectil-Kopfwellen. Dieselben Wellen entstehen aber auch, wenn die Platte ruht und die Luft mit der früheren Geschwindigkeit der Platte von unten nach oben strömt. Die Kopfwellen aber, welche vorher mit der Platte fortflogen, stehen nun fest, wie an einem Brückenpfeiler. Denken wir uns nun die Platte sehr gross, so gehen uns die Wellen vom äusseren Rande nichts mehr an. Es kann aber auch die Luft nur hinter der Bohrung stark bewegt sein, d. h. es tritt ein Strahl durch dieselbe, und in diesem Strahl wird die Kopfwelle vom inneren Rande der Bohrung hin- und herreflectirt, wodurch die Zickzacklinien entstehen, welche nichts anderes sind, als conische, den Strahl durchlaufende Schallwellen, die wegen der Luftbewegung des

Strahles zu stehen scheinen. Der Vorgang ist durch die Punktirung in der Figur angedeutet. Im Strahl treten also stationäre Schallwellen auf. Die erwähnte Reflexion an der Oberfläche des Strahles wird noch erörtert.

Man kann sich von der Richtigkeit dieser Auffassung durch folgenden Versuch überzeugen.

An jedem in den Strahl eingebrachten Körper entstehen der Kopfwelle des Projectiles entsprechende Verdichtungswellen. Bringt man in den Strahl einen kleinen Metallcylinder, indem



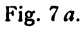


Fig. 7 *a*.



Fig. 7 *b*.

man denselben (Fig. 7 *a*) auf einen genau axial eingestellten und mit einem Wirbel spannbaren Clavierdraht auffädelt, so kann man an demselben die Kopf-, die Schwanz-, aber auch die Zwischenwellen eines Projectiles wahrnehmen (Fig. 7 *b*).

Bei einer Öffnung von 14·3 *mm* Durchmesser und einem Druck von 15 Atmosphären schloss die Kopfwelle einen Winkel von 42° mit der Cylinderaxe ein. Die Conturen der Schallwellenkegel schliessen in den Anfangstheilen des Strahles mit der Axe desselben bei einem mittleren Druck von 15 Atmosphären einen Winkel von 17° ein.

Die conische Form der den Strahl durchlaufenden Schallwellen wird recht gut ersichtlich, wenn man den Strahl zur optischen Axe des Apparates etwas schief stellt. Ein solches Bild ist in Fig. 8, Tafel III, zu sehen. Es wäre nicht schwer, die hier beschriebenen Erscheinungen, sowie jene am Projectil, auch stereoskopisch aufzunehmen.

Die beschriebenen stationären Schallwellen gehen nicht bloss vom Rande der Öffnung aus, sondern jeder Feilenriss, jeder kleine Politurfehler an dem Bohrungsrande, verräth sich durch die Erregung einer solchen Schallwelle. In ganz vorzüglicher Weise kann man dies an Spaltstrahlen bei axenparalleler Blendung verfolgen. Die ganze Breite des Spaltstrahles ist mit solchen sich durchkreuzenden Wellen bedeckt.

Die Erscheinungen am Luftstrahl sind nicht ohne Analogie zu den von Savart[1] beobachteten und von Plateau[2] von anderer Seite untersuchten Erscheinungen an Wasserstrahlen. In einfachster Weise kann man einen derartigen Fall in folgender Art herstellen. Man öffnet den Schraubenhahn eines Wasserleitungsrohres so weit, dass ein ganz dünner, durchsichtiger, glatter, langsam ausfliessender Wasserstrahl entsteht. Wenn man nun an eine Stelle desselben berührend die Spitze einer Feder oder eines Bleistiftes anlegt, so zeigen sich oberhalb der Berührungsstelle feine, stehende Rippen, unterhalb aber ebenfalls stehende Anschwellungen und Einschnürungen von grösserer Wellenlänge. Da der Strahl abwärts fliesst, so müsste an einem schwerelosen, ruhenden Wassercylinder dieselbe Erscheinung auftreten, wenn die berührende Spitze mit der Stromgeschwindigkeit sich nach aufwärts bewegte, nur würde die Form hier mit der Spitze fortschreiten.

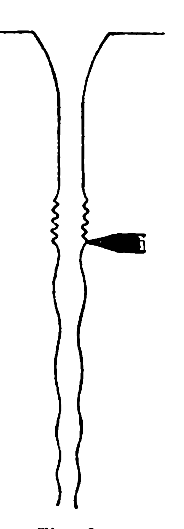


Fig. 8.

[1] Comptes-rendus XXXVII (1853).

[2] Bull. acad. Brux. XXIII (1856).

Der Vorgang erinnert an das Doppler'sche Princip.[1] Vor der bewegten, wellenerregenden Spitze werden die Wellen verkürzt, hinter derselben verlängert.

Die Sache ist aber hier nicht so einfach, da ja die Spitze sozusagen mit der Wellengeschwindigkeit (= der Stromgeschwindigkeit) fortschreitet, also vor sich keine Wellen erregen kann. Hängt aber die Wellengeschwindigkeit von der Erregungsstärke oder -Periode ab, so kann man sich vorstellen, dass die anfangs erregten Wellen rascher aufsteigen, als der Strahl abwärts fliesst, dass aber ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei der Ausbreitung bis zur Stromgeschwindigkeit abnimmt. Von da an brauchen wir uns die Spitze nicht mehr schwingend zu denken, sondern wir stellen uns dieselbe, eine Phase festhaltend, mit dieser fortschreitend und mit der Stromgeschwindigkeit aufsteigend vor. Selbstverständlich ist diese Auffassung von einer vollständigen Erklärung weit entfernt.

Die Vorgänge im Luftstrahle sind nun analoge. Vom Rande der Ausflussöffnung, und so auch von jedem eingebrachten Körper, gehen Wellen aus, die den Strahl zwischen der Erregungsstelle und dem Ziel, wohin er fliesst, erfüllen. In dem vor der Erregungsstelle liegenden Strahlstück finden wir keine Wellen, welche den feinen Rippen des Wasserstrahles entsprechen würden, weil die Geschwindigkeit des Strahles bedeutend grösser ist als die Schallgeschwindigkeit. Bei Verkleinerung des Druckes im Recipienten kann aber die Stromgeschwindigkeit bis zur normalen Schallgeschwindigkeit und unter dieselbe sinken.

Da ausserdem die Schallgeschwindigkeit mit der Stärke der Erregung steigt, sollte man dann auch Wellen erhalten können, welche sich nach rückwärts fortpflanzen. Eine Andeutung eines solchen Vorganges liegt ja schon in der Bildung der Kopfwelle vor dem in den Strahl eingebrachten Körper, welche ja wirklich, wenn auch nur eine sehr kleine Strecke, nach rückwärts in den Strahl eindringt. Es war desshalb nicht ohne Interesse, diesen Fall zu realisiren. Es sei nur noch

[1] Vergl. E. Mach, Neue Versuche zur Prüfung der Doppler'schen Theorie. Diese Sitzungsberichte, mathem.-naturw. Classe, II. Abth., Bd. 77, S. 306 (1878).

erinnert, dass der Wunsch, Schallvorgänge stehend zu erhalten und zu beobachten, überhaupt zu den Versuchen mit Luftstrahlen geführt hat.

Das betreffende kritische Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ des Innen- und Aussendruckes erhält man, wenn man in der Formel *a)* S. 10 $u^2 = c_2^2 = \frac{\varkappa p_2}{\rho_2}$ setzt, woraus dann folgt

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{num.}\left[\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\log\frac{\varkappa+1}{2}\right] = 1\cdot 897 = \frac{1}{0\cdot 527},$$

welches mit Reynolds' auf anderem Wege gefundenem Ergebniss stimmt.

Bei dem Überdruck von 0·89 Atmosphären im Recipienten über den äusseren Luftdruck sollte man also erwarten, dass die Stromgeschwindigkeit des Strahles der (normalen) Schallgeschwindigkeit im Strahl gleich wird, dass also ein eingebrachter Körper auch nach rückwärts Wellen erregt. Als ich jedoch kürzlich Gelegenheit hatte, diesen Versuch an einem Strahl von constantem Druck anzustellen, fiel derselbe negativ aus. Ein solcher Strahl sieht ganz glatt aus; derselbe zeigt nicht die conischen Wellen (Zickzackwellen), welche vom Rande der Öffnung ausgehen, und ein eingebrachter Körper wird ebenfalls glatt umflossen, ohne dass sichtbare Wellen auftreten. Der Strahl nimmt nur den Körper umfliessend einen grösseren Querschnitt an. Dieses Verhalten wird nun erläutert durch das Verhalten des Projectils, welches ebenfalls keine sichtbare Kopfwelle erzeugt, so lange dessen Geschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit nicht merklich übersteigt, weil nämlich die Luft unter diesen Umständen der Verdichtung entflieht. Erst bei einem beträchtlich höheren Überdruck im Recipienten (1·89) treten die Zickzacklinien auf. Und nun erzeugt ein eingebrachter Körper auch Querrippen (ähnlich den Kundt'schen Figuren) im Strahl. Zwischen dem Körper und der Öffnung liegt eine solche deutliche Rippe, über die Existenz einer zweiten könnte man streiten. Eine Reihe solcher Rippen oder Scheibchen erfüllen den Strahl, wo derselbe, sich erweiternd, den Körper umfliesst. Der Strahl zeigt dort, wo die Rippen auftreten, keine

Zickzacklinien und schliesst, bald nachdem er den eingebrachten Körper umflossen hat, mit einem sehr flachgedrückten Wirbelwölkchen. Man kann sich nun wohl vorstellen, dass bei höherer Ausflussgeschwindigkeit um und an dem Körper Schallwellen entstehen, und die Schallgeschwindigkeit so weit gesteigert wird, dass die Schallwellen eine sehr kurze Strecke der Strahlbewegung entgegen vordringen. Die Gleichheit von u und c_2 für den kritischen Fall wird aber auf eine andere Weise, etwa durch irgendwie im Strahl erregte starke Wellen, geprüft werden müssen.

Als E. Mach die Zickzacklinien im Strahl als conische Schallwellen erkannt hatte,[1] fiel es ihm zunächst auf, dass dieselben nicht über die Oberfläche des Strahles hinaustreten. Da der Strahl nach der Theorie und nach allen Schlieren- und Interferenzbeobachtungen dichter ist als die umgebende Luft konnte man an totale Reflexion denken. Unvereinbar mit dieser Auffassung ist aber die Grösse der Incidenzwinkel und dann der Umstand, dass bei der Reflexion an der Strahlgrenze keine Umkehrung der Verdichtung in eine Verdünnung stattfindet. Die Reflexion findet vielmehr so statt, wie an einer festen Wand. E. Mach hat sich nun damals klar gemacht, dass, bei Bestehen einer Relativgeschwindigkeit zweier aneinander grenzender Medien parallel der Grenzfläche, die gewöhnlichen (auf dem Huygens'schen Princip beruhenden) Ableitungen bezüglich der Brechung und Reflexion nicht zulässig sind. Insbesondere kann bei einer so grossen Geschwindigkeitsdifferenz, wie sie an der Strahlgrenze besteht, überhaupt keine Welle aus dem einen Medium in das andere übergehen. Selbst wenn keine Discontinuität beim Passiren der Grenzfläche eintritt, sondern nur ein beträchtliches Geschwindigkeitsgefälle längs der Oberflächennormale, müssen sich die Wellenflächen daselbst sozusagen einrollen. Betrachtungen dieser Art für quantitativ wesentlich andere und einfachere Verhältnisse, für die Fortpflanzung des Schalles in durch Wind bewegter Luft, hat schon Stokes[2] angestellt. In neuester Zeit hat Prof. Jäger[3] diese

[1] Vergl. Mach und Salcher, a. a. O.

[2] Rep. of the Brit. Ass. 1857, II., p. 27.

[3] Diese Sitzungsber., Bd. 105, Abth. II. a., December 1896.

Untersuchungen etwas allgemeiner durchgeführt. Seine Ergebnisse lassen sich kurz veranschaulichen, indem man sagt, dass in der Luft mit von Stelle zu Stelle variirender Geschwindigkeit die Schallstrahlen und Wellenflächen im Sinne des Windes umgebogen werden. E. Mach[1] hat auch seinerzeit die hieher-gehörigen Betrachtungen durch das Experiment auf die Probe gestellt. Funkenwellen in unmittelbarer Nähe des Luftstrahles erregt, drangen nicht in den Strahl ein, wurden aber von der umgebenden, theilweise mitgerissenen Luft in der Stromrichtung birnförmig ausgezogen.

Die Thatsache, dass die Schallwellen an der Strahlengrenze eine besondere Art von totaler Reflexion erfahren, kann also wohl als experimentell sichergestellt, und im Wesentlichen auch als theoretisch aufgeklärt angesehen werden. Hiemit ist aber auch das Schlierenbild des Luftstrahles in einem seiner wesentlichen allgemeinen Zügen verständlich geworden, und wir wollen uns nun der Betrachtung der feineren Einzelheiten zuwenden.

Wenn wir annehmen, dass die Schallwellen im Strahl, welche vom Rande der Öffnung ausgehen, den Kopfwellen des Projectiles entsprechen, so werden wir auch erwarten, dass dieselben auch desto stärkere Verdichtungen, auf desto kürzere Wellenlängen zusammengedrängt, zeigen, je höher der Druck im Recipienten, und je höher die Ausflussgeschwindigkeit ist. Bei Abnahme des Druckes werden die Verdichtungen im Gegentheil kleiner, die Längen, oder wenn man so sagen will, die Dicken der Wellen grösser. Zuletzt müssen bei weiterer Druckabnahme die Wellen sehr schwach und breit (lang) und verschwommen werden. In der That entspricht dies der Reihenfolge der Erscheinungen, wie wir dieselben bei directer Beobachtung des Strahles und auch in den Schlierenbildern wiederfinden. Alle Eigenschaften der Schallwellen von grosser Excursion treten bei hohem Druck hervor. Je niederer der Druck, desto mehr zeigen die Strahlwellen die einfacheren Eigenschaften gewöhnlicher Schallwellen.

Gewöhnliche Schallwellen haben grosse Länge und kleine Dichtenänderungen. Die Temperaturdifferenzen zwischen deren

---

[1] A. a. O.

Theilen sind sehr klein, und auch die Reibung spielt eine geringe Rolle. Solche Wellen können sich weit ohne merkliche Schwächung fortpflanzen. Ganz das Gegentheil findet bei den kurzen Wellen hoher Excursion statt. Das Temperaturgefälle und Geschwindigkeitsgefälle in denselben ist sehr bedeutend. Die Verluste durch Wärmeleitung und Reibung werden nicht als verschwindend betrachtet werden können. Obgleich also auch die conischen Wellen im Strahl sozusagen in einem Cylinder verbleiben, und nur auf eine geringe Luftmasse sich verbreiten, wird man annehmen dürfen, dass sie in ihrem Verlauf sich merklich abschwächen, wie die Vergleichung der Anfangs- und Endtheile des Strahles es wirklich zeigt.

Bei geringerem Druck im Recipienten (6—7 Atmosphären) zeigen die Strahlwellen auf den ersten Blick geradlinige Con-

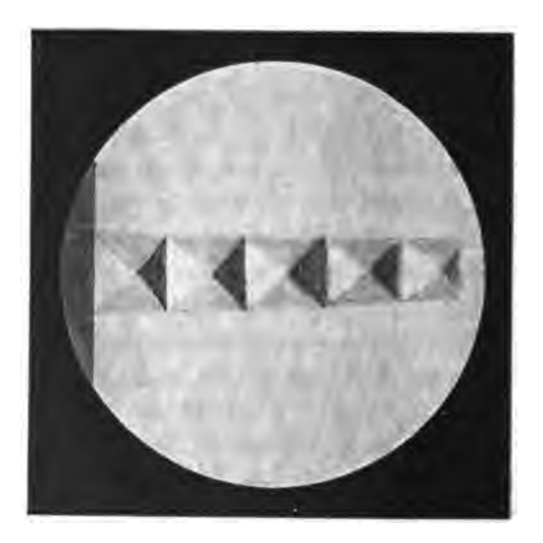


Fig. 9.

turen und geradlinige Durchschnitte. Theoretisch sollte der Winkel α, unter welchem die Conturen gegen die Strahlenaxe geneigt sind, dem Gesetz $\sin\alpha = \frac{c_2}{u}$ entsprechen, wobei c_2 die Schallgeschwindigkeit in der Luft von der Dichte und der Temperatur des Strahles und u die Ausflussgeschwindigkeit

bedeutet. Jede Vergrösserung von c_2 und jede Verkleinerung von u wird α vergrössern. Sieht man die Conturen genau an, so bemerkt man schwache Krümmungen derselben. An der Strahlengrenze ist α am kleinsten; es wächst allmälig beim Verlauf der Welle bis in die Mitte des Strahles und über dieselbe hinaus bis zum neuerlichen Auftreffen auf die Strahlengrenze. Das Verhältniss $\frac{c_2}{u}$ zeigt also locale Unterschiede. In der That könnten wir annehmen, dass u gegen die Axe des Strahles hin etwas zunimmt, dass ferner die Temperatur in der Axe die tiefste ist. Das c_2, welches wir in Betracht zu ziehen haben, muss übrigens beträchtlich grösser sein als die normale Schallgeschwindigkeit (für unendlich kleine Excursionen) und muss gegen die Axe zu wachsen, weil die von der Strahlgrenze reflectirten Wellen dort auf einen kleineren Raum zusammenlaufen. Bei der folgenden Wiederausbreitung scheint nun das Verhältniss $\frac{c_2}{u}$ noch etwas weiter zu wachsen, welcher Umstand ohne quantitative Untersuchung gegenwärtig schwer aufzuklären ist. Der auffallende Unterschied in der Neigung der einfallenden und reflectirten Wellen gegen die Strahlengrenze deutet auf eine Abweichung vom Reflexionsgesetz, ähnlich derjenigen, welche E. Mach[1] für Funkenwellen beobachtet hat. Die reflectirte Welle liegt in der einfallenden und es ist nicht zu erwarten, dass der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich wird. Auch über diesen Vorgang können nur genauere quantitative Untersuchungen Aufklärung geben, und wir wollen uns hier nicht auf voreilige Erklärungen einlassen, sondern nur die auffallenden Punkte bezeichnen.

Bei Verstärkung der Strahlwellen hat man theoretisch noch complicirtere Verhältnisse zu erwarten und in quantitativer Beziehung wird dies zweifellos auch zutreffen.

Die Abweichungen von dem Verhalten gewöhnlicher Schallwellen treten aber hier so stark und deutlich hervor, und zeigen eine solche Ähnlichkeit mit denjenigen, welche E. Mach[2] an

[1] Mach und Simonides. Diese Sitzungsber., Bd. 80, Abth. II. (1879).

[2] E. Mach, diese Sitzungsber., Abth. II, Bd. 77 u. 78 (1878).

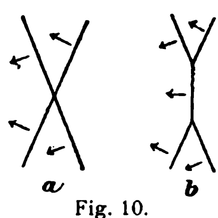
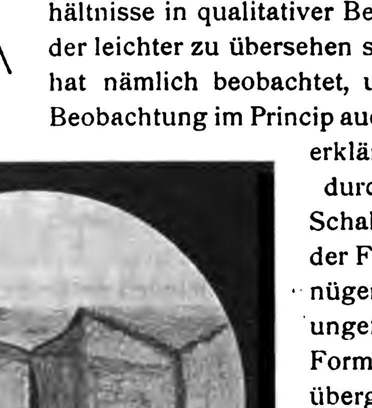
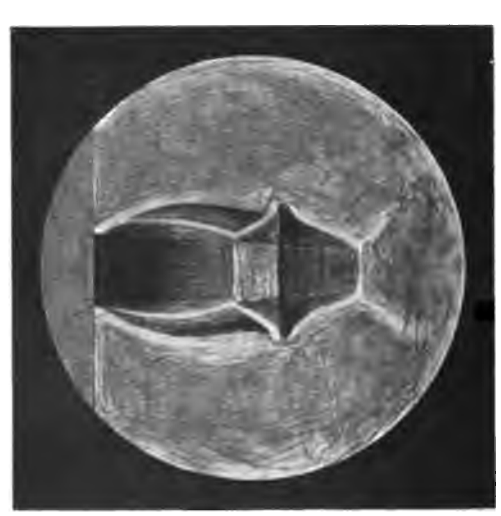


Fig. 10.

Funkenwellen nach der Methode der Russfiguren und nach der Schlierenmethode beobachtet hat, dass hier die Verhältnisse in qualitativer Beziehung wieder leichter zu übersehen sind. E. Mach hat nämlich beobachtet, und hat diese Beobachtung im Princip auch theoretisch erklärt, dass sich durchkreuzende Schallwellen von der Form *a*, bei genügender Stärke ungefähr in die Form *b* (Fig. 10) übergehen, indem die sich überdckkenden Theile den übrigen gegenüber an Fortpflanzungsgeschwindigkeit gewinnen. Das Verhalten starker Strahlwellen entspricht nun durchaus diesem Charakter, wie ein Blick auf die Fig. 11 lehrt, welche dem Anfangstheil eines Strahles von hohem Druck entnommen ist. Die vom Öffnungsrande ausgehenden Wellen sind hier in Folge der plötzlichen Erweiterung des austretenden


Fig. 11 *a*.


Fig. 11 *b*.

Strahles stark gekrümmt, und deren Durchschnitte haben in den Anfangstheilen des Strahles ganz den Charakter der Fig. 11, übergehen aber in grösserer Entfernung allmälig in einfache geradlinige Durchschnitte. Es wäre nun recht schwierig, sich die Bildung des Anfangstheiles des Strahles direct vorzustellen.

Stellt man sich aber einen geradlinigen Durchschnitt eines von der Öffnung ferneren Strahltheiles vor, übergeht zu den nächst vorhergehenden u. s. f., so begreift man ganz wohl, wie aus einem geradlinigen Durchschnitt, bei zunehmender Stärke der Schallwellen, allmälig die Form an der Ausflussöffnung durch Abweichung von der einfachen Combination der Bewegungen entstehen kann, und wie dieselbe, einmal gebildet, durch Combination der Schallbewegung mit der Strombewegung sich erhält. Auch die eigenthümliche Stellung der Strahlwellen an der Strahlenwand, das fast senkrechte Ansetzen an dem Wandelement an der Reflexionsstelle, wird verständlich, wenn man sich erinnert, dass die Reflexion an der Grenzfläche wie an einer festen Wand stattfindet. Man hat sich hinter der Wand ebenfalls eine Welle zu denken, welche sich mit der directen combinirt und die in Fig. 10 dargestellte Abweichung zeigt.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass der Anfangstheil des Strahles zuweilen mehr oder weniger deutlich den Eindruck macht, als ob in demselben ein anderer Strahl stecken würde. Die Existenz solcher Discontinuitäten kann von vornherein nicht ausgeschlossen werden, dieselbe ist aber mit dem eben Ausgeführten nicht gut in Einklang zu bringen, und kann vielleicht auch, wie dies E. Mach in Bezug auf andere Beobachtungen gezeigt hat, auf eine optische Illusion zurückgeführt werden.

Bemerkenswerth ist ferner noch, dass alle Durchschnittslinien im Strahlenbilde, welche in der Stromrichtung divergiren, einen merklich grösseren Winkel mit der Strahlenaxe bilden, als diejenigen, welche in diesem Sinne convergiren. Man könnte hiernach an eine periodische Variation der Stromgeschwindigkeit denken, welche ein den Strahl durchlaufendes Theilchen erfährt.

Die Winkel, welche die conischen Wellen mit der Axe des Strahles bilden, stimmen im Allgemeinen nicht mit denjenigen, welche man nach der schematischen, theoretischen Auffassung erwarten sollte. Bei Strahlen, welche unter geringerem Druck ausströmen (8—10 Atmosphären), sind die Winkel ziemlich constant, erreichen aber (bei 10 Atmosphären) 45°, während theoretisch, nach der Gleichung $\sin\alpha = \frac{c_2}{u}$ (nach Tabelle S. 12), $\alpha = 24°$ (für 10 Atmosphären) sein sollte. Bei hohem Druck variiren diese Winkel bedeutend. Dieselben sind klein nahe an der Ausflussöffnung, gross ferner vor derselben, beginnen z. B. mit 16° (bei 15 Atmosphären) und gehen in grössere mit 27°, ja 35° über, während man theoretisch 24° erwarten sollte. Man kann hier, wie bei den Projectilen an eine Vergrösserung von c_2, Überschreitung der normalen Schallgeschwindigkeit, aber auch an eine Verkleinerung, beziehungsweise Variation von u, je nach der Stelle des Strahles denken.

Die homologen Dimensionen des Strahles wachsen mit dem Druck, unter welchem derselbe ausströmt. Die Druckangaben sind zwar bei dem rohen Verfahren, welches ich anwenden musste, nicht sehr sicher, doch kann man dieses Ansteigen nicht verkennen, und die folgende Tabelle leistet gute Dienste zur Vergleichung der Schlierenbilder mit den Interferenzbildern. Bei der Herstellung der letzteren konnten nämlich keine besonderen Druckbeobachtungen angestellt werden. Die Tabelle schliesst sich unmittelbar an die schematische Fig. 12 an, durch welche sie verständlich wird, indem sie die Entfernung der daselbst bezeichneten Punkte von der Öffnung, und ausserdem ein Mittel für die Periodenlänge b von III an gibt.

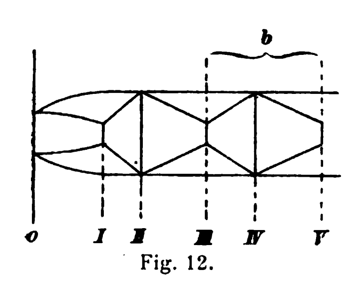


Fig. 12.

Die beträchtlichen Differenzen rühren zum Theil von der Unsicherheit der Ablesung an den Bildern her, welche namentlich in den von der Öffnung ferneren Theilen zuweilen etwas unscharf sind. Ausserdem aber sind die Druckangaben des

Manometers von verschiedenem Werth, je nachdem der Druck bis zum Moment der Aufnahme von einem höheren oder niederen Anfangswerth abgesunken ist, da in dem Recipienten das Clement-Desormes'sche Phänomen eintritt, und da demnach die ausströmende Luft bei derselben Manometerangabe etwas verschiedene Temperatur, Dichte, Schall- und Stromgeschwindigkeit haben kann.

Druck im Recipienten in Atmosphären	Entfernungen in Millimetern							Periodenlänge b in Millimetern
	I	II	III	IV	V	VI	VII	
6	3·7	6·2	10·0	13·7	17·5	21·2	25	7
10	6 2	11·2	15·0	18·4	25	27·5	32·5	8·8
10	8·1	11·3	17·8	22·6	30·8	35·6	42·1	11·3
14	9·5	12·7	21·2	25	32·5	40	45	11·8
15	8·9	12·1	18·6	24·3	29·9	37·2	42·9	11·5
20	14·5	18·7	27·5	33·7	40·0			12·7
30	12·5	16·2	23·7	28·2	37·5			13·6

Neben den bisher betrachteten, wenigstens im Princip verständlichen Erscheinungen finden sich bei genauerer Betrachtung der Schlierenbilder, und noch mehr der Interferenzbilder, Einzelheiten, deren Aufklärung einer späteren Zeit überlassen werden muss. Es bleibt hier nichts übrig, als durch Ausscheidung des Erklärbaren diesen Rest zur deutlichen Anschauung zu bringen. Wir wenden uns zuerst zu den Schlierenbildern und wollen unsere Aufmerksamkeit auf den optischen Vorgang richten, durch welchen dieselben zu Stande kommen.

Denken wir uns den kreisförmigen Querschnitt eines dünnen Lichtbündels, welches auf uns zukommt (Fig. 13). Derselbe kann auch das Element einer Wellenfläche vorstellen. Alle bekannte Materie verzögert das Licht. Bei Stoff derselben Art wächst die Verzögerung mit der Menge des durchsetzten Stoffes. Wenn nun bei der Bewegung des genannten Querschnittes die durchsetzte Stoffmenge nicht überall dieselbe ist, sondern im Querschnitt etwa in der Richtung des Pfeiles zunimmt, so wird der betreffende Querschnitt eine Schwenkung

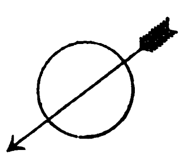


Fig. 13.

machen, indem der der Pfeilspitze entsprechende Theil zurückbleibt, oder indem das uns zugekehrte Ende der auf dem Querschnitt errichteten Normale sich der Pfeilspitze nähert. Die Lichtablenkungen in den Schlierenbildern zeigen uns die Richtungen an, nach welchen an den vom Licht durchsetzten Stellen die mittlere durchsetzte Stoffmenge zunimmt. Es macht (bei schwachen Ablenkungen) keinen Unterschied, ob diese Ablenkung durch die Form eines homogenen Körpers oder durch eine Dichtenvariation herbeigeführt wird. Der Fall eines gleichmässig dichten Prismas, dessen Schneide in dem Schwanz des Pfeiles, dessen Rücken in der Spitze liegt, ist hier eben so eingeschlossen, wie jener einer Planplatte, deren Dichte gegen die Pfeilspitze zunimmt.

Wenn wir dies auf unseren Fall anwenden, finden wir Folgendes. Ein homogener, horizontaler, cylindrischer Luftstrahl, der dichter ist als die umgebende Luft, erscheint bei horizontaler, nach oben gekehrter Schneide der Schlierenblende dem direct betrachtenden Auge unten hell, oben dunkel. Im photographischen Negativbild hat man natürlich die Umkehrung des Bildes und der Helligkeit zu berücksichtigen. Derselbe Strahl zeigt bei verticaler Blendungsschneide gar keine optische Wirkung.



Fig. 14 *a*.

Betrachten wir nun die wirkliche Lichtvertheilung im Schlierenbild und bezeichnen wir die Richtungen, nach welchen die vom Licht durchsetzte Masse zunimmt, durch Pfeile. Für den horizontalen Strahl (14. *a*) bei verticaler Blendungsschneide erhalten wir so die schematische Fig. 14 *b*. Wir erkennen hier die

sich durchkreuzenden conischen Wellen, die grössere Dichte in der Ausflussöffnung, ausserdem aber Dichtenzunahmen in den Fig. 12 mit geraden Zahlen bezeichneten Querschnitten und

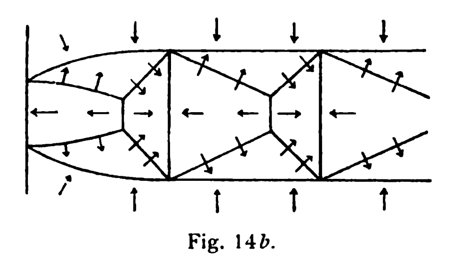


Fig. 14*b*.

Dichtenabnahmen in den ungeradzahligen Querschnitten, welche beide nicht ohneweiters aus jenen Wellen verständlich sind.

Noch auffallender ist das Bild bei horizontaler Schlierenblendung. Dieselben Erscheinungen wie in dem vorigen Fall

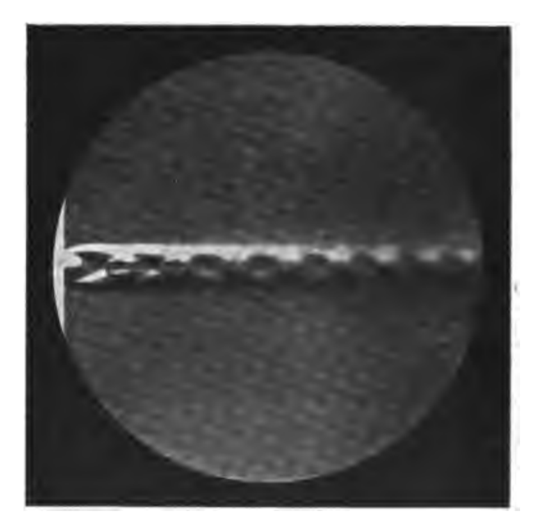


Fig. 15*a*.

sind wiederzuerkennen. Aber hier treten die periodischen Verdichtungen und Verdünnungen in der Nähe der Axe noch deutlicher hervor. Derselbe erhält dadurch das Aussehen eines geflochtenen Zopfes. In den Anfangstheilen des Strahles treten sogar Gebilde auf, welche wie Stücke von verdünnten con-

axialen Cylindern von kleinerem Durchmesser wirken (Fig. 15*a* und 15*b*).

Bei stationären Strahlen könnte man durch ein quantitatives Verfahren, ähnlich dem in einer früheren Arbeit angewendeten,[1] der Sache näher kommen. Eine solche Methode ist bei der raschen Änderung der Strahlen nicht anwendbar. Dieselbe hat auch bei den Projectilbildern, da doch jeder photo-

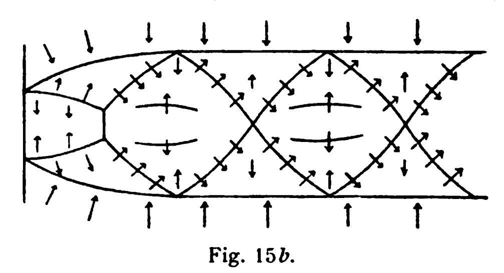


Fig. 15*b*.

graphirte Fall ein Individuum ist, nur unsichere Ergebnisse geliefert. Auch ist damals der Einfluss der Beugung wohl unterschätzt worden.

Aufstellung und Apparate für die Interferenzversuche.

Wird ein Lichtbündel in zwei beträchtlich getrennte, cohärente Bündel von bedeutendem Querschnitt getheilt, welche nachher zusammengeführt, ein Feld mit geradlinigen Interferenzstreifen darbieten, so kann eine solche Anordnung benützt werden, die Vorgänge im Luftstrahl zu untersuchen. Wird, während durch das eine Bündel der Luftstrahl strömt, mit einer Lichtquelle von derselben Zeitdauer wie bei den Schlierenversuchen beleuchtet, so erscheinen die durch den Luftstrahl hindurchgehenden Streifen verkrümmt, bleiben aber in dem übrigen freien Theil des Feldes geradlinig. Man kann so durch Verfolgung der einzelnen Streifen in den Luftstrahl hinein den an jeder Stelle eingeführten Gangunterschied bestimmen, und aus der jeweiligen Weglänge im Luftstrahl auf die Grösse der Luftdichte schliessen. Zu diesem Zwecke müssen jedoch die beiden Lichtbündel weit von einander verlaufen, und einen

---

[1] E. Mach und L. Mach, Weitere ballistische Versuche. Diese Sitzungsber., Bd. XCVIII, Abth. II. a., November 1889.

besonders grossen Querschnitt darbieten. Diesen Anforderungen genügt der aus zwei Planplatten und zwei Planspiegeln bestehende, bereits anderwärts beschriebene Interferenzapparat.[1]

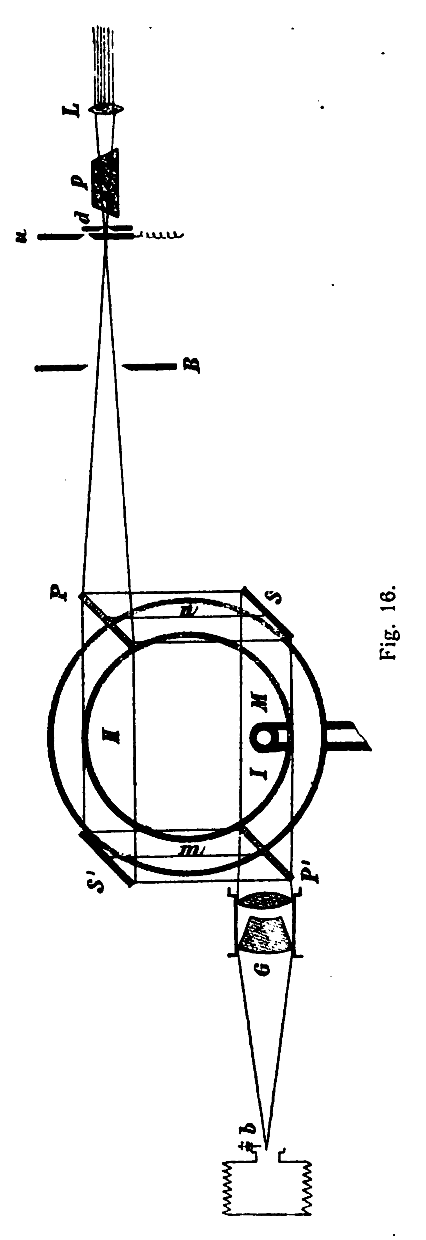


Fig. 16.

Mit Hilfe der Linse *L* (Fig. 16) und eines Uhrheliostaten wird auf dem rund durchbrochenen Blechdiaphragma *d* (1 *mm* Durchmesser der Bohrung) ein Sonnenbild entworfen. Durch ein möglichst kurzes, dazwischengeschaltetes Prisma *p* von gerader Durchsicht wird das Licht vorher spectral zerlegt. Der violette Theil desselben wird durch das Diaphragma hindurchgelassen und fällt auf die erste Platte *P* des Refractometers, passirt dasselbe und wird von dem 78 *mm* grossen Gruppenantiplanet *G* in einer Reihe von Bildern gesammelt. Durch die Blende *b* werden sämmtliche Bündel aufgefangen bis auf eines, welches das erste Streifensystem enthält, und welches in ein kleines Voigtländer'sches Landschaftsobjectiv von 15 *cm* Brennweite gelangt. Dieses entwirft von dem kreisförmigen Interferenzfelde (40·5 *mm* Brennweite) ein 17·5 *mm* im Durchmesser haltendes Bild. Ein Schirm *B* sorgt

[1] Vergl. die oben citirten Mittheilungen von L. Mach.

für die Abhaltung des falschen Lichtes, und ein mit regulirbarer Feder versehener Spaltschieber *u* bildet den genau abgestimmten Momentverschluss. PP' sind die Platten, SS' die Glassilberspiegel des Refractometers. Die Prismen, auf denen sie verschiebbar angebracht sind, werden durch die Geraden *m* und *n*, das Gestell des Refractometers durch den Doppelring angedeutet.

Bei diesen Versuchen wurde ein etwas längerer, rechtwinkelig gebogener und innen glatt polirter Ausflussschnabel *M* verwendet. Das Mundstück wurde von unten in das Interferenzfeld eingeschoben, so dass der Strahl das Bündel I oder II in der Richtung von unten nach oben durchströmte.

Interpretation der Interferenzbilder.

Nennen wir *m* die vom Lichtbündel von der Querschnittseinheit auf seinem Wege durchsetzte Masse, so wird die das Schlierenbild bestimmende Lichtablenkung gegeben durch

$$\frac{d}{dz}\int m\,.\,ds,$$

wobei *m* als Function des Lichtweges zu denken ist und *z* die Richtung bedeutet, nach welcher die durchsetzte Masse wächst.

Bei gleichbleibender Bedeutung der Zeichen ist die Verzögerung des Lichtes, beziehungsweise die Streifenverschiebung im Interferenzbilde, bestimmt durch

$$\int m\,.\,ds.$$

Der Charakter der Bilder ist demnach auch qualitativ ein wesentlich verschiedener.

Die Interpretation der Interferenzbilder erfordert übrigens eine gewisse Vorsicht, und es soll zu dem schon in einer früheren Abhandlung Angegebenen[1] das Nöthige hier nachgetragen werden.

Wir denken uns die Ebene des Bildes *EE* als Durchschnitt mit der Zeichnungsebene und in derselben die geradlinigen

---

[1] L. Mach, Über ein Interferenzrefractometer. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102.

äquidistanten Interferenzstreifen senkrecht zum Schnitt *EE* verlaufend. Nun denken wir uns das verzögernde Object eingebracht. Die Streifen werden verschoben und im Allgemeinen verkrümmt. Die Entfernung jedes Streifenelements von seiner ursprünglichen Stelle in *EE* misst die positive oder negative Verzögerung an jener Bildstelle, an welcher sich das Streifenelement eben befindet. Es steht nichts im Wege, nun an jeder Stelle der Bildebene eine positive oder negative Ordinate aufzusetzen, welche die daselbst bestehende Verzögerung misst. Die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten stellen die Fläche der Gangunterschiede dar. Wir wollen zur Bequemlichkeit noch festsetzen, dass wir die Ordinaten des Gangunterschiedes in Streifenbreiten (der Verschiebung) messen. Jede Ordinate

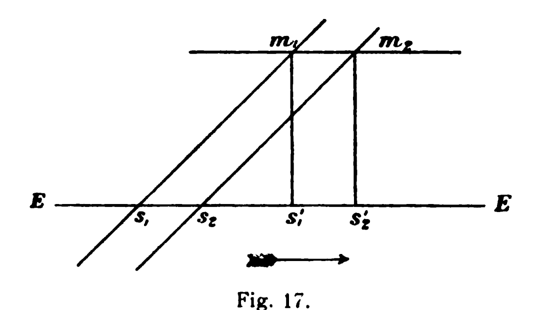


Fig. 17.

erhebt sich also gerade so hoch, als das Streifenelement in der Bildebene verschoben erscheint. Denken wir uns also einen Streifen (welcher geradlinig bleibt) parallel zu sich selbst entsprechend einer Verzögerung im Sinne des Pfeiles von s_1 nach s_1' verschoben, so wächst die Gangunterschiedsordinate von Null bis $s_1' m_1 = s_1 s_1'$. Der Streifen beschreibt hiebei eine unter 45° gegen *EE* geneigte Ebene. Verschiebt sich der Nachbarstreifen s_2 und so das ganze System in demselben Sinne und Ausmaass, so ist die Gangunterschiedsfläche eine zu *EE* parallele, durch $m_1 m_2$ bestimmte Ebene.

Wir gelangen so zu einer sehr anschaulichen Darstellung des ganzen Interferenzbildes, welche sich in folgender Weise wiedergeben lässt. Wir denken uns abwechselnd schwarze und weisse Thonplatten von gleicher Dicke aufeinander, und unter 45° geneigt, durch die Bildebene *EE* (Fig. 18) gelegt, so dass

ihre Schnitte mit derselben genau das unverschobene Streifensystem repräsentiren. Schneidet man das Thonplattensystem durch die Fläche der Gangunterschiede *MM* und projicirt die Durchschnitte auf *EE*, so erhält man das Interferenzbild. Jedes gegebene Interferenzbild kann also interpretirt werden, indem man umgekehrt sich eine schneidende Fläche *MM* denkt, welche als Projection auf *EE* dasselbe hervorbringt. Wenn man die Streifencurven aus Carton ausschneidet, indem man dieselben bis dahin fortsetzt, wo dieselben geradlinig verlaufen, und wenn man nun diese Cartons um die geradlinigen Stücke als Axen drehend so aufrichtet, dass deren Ebenen 45° mit der Bildebene *EE* einschliessen, so hat man ebenfalls die Fläche *MM*

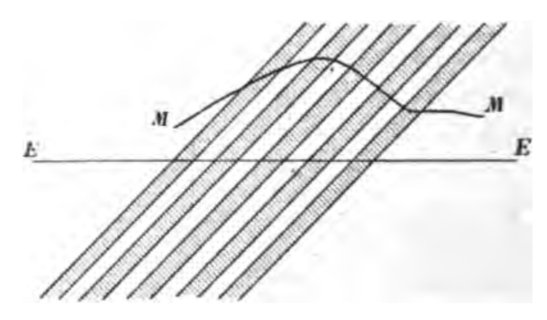


Fig. 18.

dargestellt. Übrigens erhält man den Eindruck des Reliefs *MM* in einfacheren Fällen ohneweiters, wenn man das Interferenzbild monocular betrachtet. Ebene Schnitte parallel zu *EE* durch *MM* geführt, ergeben die (von den Streifencurven natürlich verschiedenen) Curven gleichen Gangunterschiedes.

Es liegt in der Natur der Sache, dass Formen der Fläche *MM* ausgeschlossen sind, welche bei Projection auf *EE* Doppelelemente (Doppelpunkte) ergeben würden. Jeder Stelle des Bildes entspricht nur ein Gangunterschied.

Ebenso können wir, höchst seltene Fälle vielleicht ausgenommen, Discontinuitäten der Fläche *MM* ausschliessen. Man kann also, in dem Interferenzbilde einen Punkt bewegend, von dem n^{ten} Streifen immer nur durch den $n+1^{\text{ten}}$ oder $n-1^{\text{ten}}$ zum $n+2^{\text{ten}}$ oder $n-2^{\text{ten}}$ gelangen. Bei continuirlicher

Bewegung des Punktes kann kein Streifen übersprungen werden.

Die Breite der Streifen erfährt in den Interferenzbildern oft auffallende Veränderungen, welche zu beachten sind. Es genügt, die Breitenänderung in der Richtung senkrecht zu den unverschobenen Streifen zu betrachten. Nur so lange der Gangunterschied (v) in dieser Richtung nicht variirt, bleibt die Streifenbreite ungeändert. Wir nehmen als Einheit des Gangunterschiedes (v) und als Einheit der Verschiebung (x) die Streifenbreite b (Fig. 19) des unverschobenen Systems. Der

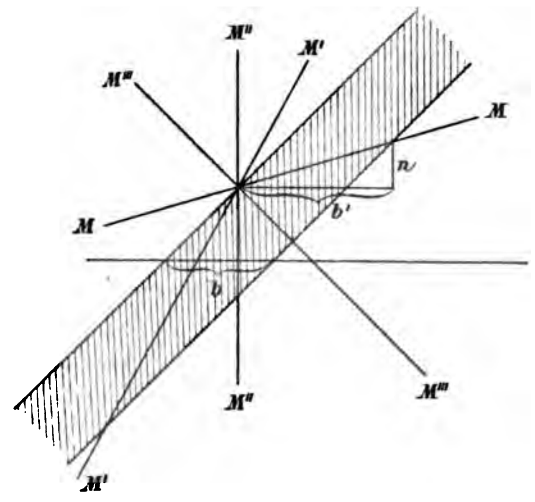


Fig. 19.

Durchschnitt der Fläche MM mit der Zeichnungsebene möge die Steigung $\frac{dv}{dx}$ haben. Dann ist

$$b' \frac{dv}{dx} = n, \qquad b' - b' \frac{dv}{dx} = b$$

oder

$$b' = \frac{b}{1 - \frac{dv}{dx}},$$

wobei b' die neue Streifenbreite bedeutet. Es ist $b' = b$

für $\frac{dv}{dx} = o$, $b' = \infty$ für $\frac{dv}{dx} = 1$. Für $\frac{dv}{dx} > 1$ wechselt b' das Zeichen, weil nun der vordere im Sinne der Verzögerung vorausgehende Streifenrand mit dem nachfolgenden hinteren vertauscht ist, was bei der Interpretation zu beachten ist (MM'). Für $\frac{dv}{dx} = \infty$ ($M''M''$) wird $b' = -0$, und für negative $\frac{dv}{dx}$ wieder positiv ($M'''M'''$).

Eine gewisse Vorsicht der Interpretation ist geboten, wenn in dem Interferenzbilde ringförmige (andere einschliessende oder ausschliessende) Streifen, nennen wir sie S t r e i f e n i n s e l n

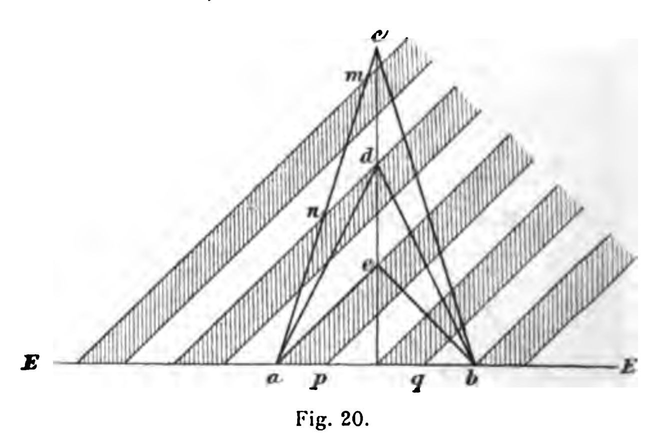


Fig. 20.

auftreten. Die Umstände, welche man in diesem Falle zu beachten hat, werden am besten durch ein Beispiel erläutert.

Die Gangunterschiedsfläche MM falle mit der Ebene EE zusammen (Fig. 20), sei aber durch ein kreisförmiges Loch (ab) durchbrochen, an welches als Fortsetzung von MM sich ein Kegel acb anschliesst. Ein Blick auf die Fig. 20 lehrt, dass nun die Streifen m, n sich als elliptische Ringe auf EE projiciren, während p, q innerhalb der Kegelbasis als elliptische Bogen erscheinen, welche sich ausserhalb derselben als Gerade fortsetzen. Die C u r v e n g l e i c h e n G a n g u n t e r s c h i e d e s sind innerhalb des Kegels natürlich Kreise, welche die vorerwähnten Ellipsen s c h n e i d e n.

Was die ringförmigen Streifen betrifft, hat man zu beachten, dass deren innere Begrenzung dem Hinterrande, deren äussere

dem Vorderrande entspricht, wie sich aus der Betrachtung der Figur ergibt. Dreht man die Figur um 180, so gilt sie für eine Vertiefung in der Fläche *MM*, und die vorige Bemerkung erfährt ihre leicht ersichtliche Umkehrung.

Bei Abnahme des maximalen Gangunterschiedes, also beim Sinken des Kegelscheitels nach *d*, *e* u. s. w. ziehen sich die elliptischen Ringe im Mittelpunkt des Kreises *ab* zusammen und verschwinden daselbst, so dass nur mehr Streifen übrig bleiben, welche sich geradlinig in das äussere Feld fortsetzen. Die Streifen innerhalb *ab* übergehen in Parabeln, sobald für die Kegelseite *ac* der Werth von $\frac{dv}{dx}$ auf 1 gesunken ist, und werden bei noch weiterem Sinken hyperbolisch.

Denkt man sich nun die Höhe des Kegels so gering, dass keine ringförmigen Streifen mehr vorhanden sind, und denkt man sich nun die Zahl der Streifen vermehrt, verdoppelt, verdreifacht u. s. w. und dafür von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ der früheren Breite, so stellt die Zeichnung wieder denselben oder einen höheren Gangunterschied in der Kegelspitze dar, wie bei der ursprünglichen Höhe des Kegels. Man kann also durch Wahl einer genügend kleinen Streifenbreite jede Streifeninsel zum Verschwinden, und das ganze Feld in Zusammenhang bringen. Freilich ist oft wegen der hiemit zusammenhängenden Undeutlichkeit der Bilder eine zu geringe Streifenbreite nicht anwendbar.

Kann man dieses Verfahren nicht zur Anwendung bringen, so ist die Interpretation einer Insel unbestimmt. Denn man weiss nur, dass, wenn man von einem unbegrenzten Streifen, dem n^{ten}, zu dem nächsten ringförmig geschlossenen übergeht, dass dieser der $n-1^{\text{te}}$ oder der $n+1^{\text{te}}$ ist, dass man also mit einer Erhebung oder beziehungsweise mit einer Vertiefung in der Fläche *MM* zu thun hat. Gewöhnlich kann man aber durch andere Anhaltspunkte entscheiden, welcher Fall vorliegt.

Zu diesen Anhaltspunkten gehört zunächst die Vergleichung mit dem Schlierenbild, welches ja Verdichtungen und Verdünnungen im Allgemeinen leicht unterscheiden lässt, und welches also die quantitativen Angaben des Interferenzbildes

qualitativ (in Bezug auf das Zeichen) ergänzt. Man kann, wenn Dauerbeleuchtung zulässig ist, weisses Licht anwenden und die Stelle des weissen Streifens merken. Übergeht man dann bei monochromatischer Beleuchtung von violettem zu rothem Licht, so wandern alle Streifen von der Stelle des weissen aus nach der Seite des zunehmenden Gangunterschiedes. Das radicalste Mittel endlich, welches wieder nur angewendet werden kann, wo Dauerbeleuchtung zulässig ist, ist folgendes. Steht der Luftstrahl im Lichtbündel I und muss man das Lichtbündel II mit Hilfe des Compensators verzögern, um den weissen Streifen in die Mitte der Insel zu bringen, so entspricht dieselbe natürlich einer Verdichtung. Die Umkehrung liegt auf der Hand.

Ein vorzügliches Mittel besteht endlich darin, die Interferenzstreifen parallel zur Luftstrahlaxe zu legen. Man merkt sich die Verschiebungsrichtung für die Verzögerung (Verdichtung), und kann nun mit Hilfe der wellenförmigen Krümmung beim Einbringen des Luftstrahles die Verdichtungen von den Verdünnungen unterscheiden.

Ich hatte nun später Gelegenheit, einige wenige Controlversuche bei Dauerbeleuchtung und constantem Druck anzustellen, und konnte mich durch alle hier angegebenen Proben überzeugen, dass die hier im Folgenden gegebene Interpretation die richtige ist. Die Inseln in den folgenden Bildern sind Verdichtungen. Bei Strahlen von 8—10 Atmosphären liegen zwischen diesen kleinere, aber die Atmosphärendichte übersteigende Dichten. Bei Strahlen von 15 Atmosphären findet man aber zwischen den Dichtenmaximis sogar wirkliche Verdünnungen, z. B. kleinere Dichten als jene der umgebenden Atmosphäre.

Ergebnisse der Interferenzversuche.

Der Recipient wurde gewöhnlich auf 20 Atmosphären geladen. Der Hahn wurde dann dreimal geöffnet und wieder geschlossen, nachdem jedesmal eine Momentbeleuchtung bei monochromatischem Sonnenlicht eingeleitet worden war. Selbstverständlich wurde die photographische Platte nach jeder

Beleuchtung verschoben, so dass man auf einer Platte drei Bilder erhielt. Einige Versuche wurden auch mit weissem Licht ausgeführt. Man unterscheidet dann auch in der Photographie die Ordnung der Streifen. Zwar sind nun die Streifen höherer Ordnung nicht sichtbar, während die Streifen bei monochromatischer Beleuchtung das ganze Feld einnehmen und überall sehr deutlich sind; man kann jedoch die bei weissem Licht gewonnenen Blider benützen, um sich durch Vergleichung mit den bei monochromatischem Licht hergestellten Bildern über die Ordnungszahl der Streifen in letzteren zu orientiren, wo darüber Zweifel entstehen.

Das Manometer wurde bei den Interferenzversuchen, welche schon an sich reichlich zu thun gaben, nicht mitphotographirt. Man überzeugte sich, dass der auf 20 Atmosphären geladene Recipient bei einem gewissen regelmässigen Vorgang das erste Bild bei etwa 15, das zweite bei ungefähr 10 und das dritte bei etwa 6—7 Atmosphären lieferte. Die Vergleichung mit den Schlierenbildern konnte ausserdem in später anzugebender Weise zur Controle dienen.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass selbst bei den sehr vollkommenen Planplatten, welche mein Apparat enthielt, die Streifen im ungestörten Feld nicht vollkommen geradlinig waren, was natürlich auf die Genauigkeit der Schätzung des Gangunterschiedes nachtheiligen Einfluss hat. Zum Zwecke dieser Schätzung wurden die Bilder mit dem Abbe'schen Zeichenapparat in vierfacher Grösse reproducirt.

Wir beginnen mit den Strahlen, die unter schwachem Druck ausströmen. Die Interferenzstreifen mögen senkrecht zur Axe des Strahles verlaufen, während der (verticale) Strahl parallel zur Bildfläche liegt. Man sieht ohne weiters, dass dann ein Strahl von überall gleicher Dichte die denselben überquerenden Interferenzstreifen zu elliptischen Bögen deformiren müsste, indem alle Verzögerungen proportional den zur Visirlinie parallelen Sehnen des durchsetzten kreisförmigen Luftstrahlenquerschnittes wären. In der That bieten die Interferenzbilder von Strahlen, die unter etwa 6 Atmosphären Druck ausströmen, diesen Anblick. Betrachtet man die Bilder monocular, so glaubt man das Relief eines Halbcylinders zu sehen. Die Curven

gleichen Gangunterschiedes sind in diesem Falle zur Cylinderaxe parallele Gerade.

Aus der mittleren maximalen Streifenausbiegung zweier solcher Strahlen ergab sich in Atmosphären die Dichte derselben 1·26 und 1·50. Die absoluten Temperaturen, bei welchen der Innendruck dieser Strahlen dem Druck der äusseren Luft (bei der absoluten Temperatur 300° C.) das Gleichgewicht halten konnte, waren beziehungsweise 240 und 200° C. Dies stimmt mit der Tabelle S. 12, wenn wir annehmen, dass der Druck, unter welchem der erstere Strahl ausströmte, noch beträchtlich unter



Fig. 21.

5 Atmosphären lag, dass derselbe aber für den zweiten Strahl fast 5 Atmosphären betrug. An Strahlen von so schwachem Druck bemerkt man also nichts besonders Auffallendes, welches zu einer weiteren Untersuchung einladen würde. Nicht einmal die conischen Wellen, welche bei Untersuchung nach der Schlierenmethode nicht unbemerkt bleiben können, äussern sich in merklicher Weise in den Interferenzstreifen. Die Sache ändert sich aber wesentlich, sobald man zu stärkerem Druck übergeht.

Schon bei schwachem Druck bemerkt der sorgfältige Beobachter, wenn er den Blick längs der Axe des Strahles hingleiten lässt, eine Periodicität in der Grösse der Streifenausbiegung, welche nicht den zufälligen Unregelmässigkeiten der Streifen-

breite zugeschrieben werden kann. Bei etwas ansteigendem Druck treten dann zwischen den unbegrenzten Streifen Andeutungen von Inseln auf, welche bei 10—15 Atmosphären zu voller Deutlichkeit sich entwickeln. Höher konnte ich zur Zeit nicht gehen, weil dann die turbulenten Luftbewegungen in der Umgebung des Strahles das Bild trüben, und das noch brauchbare Anfangsstück desselben allzu kurz wird. Ausserdem scheinen dann zugleich doch so bedeutende Lichtablenkungen aufzutreten, dass bei der kleinen Objectivöffnung des photographischen Apparates, welches als Blendung wirkt, sich ein Schlierenbild mit dem Interferenzbild combinirt. Es entsteht auch der Eindruck, dass Discontinuitäten der Dichte und hiemit auch der Streifenverschiebung auftreten, welche bei höherem Druck die Interpretation der Bilder illusorisch machen.

Ein Strahlen-Interferenzbild von höherem Druck scheint einem Schlierenbild auf den ersten Blick so unähnlich, dass man kaum im Stande ist, diese beiden Bilder in Beziehung zu setzen. Man bemerkt aber bald, dass dem verschiedenen Charakter der im Schlierenbilde mit geraden, beziehungsweise ungeraden Zahlen (Fig. 12) bezeichneten alternirenden Stellen, im Interferenzbilde zwei ebenso verschiedenartige alternirende Streifenformen entsprechen, und zwar müssen, schon wegen der Ausdehnung senkrecht zur Strahlachse, die stark entwickelten Inseln (Ringsysteme) zu den geradzahligen Stellen des Schlierenbildes gehören. Legt man ein Blatt Pauspapier über das in vierfacher natürlicher Grösse des Strahles gezeichnete Interferenzbild, so kann man auf dieses Blatt die ebenso vergrösserte Skizze des Schlierebildes zeichnen, ohne auf einen Widerspruch zu stossen. Man kann ferner die Tabelle S. 29 benützen, um hiernach den Druck des Strahles, dessen Interferenzbild vorliegt, abzuschätzen, und findet auch diese Schätzung in Übereinstimmung mit den gelegentlich angestellten Manometerbeobachtungen.

Bei höherem Druck (10—15 Atmosphären) kann von einem Strahl von auch nur annähernd gleicher Dichte nicht mehr die Rede sein. Interpretirt man die Interferenzstreifen in der zuvor angegebenen Weise, so findet man keine Gangunterschiedsfläche *(MM)* mehr, welche als eine Halbcylinderfläche mit halbelliptischer Leitlinie aufgefasst werden könnte. Die Fläche *MM*

zeigt vielmehr, wenn man längs der Strahlachse fortschreitet. den geradzahligen Stellen des Schlierenbildes entsprechend, periodisch mächtige Erhebungen, und dazwischen sanftere Einsenkungen. Die Erhebungen lassen sich annähernd als Kegel auffassen, deren Basis elliptisch mit zur Strahlaxe senkrechter grosser Axe ist. An den Enden der grossen Axe denke man sich die Ellipse zugespitzt. Bei steigendem Druck nimmt diese Basis complicirtere eckige Formen an. Die Curven gleichen Gangunterschiedes sind nicht mehr zur Strahlaxe parallele Gerade, sondern werden, wo sie nicht ringförmig sind, wellen-



Fig. 22.

förmig, indem dieselben von der Axe sich entfernend den Erhebungen seitwärts ausweichen, und den Vertiefungen sich wieder annähern. In der Nähe der Ausflussöffnung zeigt sich eine in die Öffnung hineinreichende Streifeninsel, welche ein besonders starkes Anwachsen der Dichte (und daher auch des Druckes) zu erkennen gibt. Auch bei starkem Druck sind die conischen Wellen, welche an den Schlierenbildern so stark hervortreten, nicht das Auffallendste. Vielmehr sind dies die periodischen Verdichtungen und Verdünnungen im Strahl. Die conischen Verdichtungswellen (entsprechend der Kopfwelle des Projectils) sind zwar an den Streifenausbiegungen kenntlich: unmittelbar an denselben näher an der Axe von der Öffnung

ausgehend, und den Raum der grössten Dichte umschliessend, erkennt man aber fast immer auch eine deutliche Verdünnungswelle.



Fig. 23.

Das Bild Fig. 22 entspricht nach den Dimensionen und in Vergleichung mit den Schlierenbildern einem Druck von un-



Fig. 24.

gefähr 15 Atmosphären (im Recipienten). Nach den Streifenausbiegungen schätzen wir die Dichtenmaxima auf 1·8 und

1·9 Atmosphären, die Minima auf 1·1 und 1·0. In der Öffnung besteht eine Dichte von 2·66 Atmosphären.



Fig. 25.

Das Bild Fig. 23, welches nach den Dimensionen ungefähr 8 Atmosphären entspricht, liefert Dichtenmaxima von 1·70, 1·76, Minima von 1·1, 1·0. In der Öffnung beträgt die Dichte 1·93.



Fig. 26.

Das Bild Fig. 24, welches nach den Dimensionen 10 Atmosphären entspricht, liefert die Maxima 1·84, 1·92, und die Minima 1·12, 1·16, 1·10. Für die Mitte der Öffnung finden wir 2·22.

Wir wollen hier noch zwei Bilder zusammenstellen, Fig. 25 und Fig. 26, welche beide einem Druck von über 17 Atmosphären entsprechen. Die Bilder wurden gewonnen, indem der Luftstrahl einmal in das eine, das anderemal in das andere der beiden interferirenden Lichtbündel eingeführt wurde, bei sonst ungeänderter Aufstellung des Interferenzapparates. Dadurch wurde einmal das eine, das anderemal das andere Lichtbündel verzögert und die den homologen Bildstellen entsprechenden Streifenverschiebungen sind deshalb entgegengesetzt. Die Annahme der alternirend auftretenden Verdichtungen und Verdünnungen im Strahl wird hiedurch bestätigt und befestigt, indem hiebei an manchen Stellen, wo in dem einen Bild Streifeninseln auftreten, deren Interpretation bezweifelt werden konnte, in dem anderen Bild ins freie Feld führende ununterbrochene Streifen auftreten. Es fällt auf den ersten Blick auf, dass die Streifen, welche nahe an der Ausflussöffnung liegen, in demselben Sinne gekrümmt sind. Nach den dargelegten Grundsätzen der Interpretation kann dies aber bei Streifen*inseln*, welche Maxima oder Minima, Erhebungen oder Senkungen der Gangunterschiedsfläche mit positiven oder negativen Gipfeln darstellen, nicht anders sein.

Schlussbemerkungen.

Wir können nun die Hauptergebnisse aller Versuche in wenigen Sätzen zusammenfassen.

1. Unter geringem Druck in die freie Luft ausströmende Luftstrahlen (bei ungefähr 1 Atmosphäre Überdruck) zeigen in ihrem Verhalten keine auffallende Abweichung von jenem Verhalten, das man nach der oben angedeuteten schematischen Theorie erwarten muss.

2. Wird der Überdruck grösser (ungefähr 2 Atmosphären und mehr), so treten Erscheinungen auf, von welchen die schematische Theorie keine Rechenschaft gibt.

3. Ein Theil dieser Erscheinungen, insbesondere die conischen im Strahl auftretenden stationären Wellen, wird in den Hauptzügen verständlich, wenn man den Strahl als eine gleichmässige Luftströmung ansieht, in welcher am Öffnungsrande erregte Projectil-Kopfwellen sich fortpflanzten.

4. Diese Projectil-Kopfwellen erfahren an den Grenzen des Strahles eine eigenthümliche totale Reflexion, welche von der gewöhnlich sogenannten Erscheinung wesentlich verschieden ist, und welche den Geschwindigkeitsverhältnissen an der Strahlgrenze ihren Ursprung verdankt.

5. Schon bei geringerem Druck treten Erscheinungen auf, welche lehren, dass man den Strahl nur in erster Annäherung als eine gleichmässige Strömung von überall constanter Richtung und Geschwindigkeit betrachten kann.

6. Je grösser der Überdruck wird, desto deutlicher geht es aus den Schlierenbildern und aus den Interferenzbildern hervor, dass die Dichte des Strahles und auch die Stromgeschwindigkeit parallel der Axe des Strahles periodisch variirt. Die in Fig. 12 mit geraden Zahlen bezeichneten Querschnitte entsprechen dem Maximum der Dichte und Minimum der Stromgeschwindigkeit, die mit ungeraden Zahlen bezeichneten umgekehrt dem Minimum der Dichte und dem Maximum der Geschwindigkeit.

7. Die Ergebnisse der Versuche drängen dazu, neben den conischen (quasi transversalen) Wellen, auch noch stationäre, longitudinale Wellen von bedeutender Condensation und Dilatation im Strahl anzunehmen, obgleich die Erklärung solcher Wellen der Theorie noch Schwierigkeiten bereitet, und obgleich sogar die Möglichkeit stationärer Wellen von endlicher Excursion zuweilen geläugnet wird (Lord Rayleigh).

Erklärung der Tafeln.

Alle Strahlen gehen von links nach rechts durch das Gesichtsfeld. Die Tafeln enthalten die Reproductionen der etwa um die Hälfte vergrösserten Originalbilder von 36 *mm* Durchmesser, denen in Wirklichkeit ein Schlierenfeld von 10 *cm* entspricht. Die Rundstrahlen strömen aus einer Bohrung von 7·5 *mm* Durchmesser, während die Öffnung der Spaltstrahlen 23 × 3½ *mm* gross ist. Bei senkrecht zur Strahlaxe orientirter Blendungsschneide kann dieselbe entweder im Sinne der Ausflussrichtung (nämlich des Strahles) gegen die optische Axe geschoben werden, bis sie das Spaltenbild schneidet (Stellung *A*), oder in entgegengesetzter Richtung (Stellung *B*). Die Bilder desselben Strahles bei *A* und *B* sind complementär.

Tafel I.

Fig. 1. Rundstrahl von 15 Atmosphären; Blendungsstellung *B*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet (25. August 1892).

Fig. 2. Rundstrahl von 10 Atmosphären; Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet (14. September 1892).

Tafel II.

Fig. 3. Spaltstrahl von 28 Atmosphären; Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet (6. September 1892).

Fig. 4. Spaltstrahl von 28 Atmosphären; Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet (6. September 1892).

Tafel III.

Fig. 5. Rundstrahl von 33 Atmosphären; aufgenommen beim Lichte eines (15 *mm* langen, haarfeinen) durch eine Batterieentladung (52·500 *cm* Capacität) verbrennenden Platindrahtes. Blendungsstellung *A*.

Fig. 6. Spaltstrahl von 20 Atmosphären; Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet. Quer über die Ausflussspalte sind zwei feine Kupferdrähtchen gespannt.

Fig. 7. Rundstrahl von 15 Atmosphären, der längs einer zur Strahlaxe genau parallen, an einem Metallstücke anpolirten Ebene strömt. Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet.

Fig. 8. Rundstrahl von 15 Atmosphären, der mit der optischen Axe des Apparates einen Winkel von ungefähr 70° einschliesst. Blendungsstellung *A*. Magnesiumblitzpulver elektrisch entzündet.

Fig. 9. Rundstrahl von 9 Atmosphären; aufgenommen beim Lichte eines (15 *mm* langen, haarfeinen) durch eine Batterieentladung (52·500 *cm* Capacität) verbrennenden Platindrahtes. Blendungsstellung *A*.

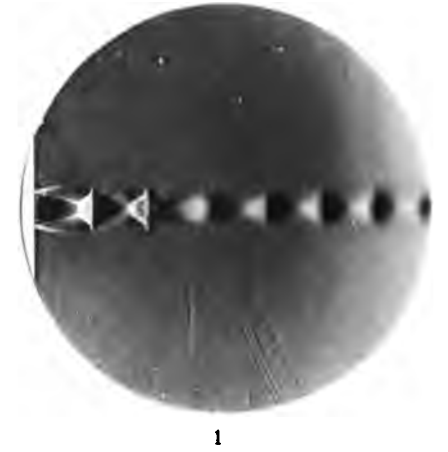
Bei den Aufnahmen im Interferenzfelde wurde der violette Theil des Sonnenspectrums auf ein rundes Diaphragma (von 1·2 *mm* Durchmesser bei der in Fig. 14 des Textes angedeuteten Aufstellung) entworfen. Die Spaltbreite des vorbeigeschnellten Schiebers betrug 2 *mm*. Es wurden durchwegs cylinderische Strahlen (7·5 *mm* Öffnung) verwendet, die man durch sehr langsames Öffnen des Verschlusses in das Bündel einschleichen liess. Die Entwicklung dauerte ungefähr eine halbe Stunde. Alle Strahlen bewegen sich in der Richtung des Pfeiles von unten nach oben durch das Feld. Bei den mit *a* bezeichneten Bildern befand sich der Strahl im Bündel I (Fig. 14 des Textes), die bei demselben Druck aufgenommenen Complementärbilder *b* wurden durch Einführung des Strahles in das Bündel II gewonnen.

Tafel IV.

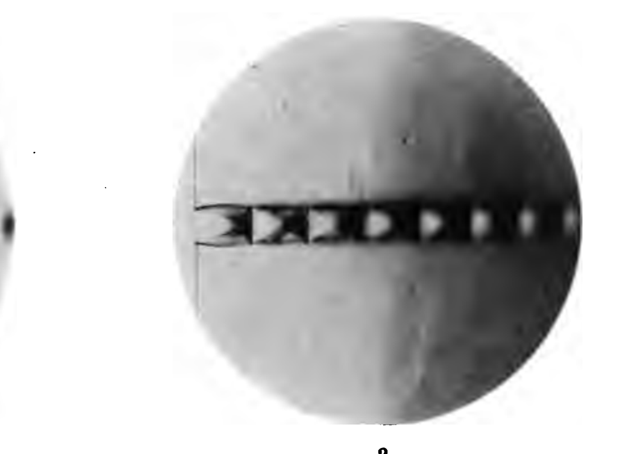
Fig. 10 { *a* Rundstrahl von 24 Atmosphären; Bündel I (8. Juli 1893).
b Rundstrahl von 20 Atmosphären; Bündel II (5. Juli 1893).

Fig. 11 { *a* Rundstrahl von 12 Atmosphären; Bündel I (8. Juli 1893).
b Rundstrahl von 10 Atmosphären; Bündel II (5. Juli 1893).

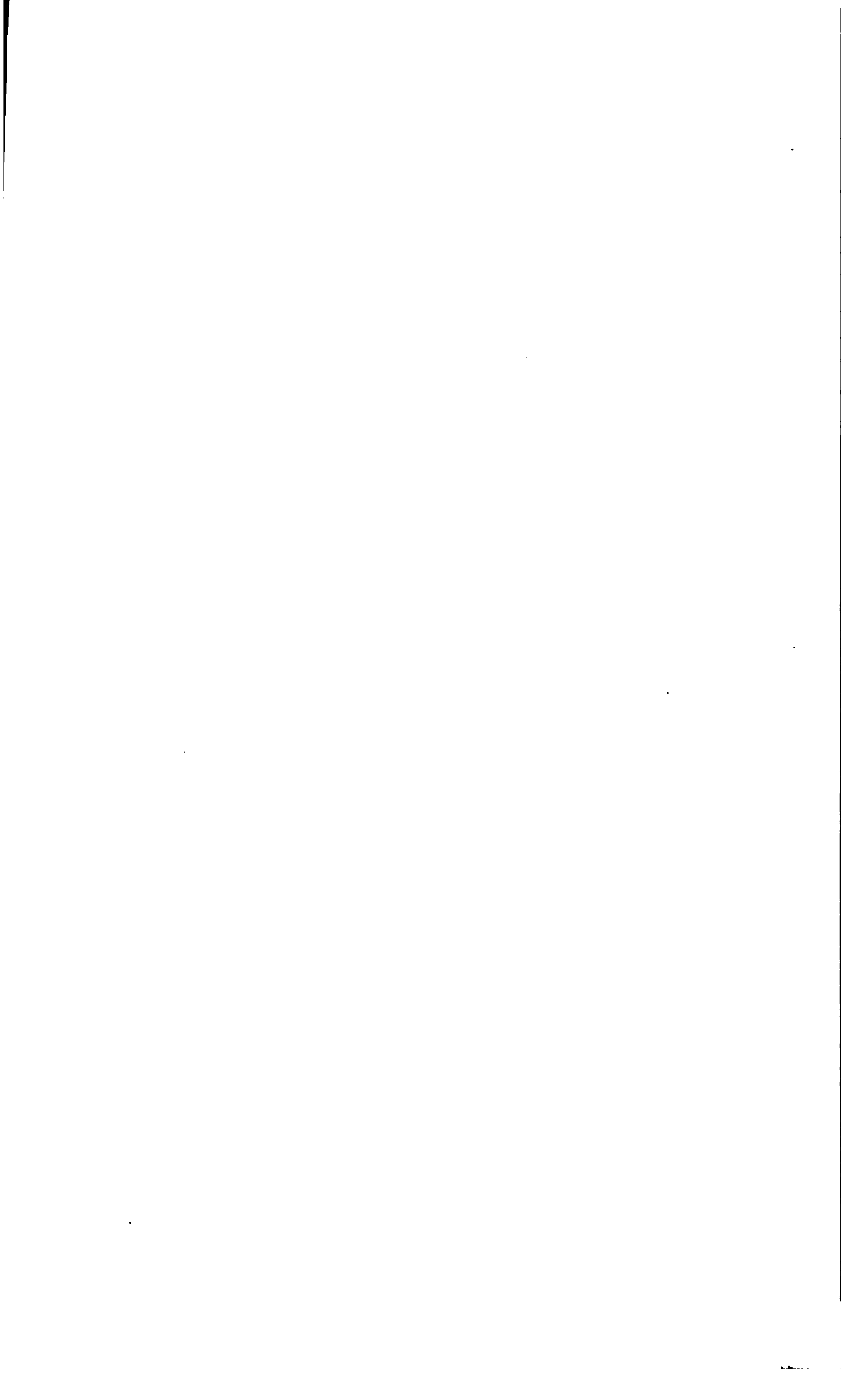
Fig. 12 { *a* Rundstrahl von 6 Atmosphären; Bündel I (6. Juli 1893).
b Rundstrahl von 6 Atmosphären; Bündel II (5. Juli 1893).

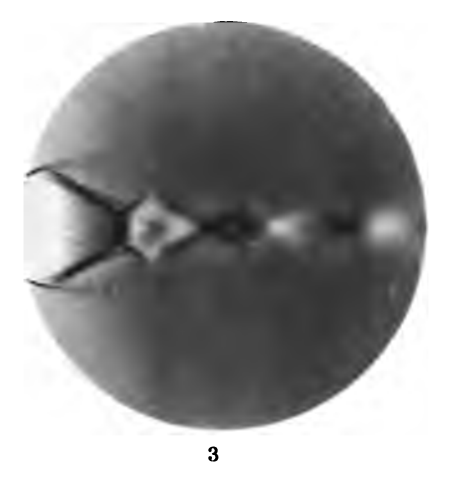


1

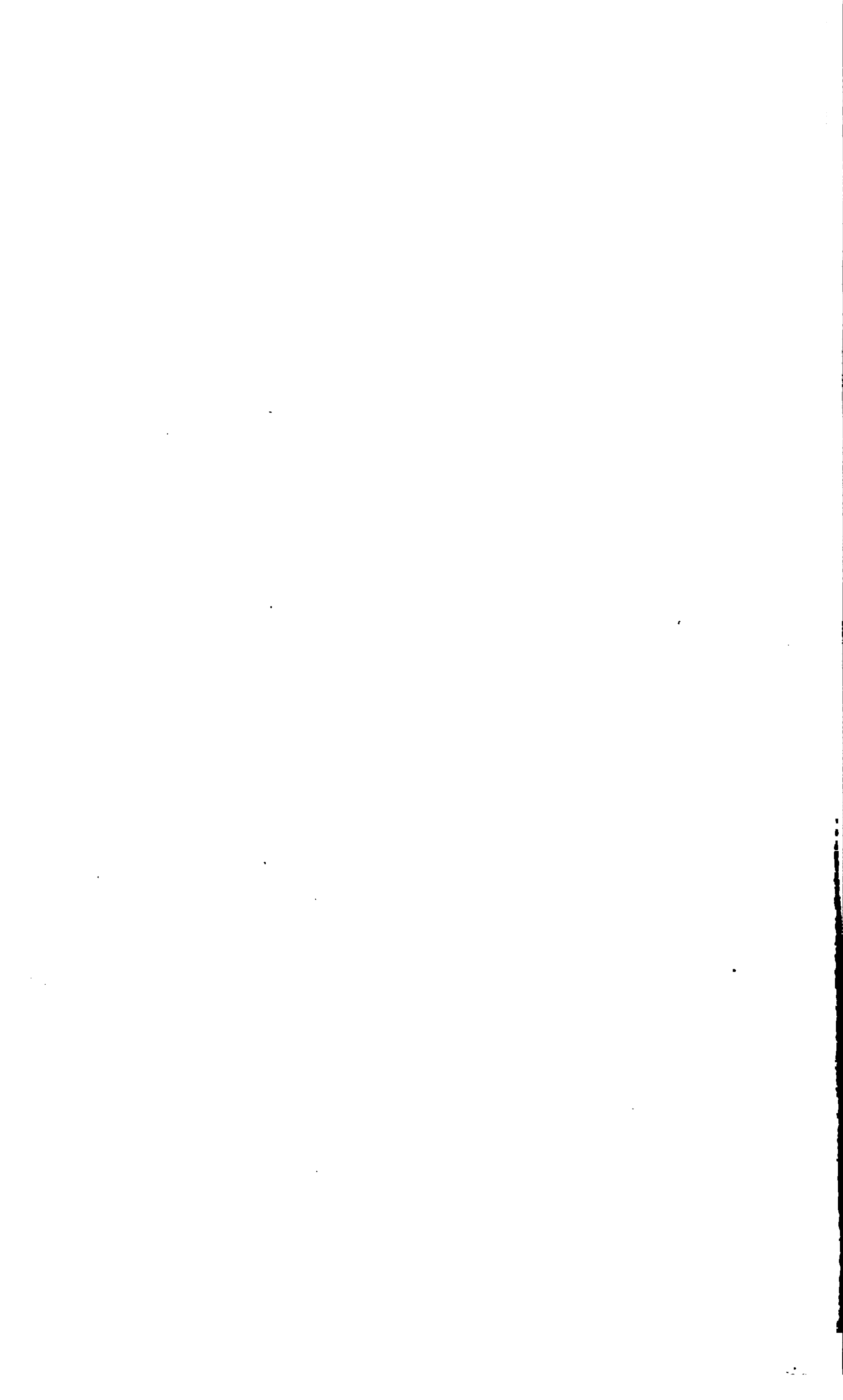


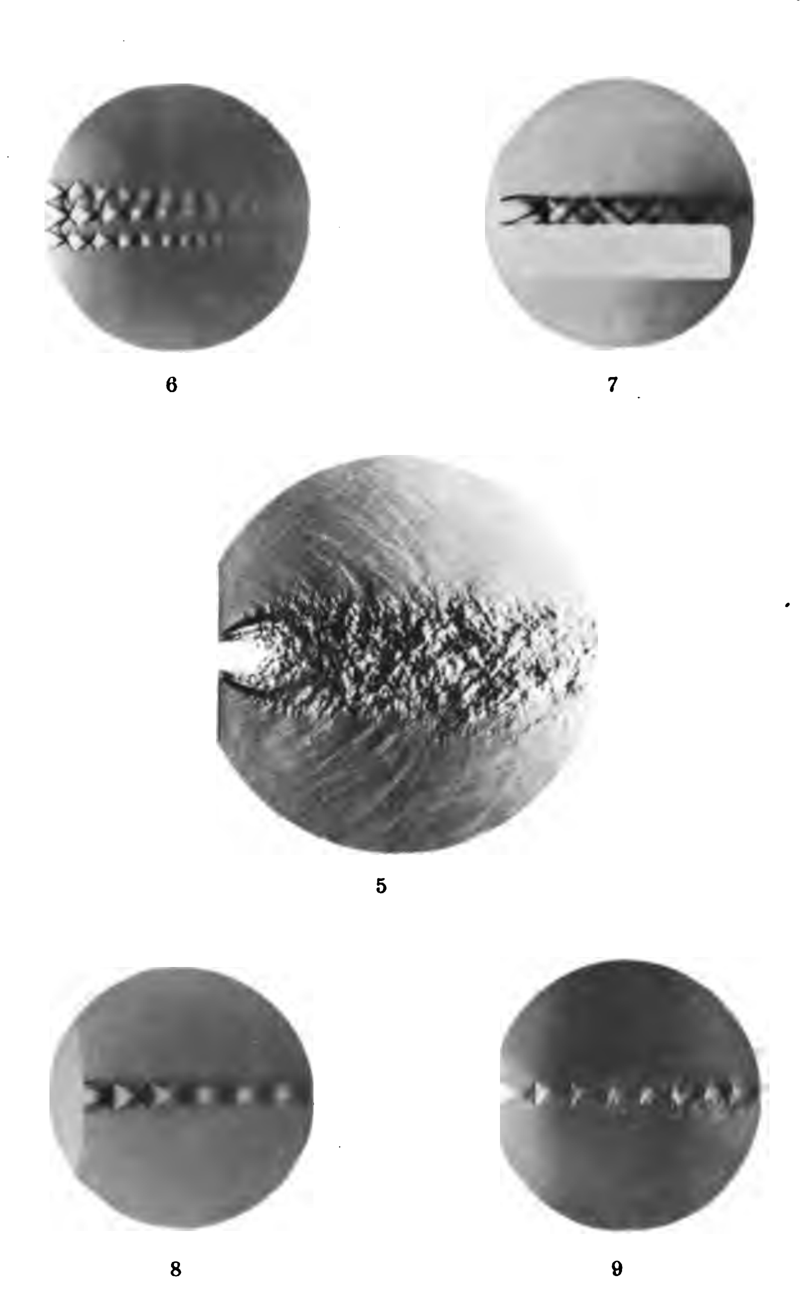
2





3 4

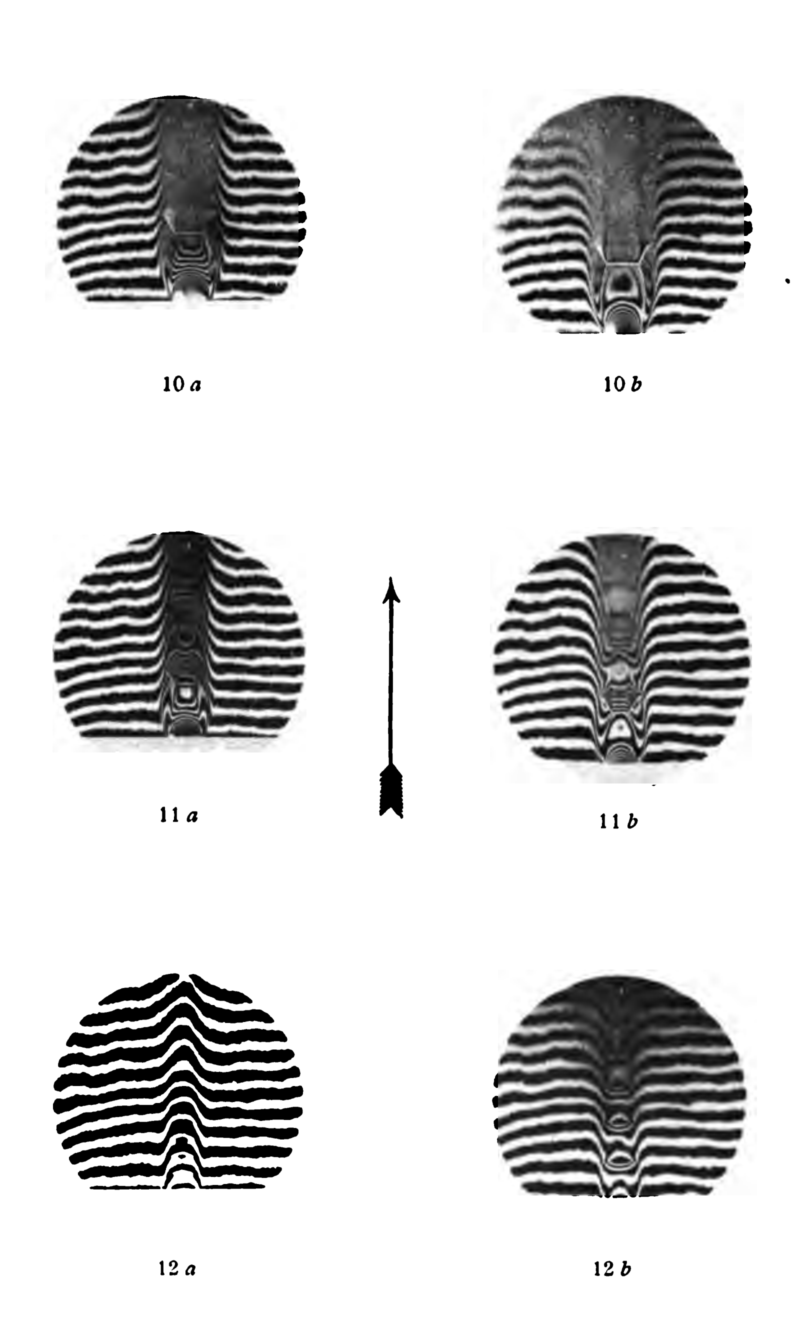




6 7

5

8 9



10 *a*

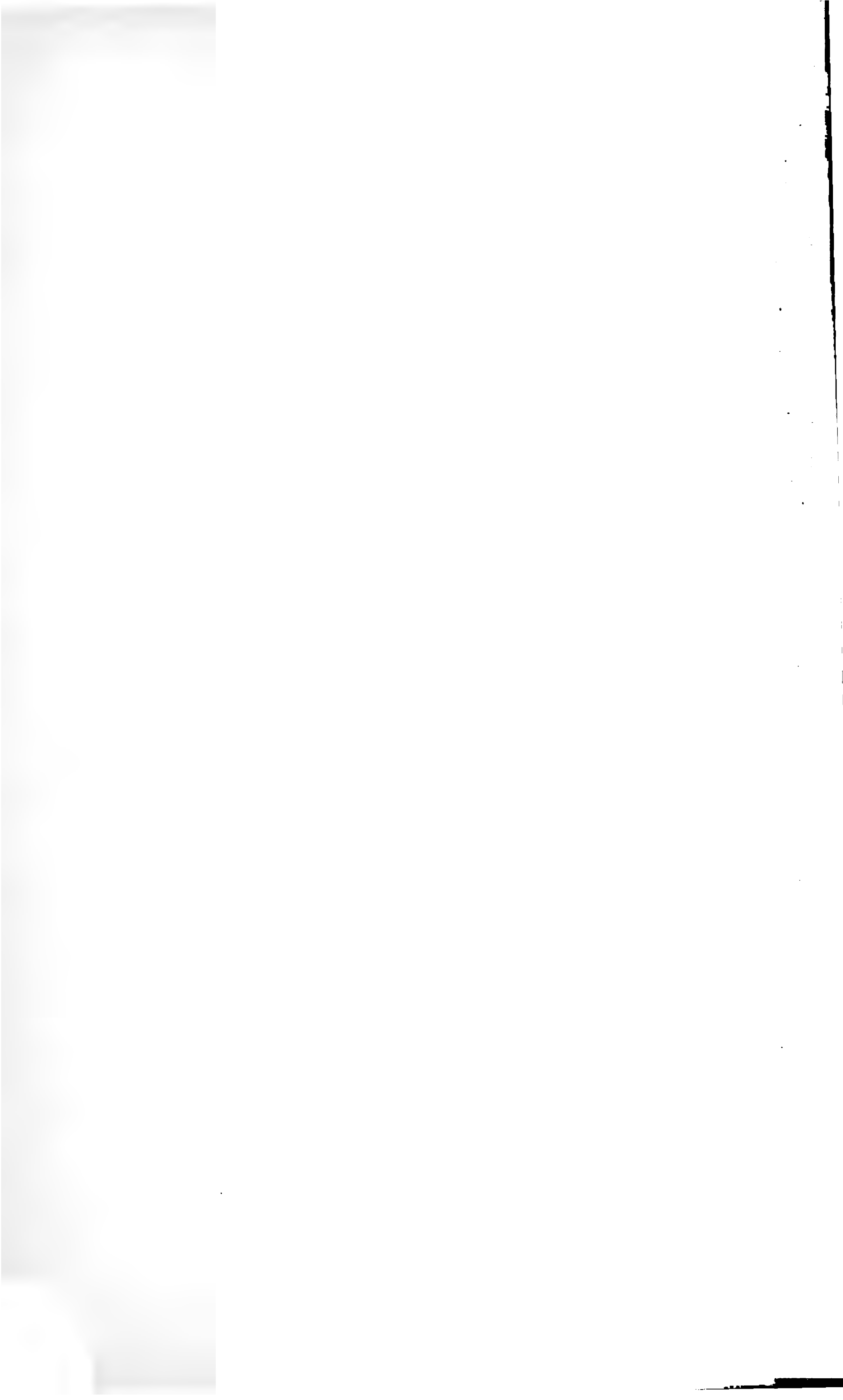
10 *b*

11 *a*

11 *b*

12 *a*

12 *b*



Über das Verhalten rotirender Isolatoren im Magnetfeld und eine darauf bezügliche Arbeit A. Campetti's

von

Dr. **Hans Benndorf.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. November 1897.)

Führt ein Körper unter dem Einfluss äusserer Kräfte in einem Magnetfeld einen mechanischen Kreisprocess aus, d. h. kehrt er nach einer bestimmten Zeit genau wieder in den Anfangszustand zurück, so wird im Allgemeinen von den Kräften eine Arbeit geleistet, die von der Natur des betreffenden Körpers abhängt; im folgenden soll stets vorausgesetzt werden, dass das magnetische Feld constant bleibt und die Bewegung so langsam vor sich geht, dass eine Änderung des ursprünglichen Feldes durch die Bewegung des Körpers vernachlässigt werden kann.

Ist der Körper ein idealer Leiter ohne dielektrische Polarisation, so ist die aufgewandte Arbeit äquivalent der entwickelten Joule'schen Wärme, vermehrt um die durch etwaige magnetische Hysteresis erzeugte Wärmemenge.

Ist der Körper ein ideales Dielektricum ohne jede Leitung, so kann die der aufgewandten Arbeit entsprechende Wärme nur durch magnetische und dielektrische Hysteresis erzeugt sein.

Für einen Körper, der in seinen Eigenschaften zwischen diesen idealen Grenzen liegt, wird die Joule'sche Wärme, sowie die durch magnetische und dielektrische Hysteresis erzeugte Wärme das Äquivalent der aufgewandten Arbeit bilden.

In seiner Arbeit:[1] »Über eine dämpfende Wirkung des magnetischen Feldes auf rotirende Isolatoren« beschreibt Duane ein Dämpfungsphänomen, welches an isolirenden Cylindern auftritt, die in einem magnetischen Felde schwingen, und folgert aus seinen Messungen, dass der der Dämpfung entsprechende Energieverlust weder durch die äusserst geringe Joule'sche Wärme, noch aber durch magnetische Hysteresis von kleinen, dem Isolator vielleicht beigemengten Eisentheilchen erklärt werden könne. Es erscheint nach dem oben Gesagten daher nur folgerichtig, die Dämpfung mit einer elektrischen Hysteresis in Verbindung zu bringen.

Wenn auch über elektrische Hysteresis noch wenig bekannt ist, so liesse sich doch wenigstens die Möglichkeit einer Erklärung der Duane'schen Erscheinungen durch sie erweisen, wenn man zeigen könnte, dass die gesammte in dem dielektrischen Körper durch Induction hervorgerufene Energie von derselben Grössenordnung ist, wie das der Dämpfung entsprechende Energiequantum.

Im vergangenen Frühjahre habe ich einer Anregung Herrn Hofrath L. Boltzmann's folgend die in einer im homogenen magnetischen Felde rotirenden Kugel aus isolirender Substanz erzeugte Energiemenge berechnet und gefunden, dass dieselbe viel zu klein ist, um eine irgend merkliche Dämpfung zu erzeugen.

Dieses negative Resultat zu veröffentlichen, erschien umso unnöthiger, als bald darauf Duane und Stewart in einer zweiten Abhandlung[2] zeigten, dass die Dämpfung des schwingenden Cylinders doch durch magnetische Hysteresis kleinster Eisentheilchen erklärt werden müsse und den diesbezüglichen Irrthum in der ersten Arbeit aufklärten.

Vor Kurzem aber wurde ich auf eine Abhandlung von A. Campetti:[3] »Sul moto di un dielettrico in un campo magnetico« aufmerksam gemacht; in derselben wird zuerst in Anlehnung an J. J. Thomson die Grösse der in einem Dielektricum inducirten Polarisationen berechnet, wenn es in

---

[1] Wied. Annalen, Bd. 58, S. 517 (1896).

[2] Wied. Annalen, Bd. 61, S. 436 (1897).

[3] Atti della R. accademia delle scienze di Torino, vol. XXXII, p. 52.

einem homogenen Magnetfelde rotirt, und zwar für eine Kugel und einen Cylinder. Zum Schlusse rechnet der Verfasser die in einer solchen dielektrischen Kugel aufgespeicherte elektrische Energie aus und kommt zu dem Schlusse, dass dieselbe so gross sei, dass man sehr gut die Duane'schen Phänomene daraus erklären könne. Durch passende Wahl der magnetischen Feldintensität, meint Herr Campetti, kann die elektrische Energie so weit gesteigert werden, dass sie von gleicher Grössenordnung mit der kinetischen Energie der rotirenden Kugel wird. Wie gross aber die Feldintensität gemacht werden muss, damit dieser Fall eintritt, hat entweder der Verfasser ziffernmässig nicht berechnet oder er hat es unterlassen, alle Grössen seiner Formel in demselben Masssystem zu messen.

Die Formel, welche Herr Campetti für die elektrische Energie erhält, stimmt mit der von mir berechneten überein, und nur die Ableitung derselben hat er in strengerer und einwurfsfreier Weise durchgeführt.

Um die Prüfung der in seiner Formel auftretenden Grössen zu ermöglichen, werde ich seine Ableitung mit unwesentlichen Änderungen wiedergeben, da die Originalabhandlung nur schwer zugänglich und durch einige Druckfehler entstellt ist.

Die allgemeinen, von Maxwell aufgestellten Gleichungen für die Componenten der elektromotorischen Kraft, welche in der Zeiteinheit in einem Volumelement eines Körpers inducirt wird, wenn derselbe sich in einem elektromagnetischen Feld bewegt, lauten:

$$X = cv - bw - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Y = aw - cu - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$Z = bu - av - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, a, b, c und F, G, H die Componenten der magnetischen Induction, respective des Vectorpotentials sind; ψ ist eine Function, die Maxwell das locale elektrische Potential nennt.

Die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ und das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ sind durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ verbunden, daher ist

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Wenn u, v, w, und $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gegeben sind, beschränkt sich die Aufgabe auf die Berechnung der Function ψ.

Wir nehmen nun an, eine homogene dielektrische Kugel vom Radius a rotire mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um die X-Axe eines fixen rechtshändigen Coordinatensystems in einem homogenen magnetischen Feld; und zwar soll die Drehung in einem solchen Sinne erfolgen, dass die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes (x, y, z) der Kugel $u = 0$, $v = -\omega z$, $w = \omega y$ werden. Die magnetische Induction falle in die Richtung der positiven Z-Axe und habe die Grösse c.

In unserem Falle ist $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und ausserdem empfiehlt es sich, $\psi = (Fu + Gv + Hw) + \varphi$ zu setzen, wie es schon J. J. Thomson thut, weil, wie wir sehen werden, φ dann überall die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ befriedigt.

Nach dieser Änderung lauten die allgemeinen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X &= cv - bw - \frac{\partial}{\partial x}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= aw - cu - \frac{\partial}{\partial y}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= bu - av - \frac{\partial}{\partial z}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir in unserer Betrachtung $a = 0$, $b = 0$, $c = c$ und daher $F = -\frac{1}{2} cy$, $G = \frac{1}{2} cx$, $H = 0$ setzen müssen.

Auf der rechten Seite der Gleichung 1) sind dann alle Grössen bis auf φ bekannt; das Problem ist gelöst, wenn die Function φ bestimmt ist.

Setzt man in 1) alle Werthe ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ ist, die Definitionsgleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ für φ, zu deren Bestimmung noch die

Grenzbedingungen an der Oberfläche der rotirenden Kugel anzugeben sind; sie müssen abgeleitet werden aus der Bedingung, dass die Normalcomponenten der dielektrischen Verschiebung an der Kugelfläche keinen Sprung erleiden.

Die Gleichungen 1) haben nur Giltigkeit, wenn keine Discontinuitäten der Geschwindigkeit auftreten. Um daher in unserem Falle die Grenzbedingung aufstellen zu können, muss man eine Annahme über die Mitbewegung des die Kugel umgebenden Mediums machen; die einfachste und plausibelste, die schon Thomson macht, ist die folgende:

Das die Kugel umgebende Medium werde von derselben so mitgenommen wie eine reibende Flüssigkeit, so dass die Geschwindigkeitscomponenten durch die Ausdrücke $u = 0$, $v = -\left(A \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) + Bz\right)$, $w = A \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + By$ wiedergegeben werden können; dabei sollen die Constanten A und B so bestimmt werden, dass u, v, w für $r = a$ den Geschwindigkeitscomponenten der rotirenden Kugel, also bezüglich 0, $-\omega z$, ωy und für $r = b$ sämmtlich Null werden.

Man erhält dann

$$u = 0$$
$$v = -Az\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$w = Ay\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right),$$

wobei

$$A = -\omega \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}$$

ist.

Es entstehen somit drei Räume, in denen die Geschwindigkeit sich überall continuirlich ändert:

1. Der Raum I eine Kugel vom Radius a, innerhalb dessen

$$u = 0$$
$$v = -\omega z$$
$$w = \omega y$$

2. Der Raum II eine Kugelschale von der Dicke $b-a$ mit den Geschwindigkeiten

$$u = 0$$
$$v = -Az\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$w = \quad Ay\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

3. Der Raum III ausserhalb der Kugel mit dem Radius b, wo überall

$$u = 0$$
$$v = 0$$
$$w = 0$$

ist.

Entsprechend den drei Räumen erhält man drei Systeme von Gleichungen:

$$X_1 = -\frac{1}{2}\omega c z - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$Y_1 = \quad - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$Z_1 = +\frac{1}{2}\omega c x - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

für den Raum I,

$$X_2 = -\frac{1}{2} cAz\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2} cAxz \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$Y_2 = \quad - \frac{1}{2} cAxz \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$Z_2 = +\frac{1}{2} cAx\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2} cAxz \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

für den Raum II und schliesslich

$$X_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$Y_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$Z_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

für den Raum III.

Wie man sich leicht überzeugt, genügt φ in allen drei Räumen der Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$. Zur Bestimmung von φ sind nun noch die Grenzbedingungen an den beiden Kugelflächen aufzustellen. Bezeichnen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Dielektricitätsconstanten in den drei Räumen, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$\varkappa_1\left(X_1\frac{x}{r}+Y_1\frac{y}{r}+Z_1\frac{z}{r}\right)_{r=a}=\varkappa_2\left(X_2\frac{x}{r}+Y_2\frac{y}{r}+Z_2\frac{z}{r}\right)_{r=a}$$

und

$$\varkappa_2\left(X_2\frac{x}{r}+Y_2\frac{y}{r}+Z_2\frac{z}{r}\right)_{r=b}=\varkappa_3\left(X_3\frac{x}{r}+Y_3\frac{y}{r}+Z_3\frac{z}{r}\right)_{r=b}$$

woraus

$$\varkappa_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}=\varkappa_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{3}{2}Ac\frac{zx}{r^4}\right)_{r=a}$$

$$\varkappa_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{3}{2}Ac\frac{zx}{r^4}\right)_{r=b}=\varkappa_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=b}$$

folgt.

Setzen wir die Kugelflächenfunction zweiten Grades $\frac{xz}{r^2} = V_2$, so ist

$$\varkappa_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}=\varkappa_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{3}{2}Ac\frac{V_2}{r^2}\right)_{r=a}$$

und

$$\varkappa_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{3}{2}Ac\frac{V_2}{r^2}\right)_{r=b}=\varkappa_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=b}. \tag{2}$$

φ kann also als Potential zweier Schichten auf den Kugelflächen mit den Radien a und b angesehen und daher für den Raum I nach positiven Potenzen von r, für den Raum II nach positiven und negativen und für den Raum III nach negativen Potenzen des Radius vector in eine Kugelfunctionsreihe entwickelt werden.

Aus dieser Entwicklung ergeben sich folgende Werthe für φ, wobei eine additive Constante, die nicht weiter interessirt, weggelassen ist.

$$\varphi_1 = L_1 V_2 r^2$$
$$\varphi_2 = L_2 V_2 r^2 + M_2 V_2 \frac{1}{r^3}$$
$$\varphi_3 = L_3 V_2 \frac{1}{r^3}.$$

Die Continuitätsbedingungen für φ und die Gleichungen 2) liefern folgende Relationen zur Constantenbestimmung:

$$L_1 a^2 = L_2 a^2 + \frac{M_2}{a^3}$$
$$L_2 b^2 + \frac{M_2}{b^3} = L_3 \frac{1}{b^3}$$
$$2\varkappa_1 L_1 a = \varkappa_2 \left(2 L_2 a - 3 M_2 \frac{1}{a^4} - \frac{3}{2} A c \frac{1}{a^2}\right)$$
$$\varkappa_2 \left(2 L_2 b - 3 M_2 \frac{1}{b^4} - \frac{3}{2} A c \frac{1}{b^2}\right) = -3\varkappa_3 L_3 \frac{1}{b^4},$$

woraus sich L_1, L_2, L_3, M_2 bestimmen lassen.

Da uns nur die Vorgänge in der Kugel interessiren, brauchen wir nur L_1; es ist aus obigen Gleichungen:

$$L_1 = \frac{3}{2} \varkappa_2 c\omega \frac{b^3}{b^3 - a^3} \cdot \\ \cdot \frac{3\varkappa_3 (b^5 - a^5) - \varkappa_2 (5a^3 b^2 - 2b^5 - 3a^5)}{3\varkappa_2\varkappa_3 (3b^5 + 2a^5) + 2\varkappa_1\varkappa_2 (2b^5 + 3a^5) + 6(\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_2^2)(b^5 - a^5)}. \tag{3}$$

Nehmen wir an, dass $b - a$ sehr klein ist, so wird

$$L_1 = \frac{3\varkappa_2\varkappa_3}{6\varkappa_2\varkappa_3 + 4\varkappa_1\varkappa_2} c\omega$$

und für $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$, wie bei den Duane'schen Versuchen, ist

$$L_1 = \frac{3c\omega}{6 + 4\varkappa_1} = Rc\omega,$$

wo R ein echter Bruch ist.

Herr Campetti nimmt an, dass $\varkappa_2 = 1$ und die Kugel vom Radius b leitend ist; man erhält den Werth für L_1 aus Gleichung 3), indem man $\varkappa_3 = \infty$ setzt.

Es ist für diesen Fall:

$$L_1 = \frac{3}{2}\,\frac{b^3}{b^3 - a^3}\,\frac{b^5 - a^5}{(3b^5 + 2a^5) + 2\varkappa_1(b^5 - a^5)}\,c\omega,$$

und wenn man $b - a$ wieder sehr klein nimmt,

$$L_1 = \frac{1}{3}\,c\omega.$$

In jedem Fall aber ist $L_1 = Rc\omega$, wo R ein echter Bruch ist, der unabhängig von der Wahl der Einheiten ist, in denen die einzelnen Grössen gemessen werden. Es ist daher

$$\varphi_1 = Rc\omega xz$$

und

$$X_1 = -\left(\frac{1}{2} + R\right) cz\omega$$

$$Y_1 = 0$$

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2} - R\right) cx\omega,$$

womit das Problem der Induction gelöst ist.

Nachdem X_1, Y_1, Z_1 bestimmt ist, kann man den elektrischen Energie-Inhalt der Kugel berechnen.

Er ist $W = \frac{\varkappa_1}{8\pi}\iiint (X^2 + Y^2 + Z^2)\,d\tau$, wobei die Integration über den ganzen Kugelraum zu erstrecken ist.

In unserem Falle also

$$W = \frac{\varkappa_1 c^2 \omega^2}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{1}{2} + R\right)^2 z^2 + \left(\frac{1}{2} - R\right)^2 x^2\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \varkappa_1 c^2 \omega^2 a^5\,\frac{1 + 4R^2}{60},$$

wobei R ein echter Bruch ist.

Die kinetische Energie einer rotirenden Kugel ist, wenn ihre Dichte δ ist, $U = \frac{4}{15}\pi\omega^2 a^5 \delta$. Nennt man ω die grösste Geschwindigkeit, die eine schwingende Kugel erreicht, so ist ihre mechanische Energie durch denselben Ausdruck U gegeben, und gleichzeitig ist dann W das Maximum der in ihr inducirten elektrischen Energie.

Herr Campetti meint nun, dass die beiden Grössen U und W durch ein genügend grosses c von der gleichen Grössenordnung gemacht werden könnten, und schliesst daraus, dass die Duane'schen Phänomene sich eventuell durch dielektrische Hysteresis erklären liessen.[1]

Dass dies aber vollständig unmöglich ist, sieht man, wenn man numerische Werthe einsetzt.

Ich nehme an $R = 1$, $c = 10.000$ absolute Einheiten des elektromagnetischen Systems; beide Werthe sind grösser angenommen, als sie bei den Duane'schen Versuchen waren. Ferner sei $\delta = 1$ gesetzt und die Dielektricitätsconstante $\varkappa_1$, wie üblich, im elektrostatischen System gemessen. Ihr Werth im elektromagnetischen System wird dann sein $\frac{\varkappa_1}{v^2} = \frac{\varkappa_1}{9.10^{20}}$. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $\frac{W}{U}$ ein, so ist annähernd $\frac{W}{U} = \frac{\varkappa_1}{9.10^{13}}$, d. h. aber, die elektrische Energie in der Kugel ist einige zehn billionenmal zu klein, um die Zurückführung der Duane'schen Erscheinungen auf dielektrische Hysteresis als möglich erscheinen zu lassen.

---

[1] Herr Campetti gebraucht nicht den Ausdruck »elektrische Hysteresis« aus seinen Ausführungen aber ergibt sich dieser Sinn; er sagt gegen Schluss seiner Abhandlung: ...e dell' energia elletrica prima fornita ne sarà restituita una parte più o meno grande a seconda della natura del dielettrico, potendo per es. una parte trasformarsi in calore.

XXVI. SITZUNG VOM 9. DECEMBER 1897.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft IX (December 1897).

Das k. u. k. Reichs Kriegsministerium »Marine-Section« gibt Nachricht von dem am 5. December l. J. plötzlich erfolgten Hinscheiden Sr. Excellenz des Herrn Marine-Commandanten und Chef der Marine-Section Admiral Maximilian Freiherrn Daublebsky von Sterneck zu Ehrenstein.

Der Vorsitzende gedenkt der glänzenden militärischen Eigenschaften des Hingeschiedenen, sowie der grossen Liebe desselben zur Wissenschaft, auf welchem Gebiete ihm die kaiserliche Akademie als mächtigem Förderer ihrer Bestrebungen, insbesondere für das Zustandekommen und die Erfolge ihrer seit einer Reihe von Jahren durchgeführten oceanographischen Forschungen zum bleibenden Danke verpflichtet ist. Zugleich bemerkt der Vorsitzende, dass seitens des Präsidiums der kaiserlichen Akademie das Beileid über diesen schmerzlichen Verlust dem Präsidium der k. u. k. Marine-Section im schriftlichen Wege zum Ausdruck gebracht wurde.

Laut telegraphischer Nachricht ist S. M. Schiff »Pola« am 2. December zu viertägigem Aufenthalt in Perim eingelaufen. An Bord Alles wohl.

Herr Dr. H. Luggin in Karlsruhe spricht den Dank aus für die ihm zur Durchführung seiner Untersuchungen auf dem Gebiete der Photoelektricität und der Photochemie von der kaiserlichen Akademie aus der Ponti-Widmung gewährte Subvention.

Herr Ingenieur S. Wellisch in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Das Alter der Welt.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. Gustav Jäger, betitelt: »Zur Frage des Widerstandes, welchen bewegte Körper in Flüssigkeiten und Gasen erfahren«.

XXVII. SITZUNG VOM 16. DECEMBER 1897.

Erschienen: Denkschriften, Bd. 64 (Jahrgang 1897).

Laut telegraphischer Nachricht ist S. M. Schiff »Pola« am 14. December zu dreitägigem Aufenthalt in Mokka eingelaufen. An Bord Alles wohl.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im ersten chemischen Universitäts-Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über eine neue Synthese des Phloroglucins« von E. Flesch.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine in seinem Institute von Herrn G. Dimmer ausgeführte Arbeit vor: »Über die Absorptionsspectren von Didymsulfat und Neodymammonnitrat«.

Derselbe legt ferner eine in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführte Arbeit vor: »Über die ultravioletten Funkenspectren der Elemente (X Mittheilung)«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Prof. P. Volkmann an der Universität in Königsberg i. Pr.: »Über die Frage nach dem Verhältnisse von Denken und Sein und ihre Beantwortung durch die von der Naturwissenschaft nahegelegte Erkenntnisstheorie«.

Der Vorsitzende theilt einen von dem Leiter der wissenschaftlichen Expedition S. M. Schiff »Pola«, w. M. Herrn Hofrathe Dr. Steindachner, aus dem Rothen Meere eingelangten Bericht, ddo. Assab, 29. November und Nachtrag vom 30. November 1897 im Auszuge mit.

Über die Absorptionsspectren von Didymsulfat und Neodymammonnitrat

von

Gottfried Dimmer.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Bevor ich daran gehe, die eigenen Untersuchungen über die Absorptionsspectren von Didymsulfat und Neodymammonnitrat zu besprechen, erscheint es geboten, einen Überblick über die Literatur des Gegenstandes zu geben.

Die älteste Untersuchung über das Absorptionsspectrum von Didym stammt von Gladstone[1] aus dem Jahre 1858. Gladstone gibt zwei Absorptionsstreifen an, er verwendet schwefelsaures Didymoxyd und erkennt in einer Lösung von $^1/_2$ Zoll Dicke noch $^1/_{1000}$ Substanz.

Im Jahre 1862 untersucht Erdmann eine 8—10 *cm* dicke Schichte und constatirt sieben Streifen. Über die Zusammensetzung des Salzes und über den Concentrationsgrad der Lösung finden sich keine Angaben.

Im selben Jahre findet O. N. Rood[2] 12 deutliche Absorptionsstreifen in einer 12 Zoll langen Schicht concentrirter Lösung von salpetersaurem Didymoxyd.

1865 constatirt Delafontaine[3] 89 Absorptionslinien in einer 7—8 *cm* langen Schichte.

---

1 Gladstone, J. Chem. Soc. 10, p. 219.

2 Rood, Pogg. Ann. 117, S. 350—351.

3 Delafontaine, Pogg. Ann. 124, S. 635—636.

1866 veröffentlichen Bahr und Bunsen[1] eine Untersuchung: »Über Erbinerde und Yttererde« und zeichnen bei dieser Gelegenheit die Spectren eines 1 *mm* dicken Krystalles von schwefelsaurem Didymoxyd und einer stärkeren und schwächeren Lösung von salpetersaurem Didymoxyd. Ich habe die Scalentheile graphisch in Wellenlängen umgewerthet und folgende Resultate erhalten.

1. Spectrum des Krystalles:

735—721 (schwach)
697·5—675 (mittel)
635—630·5 (schwach)
628—623·5 (schwach)
592·5—568·5 (stark)
Darin:
1. Max. 589
2. Max. 579·5
3. Max. 573
531·5—507·5 (stark)
Darin:
1. Max. 529
2. Max. 523
3. Max. 520
4. Max. 514·5
5. Max. 509·5
502·5—490·5 (schwach)
483·5—480 (stark)
476·5—473 (schwach)
470—463·5 (mittel)
449—437·5 (schwach)

2. Spectrum der stärkeren Lösung:

736—721 (schwach)
681—678·5 (schwach)
628—623·5 (schwach)
596·5—569 (stark)
Darin:
1. Max. 591
2. Max. 579·5
3. Max. 571·5
533—531 (schwach)
527·5—517 (stark)
514·5—505·5 (mittel)
Max. 511
485·5—480 (stark)
475·5—473·5 (mittel)
470—465·5 (mittel)
440·5—438·5 (mittel)

3. Spectrum der schwächeren Lösung:

596—567 (mittel)
1. Max. 587
2. Max. 571·5
527—517 (schwach)
514·5—507·5 (schwach)
485·5—482·5 (schwach)

[1] Bahr und Bunsen, Ann. der Chemie und Pharm. 137, S. 1—33.

Die Verfasser constatiren ein merkwürdiges Verhalten des Streifens 681—678·5 der Lösung, der im Krystallspectrum, und des Streifens 697·5—675, der in den Lösungen fehlt. Sie beobachten, dass bei Vorschaltung von Lösung und Krystall zwei Streifen auftreten, ein Beobachtungsfehler also ausgeschlossen erscheint. Sie sagen diesbezüglich:

»Es unterliegt also keinem Zweifel, dass durch Veränderung des flüssigen Aggregatzustandes in den festen Spectrallinien verschwinden und neue auftreten können«.

Ich glaube, dass es sich hier um eine einfache Verschiebung handelt, wie solche ja bei den fraglichen Substanzen sich in Menge werden constatiren lassen.

Im selben Jahre, 1866, veröffentlicht Bunsen[1] allein eine Abhandlung: »Über die Erscheinungen beim Absorptionsspectrum des Didyms«. Es wird in dieser Untersuchung nachgewiesen, dass das Absorptionsspectrum sich ändert, wenn polarisirtes Licht angewendet wird, dass die Axenstellung des Krystalles gegenüber der Polarisationsebene des vorgeschalteten Nicols ebenfalls Änderungen bewirkt.

Ferner betont der Verfasser die Verschiedenheit zwischen Krystall- und Lösungsspectrum, sowie die Abhängigkeit des Spectrums von der Constitution des Didymsalzes. Er gibt diesbezüglich die Zeichnungen vom Absorptionsspectrum des Chlordidyms, schwefelsauren Didyms und des essigsauren Didyms und constatirt, dass sämmtliche Streifengruppen in der Ordnung des wachsenden Moleculargewichtes der Salze gegen das rothe Ende des Spectrums verschoben sind. Bunsen knüpft daran die interessante Bemerkung:

»Diese in den Spectren verschiedener Didymverbindungen auftretenden Unterschiede sind bei einer noch völlig mangelnden allgemeinen Theorie der Lichtabsorption in auslöschenden Medien auf andere Erscheinungen bis jetzt nicht zurückführbar. Sie erinnern an die kleinen allmäligen Veränderungen der Tonhöhe, welche ein schwingender elastischer Stab zeigt, wenn er mit Gewichten beschwert wird, oder an die Tonveränderungen, welche eine Zungenpfeife durch Verlängerung ihrer Röhre erleidet«.

[1] Bunsen, Pogg. Ann. 128, S. 100—108.

1868 constatirt H. Zschiesche, dass in einer Schichte von 17 *cm* eine Didymoxydmenge von $^1/_{2800}$ eine Linie zeige.

Im Jahre 1871 erscheint eine Arbeit von C. Erk. Erk untersucht und zeichnet das Spectrum einer 4 *cm* dicken Schichte von Didymnitratlösung und constatirt sieben Streifen. Er bemerkt ferner, dass bei sehr verdünnten Lösungen nur die beiden Streifen in Gelb und Grün sichtbar sind, der im Gelb noch stärker.

Die im Jahre 1874 veröffentlichten Messungen am Absorptionsspectrum des Didymchlorides von Lecoque de Boisbaudran[1] enthalten folgende Wellenlängenangaben:

7430 †	6282	5719 †	4822 *
7360 †	6225	5312 †	4758
7307 †	5962 *	5219 †	4691 *
6894 †	5885 *	5205 †	4618
6792 †	5824 †	5125 †	4441 *
6720 †	5788 †	5087 †	4275
6363	5747 †		

Die mit einem Kreuze bezeichneten Wellenlängen wären dem Neodym, die mit einem Sternchen bezeichneten dem Praseodym zuzuordnen (nach Watt's Index of spectra).

In den 1875 veröffentlichten »Spectralanalytischen Untersuchungen« gibt Bunsen[2] eine Zeichnung des Absorptionsspectrums von einer Lösung des schwefelsauren Didymoxyds. Ich habe auch hier graphisch die Wellenlängen ermittelt und erhalten:

686—681 (schwach)
592·5—568·5 (stark)
1. Max. 591
2. Max. 578
3. Max. 573
4. Max. 570
533—519·5 (stark)
1. Max. 527·5
2. Max. 523

[1] Lecoque de Boisbaudran, Spectres lumineux, p. 88—92.

[2] Bunsen, Pogg. Ann. 155, S. 230—255.

518—514·5 (schwach)
512—509·5 (stark)
482·5—480 (schwach)
469—465·5 (schwach)

Wie ein Vergleich der Wellenlängenzahlen ergibt, decken sich die Lösungsspectren von Didymnitrat und Didymsulfat nicht.

Im selben Jahre wie Bunsen's »Spectralanalytische Untersuchungen« erschien im Kolbe'schen Journal für praktische Chemie eine Abhandlung von H. Bührig: »Darstellung, Atomgewicht und analytische Bestimmung des didymfreien Cers«.

In dieser Abhandlung untersucht der Verfasser unter Anderem, welches die kleinstmögliche Menge Didyms sei, die sich mit dem ihm zu Gebote stehenden Spectralapparate nachweisen lasse, und zeichnet bei dieser Gelegenheit das Absorptionsspectrum von einer Lösung schwefelsauren Didymoxyds, sowie zum Vergleiche das zugehörige Krystallspectrum. Zuerst wurde mit einem Spectroskop à vision directe von J. G. Hoffmann in Paris eine 22 *cm* lange Schichte verdünnter Didymsulfatlösung untersucht und ein Spectrum von 11 Absorptionslinien constatirt. Später untersuchte der Verfasser eine concentrirte Lösung von 22 *cm* Dicke mit einem grossen Dubosque'schen Spectralapparat und fand 14 Streifen.

Ein mit dem Hoffmann'schen Apparat untersuchter, 0·9 *mm* dicker Didymsulfatkrystall zeigte ein Spectrum von 22 Absorptionslinien. Leider gibt der Verfasser weder im Texte, noch in der Zeichnung irgendwelche Anhaltspunkte, um seine Scalentheile in Wellenlängen umwerthen zu können.

Sorret hat im Jahre 1880 die Spectren mehrerer seltener Erden im Ultraviolett untersucht und noch einige Streifen dem bekannten Didymspectrum hinzugefügt, deren Wellenlängen folgende sind:

353
348
330·5
328·5

Damit erscheint die Reihe der bisherigen Untersuchungen über das Didym-Absorptionsspectrum abgeschlossen.

Im Jahre 1885 veröffentlichte Auer v. Welsbach in den Sitzungsberichten der Wiener kaiserl. Akademie der Wissenschaften eine Untersuchung: »Die Zerlegung des Didyms in seine Elemente«. Das alte Didym wurde in zwei neue Elemente, Neodym und Praseodym, zerlegt.

Auer v. Welsbach gibt in seiner Abhandlung die Zeichnungen der Absorptionsspectren von allen drei Substanzen, leider fehlt aber auch hier jede Angabe in Text oder Zeichnung, die zu einer Auswerthung der von 0 bis 300 reichenden Scala führen könnte.

Das von Auer gezeichnete Didymspectrum enthält folgende, in Scalentheilen angeführte Streifen:

a von	52—55	*e* von	78·5—79	*i* von	150·5—152·5
b »	61—66	*f* »	88—97	*k* »	155—161
c »	75—76	*g* »	114—132	*l* »	176—187·5
d »	77—77·5	*h* »	145—149	*m* »	199—201·5

Von diesen Streifen sind gemäss den zugehörigen Auer'schen Zeichnungen zuzuordnen:

1. Dem Praseodym:

Der von 88—91·5 reichende Theil von *f*, ferner die Streifen *h*, *k* und *l*.

2. Dem Neodym:

Die Streifen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, der von 91·5—97 reichende Theil von *f* und die Streifen *g* und *m*.

Zum Schlusse seien noch die Wellenlängenzahlen erwähnt, die sich in H. W. Vogel's Spectralanalyse angegeben finden. Sie beziehen sich auf die Dunkelheitsmaxima des Absorptionsspectrums von Praseodym.

728·3	521·5
679·4	512·2
591·5	482
579·4	469
575·4	444·7
531·3	

Eine Vergleichung dieser Zahlen mit den Lecoque'schen ergibt eine starke Abweichung, sowohl hinsichtlich der Zahlenangaben der einzelnen Streifen, als auch hinsichtlich der Zuordnung der Streifen zu den Elementen. Die erstgenannte Abweichung erscheint nicht weiter auffällig; verschiedene Genauigkeit der Messungsmethoden, Streifenverschiebungen und eventuelle Verschiedenheit der untersuchten Salze, alles dies sind Factoren, die jene Abweichung leicht erklären.

Was die zweitgenannte Abweichung anbelangt, so ist ihre Grösse aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich. Die zwei ersten Spalten enthalten die Wellenlängen, die dritte und vierte die Zuordnung zu den Elementen nach Vogel und Lecoque.

Vogel	Lecoque	Vogel	Lecoque
728·3	730·7	Praseodym	Neodym
679·4	679·2	»	»
591·5	588·5	»	Praseodym
579·4	578·8	»	Neodym
575·4	574·7	»	»
531·3	531·2	»	»
521·5	521·9	»	»
512·2	512·5	»	»
482	482·2	»	Praseodym
469	469·1	»	»
444·7	444·1	»	»

Ausserdem rechnet noch Lecoque den Streifen 596·2 zu Praseodym, der sich bei Vogel überhaupt nicht vorfindet.

Der Apparat, den ich verwendete, war ein Spectrometer von Starke und Kammerer mit zwei 60grädigen Flintglasprismen und Scalenrohr. Als Lichtquelle diente die Sonne.

Ich habe vier verschiedene Substanzen untersucht: käufliches Didymsulfat, Didymsulfat, welches zu krystallographischen Untersuchungszwecken besonders gereinigt war, ferner Neodymammonnitrat und endlich ein Stück Didymglas.

Innerhalb dieser Gruppen habe ich die Versuche noch mannigfach variirt und will nun die Resultate in obiger Reihenfolge anführen.

Die Wellenlängenangaben beziehen sich auf die Grenzen der Absorptionsstreifen und sind in μμ angegeben.

A. Käufliches Didymsulfat.

a) Kalt gesättigte wässerige Lösung in einer Schichtendicke von 200 *mm* (Fig. I der Tafel).

Es war nicht möglich, das käufliche Didymsulfat im festen Zustande zu untersuchen, da dasselbe in Folge seines Aggregatzustandes das Licht zu sehr zerstreute und selbst in dünnen Schichten kein Spectrum zeigte. Da nun die Lösung fast wasserhell war und in einer Schichtendicke, wie sie z. B. eine Eprouvette gibt, kaum den charakteristischen Streifen im Gelb erkennen liess, so mussten sehr dicke Schichten verwendet werden. Ich füllte zu diesem Zwecke die Lösung in die 200 *mm* lange Röhre eines kleinen Saccharimeters und schaltete dieselbe vor den Spalt.

Es zeigte sich folgendes Spectrum:

Ein ziemlich breiter Streif in Roth . . . . . . von 690·5 bis 679·5.
darin eine dunklere Partie . . . . » 687·5 » 682·5.
Ein sehr breiter, dunkler Streif in Gelb, gegen Roth abschattirt . . . . » 596 » 572·5.
In Grün reicht die Absorption . . . . » 513·0 » 504.

Darin befinden sich:

Ein breiter, halbdunkler, nach Roth abschattirter Streif . . . . von 531·5 bis 522·5.

In diesem Streifen:

Ein dunkler Streif . . . . von 529 bis 526.
Ein sehr schmaler, dunkler Streif . . . . bei 524·5.

Dann folgen noch:

Ein halbdunkler Streif . . . . von 515 bis 511·5.
Ebensolcher Streif . . . . » 511 » 509.

Die Streifen in Blau und Violett sind sehr verwaschen.

Dunkler Streif	von	484·5	bis	481·5
Heller »	»	476·5	»	475·5.
Dunkler »	»	472	»	468.
Anschliessend schwache Absorption			»	458·3.
Sehr breiter verwaschener Streif	»	446·5	»	438·5.
Anschliessend schwache Absorption				437.
Schmaler, dunkler Streif	»	423	»	422.

b) Kalt gesättigte wässerige Lösung in einer Schichtendicke von 450 *mm* (Fig. II).

Um eventuell noch neue Streifen zu finden, wiederholte ich den Versuch mit einer 450 *mm* langen Röhre eines grossen Saccharimeters. Es zeigte sich auch thatsächlich ein neuer Streif in Rothgelb, ausserdem aber trat die merkwürdige Erscheinung ein, dass sämmtliche Streifen gegen Violett verschoben waren. Der Umstand, dass dies bei sämmtlichen Streifen eintrat, die Grösse der Verschiebung und eine mehrmalige Beobachtung schliessen einen Beobachtungsfehler aus.

Wir hätten also hier das Phänomen einer Streifenverschiebung gegen das violette Ende des Spectrums mit wachsender Schichtendicke der absorbirenden Substanz.

Das beobachtete Spectrum war folgendes:

Ziemlich breiter Streif in Roth	von	682·5	bis	670·5.
Dunklere Partie	»	680	»	676.
Schmaler, heller Streif in Rothgelb	»	619·5	»	618.
Sehr breiter Streif in Gelb	»	596·5	»	564·5.
Ganz dunkle Partie	»	591	»	566·5.
Absorption in Grün	»	532·5	»	501·5.

Darin zeigen sich:

Dunkler Streif	von	527·5	bis	518·5.
Dunkler »	»	515.		

gegen Violett verlaufend.

In Blau und Violett:

Dunkler Streif	von	483·5	bis	481.
Heller »	»	477	»	474·5.

Dunkler Streif	von 471·5	bis 466·5.
Anschliessend schwache Absorption		» 457·5.
Sehr verwaschener breiter Streif	» 449	» 434·5.
Dunklere Partie	» 447·5	» 437.
Schmaler dunkler Streif	» 423	» 422.

B. Gereinigtes Didymsulfat.

Das gereinigte Didymsulfat, das mir zur Verfügung stand, war in der Form kleiner Krystalle von rosenrother Farbe, aber weit lichtundurchlässiger als das ähnlich gefärbte Neodymammonnitrat. Ich füllte die Krystalle zwischen zwei planparallele Glasplatten, die einen Abstand von circa 4 *mm* hatten, und erhielt aus dieser Anordnung das in Fig. III der Tafel gezeichnete Spectrum.

Um die breiten und dunklen Streifen in Gelb und Grün auflösen zu können, näherte ich die Glasplatten einander bis auf circa 2 *mm* und erhielt mit dieser dünneren Schichte die in Fig. IV gezeichneten Auflösungen der beiden Streifen. Fig. IV ist demnach nicht als ein gesondertes Spectrum zu betrachten, sondern enthält nur die Streifen, in die sich die genannten beiden Streifen der dickeren Schichte auflösen.

Das Spectrum der dicken Schichte war folgendes:

Breiter, dunkler Streif in Roth	von 673·5	bis 670·5.
Drei Streifen in Gelbroth: 1.	» 634	» 629·5.
2.	» 626·5	» 624.
3.	bei 621·5.	
Breiter Streif in Gelb	von 603	» 569.
Dunkle Partie	» 594	» 569.
Sehr breiter, dunkler Streif in Grün	» 536	» 500.

In Blau und Violett zeigt sich keine Veränderung gegen das früher untersuchte Didymsulfat in Lösung von 450 *mm* Schichtendicke (Fig. II).

Die Auflösung des Streifens in Grün ergab:

Halbdunkler Streif	von 536	bis 532.
Zwei schmale, dunkle Streifen: 1.	» 525	» 526·5.
2.	» 522·5	» 524.
Breiter Streif	» 516·5	» 509.

Dunklere Partie ....von 514 bis 511·5.
Ebensolcher Streif .... » 506·5 » 500.
Dunklere Partie .... » 504·6 » 502.

Die Auflösung des Streifens in Gelb ergab acht schmale dunkle Streifen, von denen der von Violett aus erste am dunkelsten war; dieser allein war etwas schärfer, bei ihm beziehen sich die Messungen auf die Grenzen, die sieben anderen waren alle verwaschen, die Angaben beziehen sich daher bei diesen auf die Mitten.

1. bei 593	5. bei 580·5
2. » 591	6. » 578·5
3. » 585·5	7. » 574
4. » 583·5	8. von 571 bis 570.

C. Neodymammonnitrat.

Das Neodymammonnitrat war in der Form von Krystallen von prachtvoll rosenrother Farbe und trotz des festen Zustandes noch in ziemlich dicken Schichten lichtdurchlässig. Ich habe es in festem Zustande und in Lösung untersucht und den Versuch in beiden Fällen mehrfach variirt. Im Allgemeinen sind die Streifen beim festen Zustande schmäler und namentlich deutlich schärfer als bei den Lösungen, also in flüssigem Zustande. Ich erhielt hiefür im Laufe der Untersuchung einen directen Beweis.

Ich hatte einen Krystall in einem dünnen Glasrohre geschmolzen und vor den Spalt gestellt. Während ich nun das Spectrum betrachtete, begann die geschmolzene Substanz auszukrystallisiren, und im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres erschienen zwei verschiedene Spectren, das Spectrum der krystallisirten Substanz und das Spectrum der geschmolzenen. Bei letzterem nun waren die Streifen deutlich breiter und verwaschener als beim anderen. Da die geschmolzene und krystallisirte Substanz scharf gegeneinander abgegrenzt waren, waren es auch die Spectren, wodurch das Phänomen noch deutlicher wurde.

Ich will zuerst die Beobachtungen bei festem, dann die bei flüssigem Zustande vorführen.

a) Neodymammonnitrat in krystallisirtem Zustande, Schichtendicke 12·8 *mm*.

Die Substanz befand sich in einer Eprouvette, deren innerer Durchmesser 12·8 *mm* betrug, und wurde so direct vor den Spalt gestellt. Es zeigte sich das in Fig. V dargestellte Spectrum, dessen einzelne Streifen sich später noch mehrfach auflösten.

Die Messung ergab:

Breiter, halbdunkler Streif in Roth	......	von 676	bis 661.
Schmaler, heller » » »	......	bei 630·5.	
Fünf schmale Streifen in Rothgelb	1.....	» 622.	
	2.....	» 619·5.	
	3.....	» 618.	
	4.....	» 615·5.	
	5.....	» 614·5.	
Breiter Streif in Gelb	....	von 599·5	bis 559·5.
Besonders dunkel	....	» 593·5	» 559·5.
Absorption in Grün	....	» 540·5	» 498.

Darin zeigen sich:

Schmaler, halbdunkler Streif	....	von 537	bis 535.
Breiter, dunkler Streif	....	» 529	» 515.
» » »	....	» 512·5	» 498.

Die Streifen in Blau und Violett sind sehr matt und undeutlich. Es sind vier Streifen sichtbar:

1..............	von 481·5	bis 479·5.
2..............	» 472·5	» 467.
3..............	» 445·5	» 439.
4..............	» 423	» 422.

b) Krystallisirte Substanz in 4·3 *mm* Schichtendicke (Fig. VI).

Ein Krystall wurde in einem Glasrohre, dessen innerer Durchmesser 4·3 *mm* betrug, geschmolzen und auskrystallisiren gelassen. Die stark gekrümmten Glasflächen des Rohres übten bei den krystallisirten Substanzen keinen störenden Einfluss auf die Deutlichkeit des Spectrums aus.

Streif in Roth (verschmälert und aufgehellt) von 674·0 bis 665·5.
Drei Streifen in Rothgelb: 1. . . . . bei 622.
2. . . . . » 619·5.
3. . . . . » 615·5.
Breiter Streif in Gelb . . . . von 591 bis 562·5.

Darin zeigen sich:

Zwei schmale, dunkle Streifen: 1. . . . . bei 591.
2. . . . . » 589·5.
Breiter, dunkler Streif . . . . von 585·5 bis 562·5.
Schmaler, halbdunkler Streif ins Grün . . . » 537 » 536.
Breiter, verwaschener » » » . . . » 529·5 » 501·5.

Darin:

Dunkler Streif . . . . von 525 bis 522.
Schmaler, dunkler Streif . . . . bei 520·5.
Dunkler Streif . . . . von 510·5,

gegen Violett verlaufend.

In Blau und Violett: 1. . . . . von 482 bis 480.
2. . . . . » 472 » 468·5.
3. . . . . » 445·5 » 439.
4. . . . . » 423 » 422.

c) Krystallisirte Substanz in 2·5 *mm* Schichtendicke (Fig. VII).

Die Absorptionsstreifen in Blau und Violett sind verschwunden, die in Grün und Gelb bis auf eine Aufhellung unverändert, in Rothgelb ist nur der Streif bei 615·5 geblieben. Der Streif in Roth ist verschmälert und reicht nun von 670·5 bis 665·5.

d) Krystallisirte Substanz in 0·5 *mm* Schichtendicke (Fig. VIII).

Ein Krystall wurde auf einer Glasplatte mittelst Bunsenflamme geschmolzen, eine zweite Glasplatte daraufgelegt und die Substanz auskrystallisiren gelassen. Es zeigte sich das

Spectrum der Fig. VIII; der Streif in Gelb erscheint in mehrere aufgelöst.

Die Messung ergab:

Schwacher Streif in Roth .... bei 667·5.
Schmaler, halbdunkler Streif .... » 591·5.
Breiter Streif in Gelb .... von 583·5 bis 566·3.

Darin:

Halbdunkler Streif .... von 579·5 bis 574·5.
Zwei halbdunkle, schmale Streifen: 1.... bei 568.
2.... » 567.

In Grün:

Schmaler, halbdunkler Streif .... bei 536·5.
Breiterer, » » .... von 523 bis 521·5.
Schmaler, » » .... bei 509·5.

e) Concentrirte Lösung in 0·1 *mm* Schichtendicke (zwischen Glasplatten — Fig. IX).

Es zeigt sich bloss der stark verschmälerte
Streif in Gelb .... von 579·5 bis 569.
Dunklere Partie .... » 579·5 » 576.

f) Verdünnte wässerige Lösung in einer Schichtendicke von 4·8 *mm* (Fig. X).

Hier versagte die Anwendung von Glasröhren, die gekrümmten Glasflächen störten die Deutlichkeit des Spectrums, die Lösung musste daher in einen kleinen, aus planparallelen Glasplatten hergestellten Trog gefüllt werden.

Es zeigten sich:

Halbdunkler, breiter Streif in Gelb ...... von 579·5 bis 569·5.
Schmaler, halbdunkler Streif in Grün .... » 524 » 521.
Verwaschener, heller » » » .... » 508 » 513·5.
In Violett und Blau vier matte Streifen: 1. » 482·5 » 481.
2. » 470 » 468·5.
3. » 445·5 » 439·5.
4. » 423 » 422.

g) Wässerige Lösung von circa 50%; in einer Schichtendicke von 4·8 *mm* (Fig. XI).

Matter, stark verwaschener Streif in Roth	von	680	bis	668·5.
Breiter Streif in Gelb	»	592·5	»	567.
Dunklere Partie	»	583·5	»	567.
Breiter Streif in Grün	»	527	»	517·5.
Dunklere Partie	»	523	»	521·5.
Breiter, heller Streif	»	513·5	»	508.

In Blau und Violett keine Veränderung gegen das vorher untersuchte Präparat.

Ein Vergleich der Zeichnungen in der angehängten Tafel mit den von Auer v. Welsbach gegebenen zeigt sehr starke Abweichungen. Ich habe in der Einleitung bei Besprechung der Auer'schen Arbeit die Streifen seines Didymspectrums der Reihe nach von Roth gegen Violett mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m* bezeichnet. Das Spectrum in Fig. III meiner Tafel enthält davon die Streifen *b*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*.

Eine Identificirung der Streifen in Rothgelb wäre nur möglich, wenn die Auer'sche Scala sich in Wellenlängen umrechnen liesse. Auffällig ist, dass die drei Streifen in Rothgelb, die Auer anführt und die auf Fig. VI der Tafel sichtbar sind, in Fig. III überhaupt nicht vorkommen, während die drei Streifen in Rothgelb meiner Fig. III sich weder bei Auer, noch im Neodymspectrum der Figuren V und VI wiederfinden.

Was das Neodymspectrum anbelangt, so rechnet Auer die Streifen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, einen Theil von *f*, *g* und *m* zum Neodym, während aus meiner Zeichnung folgen würde, dass *b*, *c*, *d*, *e*, *g*, *h*, *k*, *l* und *m* zu Neodym gehörten, *m* jedoch nicht; über *f* könnte abermals nur eine genaue Wellenlängenvergleichung entscheiden. Dem Anscheine nach stimmen hier die Zeichnungen.

Der Grund der Abweichung kann wohl nur darin liegen, dass das von mir verwendete Neodymammonnitrat noch Praseodym in geringen Mengen enthielt.

Zum Schlusse will ich noch die Messungen erwähnen, die ich mit einem Stück Didymglas anstellte. Sie scheinen nur interessant wegen des Vergleiches mit Fig. IX.

Obwohl in beiden Fällen eine geringere Anzahl von absorbirenden Didymmolekülen in Wirksamkeit tritt, zeigt das in Glas suspendirte Didym zwei matte, deutlich von einander getrennte Streifen in Gelb, während die Neodymlösung einen Streifen mit einer dunklen Partie zeigt.

Das Didymglas hatte parallelepipedische Form. Die schwächste der drei vorhandenen Schichten betrug 5·7 *mm*, die stärkste 32·5 *mm*.

Die Messungen mit der Schichte von 5·7 *mm* ergaben:

Zwei matte Streifen in Gelb: 1.	von	585·5	bis	581·5.
2.	»	578	»	569.

An der breiten Schichte:

Sehr matter Streif in Gelbroth	von	612	bis	608.
Absorption in Gelb	»	593	»	569.

Darin zeigen sich:

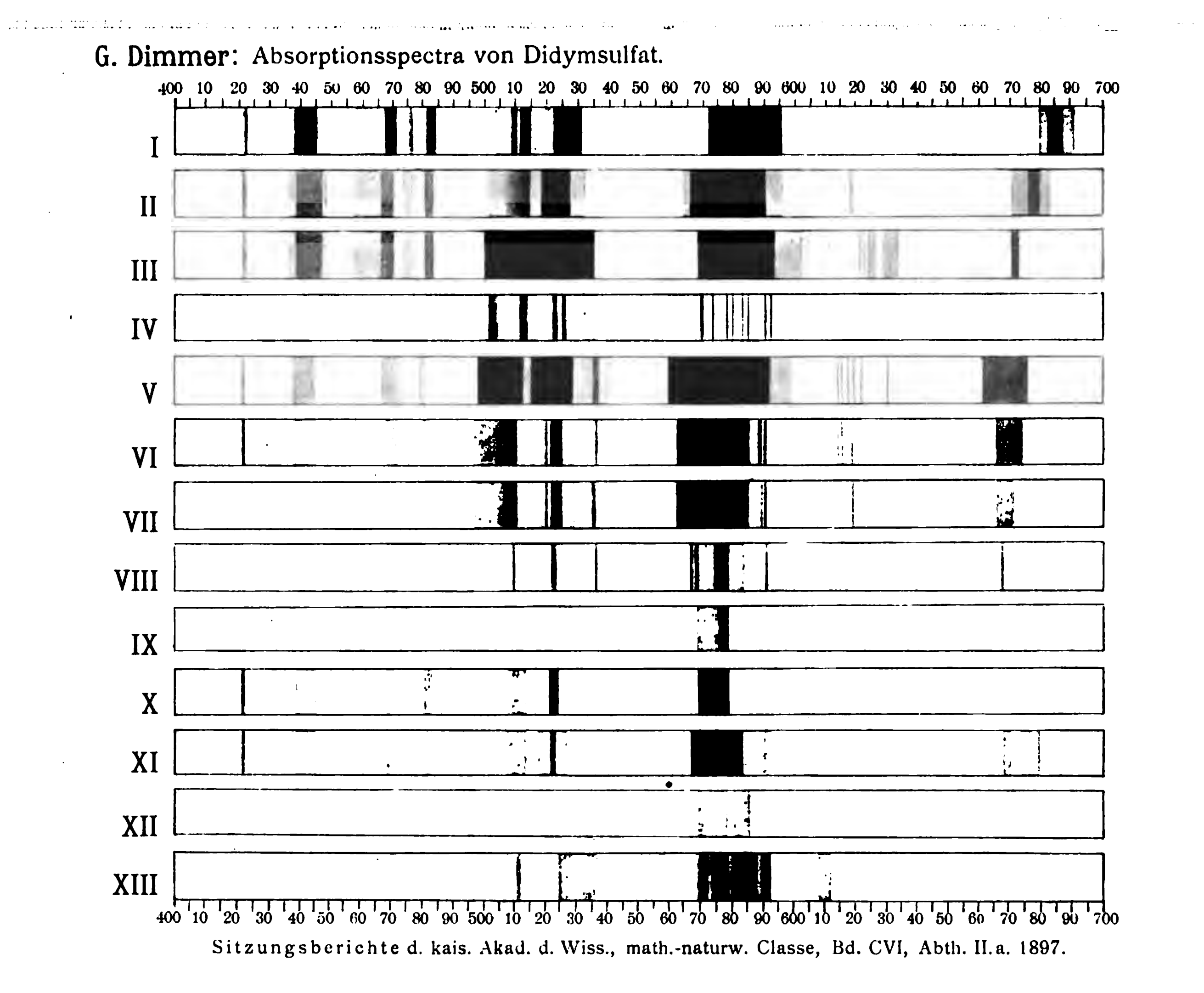
Halbdunkler Streif	von	594	bis	590.
Dunkler »	»	588·5	»	580·5.
Halbdunkler »	»	578·5	»	574.
Dunkler »	»	572·5	»	569·5.

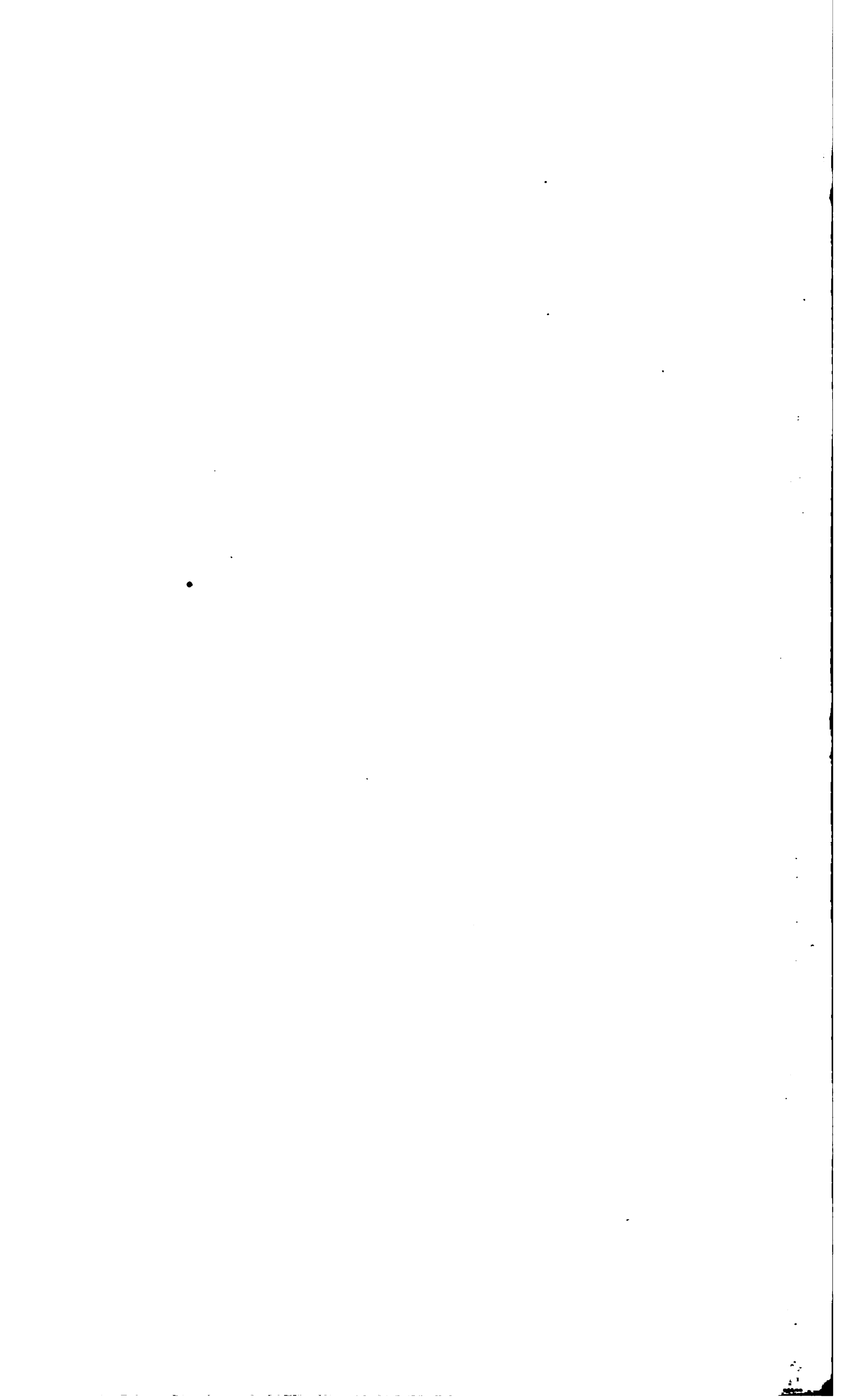
In Grün:

Breiter, verwaschener Streif	von	536	bis	524·5.
Schmaler Streif	»	511·5	»	510·5.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Franz Exner für seine freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit.

G. Dimmer: Absorptionsspectra von Didymsulfat.





Über die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein und ihre Beantwortung durch die von der Naturwissenschaft nahegelegte Erkenntnisstheorie

von

P. Volkmann,

o. ö. Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr.

1.

Das Verhältniss von Denken und Sein ist so ziemlich der Angelpunkt aller philosophischen Systeme der alten, neuen und neuesten Geschichte gewesen. Ich erinnere an die griechischen Naturphilosophen, welche über die Natur in erster Linie doch immer nur dachten und welche voraussetzten, dass sich diesem Denken das Naturgeschehen unterordnen müsse; ich erinnere an Kant und die Rolle, welche das »a priori« in seinem Systeme spielt; ich erinnere an die Stellung, welche das Verhältniss von Denken und Sein in der Identitätsphilosophie Hegel's einnimmt.

Kann es uns wundern, wenn die Philosophen im Grossen und Ganzen bei ihren Speculationen über das Verhältniss von Denken und Sein das Denken zum Ausgangspunkt wählten und dadurch von vorneherein die Stellung des Denkens in jenem Verhältniss bevorzugt erscheinen liessen? Jeder braucht schliesslich das Werkzeug, das er hat, mit dem er umzugehen versteht; er wird dieses Werkzeug bis zur Einseitigkeit handhaben und überschätzen, das Werkzeug Anderer, das er nicht kennt, wird ihm fremd bleiben, er wird geneigt sein, es zu unterschätzen.

Der Philosoph sieht einseitig die Schwierigkeit bei der Aufklärung des Verhältnisses von Denken und Sein in dem

Denken, das Sein scheint ihm frei von derartigen Schwierigkeiten, »es ist«. Anders der Naturforscher: Nicht dass er das Problem und die Fragestellung des Philosophen missachtet, aber er geht nicht so leichten Schrittes über die Thatsache, dass etwas ist; er betont die Schwierigkeit der Vorfrage, »was ist«, und so sieht er seine erste, vornehmlichste Aufgabe in der Feststellung des Thatbestandes, des Seins, und erst, wenn er den Thatbestand festgestellt hat, was ist, beginnt seine Speculation, die naturgemäss durch die Schulung, welche die Feststellung des Thatsächlichen bedingte, einen ganz anderen Charakter als das Denken des Philosophen trägt, sich auf einer realeren Basis bewegt.

Die Factoren, aus denen sich die Erkenntniss der Gegenwart zusammensetzt, welche das Object der Erkenntniss bilden, kann man kurz in die Worte Natur und Geschichte zusammenfassen. Die Frage, die hier unter Anderem vornehmlich beschäftigt, ist die, in welchem Verhältniss diese Erkenntnissobjecte zu unserem Erkenntnissvermögen stehen, ob unser Erkenntnissvermögen ein zunächst ausserhalb der Erkenntnissobjecte fallendes Etwas ist, oder ob es vielleicht seinen Ursprung auch in den Objecten hat, an denen sich unsere Erkenntniss versucht.

Es lässt sich nicht leugnen, dass der geschichtliche Factor als Object der Erkenntniss in der Erziehung, Schulung und Bildung des Einzelnen überwiegt, dass dieser geschichtliche Factor auch bei der überwiegenden Mehrzahl der Naturforscher eine grosse Rolle spielt und spielen muss. Es hiesse die Arbeit des Menschengeschlechtes und ihrer Geistesheroen geringschätzen, wollte nicht jeder die Gedanken und Arbeiten früherer Generationen sich anzueignen versuchen und an dieselben anknüpfen; ja es würde jede Verständigung aufhören, wenn er es nicht thäte.

Aber je mehr dieser geschichtliche Factor überwiegt, je weniger auf die Bedingungen zurückgegangen wird, unter denen sich die Erkenntniss einer Erscheinung vollzog und noch vollzieht, um so leichter kann die Quelle der Erkenntniss, welche aus der Geschichte fliesst, eine Trübung erfahren. Das geschichtlich Überkommene droht die Form eines »a priori

Gegebenen« anzunehmen und bildet dann leicht statt einer Quelle der Anregung und Belebung den Ausgangspunkt eines todten Formalismus.

2.

Es ist bekannt, dass Kant das Verhältniss von Denken und Sein in seiner Kritik der reinen Vernunft zum Gegenstande einer bedeutungsvollen Untersuchung gemacht hat. Die Dinge an sich, von denen wir nichts aussagen können, unsere Eindrücke oder Empfindungen davon und die Gesetze unserer vorstellenden Vernunft, also unsere Anschauungs- und Denkformen, sind die Elemente, aus denen sich Kant's Erkenntnisstheorie aufbaut. Man wird die Grossartigkeit und Kühnheit, die innere Consequenz seiner Lehre, die Festigkeit seines Systems bewundern. Aber die Art und Weise, wie Kant die erkenntnisstheoretischen Rollen zwischen jenen drei Elementen vertheilt, wird man doch nur als eine Lehre, als einen Versuch, das Verhältniss von Denken und Sein darzustellen, gelten lassen können. Es liegt in der Natur der Sache, dass hier nur von einer Lehre die Rede sein kann, und dass die innere Consequenz des Systems noch keinen Beweis für das System darstellen kann. Unter Anderem wird hier die Frage nicht zu übersehen sein, ob denn auch das von Kant formulirte erkenntnisstheoretische Problem ein eindeutiges[1] ist.

Kant war vielleicht unter allen Philosophen der grösste Naturforscher, aber er war schliesslich doch mehr Philosoph als Naturforscher; und so trifft für ihn wohl das zu, was ich am Anfang sagte, dass ein Philosoph bei der Darstellung des Verhältnisses von Denken und Sein den Schwerpunkt des Problems mehr auf das Denken legen wird, dass ein Philosoph die Anschauungs- und Denkformen als das a priori Gegebene betrachten wird. Wir wollen auch nicht vergessen, dass seit Kant die Naturwissenschaft eine Entwicklung genommen hat, die gerade für die hier einschlägigen erkenntnisstheoretischen Fragen von besonderer Bedeutung sein dürfte.

[1] Einige Bemerkungen über die Frage nach der Eindeutigkeit philosophischer Probleme findet man in meinen »Erkenntnisstheoretischen Grundzügen der Naturwissenschaften«, Leipzig 1896, S. 171, 172.

Ich möchte hier die positiven Leistungen Darwin's, insbesondere nach dem Vorgang E. Mach's[1] die naturwissenschaftliche Verwerthung des Begriffes der »Anpassung« hineinziehen. Unser Geist, unser Anschauungs- und Denkvermögen sind nicht ein a priori gegebenes »Starres«, »Unveränderliches«, sie sind wie »alles Organische« und wie »alle unsere Organe« ein sich »Bildendes« »Veränderliches«, auf das Umgebung und Verhältnisse in der stärksten Weise einwirken. Naturwissenschaftliche und nicht zum mindesten physikalische Schulung scheinen mir zu einer anderen Erkenntnisslehre als zu der Kant's, zu einer anderen Vertheilung der Rollen ihrer Elemente zu drängen.

Wählen wir, um uns zu verdeutlichen, die Erscheinungen des Lichtes, welche ein physikalisches Interesse darbieten, als Beispiel: Unsere Lichteindrücke und Lichtempfindungen sind unzweifelhaft auch im Sinne Kant's die Elemente, mit denen unsere Vernunft operirt. Was die Lichterscheinungen an sich sind (dieser Begriff wäre in Parallele zu den Dingen an sich zu stellen), darüber kann nur die Speculation, d. h. die theoretische Bearbeitung Auskunft geben. Die Entwicklung der Theorie des Lichtes bis auf die Gegenwart hat die Antwort gegeben, dass die Lichterscheinungen an sich Wellenbewegungen sind, und zwar elektromagnetischer Art. Dieses Resultat ist durch einen oscillirenden Denkprocess zu Stande gekommen, indem die Vernunft mit bestimmten, durch die eine oder andere Gattung von Erscheinungen gewährten, beziehungsweise geweckten Anschauungen in die Betrachtung hineingegangen ist, und die Prüfung durch Experiment und Beobachtung die Consequenzen dieser Anschauungen als richtig, falsch oder einer Modification bedürftig ergeben hat. Es läuft also im vorliegenden Beispiel Alles darauf hinaus, eine durch die Erfahrung in einem Falle gegebene Classe von Erscheinungen in Beziehung, Vergleich und Verbindung zu setzen mit einer durch die Erfahrung in einem anderen Fall gegebenen Classe von Erscheinungen.

Dass in dem obigen Beispiel keine Widerlegung des Kant'schen Standpunktes liegen kann, versteht sich von selbst.

---

[1] E. Mach, Über Umbildung und Anpassung im naturwissenschaftlichen Denken, 1883.

Kant's Standpunkt wird sich überhaupt nicht widerlegen lassen. Damit ist aber noch nicht gesagt, dass dieser der Wirklichkeit entspricht. Wer will entscheiden, wo bei dem Vorgang der Anpassung ein oscillirender Denkprocess die Rolle spielt, auf welcher Seite die erste Auslösung stattgehabt hat. Naturwissenschaftliche Erfahrung kann nur hindeuten auf den Standpunkt, der ihr der angemessenste erscheint.

Die Vernunft spielt in dem obigen Beispiel keine andere Rolle als eine gewisse Erinnerungs-Gedächtnissfähigkeit — die Fähigkeit auszusagen, ob bei aller scheinbaren Verschiedenheit unserer sinnlichen Aufnahmen eine gewisse Reihe von Erscheinungen in dem einen Fall so vor sich gegangen ist, wie in dem anderen Fall. Das zuerst von den Sinnen Aufgenommene und damit dem Gedächtniss Eingeprägte gilt als das Ursprüngliche, als das a priori Gegebene.

3.

Das Verhältniss von Denken und Sein kann bis zum Extrem eine verzerrte Darstellung erfahren. Wenn das Denken allem Sein zum Trotz in eine derartig lichte Höhe gehoben wird, dass alle Widersprüche zwischen Denken und Sein auf Rechnung einer täuschenden Phänomenologie, hinter der sich das Sein, das Ding an sich verbirgt, gesetzt werden, so ist das eine ebenso einseitige Anschauung, als wenn die Welt, wie sie erscheint, als das allein real Existirende aufgefasst wird. Beide Anschauungen sind nicht etwa von Grund aus falsch oder richtig, ihre Unwahrheit liegt in ihrer Einseitigkeit und Übertreibung.

Die naturwissenschaftliche Anschauung ist frei von solchen Einseitigkeiten und Übertreibungen; sie dürfte geeignet sein, uns in dem Labyrinth der Erscheinungswelt den richtigen Weg zu weisen. Die Welt, wie sie unseren Sinnen erscheint, gestattet keinen geschlossenen Aufbau eines in sich widerspruchsfreien Systems, wie solches den Naturwissenschaften als Ziel vorzuschweben hat. Die Hypothesen, mit denen wir uns über die Schranken unserer Sinne erheben,[1] unsere naturwissen-

[1] Ich schliesse mich hier der 1894 von mir gegebenen Definition an: »Hypothesen sind zu Grunde gelegte Vorstellungen und Anschauungen, mit

schaftlichen Ideen sind dazu berufen, den Theil der Natur aufzudecken, der als das wahrhaft Phänomenale aufzufassen ist, um die Geschlossenheit eines widerspruchsfreien Systems herzustellen.[1]

Wollten wir alle Erscheinungen als wahres Sein auffassen, so würden wir die Möglichkeit aufgeben, ein geschlossenes naturwissenschaftliches System herzustellen. Wollten wir Alles, was wir sonst als Sein aufzufassen geneigt sind, phänomenal fassen, so würden wir der Willkür in der Deutung der Erscheinungswelt Thür und Thor öffnen; es würde vor Allem nicht einzusehen sein, in welcher Weise eine eindeutige Auffassung der Dinge an sich dann zu Stande kommen könnte.

Die einseitige Deutung der Erscheinungswelt als wahres Sein ist der Inbegriff des Materialismus, die einseitige Deutung des Seins als blosse Erscheinung führt nothwendig zur Phantastik. Von beiden Extremen hat sich der wahre Naturforscher fernzuhalten. In der Wahl dessen, was Sein und was Schein ist, liegt die Freiheit und der Spielraum der Forschung, der Tummelplatz der Theorien und ihrer Kämpfe.

Der Begriff der Dinge an sich, welche hinter der Welt der Erscheinungen liegen, darf keine zu grosse Rolle in der Speculation übernehmen. Mit Vorsicht gebraucht hütet er uns davor, die Erscheinungswelt unter allen Umständen als das zu nehmen, als was sie erscheint, lehrt er uns den Werth der Hypothesen in der Wissenschaft schätzen. Übertrieben gebraucht führt er zu vollkommener Sterilität des Urtheils und der Forschung. Der menschliche Geist bedarf der Führung durch gewisse Realitäten. Die Geister werden sich in dem unterscheiden, was sie für Realitäten ausgeben oder halten — und in diesem Unterschiede liegt theilweise der Reichthum des menschlichen Geistes — aber ganz ohne Realitäten geht es nicht ab. Es wird erkenntnisstheoretisch von besonderem Interesse sein, die systematische Verwerthung dieser verschiedenen Realitäten,

---

denen wir uns über die Ungenauigkeit der sinnlichen Anschauung erheben.« (Hat die Physik Axiome? Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg, April 1894.)

[1] Man vergleiche hier die Berührung mit der Darstellung von H. Hertz in den »Principien der Mechanik«, Seite 30.

wie sie die einzelnen Wissenschaften erfordern, zu vergleichen, einheitliche oder ähnliche Züge in der formalen Behandlung aufzudecken, um die fruchtbare Wechselwirkung ins Leben zu rufen, welche nur allzuleicht schlummert und dann für das Geistesleben verloren geht, welche zu pflegen und aufzudecken Gegenstand einer wahren Philosophie ist, zu der Beiträge zu liefern die Specialwissenschaften allzeit sich angelegen sein lassen müssten.

Selbst wenn »Dinge an sich« hinter dem stecken, was das Endziel der Naturwissenschaft als Sein ausgeben wird, wird erkenntnisstheoretisch keine Verschiebung der auseinander gesetzten Momente eintreten. Denn diese hypothetischen Dinge an sich — im Gegensatze zu den naturwissenschaftlich als solchen erkannten — entziehen sich jeder Erkenntniss und Forschung. Wir werden aber dem dann in sich geschlossenen System der Naturwissenschaften einen derartigen Werth beilegen, dass wir es als ein Abbild (Gleichniss) der Vorgänge unter den Dingen an sich ansehen können, dem in sich derselbe logische formale Werth zukommt, wie er einem geschlossenen System der Vorgänge unter den Dingen an sich zukäme.[1] Es würde dann das logisch Formale als das wahrhaft Seiende zu bezeichnen sein, was für uns bei aller Unkenntniss »der Dinge an sich« erkennbar wäre.

4.

Ich habe bereits den mit dem Wort »Anpassung« bezeichneten erkenntnisstheoretischen Process oscillirend[2] genannt. Je nachdem wir auf der einen oder anderen Stufe dieses Erkenntnissprocesses stehen bleiben, können wir uns in unseren erkenntnisstheoretischen Untersuchungen in der mannigfaltigsten Weise formuliren, in einer Weise, bei der gegensätzliche

---

[1] Man vergleiche die neu hinzugefügten Auseinandersetzungen bei Helmholtz, Physiologische Optik, 2. Aufl., 1896, S. 590 u. f. Ebenso den Aufsatz von Boltzmann, »Über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur«. Wiener Sitzungsberichte 1897.

[2] Einige Bemerkungen über oscillirende Denkprocesse findet man in meinen »Erkenntnisstheoretischen Grundzügen«, S. 175—177.

Standpunkte eingenommen zu sein scheinen, ohne dass der Natur der Sache nach von einem Gegensatz die Rede sein kann — oder wenigstens die Rede zu sein braucht. Im Gegentheil wird es sich zur Vertiefung der erkenntnisstheoretischen Untersuchung empfehlen, diese vermeintlich gegensätzlichen Standpunkte zu wechseln und sich bald dieser, bald jener Sprache zu bedienen, um den wahren erkenntnisstheoretischen Kern, der vielleicht von dem vorübergehend gewählten Standpunkt gerade unabhängig ist, in seiner Reinheit um so bewusster blosszulegen.

Indem wir hier die Vortheile wahrnehmen, welche bei einer Reihe philosophischer Untersuchungen die Gegenüberstellung und Verwerthung der Ausdrücke: objectiv und subjectiv — a priori und a posteriori — real und ideal — mit sich bringen, weisen wir zugleich auf ein Gebiet hin, auf dem eine solche Gegenüberstellung verblasst.

Es wird gut sein, meine abstracten Erörterungen an einigen Beispielen zu erläutern. Ich wähle dazu die Begriffe Naturgesetz und Hypothese.

An anderer Stelle[1] habe ich gesagt: Naturgesetze und Hypothesen sind unsere naturwissenschaftlich gereiften Ideen über die Erscheinungswelt der uns umgebenden Natur. Sie wollen als Voraussetzungen das Reich der Erscheinungen und Thatbestände umfassen, begreifen, mindestens erläutern; die Gesetze appelliren dabei an begriffliche Vorstellungen und Anschauungen, die Hypothesen an sinnliche Vorstellungen und Anschauungen.

Nach diesen Formulirungen wären Naturgesetze und Hypothesen Äusserungen des menschlichen Geistes, und es bliebe dabei gänzlich dahingestellt, ob diesen Äusserungen der reale Hintergrund wirklich entspricht, oder ob diese Äusserungen wenigstens in der zu Grunde liegenden realen Welt ein entsprechendes Analogon haben. Das Ziel der Naturwissenschaften wird darauf gerichtet sein müssen, dass diese Äusserungen des menschlichen Geistes dem realen Hintergrund wirklich entsprechen; wenn wir dieses Ziel als wirklich erreicht

---

[1] Man vergleiche meine »Erkenntnisstheoretischen Grundzüge«, S. 63.

ansehen, werden wir berechtigt sein, jenen subjectiven Äusserungen, die durchaus zutreffen dürften, objective Äusserungen gegenüberzustellen, die ebenso als zutreffend zu bezeichnen sein dürften. Danach hätten Naturgesetze und Hypothesen Thatbestände darzustellen, deren Existenz nöthig ist, um der Erscheinungswelt der uns umgebenden Natur den in sich geschlossenen systematischen Charakter zu geben, welchen herzustellen Aufgabe der Wissenschaft ist.

Es ist also richtig: Naturgesetze und Hypothesen sind einmal Erzeugnisse unseres Geistes; aber es ist ebenso richtig: Naturgesetze und Hypothesen wollen etwas ausserhalb unseres Geistes Bestehendes, Wirkliches darstellen. Das Ziel der Naturwissenschaft ist es, diese subjectiven und objectiven Momente zur Deckung zu bringen. Insofern diese Deckung gelingt, verlieren Naturgesetze und Hypothesen ihren subjectiven Gehalt, hören auf blosse Ideen zu sein und werden Realitäten.

Wie überall, so sind auch hier die Begriffe ideal und real keine Gegensätze, sie werden auf der Stufe höchster begrifflicher Durcharbeitung Identitäten. Nur muss diese Identität sich als eine Folge wirklich ernster, auf dem Grunde wechselwirkender Processe zwischen Object und Subject sich vollziehender Durcharbeitung ergeben. Wird bei diesem oscillirenden Process die Bedeutung des Realen unterschätzt, so laufen wir Gefahr, in die Betrachtungsweise eines Hegel zu verfallen, wird bei diesem oscillirenden Process die Bedeutung des Idealen (der Idee) unterschätzt, so kommen wir in materialistisches Fahrwasser, bleiben günstigenfalls rohe Empiriker.

Wie in jedem einzelnen Fall der wechselwirkende Process eingeleitet wird, ob er vom Subject, ob er vom Object ausgeht, ist an und für sich gleichgiltig; beide Behandlungen haben ihre Berechtigung. Die Beantwortung der Frage, ob jener Process der Natur der Sache entsprechend einen objectiven oder subjectiven Ausgangspunkt hat, ist im Grunde genommen Ansichtssache. Lässt man den subjectiven Ausgang als ursprünglich zu, dann eröffnet sich die Frage nach dem, was a priori gegeben, und wir kommen in Kant'sches Fahrwasser, lässt man den objectiven Ausgang als ursprünglich zu, dann fällt die Frage nach dem a priori Gegebenen und wir nehmen

die Stellung des modernen naturwissenschaftlichen Erkenntnisstheoretikers ein.

Eine Frage, die hiemit auf das Engste zusammenhängt, ist die nach dem Verhältniss der Nothwendigkeit des Denkens zur Nothwendigkeit des Naturgeschehens.

E. Mach äussert sich:[1] »Man sagt, die Thatsachen stünden in den Darlegungen des Physikers in der Relation der Nothwendigkeit, welchen Umstand die blosse Beschreibung nicht zum Ausdruck bringt. Wenn ich constatirt habe, dass eine Thatsache *A* gewisse (z. B. geometrische) Eigenschaften *B* hat, und mich in meinem Denken daran halte, so kann ich selbstredend nicht zugleich wieder hiervon absehen. Das ist eine logische Nothwendigkeit. Hierin liegt aber nicht, dass dem *A* nothwendig die Eigenschaft *B* zukommt. Dieser Zusammenhang ist lediglich durch die Erfahrung gegeben. Eine andere als eine logische Nothwendigkeit, etwa eine physikalische, existirt eben nicht«.

Diese Äusserung ist von dem Standpunkt aus, den ich vorhin als den subjectiven bezeichnet habe, vollkommen richtig; sie entspricht ganz der Äusserung, nach der Gesetze und Hypothesen unsere naturwissenschaftlich gereiften Ideen sind. Ich kann aber dieser Äusserung eine andere[2] gegenüberstellen, deren Standpunkt als objectiv bezeichnet werden könnte: »Das äussere Geschehen der Dinge, soweit es nothwendig und gesetzmässig vor sich geht, drängt sich schon dem kleinsten Erfahrungskreise auf, und dieses gesetzmässige äussere Geschehen der Dinge ist es, welches empirisch uns zwingt, diese Gesetzmässigkeit nachzudenken. So halte ich dafür, dass die Logik in uns ihren Ursprung in dem gesetzmässigen Geschehen der Dinge ausser uns hat, dass die äussere Nothwendigkeit des Naturgeschehens unsere erste und recht eigentliche Lehrmeisterin ist«.

Nach dieser Auffassung könnte ich vielleicht sagen: Eine andere als eine Naturnothwendigkeit, etwa eine logische (geistige) existirt eben nicht — und ich würde mich darum

[1] E. Mach, Principien der Wärmelehre, 1896. S. 435.

[2] Man sehe meine »Erkenntnisstheoretischen Grundzüge«, S. 172.

noch keineswegs in Gegensatz zu E. Mach zu stellen brauchen. Die Durcharbeitung beider Standpunkte hat ihr besonderes Interesse, und wenn von einer Differenz der Anschauungen dabei die Rede sein kann, wäre es die Frage, welche Formulirung der geschichtlichen Entwicklung menschlichen Geistes und menschlicher Wissenschaft entspricht. Die Durcharbeitung beider Standpunkte kann nur zur Vertiefung unserer Gedanken über die Übereinstimmung der Gesetze des Naturgeschehens mit denen der menschlichen Logik oder auch nur der Möglichkeit einer solchen führen.[1]

5.

Dass Untersuchungen wie die über Naturgesetz und Hypothese, über Nothwendigkeit des Naturgeschehens und des Denkens ihre objective und subjective Seite haben und bei dem Wechsel des Standpunktes, wie einen solchen ein oscillirender Denkprocess nahelegt, nur gewinnen, ist klar. Nichtsdestoweniger ist die Frage nicht nur interessant, sondern auch für die Erkenntnisstheorie fundamental, wie weit sich solche oscillirende Denkprocesse zurückverfolgen lassen, ob sie schliesslich bei dem Object oder bei dem Subject endigen. Es mag die Beantwortung einiger solcher Fragen vom naturwissenschaftlichen Standpunkt versucht werden.

Ich beginne mit der Frage nach dem Verhältniss zwischen der Nothwendigkeit des Naturgeschehens und des Denkens und möchte an der Spitze dieser Untersuchung die Thatsache und den Begriff der Anpassung stellen. Die Anpassung ist nicht nur eine physische (Darwin), sondern auch eine psychische Thatsache (Mach). Das menschliche Individuum, seine sinnlichen und geistigen Organe passen sich der Umgebung, d. h.

---

[1] H. Hertz hat bekanntlich in seinen Principien der Mechanik S. 1 es als eine besondere Forderung aufgestellt, dass denknothwendige Folgen und naturnothwendige Folgen übereinstimmen. Ich halte nach dem Obigen die Aufstellung einer solchen Forderung mit Boltzmann für überflüssig, der sich in seiner Abhandlung »Über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur« einfach dahin äussert: »Die Anforderung an jede Theorie ist, dass sie richtig und ökonomisch sei; dann entspricht sie eo ipso den Denkgesetzen«.

den vorliegenden Bedingungen bis zu einem gewissen Grade an, und dieses — wenn auch beschränkte — Anpassungsvermögen findet seinen getreuen Ausdruck in den geistigen Fähigkeiten des Menschen. Die geistige Fähigkeit ist nichts anderes als das Anpassungsvermögen auf geistigem Gebiet.

Das geistige Anpassungsvermögen der Menschheit entwickelt sich wesentlich an zwei Factoren von fundamentaler Bedeutung, die wir schon in der Einleitung als Natur und Geschichte bezeichnet haben. Ohne die Bedeutung des geschichtlichen Factors irgendwie zu unterschätzen, werden wir nicht fehlgehen, wenn wir die Natur für den menschlichen Geist als das im Wesentlichen a priori[1] Gegebene, Geschichte als das im Wesentlichen a posteriori Gegebene ansehen. Die Natur mit ihren Gesetzen, mit ihrer ehernen Nothwendigkeit des Geschehens war da, als der Mensch, der Herr der Schöpfung, und seine Geschichte in die Natur eintrat; die Bedingungen für die Möglichkeit physischen und psychischen Gedeihens des Menschen und seiner Geschichte mussten älter sein als der Mensch selbst mit seinen physischen und psychischen Fähigkeiten. Diese Bedingungen mit ihrer äusseren Nothwendigkeit des Geschehens waren naturwissenschaftlich betrachtet das a priori Gegebene, welches auf die Fähigkeiten des Menschen gestaltend (formal, formend, bildend) einwirkte.

Unter der beständigen Einwirkung eines äusseren Nothwendigen entwickelte sich — naturwissenschaftlich betrachtet — oder musste sich entwickeln eine innere Nothwendigkeit des Denkens, welche nichts anderes als ein Abbild der äusseren Nothwendigkeit war. Nur zu häufig gerieth die so entwickelte innere Denknothwendigkeit in Conflict mit der äusseren Nothwendigkeit des Naturgeschehens, und das war und ist noch heute, wo es eintritt, ein Zeichen der Apriorität der uns gegebenen äusseren Natur mit ihrer Nothwendigkeit, hinter der unsere innere Denknothwendigkeit beständig nachhinkt, der sich unser Denken beständig weiter anzupassen bemüht ist. Wir sprechen heute von der strengen Schule, in welche die

---

[1] Die Bedeutung der Begriffe a priori, a posteriori ergibt hier der Zusammenhang und ist natürlich mit der Bedeutung bei Kant nicht identisch.

Naturwissenschaft methodisch den menschlichen Geist nimmt, und wir haben nur denselben Gedanken in populärer Form ausgesprochen, in dem die Anschauung gipfelt, dass die Natur mit ihren Gesetzen für den menschlichen Geist und seine Logik das a priori Gegebene ist. Der objective Inhalt der Naturgesetze und Hypothesen erscheint uns so als ein a priori Gegebenes, wenn wir die Formulirung ihres Inhaltes auch erst a posteriori finden und aufstellen.

An einer anderen Stelle[1] habe ich bereits ausgeführt, dass das äussere nothwendige Geschehen die äussere Wirklichkeit nicht erschöpft. Nothwendig sind nur gewisse Abläufe, die in einem Gleichgewichte, beziehungsweise in einem stationären Zustand einsetzen und in einem solchen endigen können. So stellt sich das äussere nothwendige Geschehen als ein Mechanismus dar, neben dem eine bedingte und beschränkte menschliche Freiheit vollständig ihre Stelle behält, insofern sie die Bedingungen herbeischaffen kann, natürliche nothwendige Abläufe einzuleiten oder in dieselben einzugreifen. Hier setzt die Möglichkeit der Existenz des zweiten grossen Factors ein, der schon oben neben der Natur als Quelle menschlicher Erkenntniss genannt ist, die Geschichte (der Menschheit) im weitesten Sinne des Wortes.

Jede Erkenntnisstheorie wird ihr Augenmerk darauf zu richten haben, diese Quellen menschlicher Erkenntniss, welche durch die Begriffe »Natur und Geschichte« gegeben sind, auseinanderzuhalten, in ihrer Bedeutung einzeln zu würdigen, ihr Zusammenwirken, wo es stattfindet, festzustellen. Es ist klar, dass diese beiden Factoren und ihre speculative Behandlung sich gegenseitig fördern, aber auch hemmen können. Jeder Vergleich regt an, aber doch nur insoweit, als er dazu verhilft, Beeinflussungeen aufzudecken, die als berechtigt oder unberechtigt nachzuweisen sein werden.

Habe ich versucht, die Nothwendigkeit des Naturgeschehens im Verhältniss zur Nothwendigkeit des Denkens als das Ursprüngliche darzustellen, also den Begriff der Nothwendigkeit

---

[1] In meinem Aufsatze »Causalität der Naturwissenschaft«, Himmel und Erde 1896.

als einen wesentlich objectiven, äusseren hinzustellen, so mag der Begriff der Causalität ein Beispiel für einen im letzten Grunde wesentlich subjectiven Begriff hergeben, der seine Quelle in dem Handeln der menschlichen Freiheit nach Gründen und Zwecken hat, das wir uns bildlich auf das naturnothwendige Geschehen übertragen denken und streng genommen darum nicht übertragen dürfen, weil Causalität in dem äusseren Naturgeschehen da einsetzt, wo der nothwendige Ablauf und sein Mechanismus als Zweck benutzt werden kann, wo der nothwendige Ablauf ein Mittel zum Zweck für menschliches Handeln ist. Wenn also Kant unterscheidet zwischen der Causalität nach der Natur und nach der Freiheit, so halte ich dafür, dass die Causalität nach der Freiheit das Ursprüngliche ist, und ich betrachte es als einen letzten Rest einer anthropomorphen Naturbetrachtung, wie solche das classische Alterthum liebte, wenn der Begriff der Causalität auf das Gebiet der Natur übertragen wird. Ich glaube, das Nähere in meinem schon citirten Aufsatze »Causalität und Naturwissenschaft«, 1896, hinlänglich ausgeführt zu haben.

Die Rolle, die ich im Vorhergehenden der Nothwendigkeit des äusseren Geschehens, der Nothwendigkeit des Denkens und der Causalität angewiesen habe, erläutert das Verhältniss von Physik, Logik und Ethik:

Die Physik (im weitesten Sinne des Wortes) hat die Aufgabe, den naturnothwendigen Ablauf der Dinge zu erforschen. Dieser naturnothwendige, ausnahmslose Ablauf erfüllt nur einen Theil des Universums. Er ist einmal das thatsächliche Vorbild für die Nothwendigkeit des Denkens, also eine Quelle der Logik; er ist sodann der thatsächliche Mechanismus für die Freiheit des Handels nach Zwecken und damit in gewissem Sinne auch eine Quelle der Ethik.

Die Logik (im weitesten Sinne des Wortes) hat die Aufgabe, den denknothwendigen Ablauf der Ideen zu erforschen. Dieser denknothwendige Ablauf hat sein Analogon, ja seine Quelle in dem naturnothwendigen Ablauf der Dinge. Die Logik überträgt und vertieft ihre Kraft, indem sie von den Verhältnissen der Natur zu menschlichen Verhältnissen als Object

übergeht; sie fixirt hier den Begriff der Causalität, aber es ist im letzten Grunde verfehlt, diesen den menschlichen Verhältnissen entnommenen Begriff wieder rückwärts auf die Objecte des äusseren natürlichen Verlaufes übertragen zu wollen.

Die Ethik (im weitesten Sinne des Wortes) hat die Aufgabe, der Freiheit des Handelns nach Zwecken unter Berücksichtigung des erforschten Mechanismus der Natur eine Richtung zu geben. Wir erkennen: In der fortschreitenden Erkenntniss der Physik (des naturnothwendigen Ablaufes), in der damit fortschreitenden Entwicklung des Intellects liegt die Gewähr einer zugleich fortschreitenden Entwicklung der Sitte. Denn das menschliche Handeln wird um so mehr das Richtige und das Sittliche sein, wenn es seine Tragweite vollkommen überschaut und vor Allem dem naturnothwendigen Ablauf der Dinge Rechnung trägt.

Zur Frage des Widerstandes, welchen bewegte Körper in Flüssigkeiten und Gasen erfahren

von

Prof. **G. Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Die durch Stokes mit Rücksicht auf die innere Reibung erweiterten Euler'schen Grundgleichungen der Hydrodynamik lauten, wenn wir von äusseren Kräften absehen, folgendermassen:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) -$$

$$-\varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\varkappa}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{2}$$

Dazu kommen noch zwei analoge Gleichungen für $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$. Bekanntlich sind hier u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung der Coordinaten x, y, z, p der Druck, ρ die Dichte, $\varkappa$ der Coëfficient der inneren Reibung der Flüssigkeit, t die Zeit. Für eine andere Flüssigkeit seien die Geschwindigkeiten U, V, W, die Coordinaten X, Y, Z, der Druck P, die Dichte R, die Reibungsconstante K, die Zeit T. Setzen wir nun

$$R = r\rho,\ K = k\varkappa,$$

$$U = nu,\ V = nv,\ W = nw,$$

$$X = \frac{k}{rn}x,\ Y = \frac{k}{rn}y,\ Z = \frac{k}{rn}z,$$

$$P = n^2 rp + \text{Const.},\ T = \frac{k}{rn^2}t,$$

so erfüllen auch diese Grössen die Gleichungen (1) und (2). Wir können sonach bekannte mögliche Bewegungen einer Flüssigkeit auf eine andere übertragen. Die Constanten r und k sind dabei ohneweiters durch die Natur der Flüssigkeiten bestimmt, streng genommen auch n, da ja die Zustandsgleichung der Flüssigkeit eine Beziehung zwischen p und ρ feststellt. Helmholtz machte in seiner Abhandlung: »Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken«[1] auf diese Eigenschaft der hydrodynamischen Gleichungen aufmerksam und erläuterte damit mehrere bekannte Erscheinungen der Hydrodynamik. Helmholtz drückt jedoch die Grösse $\frac{\varkappa}{\rho}$ durch einen einzigen Buchstaben aus und nennt sie die Reibungsconstante. Dadurch werden seine Formeln auch theilweise anders als die unsrigen.

Helmholtz weist ferner darauf hin, dass viele Bewegungen auch in Gasen so verlaufen, dass die dabei auftretenden Compressionen vernachlässigt werden können. Es kann dann die Dichte als unabhängig vom Druck wie bei incompressiblen Flüssigkeiten angenommen und dadurch über die Constante n frei verfügt werden. Bei allen jenen Bewegungen in ausgedehnten Flüssigkeitsmassen, wo sich derjenige Widerstand überwiegend geltend macht, welcher von den Beschleunigungen der Flüssigkeit herrührt, kann man auch von der Reibung absehen, d. h.

$$\varkappa = K = 0$$

setzen und kann somit auch über die Constante k frei verfügen. Auf diese Weise vergleicht Helmholtz die Verhältnisse eines Linienschiffes mit den Erfahrungen, welche Dupuy de Lôme mit seinem langgestreckten lenkbaren Ballon machte.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die von Helmholtz gemachte Anwendung nicht völlig einwurfsfrei ist. Durch die Annahme, dass Dichtenänderungen in der Luft

---

[1] Monatsber. der königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1873 S. 501—514. — Wissensch. Abhandl. I, S. 158—171.

keine Rolle spielen, geht die Gleichung (1) in die für incompressible Flüssigkeiten bekannte Beziehung über:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Der Widerstand, welchen das Linienschiff und der Ballon erfahren, sind bei constanten Geschwindigkeiten gemessen. Dadurch wird in den Gleichungen (2), indem man sich das Coordinatensystem mit dem Schiff, bezüglich Ballon fest verbunden denkt,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

und da die innere Reibung vernachlässigt wird, fallen die beiden letzten Glieder weg, so dass nur bleibt

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Denken wir uns eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, welche sich geradlinig, etwa parallel zur x-Axe mit constanter Geschwindigkeit bewegt, und bringen wir in dieselbe einen festen Körper, der seine Lage nicht verändern soll, so wird dadurch die Flüssigkeitsbewegung gestört. Für die nunmehrige Strömung besteht aber ein Geschwindigkeitspotential φ, mit dessen Benützung wir durch Integration der Gleichung (4)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} = C \tag{5}$$

erhalten, wenn

$$u^2 + v^2 + w^2 = c^2$$

gesetzt wird, während C eine Constante ist. Aus Gleichung (3) ergibt sich

$$\Delta\varphi = 0,$$

was uns bekanntlich erlaubt, die Analogie mit einem magnetischen Potential aufzustellen. Darnach würde unser hydrodynamischer Fall ein Analogon für ein unendlich ausgedehntes homogenes magnetisches Feld sein, in welches wir einen festen

Körper von der magnetischen Susceptibilität $-\frac{1}{4\pi}$ bringen. Es würden dann alle magnetischen Inductionslinien um den Körper herumlaufen, so wie im anderen Falle die Strömungslinien.

Wir denken uns nun, die Flüssigkeit ströme in weiter Entfernung vom störenden Körper parallel zur x-Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit der Geschwindigkeit u. Wir bringen in die Flüssigkeit einen symmetrischen Körper, für welchen die (yz)-Ebene eine Symmetrieebene ist. Aus dem Analogon mit einem magnetischen Feld geht dann ohneweiters hervor, dass auch alle Strömungslinien zur (yz)-Ebene symmetrisch sind. Sind nun die Winkel, welche die Normale eines Oberflächenelementes des Körpers mit den drei Axen einschliesst, α, β, γ, so gehören zum symmetrischen Punkt die Winkel $\alpha+\frac{\pi}{2}$, β, γ. Senkrecht zur Oberfläche darf keine Strömung stattfinden, es ist daher für das eine Oberflächenelement

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta + w_1 \cos\gamma = 0,$$

für das symmetrische hingegen

$$u_1' \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + v_1' \cos\beta + w_1' \cos\gamma =$$
$$= -u_1' \cos\alpha + v_1' \cos\beta + w_1' \cos\gamma = 0,$$

und man erkennt aus der Symmetrie der Strömungslinien sofort, dass

$$u_1 = u_1', \quad v_1 = -v_1', \quad w_1 = -w_1',$$

wenn wir mit $u_1 v_1 w_1$ die Geschwindigkeitscomponenten am Oberflächenelement $d\omega_1$, mit $u_1' v_1' w_1'$ jene am symmetrisch gelegenen $d\omega_1'$ bezeichnen. Es muss ferner auch

$$d\omega_1 = d\omega_1'$$

sein. Der Druck auf $d\omega_1$ ist nach Gleichung (5)

$$p_1 = C\rho - \frac{\rho c_1^2}{2} = C\rho - \frac{\rho}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$$

und analog auf $d\omega'_1$

$$p'_1 = C\rho - \frac{\rho c'^2_1}{2} = C\rho - \frac{\rho}{2}(u'^2_1 + v'^2_1 + w'^2_1) =$$

$$= C\rho - \frac{\rho}{2}(u^2_1 + v^2_1 + w^2_1).$$

Es ist somit der Druck auf beiden Seiten des symmetrischen Körpers gleich. Parallel zur x-Axe werden sich demnach die Druckkräfte gegenseitig aufheben. Die Gesammtkraft, welche parallel zur x-Axe wirkt, ist gleich Null. Für den ganzen Strömungsvorgang bleibt es sich natürlich gleichgiltig, ob wir uns den Körper ruhend und die Flüssigkeit in Bewegung, oder die Flüssigkeit ruhend, den Körper hingegen mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit parallel zur x-Axe bewegt denken. Daraus folgt der wichtige Satz: Ein symmetrischer Körper, der sich senkrecht zur Symmetrieebene mit constanter Geschwindigkeit in einer idealen Flüssigkeit bewegt, erfährt keinen Widerstand.

Dieser Satz lässt sich auf jeden beliebigen Körper, folglich auch auf jede Bewegungsrichtung ausdehnen. Wir können nämlich einen jeden Körper, der sich mit constanter Geschwindigkeit und Richtung in einer idealen Flüssigkeit bewegt, zu einem symmetrischen ergänzen, indem wir ihn mit einem zweiten zu ihm symmetrischen durch eine unendlich dünne, genügend lange Stange, welche die Richtung der Bewegung hat, verbinden. Wir können das Verbindungsstück immer so lang wählen, dass zwischen den beiden symmetrischen Körpern die Flüssigkeit bereits wieder als ruhend gedacht werden kann. Erfährt dann der vorangehende Körper bei der Bewegung einen Widerstand, so muss in Folge der Symmetrie der nachfolgende genau denselben, aber entgegengesetzt gerichteten erleiden, da ja das ganze System nichts Anderes als ein symmetrischer Körper ist, von dem wir bewiesen haben, dass der Gesammtwiderstand gleich Null sein muss. Auf den nachfolgenden Körper würde also, richtiger gesagt, eine Kraft in der Richtung seiner Bewegung wirken. Wäre er also allein vorhanden, so würde er eine immer grössere lebendige Kraft erlangen. Es würde Arbeit aus nichts erzeugt, was ein Widerspruch ist.

Sonach kann sich jeder Körper, ohne einen Widerstand zu erfahren, mit constanter Geschwindigkeit in einer idealen Flüssigkeit bewegen. Nach einem Referat der »Fortschritte der Physik im Jahre 1890« wurde dieser Satz von N. E. Joukovsky in einer mir leider nicht zugänglichen Abhandlung[1] abgeleitet, weshalb es mir angezeigt schien, darzulegen, wie ich zu obigem Resultat gelangte.

Nach alldem können wir nicht ohneweiters die Gleichungen der Hydrodynamik ohne Berücksichtigung der inneren Reibung für geeignet halten, aus dem Widerstand, den ein Körper bei der Bewegung in einer Flüssigkeit erfährt, jenen eines ähnlich situirten zu bestimmen. Dies ist ohne Bedenken nur dann möglich, wenn wir die unverkürzten hydrodynamischen Gleichungen benützen. Allerdings ist dann die praktische Anwendbarkeit eine sehr beschränkte. Beim Vergleich eines Schiffes mit einem Ballon spielt noch eine missliche Rolle die äussere Reibung zwischen der Schiffswand und dem Wasser. Während nämlich beim Ballon die Gleitung an der Ballonwand sicherlich als Null angenommen werden kann, müssen wir sie beim Schiff als ziemlich beträchtlich voraussetzen. Dies verändert die Verhältnisse zu Ungunsten des Ballons. Der Einfluss der äusseren Reibung auf die Geschwindigkeit des Fahrzeuges ist jenen, die dem Ruder- und Segelsport huldigen, sehr wohl bekannt. Man fettet deshalb vor den Wettfahrten jenen Theil des Bootes, der unter dem Wasserspiegel ist, sehr gut ein, was die Geschwindigkeit des Fahrzeuges beträchtlich erhöht. Aus demselben Grunde begreifen wir es auch, wenn F. Nansen auf seinem Wege zum Nordpol vor dem Verlassen des letzten Hafens schreibt: »Die letzte Arbeit, die nun mit der Fram vorgenommen werden musste, war die Reinigung des Schiffes von Muscheln und Wasserpflanzen, um eine möglichst schnelle Fahrt zu erzielen«.[2]

Bezüglich der numerischen Werthe scheint bei Helmholtz' Betrachtung ein Irrthum vorzuliegen. Er erhält nämlich

---

[1] Verhandl. der VIII. Versamml. russ. Naturforscher und Ärzte, phys. Abth., S. 34—39. Petersburg, 1890.

[2] In Nacht und Eis. S. 80.

für die von uns $\frac{k}{r}$ genannte Grösse bei der Übertragung der Verhältnisse des Wassers auf jene der Luft den Werth 0·8082, während wir aus dem Reibungscoëfficienten des Wassers 0·0102 (C. G. S.) und jenem der Luft 0·000175 (C. G. S.) und dem Dichtenverhältniss $\frac{1}{773}$ zwischen Luft und Wasser $\frac{k}{r} = 13 \cdot 26$ finden.

Es wäre natürlich verfehlt, aus der widerstandslosen Bewegung eines Körpers in einer idealen Flüssigkeit den Schluss zu ziehen, dass bei einem stationären Zustand nur jene Glieder der Grundgleichungen in Rechnung zu ziehen seien, welche die innere Reibung enthalten. Sind die vorkommenden Geschwindigkeiten sehr klein, so ist dies allerdings gestattet, weil dann Producte von der Form $u \frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w. vernachlässigt werden können. Für incompressible Flüssigkeiten und stationäre Bewegungen bleibt dann von den Gleichungen (1) und (2) nur übrig

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\varkappa}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Aber nicht in diesem einzigen Falle können wir die letzte Gleichung für $\frac{\partial p}{\partial x}$ und die zwei analogen für $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ benützen, sondern ihre Anwendung ist auch bei grösseren Geschwindigkeiten gestattet, falls es nur gelingt, der Flüssigkeit eine derartige Bewegung zu ertheilen, dass ihre Strömungslinien jenen einer idealen Flüssigkeit möglichst nahekommen; denn dann muss sich der Widerstand, welcher von den Beschleunigungen herrührt, ebenfalls der Null nähern. Dies ist der Fall bei möglichst langgestreckten Körpern, wie sie etwa die Figuren 1 und 2 im Längsschnitt zeigen, wenn sie sich in der Richtung ihrer Längsaxe *AB* bewegen, und wenn gleichzeitig die Gleitung an der Oberfläche sehr gross ist. Das ist die Ursache, weshalb man einem Schiff eine derartige Form gibt. Auf solche Formen werden wir die Gleichungen (6) mit einer gewissen Annäherung an die Wirklichkeit anwenden können.

In diesen Gleichungen kommt die Dichte der Flüssigkeit gar nicht vor. Setzen wir nun wieder

$$
\begin{gathered}
K = k\varkappa, \\
U = nu, \quad V = nv, \quad W = nw, \\
X = mx, \quad Y = my, \quad Z = mz, \\
P = \frac{kn}{m} p + C,
\end{gathered}
$$

so erfüllen auch diese Werthe die Gleichungen (6). Darnach wächst der Widerstand, den ein Körper erfährt, proportional

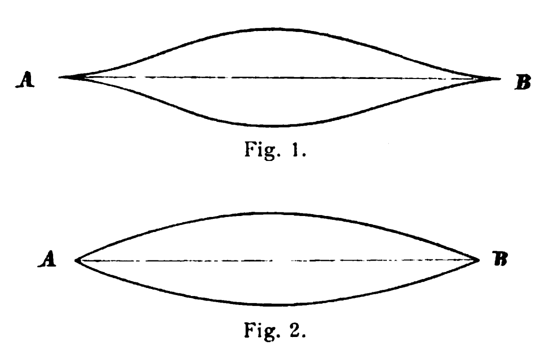


Fig. 1.

Fig. 2.

der Geschwindigkeit und dem Reibungscoëfficienten. Thatsächlich wenden wir dies in der Physik mit Erfolg an. Bestimmen wir ja das logarithmische Decrement einer gedämpften schwingenden Bewegung immer unter der Voraussetzung eines Widerstandes, der proportional der Geschwindigkeit ist, und die Erfahrung zeigt, dass das selbst bei beträchtlichen Geschwindigkeiten gestattet ist, wenn der sich bewegende Körper nur eine solche Form hat, dass die Strömungslinien der Flüssigkeit sich jenen einer idealen nähern, wie es z. B. bei den linsenförmigen Pendelgewichten der Fall ist.

Wechseln wir die Flüssigkeit, so ändert sich der Widerstand und auch die zur Bewegung nothwendige Arbeit proportional dem Reibungscoëfficienten. Dies können wir auf die Arbeit anwenden, welche zur Fortbewegung einer Last mit Hilfe eines Ballons nothwendig ist. Überlegen wir, dass ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon etwa ebensoviel Kilogramm schwer sein kann, als er Cubikmeter enthält, so muss er

tausendmal grösser als ein gleich schwerer Körper im Wasser, die linearen Dimensionen müssen also die zehnfachen sein. Wir haben daher beim Übergang von Wasser auf Luft $m = 10$ zu setzen, hingegen $k = 0\cdot017$. Bei sonst gleicher Geschwindigkeit hätten wir also beim Transport einer Last durch die Luft nur 0·17 jener Arbeit zu leisten, welche beim Wasserweg aufzuwenden wäre. Nach Helmholtz' Vorgang ist das Verhältniss zwischen diesen beiden Arbeiten 0·13, also ein ganz ähnlicher Werth. Dabei haben wir allerdings wiederum die äussere Reibung als unendlich gross angesehen, was zwischen Wasser und einer getheerten Schiffswand sicherlich nicht der Fall ist, während es beim Ballon wohl zutreffen dürfte. Das spricht aber nur zu Ungunsten des Ballons. Ungünstiger als beim Wasserstoffballon gestalten sich die Verhältnisse des Leuchtgasballons, dessen Tragfähigkeit ja bei Weitem kleiner ist.

Unsere Ausführungen können auch Anwendung auf den Vogelflug finden. Darnach stehen die Chancen des Fliegens bei den grössten Vögeln am besten. Thatsächlich sind die besten Flieger die grossen Raubvögel, der Albatros u. s. w. Diese benützen nämlich zum Flug nicht so sehr ihre Muskelkraft, als vielmehr die Eigenbewegungen der Luft, welche kleine Vögel beim Fliegen meist stören. Hat man ja grosse Segler beobachtet, wie sie stundenlang ihre Kreise zogen, ohne auch nur einen einzigen Flügelschlag zu thun oder sich zu senken, indem sie die beständig wechselnde Windgeschwindigkeit benützten, um sich schwebend zu erhalten. Dazu ist aber erforderlich, dass der sogenannte Stirnwiderstand, d. i. jener, welchen der Vogel beim Vorwärtsfliegen erfährt, möglichst klein wird. Dies wird durch den langgestreckten Körper, ähnlich den Figuren 1 und 2, und die schmalen Flügel erreicht, wobei eine möglichst glatte Oberfläche unerlässliche Bedingung ist, was, wie Herr S. Exner[1] gezeigt hat, dadurch erfüllt ist, dass die Federn durch gegenseitige Reibung elektrisch werden und so fest aneinander haften.

---

[1] Über die elektrischen Eigenschaften der Haare und Federn. Archiv für die gesammte Physiologie. Bd. 61, pp. 427—449 (1895), 2. Abhandl., Bd. 63, pp. 305—316 (1896).

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(X. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Ca, Sr, Li, Cr)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

Bei den nachfolgenden Messungen machten sich Verschiebungen einzelner Linien (gegen Rowland's Angaben der Wellenlängen) geltend, die, wenn ihrem absoluten Betrage nach auch klein und nur in seltenen Fällen 0·1 AE. übersteigend, doch sicher nicht auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind. Sie stehen vielmehr unzweifelhaft mit jenen Variationen der Wellenlängen einzelner Linien in Verbindung, welche einerseits von Jewell[1] als eine Folge variabler Dichte des leuchtenden Dampfes, anderseits von Humphreys[2] als eine Folge variablen Druckes des letzteren erkannt wurden.

Dass diese Verschiebungen einzelner Linien, die namentlich bei starken, nach Roth verwaschenen Linien eintreten, nicht auf eine photographische Wirkung auf die Platte zurückzuführen sind, ergibt sich aus dem Umstande, dass dieselben auf stark und schwach exponirten Platten in ganz gleicher Weise eintreten. Um bezüglich dieser Verschiebungen, die z. B. bei einzelnen Linien des Calciums in beträchtlichem

[1] Jewell, Astroph. Journ. Bd. 3 (1896).

[2] Humphreys und Mohler, Astroph. Journ. Bd. 3 (1896), und Humphreys, Astroph. Journ. Bd. 6 (1897).

Masse auftreten, vollkommen sicher zu sein, haben wir die betreffenden Linien auch im Bogenspectrum gemessen und, wie die folgende kleine Tabelle zeigt, stimmen letztere mit den Rowland'schen Zahlen überein, während die Linien im Funkenspectrum eine beträchtliche Verschiebung nach Roth zeigen.

Exner und Haschek		Rowland	
Funke	Bogen	Bogen	Sonne
3159·11	3158·99	3158·99	3159·00
3179·60	3179·48	—	3179·45
3181·51	3181·39	—	3181·39
3706·25	3706·20	3706·18[1]	—
3737·25	3737·09	3737·08	3737·06

Der Unterschied zwischen Bogen- und Funkenspectrum zeigt sich nicht nur in der verschiedenen Stellung der Linien, sondern auch darin, dass dieselben im Bogenspectrum scharf, im Funkenspectrum nach Roth verwaschen sind. Es fragt sich nun, woher diese Linienverschiebungen, die übrigens nicht nur beim Calcium, sondern auch beim Strontium, Lithium und Chrom beobachtet wurden, stammen. Der ganze Charakter der Erscheinung stimmt vollkommen mit dem, was Jewell, respective Humphreys in den schon erwähnten Arbeiten angegeben haben: Die Verschiebungen gehen immer gegen das rothe Ende, sie treffen vor Allem die nach Roth verwaschenen Linien, niemals die umgekehrten Linien, und am stärksten solche, bei denen, wenn sie sich umkehren, die Umkehrung stark excentrisch gegen Violett auftritt. Verschiebungen nach Violett gegen die Rowland'schen Zahlen haben wir nur in ganz vereinzelten Fällen gefunden und nur in solchen, wo letztere sich auf die Sonne beziehen. Solche Linien sind z. B. im Strontium 4361·86 und 4438·19, für welche Rowland in der

---

[1] Diese Zahl ist den Tabellen von Kayser und Runge entnommen.

Sonne die Zahlen 4361·96 und 4438·36 gibt, während Kayser und Runge im Bogen die mit unseren nahe übereinstimmenden Werthe 4361·87 und 4438·22 finden.

Ein weiteres Beispiel ist die Chromlinie 4325·27, für welche Hasselberg im Bogen 4325·24 und Rowland in der Sonne 4325·31 angibt.

Linien in unmittelbarer Nähe der vorstehenden Chromlinie zeigen sich normal gegen Roth verschoben.

Da derartige Verschiebungen nach Roth, wie aus den oben citirten Arbeiten von Jewell und Humphreys hervorgeht, sowohl durch geänderte Dampfdichte, als durch geänderten Druck hervorgebracht werden können, so fragt es sich, welche dieser beiden Ursachen, oder ob beide bei der Erzeugung des Funkenspectrums mitwirken. Es scheint, dass das letztere der Fall ist: Dass die Dichte des Dampfes von Einfluss ist, geht deutlich daraus hervor, dass Linien, die, in dem betreffenden Elemente aufgenommen, verschoben erscheinen, mit ihrer normalen Wellenlänge auftreten, wenn sie nur Verunreinigungen in einer anderen Substanz ihre Entstehung verdanken, in welchem letzteren Falle die entsprechende Dampfdichte natürlich eine weit geringere ist, während der Gesammtdruck der gleiche bleibt.[1] So z. B. erscheint die Calciumlinie 3159·11, wenn sie als schwache Verunreinigung im Eisen gemessen wird, mit 3159·01, während Rowland für ihre Wellenlänge im Bogen 3158·99 gibt; gleicherweise wurde von uns die Wellenlänge der Strontiumlinie 4305·71 als Verunreinigung im Fe mit 4305·63 bestimmt, während Rowland für den Bogen 4305·64 angibt. Ausserdem wollen wir noch das folgende Beispiel für den Einfluss der Dampfdichte anführen: Die drei folgenden Calciumlinien, die auf unserer Aufnahme nicht umgekehrt, wohl aber nach Roth verschoben erschienen, haben wir noch in einer zweiten Aufnahme gemessen, bei welcher durch Erzeugung grosser Dampfdichte dafür gesorgt wurde, dass die Linien sich umkehrten. Die Umkehrungen erschienen sämmtlich excentrisch nach Violett und stimmten in ihrer Lage

[1] Nach den Untersuchungen Humphreys' hängen die Verschiebungen nicht vom Partialdruck, sondern vom Gesammtdruck ab.

vollkommen mit den Rowland'schen Angaben, wie die folgenden Zahlen zeigen.[1]

Funke nicht umgekehrt	Funke umgekehrt	Rowland Sonne
3159·11	3159·00	3159·00
3179·60	3179·45	3179·45
3181·51	3181·40	3181·39

Aus den vorstehenden Zahlen geht wohl unzweifelhaft hervor, dass die Dampfdichte auf die beobachteten Linienverschiebungen einen wesentlichen Einfluss hat; ob auch der Druck dabei eine Rolle spielt, lässt sich mit Sicherheit nicht entscheiden. Doch scheint es zum mindesten wahrscheinlich. Erstlich ist schwer anzunehmen, dass bei ganz gleichartigen Elektroden die Dampfdichte im Funken eine wesentlich grössere sei, als im Bogen, da bei beiden Entladungsformen die Siedetemperatur des Materials jedenfalls bedeutend überschritten ist. Dann sind aber auch die Verschiebungen in quantitativer Beziehung derartige, dass sie recht gut mit der Annahme eines wenigstens local gesteigerten Druckes im Funken vereinbar erscheinen. So betragen z. B. bei uns die Verschiebungen der Chromlinien durchschnittlich 0·05 AE., im Calcium dagegen 0·11 AE. Das Verhältniss der beiden Zahlen stimmt gut mit jenem, das Humphreys für diese beiden Elemente findet, der für einen Druck von 12 Atmosphären die respectiven Zahlen 0·026 AE. und 0·054 AE. findet. Zieht man die absoluten Werthe dieser Zahlen in Betracht, so würde daraus folgen, dass in unserem Funken wenigstens local Drucke bis ungefähr 24 Atmosphären vorkommen. Der Umstand, dass im Funken die Linien stark verwaschen sind, während sie, wie es z. B. beim Calcium der Fall ist, im Bogen scharf begrenzt auftreten.

[1] Die Linie 3737·25 erschien auch als umgekehrte Linie in derselben Stellung; doch ist zu bemerken, dass bei 3737·25 eine stärkere Eisenlinie liegt, welche sich gemeinschaftlich mit der Calciumlinie umgekehrt zu haben scheint.

deutet darauf hin, dass in der Funkenstrecke sehr variable Drucke, jedenfalls auch noch höhere als der oben angegebene vorkommen.

Wir glauben nicht, dass die Annahme so hoher Drucke im Funken eine widerspruchsvolle ist. Im Gegentheile scheint die ausserordentliche Intensität und das stark prasselnde Durchschlagen unseres Transformatorfunkens auf das Vorhandensein grosser Druckdifferenzen in der Funkenbahn hinzudeuten. Auch eine Beobachtung Mohler's[1] scheint einen erhöhten Druck in der Funkenbahn zu bestätigen: Er fand die Verschiebungen von Linien in einer Geissler'schen Röhre bei 2 *mm* Druck ebenso gross, wie in einem Bogen, der unter 20 *mm* Druck brannte. Daraus scheint zu folgen, dass selbst durch den schwachen Funken in einer Geissler'schen Röhre der Druck auf das zehnfache gesteigert werden kann. In den folgenden Tabellen geben wir ausnahmslos die auf den stark exponirten Platten direct gemessenen Wellenlängen, die demnach die im Vorstehenden besprochenen Linienverschiebungen zeigen.

XXX. Calcium.

Das Funkenspectrum des Calciums ist bisher noch gar nicht untersucht — mit Ausnahme der kleinen Partie von $\lambda = 2100$ bis 2300 AE., welche von Eder und Valenta[2] mit dem Quartzspectrographen untersucht wurde. Wir konnten mit unserem Funken in diesem Theile des Spectrums keine Linien erhalten. Das Bogenspectrum wurde schon früher von Liveing und Dewar[3] und von Kayser und Runge[4] untersucht. Zwischen beiden Arten der Spectren zeigen sich grosse Unterschiede in der Vertheilung und den Intensitäten der Linien. Unser Spectrum wurde aus $CaCl_2$ aufgenommen, das auf Eisen aufgeschmolzen war. Es zeigte sich mit Mn und Sr verunreinigt. Die Zahl der gemessenen Linien betrug 33.

---

[1] Mohler, Astroph. Journ. Bd. 4 (1896).

[2] Eder und Valenta, Diese Sitzungsber. (1892).

[3] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).

[4] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

λ	i	λ	i	λ	i
2889·67	1+	3706·25	10 r.	4299·14	3
2933·19	1 } Mn	37·25	15 r.	4302·70	6
39·41	2 }	3933·81	100 u.	07·92	2
95·04	1+	49·03	1+	18·79	3
97·41	1	57·23	1	4425·62	3
3006·95	1	68·62	80 u.	35·12	4
09·29	1	73·87	2	35·84	3
3159·11	10+ r.	4077·88	7 } Sr	54·93	5
79·60	10+ 2 AE.	4215·71	5 }	56·06	2
81·51	7 r.	26·88	10 u.	81·7	1+
3624·1	1+ br.	40·55	1+	86·1	1+
30·8	1+ br.	83·18	3		
44·53	2+	89·55	3		

XXXI. Strontium.

Das Funkenspectrum des Strontiums fehlt bisher gänzlich, das Bogenspectrum wurde aufgenommen von Liveing und Dewar[1] und Kayser und Runge.[2] Auch das Strontium wurde als $SrCl_2$, das auf Eisen aufgeschmolzen war, untersucht. Verunreinigt war dasselbe stark mit Ca. Die Zahl der Linien betrug 33.

λ	i	λ	i	λ	i
2152·90	2+ u. br.	3301·81	3	75·12	20+ r. 2 AE.
66·00	2 u.	07·6	1+ br.	82·0	1+ br.
2282·2	2+ r. br.	22·33	3	94·0	1+ br.
2322·5	3+ r. br.	30·16	4	3653·2	1+ br. v.
2719·20	2	51·3	3+ br.	3706·31	3+ r.
3159·10	2+ r. }	66·40	4	3933·82	15 u. } Ca
79·62	3+ r. } Ca	80·90	80+ u. 4 AE.[3]	68·62	10 u. }
81·53	1+ }	3464·61	100 u. 5 AE.	70·12	1

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1891).

[3] Die Umkehrung kaum sichtbar und einseitig gegen violett gelegen; die dunkelste Stelle (im Negativ) der Linie steht bei 3381·14.

λ	i	λ	i	λ	i
4030·5	7+ 2 AE.	4302·68	3 Ca	35·12	2 } Ca
32·52	1	05·71	30+ r. 5 AE.	35·83	1 }
77·86	100 u. 12 AE.	18·81	1 Ca	38·19	3
4162·03	20+ 3 AE.	19·4	1+ br.	54·97	2 } Ca
4215·68	100 u. 10 AE.	26·63	1	56·06	1 }
26·88	5 u. } Ca	38·1	1+ br.	4531·57	1
83·18	1 }	61·86	3	4607·51	10 u.
89·51	1 }	4412·88	1		
99·14	1 }	25·57	1 Ca		

XXXII. Lithium.

Das Funkenspectrum des Lithiums wurde bisher nicht untersucht, das Bogenspectrum von Liveing und Dewar[1] und Kayser und Runge.[2] Das Lithium wurde aus auf Eisen aufgeschmolzenem Sulfat aufgenommen. Wir konnten im ganzen ultravioletten Bezirk nur die folgenden drei Linien beobachten:

λ	i
2815·55	1
3232·91	2+
4603·10	2+ r.

XXXIII. Chrom.

Das Funkenspectrum des Chroms wurde von Lockyer[3] im Bezirke von λ = 3900—4000 AE. gemessen, aber auch da nur mit einer den jetzigen Anforderungen nicht mehr genügenden Genauigkeit. An Messungen des Bogenspectrums liegen vor die älteren von Liveing und Dewar[4] und die in neuerer Zeit

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).
[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1890).
[3] Lockyer, Phil. Trans. (1881).
[4] Liveing und Dewar, Proc. Roy, Soc. (1881).

mit grosser Genauigkeit von Hasselberg[1] ausgeführten. Wir verwendeten das Chrom in elementarem Zustande, nach dem Moissan'schen Verfahren geschmolzen; es war von Schuchardt bezogen und nur mit Ca und Fe, vielleicht spurenweise auch mit Cu und Ti verunreinigt. Auch hier unterscheidet sich das Bogen- und Funkenspectrum nicht unwesentlich, was die Vertheilung und Intensitäten der Linien anlangt. Zahlreiche schwache Linien des Funkenspectrums finden sich als unbezeichnete Linie in der Rowland'schen Tabelle der Sonnenlinien, ähnlich wie wir dies schon gelegentlich der Messung des Baryumspectrums zu bemerken Gelegenheit hatten. Ferner konnten wir die schon von Hasselberg gemachte Beobachtung von Neuem bestätigen, dass zahlreiche schwächere Linien dem Chrom- und Eisenspectrum gemeinsam sind und in beiden mit annähernd gleicher Intensität auftreten.

Die Zahl der gemessenen Chromlinien betrug 2130.

λ	i	λ	i	λ	i
2113·8	1	2148·8	1+ br.	2200·6	1+
15·0	1	49·7	1+ br.	01·3	1+
17·6	1	50·8	1+	02·09	1
21·4	1	52·9	1+	03·34	2
30·0	1	66·4	1+	04·0	1+
30·4	1	70·81	1	04·69	1+
32·7	1	71·25	1	08·84	1
33·1	1	82·85	1+	11·4	1+ d.
33·6	1	83·86	1	11·94	1
34·3	1	85·17	1	12·38	1
34·7	2	90·26	1	13·81	2
35·5	1	90·94	1	15·20	1
39·3	1	91·41	1	15·9	1
40·6	1+	91·75	1	17·62	2
41·3	2+	93·47	1	17·89	1+
44·3	2	96·98	1	18·83	1
47·3	1	98·02	1	19·73	1
47·7	1+ br.	98·77	1	22·00	1

[1] Hasselberg, Konigl. Svensk. Vet. Akad. Handl. 26 (1894).

λ	i	λ	i	λ	i
2224·9	1+ br.	2258·73	2	2319·50	4
26·42	1	60·3	1+	20·21	3
26·80	2	61·82	2	20·52	1
28·02	1	62·79	1	25·00	5
28·4	1 d.	65·06	2	27·83	1
28·87	1	68·49	1	29·42	1
31·15	1	71·15	1+	30·15	1
31·59	1	73·50	2	33·20	1
31·94	2	75·61	2	33·58	2
33·92	2	76·56	2	33·97	1
34·67	1	77·60	2	34·32	1
36·03	2	82·53	1	34·51	1
37·71	2	84·25	1	34·72	1
39·3	1	84·61	2	34·91	1
39·6	1	86·40	1	35·45	1
41·45	1	86·74	1	37·83	2
41·94	2	87·33	1	40·60	2
43·39	2	89·40	2	42·57	1
43·73	2	90·82	2	44·66	2
44·23	2	91·26	1	45·38	3
45·02	1	92·0	1+	52·10	1+
45·48	1	92·7	1+	52·75	1+
47·79	1	94·58	1	55·38	1
48·01	1	95·70	2	60·9	1+ d.
48·40	2	97·03	2	64·10	1
48·68	2	97·34	2 d.?	65·32	2
49·05	1	98·06	1	66·90	3
49·89	2	99·7	1+	71·28	1
50·09	1	2300·26	1	81·16	1
51·28	1	00·68	2	81·55	4
51·60	2	03·00	1	89·81	3
52·11	1	04·17	1	91·52	1
55·61	1	06·97	1	92·15	1
56·15	2	07·33	3	92·95	1
56·50	1	07·7	1+ br.	93·47	1
56·76	1	10·18	2	94·57	4
57·57	1+	13·95	1+	95·49	1+
57·72	1+	14·80	5	97·83	3
57·92	1+	18·95	1+	98·58	1
58·15	2+	19·16	4	99·74	2

λ	i	λ	i	λ	i
2400·35	2	2469·51	2	2512·50	1
03·65	1	70·05	1	12·95	1+ br.
03·98	1	70·83	1+	13·80	4+
04·15	1	72·93	3	15·70	4+
05·37	1+	75·0	2+ br.	16·01	1
08·87	2+	75·74	2	16·70	3+ d.
13·73	1	76·95	2	17·5	1+ br.
15·3	1+ br.	77·78	1+	18·40	4+
16·46	3	78·63	2	19·0	2+
19·44	1	79·89	4	19·63	2+
19·94	1	83·12	4 r.	20·73	3
20·20	2	83·85	4 r.	22·75	1
25·30	1	85·54	2+	23·38	4
29·82	1	86·36	2	23·8	3+ br.
33·24	3	86·73	2	24·75	1+ br.
35·36	1	87·13	1+	27·22	1
38·50	4	89·35	3	27·53	1
43·43	1	89·85	2+	30·06	5
45·15	1+	90·17	2	30·32	4
46·98	2	92·72	3	31·13	2
49·70	3	92·98	3	31·96	2
50·04	2	94·38	1+ br.	32·8	1+ br.
50·44	2	95·17	1+ br.	34·43	4
51·73	1+	96·4	2+ br.	37·84	2
52·78	2	96·9	3+ br.	38·5	5+ br.
54·13	2	99·5	1+ br.	40·60	1+
54·55	3	2500·3	1+ br.	42·88	1+
55·8	1+ br.	01·56	1	43·24	3
56·90	2+	02·4	1+ br.	44·46	2
59·5	1+	04·38	1	45·30	2
60·49	2	05·15	1+	46·1	1+ br.
62·44	2	05·95	1	46·56	1
63·56	1	06·50	2	47·7	2+ br.
64·6	1+ br.	06·93	1	48·16	2
65·01	2	07·62	1	48·71	3
65·66	2	08·17	1	49·65	1
65·83	2	09·15	1+ br.	50·10	1
66·28	1	10·33	2	50·40	1
66·6	2+ br.	11·30	1	50·96	1
69·20	2	12·12	1+	51·71	4

λ	i	λ	i	λ	i
2552·03	1	2582·71	1	2612·63	1
55·65	2+	82·9	1+ br.	13·3	1+ br.
57·10	1	83·75	1	13·62	1
57·22	1	84·22	4	14·7	2+ br. d.
57·56	1	84·66	1	16·28	2+ d.
57·98	1	85·0	1+ br.	16·60	2
58·45	1+	85·70	1	18·8	2+ br.
58·90	1+	86·78	1	19·7	3+ br.
59·92	2+	87·53	3	20·60	2+
60·82	1	88·3	1+	23·48	3+ br.
61·13	2	88·36	1	24·0	1+ br.
61·9	2+ br.	89·16	2	25·75	1
62·63	2	89·83	3	26·16	1
63·45	3	90·6	2+ br.	26·87	2
63·71	5	90·88	5	28·06	2 d.
64·50	1	91·98	1	29·12	1
64·87	2	93·58	1	29·65	1
66·4	1+	94·4	1+ br.	31·00	3
66·63	1	95·68	3+	32·7	1+ br.
66·98	1	96·22	4+ d.?	33·8	1+ br.
67·45	1	97·00	1	34·4	1+ br.
67·70	1	2600·3	1+ br.	35 9	1+ br.
68·67	2+	01·17	1	36·54	1
69·55	1+	01·70	1	36·78	1
71·90	4	02·00	1	36·90	1
72·24	1	03·1	1+ br.	37·26	1
72·6	1+ br.	03·85	1	37·56	2
73·66	4	04·26	2	38·12	1
74·30	1	05·76	2	38 6	1+
75·91	2	06·20	2	39·2	1+ br.
76·22	1	06·65	3	40·1	1+
77·80	1	07·73	1	40·81	1
78·39	4	08·01	4	41·47	1 d.?
78·87	1+	08·28	1	41·91	2
79·24	2	08·94	1	42·20	1
79·9	1+ br.	09·4	1+ br.	43·08	1
80·6	1+ br.	10·2	2+ br.	43·62	2
80·87	1	11·0	3+ br. d.	44·3	1+ br.
82·22	2	11·70	1	47·5	1+ br.
82·40	2	12·5	1+	48·16	2

λ	i	λ	i	λ	i
2648·4	1+ br.	2676·62	1	2700·68	1
49·73	1	77·20	7	01·20	3
50·88	1	77·31	7	01·35	2+
51·55	1+	78·88	9	01·77	2+
52·2	2+ br.	80·00	2	02·10	1
52·90	1	80·32	1	02·66	1
53·63	8	80·43	2	03·03	1
54·2	1+ br.	80·98	1	03·65	6
55·37	1+	81·60	1	03·97	3+
55·85	1	83·56	3	04·9	1+ br.
57·20	1+	83·87	1	05·55	1
57·65	2+ br.	84·23	1	06·25	1+
58·65	8	85·12	2	06·63	1
59·01	3	85·24	2	08·88	7
59·57	1	86·06	1	09·49	7
59·83	1	86·50	1	11·00	7
60·85	1+	87·19	9	11·3	1+
61·4	5+ br.	88·34	6	11·96	1
61·75	3	88·43	4	12·39	7
61·85	4	89·20	2+	12·96	2
62·22	1	89·33	5	15·15	1+
62·78	1	89·89	1	15·75	1+
63·10	2	90·48	1+	16·27	1
63·45	7	91·15	9	17·00	1
63·78	6	92·21	3	17·13	1
65·7	3+ br.	93·14	1	17·58	6
66·12	8	93·62	7	18·15	2
67·35	1+	93·9	1+ br.	18·45	8 d.
68·05	2+ br.	94·83	1	19·12	1
68·78	8	96·22	1	19·40	1
70·17	5	96·86	3	19·8	1+
70·30	4	97·59	5	20·13	4
71·0	1+	98·00	6	20·36	3
71·90	9	98·2	2+ br.	20·79	2
72·48	3	98·49	5	20·93	1+
72·91	8	98·72	4	22·82	8
73·60	1	98·89	4	23·6	3+
74·3	1+ br.	99·20	1	23·77	5
75·36	1	99·45	1	24·11	6
75·78	4	2700·1	1+	25·0	1

λ	i	λ	i	λ	i
2726·34	2	2752·90	1	2773·39	4
26·57	2	53 37	1	74·50	6
27·81	6	53·72	3	76·1	1+ br.
28·25	2	53·99	3	76·81	2
29·82	1	54·35	5	78·11	8
30·4	1+	55·56	3	78·57	1
30·80	1	56·35	5	79·00	1
31·6	1+	57·00	3	80·35	7
31·97	2	57·75	8	80·97	3
32·52	1	58·67	2	81·17	2
33·63	1	59·02	4	82·42	4
34·13	1	59·46	4	82·70	3
34·64	2	59·78	3	83·41	2
35·84	2	60·09	2	84·40	1
36·50	1	60·24	2	85·18	1
36·80	1	60·45	2	85·73	8
37·10	1	60·60	2	86·54	5
37·17	1	60·92	1	87·67	6
37·55	1	61·21	1	87·97	2
37·70	1	61·80	1+	89·15	1
39·5	2+	62·70	10	89·43	6
39·60	4	62·85	3+	91·00	1
39·83	1	63·57	3	91·54	1
40·13	5	64·05	2	91·79	1
41·16	2	64·37	2	92·20	9
42·12	8	65·05	1	93·72	2
43·25	2	65·19	1	94·55	1+
43·67	8	65·52	3	95·62	1
44·65	3	65·70	2	95·90	1
45·03	5	65·96	3	98·69	2
45·50	1	66·61	10	98·82	2
46·23	6	67·32	1	2800·23	4
47·88	1	67·70	1	00·81	9
48·00	1	68·21	1	02·7	1+ br.
48·36	1	68·65	6	03·31	1
49·01	8	69·4	1+ br.	03·42	2
49·88	3	70·0	1+ br.	04·1	1+ br.
50·78	8	71·35	1	07·74	1
51·91	8	72·0	2+ br.	08·08	2
52·46	1	72·45	1	09·35	1

λ	i	λ	i	λ	i
2809·71	1	2843·35	10 u.	2873·57	5
10·3	2+ br.	44·96	1+	73·91	4
11·0	2+ br.	46·4	2+	74·51	1
11·15	2	46·51	3	75·13	3
11·55	1	46·80	1	76·07	6
12·03	9	48·47	3	76·37	5
13·59	1	49·41	2	76·75	1
14·29	1	49·84	5	78·03	4
14·57	1	49·98	5	78·52	3
16·89	4	50·38	1	79·25	1
17·1	2+ br.	50·78	1	79·33	1
17·65	1+	51·41	8	80·95	6
18·01	2	52·35	3	81·99	5
18·42	7	52·76	2	85·38	1
22·10	6	53·30	5	86·50	1
22·47	8	53·88	1	87·08	1
24·64	1	54·25	2	87·87	3
25·57	2	54·72	1	88·81	4
25·80	1	55·13	4	89·26	4
26·15	1+	55·73	7	89·59	4
26·23	2	56·43	2	89·96	4
26·50	1	56·85	5	91·13	3
28·01	1	57·49	5	91·28	3
28·88	1	58·06	3	91·55	2
30·57	6	58·72	3	91·99	2
30·69	3	59·00	6	92·84	1
31·17	1+	60·0	1+	93·07	2
31·63	1+	61·01	7	93·36	1
32·54	6	62·62	9	93·57	1
33·48	1	65·22	6	94·33	3
34·83	6	65·47	3	94·5	1+
35·75	10 u.	65·76	1	94·90	1
36·55	3	66·01	2	95·13	2
37·96	2	66·80	7	95·78	1
38·87	5	67·21	3	96·46	2
39·33	1	67·70	7	96·56	4
40·10	7	68·8	1+ br.	96·85	2
40·57	1	70·51	8	97·35	1
42·49	1+	71·55	2	97·79	4
42·87	1	71·70	1	98·60	7

λ	i	λ	i	λ	i
2899·26	3	2937·04	2	2980·93	1
99·58	3	39·46	2	84·80	1
2901·13	1	40·34	2	84·85	1
02·76	1	41·12	1	85·40	7
02·98	1	41·47	1	85·99	1
03·67	2	42·08	3	86·10	1
04·16	2	45·85	1+	86·52	1
05·55	1+	46·93	5	86·60	1
06·25	1	47·60	2	86·98	1
08·38	1	49·55	2	88·13	2
09·13	1	49·91	1	88·75	1
10·73	3	50·22	1	89·25	7
10·98	1	50·8	1+	92·02	1
11·25	1	51·52	1	92·53	2
11·78	4	52·10	1	92·7	1+
13·60	1	52·57	1	93·2	1+ br.
13·83	1	53·46	3	94·17	1
15·34	3	53·79	4	94·85	2
15·58	3	54·76	1	95·21	1
16·17	1	55·23	1	96·61	1
17·2	1+	56·70	1 d.?	96·69	1
18·4	1+	57·4	1+	98·88	1
21·32	5 v.	57·67	1+	99·37	1+
21·92	4	59·66	1	3000·04	1
23·57	3	60·06	1	01·00	1 d.?
23·80	4	61·81	4	03·98	2
26·25	3	63·58	1 d.	05·16	1
27·19	5	66·14	3	08·2	1+ br.
28·28	3	67·00	1	10·72	1
28·42	3	67·75	1	11·54	1
29·55	2	68·80	1	13·16	1
29·92	1	69·78	1	13·84	1
30·96	3	71·22	1	14·88	2
32·81	2	71·99	9	15·05	2
33 73	1	72·75	1	15·30	1
34 07	3	73·2	1+	15·58	3
34·30	1	75·59	1	17·66	2
34·45	1	76·79	2	18·59	1
35·22	5	79·80	8	18·91	1
35·7	1+	80·86	1	20·77	1

λ	i	λ	i	λ	i
3021·68	2	3073·40	1	3135·46	3
24·46	2	73·88	1	35·86	3
26·78	6 r.	77·39	2	36·81	7
28·22	3	77·89	2	37·25	1
29·28	1	79·59	1	37·68	1
30·37	2	83·27	1+	38·38	1
31·49	1	84·58	1+	40·00	1
33·05	2	85·50	1+	40·26	3
34·22	1	88·01	1	42·0	1+
34·30	1	93·61	4	42·85	1
34·64	1	94·12	1	43·1	1+
35·1	1+	95·12	1	43·85	1+
37·15	1	95·65	1	44·0	1+
37·52	1	96·27	3	45·21	2
38·15	1+	98·27	1+	45·86	2
39·9	1+	3103·60	2	47·33	7
40·4	1+	07·70	3	48·56	1
41·03	7	08·77	1	49·3	1+
41·85	5	11·0	1+ br.	49·95	3
42·90	1	12·10	1	50·23	3
43·99	1	13·77	1+	52·34	5
44·30	1	15·42	1	53 1	1+
45·6	1+ br.	15·77	2	53·7	1+
47·77	1	16·86	2	54·2	1+
47·90	1	17·40	1	55·24	1
49·7	1+ br.	18·27	1	58·14	2
50·23	8	18·78	10	59·22	1
54·00	1	20·50	10	59·97	1
55·57	1 d.	21·18	1	60·26	1
56·8	1+ br.	21·33	1	62 56	2 d.?
58·00	1	21·92	1	63·85	1
58·50	1	22·02	1	64·03	1
59·63	2	22·73	4	64·5	1+ br.
61·75	1	25·12	10	68·49	1
62·0	1+ br.	25·6	2+	69·31	3
63·92	1	28·82	6	72·20	4
65·18	1	30·73	1	73·67	1
67·27	1	31·65	1	76·8	1+ br.
71·7	1+	32·20	10	77·7	1+ br.
72·57	1	34·43	3	78·83	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3179·52	1+	3234·20	9	3291·91	6
80·82	10	35·36	1+	94·0	1+
81·57	3	37·46	1	95·15	1+
83·44	5	37·85	1	95·58	9
84·56	2	38·20	1	98·42	1
86·85	2	38·65	1+	98·57	1
88·17	1+	38·90	9	98·9	1+
89·93	1	40·18	1	3301·39	2
90·8	1+	41·52	1	02·3	1+ br.
94·05	1+	45·40	1	03·05	1
94·76	1	45·65	2	04·9	1+
96·51	1	47·15	1+	07·20	10
97·22	10	47·45	1	07·92	1
98·12	2 d.	47·65	1 Cu?	08·31	2
99·97	1	49·64	1	10 1	1+
3200·57	1	50·74	1	10·86	6
01·39	3	50·95	1	12·10	6
02·64	2	51·80	1	12·35	6
03·67	2	51·96	2	13·23	3
05·23	3	52·59	3	14·21	3 d. (Co?)
06·15	1+	55·41	2	14·72	4 r.
08·10	1	57·92	2	15·46	1
08·70	4	58·88	3	16·64	1
09·30	9	60·10	2	21·5	1+ br.
11·42	1	64·40	4	22·84	2
11·63	2	66·40	1	23·68	2
12·59	3	68·57	1	24·27	6
12·98	3	69·72	4	24·52	7
16·61	6	69·87	3	26·72	1
17·51	9	70·28	5	28·50	4
19·23	3	71·15	1+	29·16	1
19·73	1	73·00	1	29·63	1+
19·90	2	73·4	1+ br.	32·3	1+ br.
25·50	3	74·1	1+ (Cu?)	33·03	1
26·46	1+	76·07	1	33·1	1+ br.
29·32	1	79·66	1	35·52	9
29·48	1	83·19	3	36·06	1
30·01	1	86·09	3	36·49	8
30·95	1+	88·16	2	37·15	1
31·75	1	91·4	1+	39·3	2+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
3340·03	10	3382·82	9	3430·58	1
42·13	1	84·79	1	31·42	1
42·78	10	85·45	1	31·82	1
43·47	1	86·20	1	32·17	1
44·64	1	86·30	1	32·47	1
45·55	1	86·7	1+ br.	33·50	10
46·14	2	87·82	1	33·73	5+
46·86	2	88·07	1	34·24	3
48·00	6	88·90	1+	35·81	1
49·18	1	90 87	1	35·95	1
49·47	3	91·58	8	36·31	4
51·71	1	93·18	8	36·87	1
52·10	1	94·00	8	38·12	1
53·25	5	94·49	8	39·46	1
55·33	1+	95·72	5	40·88	1
56·0	1+ br.	99·65	4	41·27	2
57·52	6	3400·13	1+	41·60	4
58·64	9	02·58	6	43·95	2
60·48	10	03·47	10	44·52	1+
61·92	6	05·4	1+ br.[2]	45·25	2+
63·85	4	06·9	1+	45·75	4 r.
64·75	1+ [1]	07·32	1	47·15	2
67·52	4	08·91	10	47·56	3
68·20	10 d.?	10·66	1	47·89	2
68·83	3	11·1	1+ br.	49·45	1+ br.
69·20	4	12·35	1+	51·00	1
70·3	1+	15·55	1+	53·46	5
71·60	1+	17·90	1+	53·87	1
72·26	3	19·45	1+	53·99	1
75·08	2	21·40	10	55·14	6
76·36	1	21·8	3+	55·72	3
76·49	1	22·92	10	57·80	7
76·8	1+ br.	24·77	1	58·22	1
77·47	1	26·29	2	59·41	5
78·49	8	27·85	1+	60·57	1
79·50	6	29·07	2	61·45	1+
79·99	9	30·03	1+	62·87	1

[1] Violette Kante eines mehrere AE. breiten Bandes.
[2] Scheint dreifach.

λ	i	λ	i	λ	i
3463·8	1+ br.	3506·72	1+	3564·09	2
64·17	1	07·4	1+ br.	64·45	1
64·99	1	08·24	1	64·91	1
65·38	2	08·98	1+	65·12	1
65·73	1	10·67	3	66·25	3+ br.
66·44	1+	12·00	6	67·7	1+ br.
67·15	2+	13·17	2	69·32	1
67·85	2	18·51	1	71·52	1
68·87	1	18·77	1	72·20	1
69·72	1	19·7	1+ br.	72·91	2
70·53	1	21·69	1	73·30	3
70·66	1	22·30	2	74·20	2
71·63	1	23·12	1+	74·7	1+
72·22	6	23·8	1+ br.	75·0	5+ d.
72·92	1	24·75	1+	76·43	1
73·06	1	25·6	1+ br.	78·83	10 u. [1]
73·76	1	27·25	1	81·95	1+
74·52	1	29·83	1	82·3	1+
75·29	4	31 20	1	82·79	1
77·32	1+	31·60	1	84·5	4+ br.
78·30	1	33·02	1	85·48	7
78·89	1	36·6	1+ br.	85·73	7
79·27	1+	37·36	1	88·46	1+
80·48	1	39·10	1	89·2	1+ br.
81·43	3	47·26	1	90·3	1+ br.
81·67	3	48·0	1+ br.	93·64	10 u. [1]
82·75	2	49·0	1+ br.	94·47	1
84·30	4	50·80	3	99·55	2
86·62	1	52·8	2+ br.	3601·80	4
88·58	1	54·12	1	02·73	1
89·25	1+	55·77	1	03·90	9 u. [1]
89·58	1+ d.	55·98	1	04·70	1
94·28	1	56·28	1	05·47	10 u. [1]
95·13	2	58·8	3+ br.	08·55	2
95·55	4	59·93	1	08·77	1
95·71	3	60·6	1+	09·64	2
3502·49	1	62·47	1	10·22	2
03·52	1	62·60	1	12·76	3

[1] Die Componente nach Roth ist stärker.

λ	i	λ	i	λ	i
3613·35	6	3663·03	1	3710·25	1+
13·82	1	63·39	3	10·70	1
14·41	1	65·10	6	11·45	2
15·80	2	66·15	2	13·14	9
17·45	2	66·30	1	15·38	6
19·61	2	66·82	3	15·63	6
20·2	1+	68·20	2+	16·70	1+
22·6	1+	73·8	1+ br.	17·8	1+ br
26·40	1+	74·3	1+ br.	18·75	1
28·2	1+ br.	76·25	1+	19·60	1
29·57	1+	76·46	3	22·97	1
31·86	6	77·83	6	23·20	1
33·00	4	78·05	8	23·52	2
34·19	2	79·22	1	26·05	1
35·17	1	79·99	1	27·49	3
35·44	1	80·32	1	30·94	3
36·75	5 r.	81·15	1	31·87	1
38·00	1	81·86	2	32·19	3
38·5	1+ br.	83·79	1	34·00	1
40·00	7	84·39	5	34·7	1+ br.
40·55	2 (Fe)	85·1	1+	36·05	1+
41·65	2	85·3	1+	36·58	1+
42·01	4 r.	85·74	2	37·70	2
43·35	3	86·84	4 r.	38·58	5 r.
44·86	3	87·5	3+ br.	42·25	1
45·73	1	88·25	1	43·13	3
46·31	2	88·58	2	43·72	5
46 85	1	89·45	1	44·10	6
47·54	2	89·77	1	44·64	3
48·70	2	93·25	1	47·08	1
49·14	4 r.	94·20	1	47·42	2
49·8	1+	95·13	1	48·81	4
50·0	1+	96·01	1	49·18	5 r.
50·50	5	96·90	2	50·75	3
51·83	3	98·13	5	54·75	5
54·09	4	3702·05	1	55·30	1
56·41	5 r.	04·9	1+ br.	55·99	1
58·33	4	06·2	1+ br.	56·71	1
61·40	1+	07·1	1+ br.	57·34	2
61·60	1+	07·28	1+	57·82	5

λ	i	λ	i	λ	i
3758·20	3	3809·65	2	3854·97	1+
61·58	1	10·91	1	55·44	2
61·90	1+	12·42	3	55·73	3
62·02	1+	14·16	3	56·45	2
64·8	1+ br.	14·77	3	57·78	4
65·47	1+	15·56	4	59·1	1+ br.
65·72	1+	16·34	3	60·1	1+ br.
66·80	1+	17·99	2	62·71	1
67·57	1	18·62	3	65·74	6
68·37	5	19·72	4	66·20	1
68·86	2	20·13	1	66·68	1
69·12	1	21·03	1	68·43	1
74·9	1+ br.	21·74	1	70·4	1+ br.
76·4	1+ br.	22·25	1	71·7	1+ br.
77·48	1	23·66	2	73·7	1+ br.
78·81	1	25·56	2	74·75	2+
80·3	1+ br.	26·60	3	75·4	1+ br.
80·9	1+ br.	30·20	4+	77·10	1
82·6	1+ br.	31·18	2	77·27	1
83·85	1+	31·8	1+	77·50	1+
86·38	1	32·47	1	78·47	1
88·1	1+ br.	32·92	1	79·38	3+
88·99	3	33·3	1+ 2 AE.	80·52	1
89·83	1	33·63	1	81·40	2+
90·37	1	34·87	2	82·02	1
90·60	3	36·70	1	83·44	5 [1]
91·51	4	41·42	5+	83·83	1
92·27	4	42·21	1	85·35	5
93·44	4	45·8	1+	86·93	4
94·01	4	47·7	1+ br.	88·42	1
94·74	3	49·14	4	90·33	1
97·27	4	49·50	3	90·97	2
97·87	5 r.	49·67	3	92·07	2
3801·37	2+	50·18	5 r.	92·2	1+ br.
04·99	7	52·36	2	94·20	4
06·70	1	52·72	1	94·75	1
06·96	3	53·46	1	95·32	1+
08·06	3	54·39	4	97·80	2+

[1] Ist nicht Kohle.

λ	i	λ	i	λ	i
3902·23	2	3951·90	1	4012·68	7
03·04	4	52·53	2	14·82	2
03·32	2	53·30	1	16·96	1
05·80	6	56·42	1	18·11	1
07·44	1	58·22	1	18·38	1
07·92	2	59·9	1+ br.	22·41	4
08·90	6 r.	60·88	1	23·90	2
10·90	1	62·32	1	24·73	1
11·47	1	63·86	10	25·16	3
12·50	1+	64·47	1	25·61	1
14·47	2	68·60	8 Ca	26·30	4
15·64	1	69·16	3	27·26	3
16·00	3	69·93	9	28·26	1
16·37	4	71·39	3	30·86	3
17·10	1	72·81	1	31·31	1
17·72	1	76·82	9	33·16	1
19·32	8	78·89	3	33·45	1
20·24	1	79·65	4	34·10	1
21·16	5	79·96	2+	35·3	1+ br.
23·49	1	81·37	3	37·45	1
26·81	3	82·10	1	37·80	1
28·80	6	83·36	1	38·20	5
29·9	1+ br.	84·08	7	39·31	5 r.
33·81	10 Ca	84·50	5	41·97	1
35·70	1+	90·15	6 r.	42·43	1
36·23	1	91·31	9	43·87	2
37·7	1+ br.	91·81	5	44·38	1
38·50	1+	92·24	1	46·90	1
39·4	1+ br.	93·00	5	48·94	5
40·40	1+	94·10	2	49·31	3+
41·28	1	99·00	1	49·95	1
41·62	5 r.	99·81	2	50·22	1
43·40	1	4000·75	1	51·50	2
43·73	1	01·60	5	52·16	3
44·37	1	02·63	1	54·27	3
45·63	1	03·48	5	56·22	3
46·09	1	04·06	1	56·97	1
49·00	1	04·87	1	57·35	1
49·75	1+ br.	07·7	1+ br.	58·93	6
51·23	1+	11·11	1	60·81	2

λ	i	λ	i	λ	i
4064·74	1	4120·79	3	4165·71	5
65·89	4	21·45	3	70·02	4
67·09	4	21·6	1+ br.	70·39	3
68·00	1	21·99	3	71·03	1
71·11	4+	22·32	2	71·85	2
75·02	2	23·55	4	72·15	1+
76·22	2	25·63	1+	72·99	4
77·27	2 d.	26·25	1	74·1	1+
77·86	3	26·67	5	74·4	1+
80·41	1	27·09	1	75·01	6
81·9	1+	27·16	1	75·41	2
82·03	1	27·47	2	76·11	2
82·48	2	27·82	2	76·83	1
85·18	1	28·45	2	78·15	1+
86 31	1	29·4	1+ br.	79·44	6
87·2	1+ br.	30·3	1+ br.	79·57	3
87·8	1+ br.	31·52	3	80·15	1
89·0	1+ br.	32·62	1	80·9	1+ br.
89·75	1+ br.	34·45	1	81·9	1+ br.
90·30	1+ br.	37·60	1	83·24	1
90·50	2+	38·15	1+	84·83	1
92·37	1	39·3	1+ br.	85·07	2
93·25	1+	40·9	1+ br.	85·53	1
93·5	1+ br.	42·36	2	85·8	1+ br.
95·10	1	43·65	1+	86·54	2
98·59	2	45 94	7	90·32	4
99·19	1	46·2	1+	90·90	1
99·60	1	46·37	1	91·45	3
4100·00	1	46·90	1	91·94	1
01·35	1	47·8	1+ br.	92·30	3
04·00	1	49·65	1	93·87	4
04·51	1	51·18	1	94·50	1
05·06	2	51·7	1+	95·14	4
06·23	1	52·94	3	95·60	2
08·58	1	53·25	1	97·40	4
09·87	2	53·99	5	98·05	1+
11·19	4	59·1	1+ br.	98·60	4
12·85	1	61·3	1+	4200·29	1
13·45	1	61·60	5	03·76	2
16·80	1+	63·80	6	04·35	1

λ	i	λ	i	λ	i
4204·64	3	4256·80	1+	4302·96	1
07·07	3	57·52	1	05·67	1
07·52	1+	59·35	1+	07·15	1+
08·51	3	61·51	2	09·05	1+
09·51	4	61·79	1	09·95	1
09·92	2	62·12	4	10·7	1+
11·54	2	62·28	3+	12·67	1
12·82	1	62·52	1	15·28	1
13·32	1	63·31	5	15·7	1+ br.
14·33	1	66·99	1	18·12	1
15·9	1+	68·97	1	19·82	2
16·50	2	69·45	2	20·79	1
17·3	1+	70·12	1	21·45	1
17·77	3	71·24	2	21·81	1
21·74	3	73·11	2	23·71	2
22·2	1+	73·82	1	25·27	3
22·91	2	74·99	20 u.	32·77	1
24·67	2	75·73	3	37·45	1
25·00	4	76·12	1	37·78	8
26·88	3 Ca	78·21	1	38·58	1
30·62	1+	80·58	5 r.	38·99	1
31·5	1+ br.	83·17	1+	39·69	7
32·36	1	84·37	4	39·95	5
33·05	1+	84·90	1	40·33	2
33·38	2	85·06	1	41·30	1
34·64	1	88·57	1	42·2	1+ br.
37·85	1	89·92	15 u.	43·37	1
39·08	2	92·15	2	44·73	10
40·85	4	93·75	1	45·28	1
41·35	1	95 92	4	47·02	3
42·55	8	96·51	1	47·67	1+
46·5	1+ br.	96·83	1	51·28	7 r.
46·9	1+ br.	97·24	2	51·99	10
48·48	1	97·90	4	54·10	1
48·85	1	98·1	1+ br.	56·44	1
52·40	1	99·90	1	56·93	1
52·78	3	4300·17	1 d.	57·68	1
54·50	30 u.	00·44	1	59·80	7
55·65	3	00·70	2	63·29	3 v.
56·30	1+	01·38	3	64·3	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4365·00	1	4414·03	2	4501·93	1
66·57	1+	21·13	1+	03·2	1+ br.
67·75	1+	21 9	1+ br.	07·00	2
68·40	1	22·86	2+	10·17	1+
69·07	1	23·50	1	12·06	4
71·1	1+ br.	24·46	3	14·6	1+ d.
71·48	7	25·29	1	15·60	1
73·43	2	28·75	1	21·31	3
73·82	1	30·08	1	22·2	1+ br.
74·33	4	30·63	2	24·98	1
75·49	3	32·33	2	26·25	2
76·50	1+	32·95	1+	26·65	7
76·95	2	34·07	1	27·52	2
77·71	1	42·44	1	27·62	2
78·50	1+	43·87	1	30·03	1
79·97	1	58·69	4	30·92	7
80·8	1+ br.	59·87	2	32·93	1
81·30	2	60·8	1+ br.	35·30	3
82·73	1+	62·94	1	35·87	6
83·03	1	64·81	1	39·95	2
85·16	6 r.	65·07	1	40·72	5
87·60	1	65·49	2	40·92	5
87·67	2	65·98	1+	41·24	1
91·20	1+	66·36	1+	41·68	1
91·94	3	67·71	1	42·80	1
93·7	1+ br.	73·90	1	43·92	1
95·62	1	75·51	1+ br.	44·79	5
97·44	1	80·42	1	45·49	1
4400·00	1+	80·47	1	46·13	7
03·57	2+	81·60	1	54·12	1+
03·67	2	83·04	2	55·20	5+
06·45	1+	88·20	2	56·35	1
06·87	1+	89·60	2	58·90	10
07·92	1+	92·00	2+ d.?	63·40	1+
09·74	1+	92·49	3	63·85	1
10·49	1	95·46	1	64·36	2
11·16	1+	97·02	6	65·67	3
11·28	1	98·87	2	65·97	1
12·43	1	4500·44	3	69·79	2
13·17	1	01·25	3	71·3	1

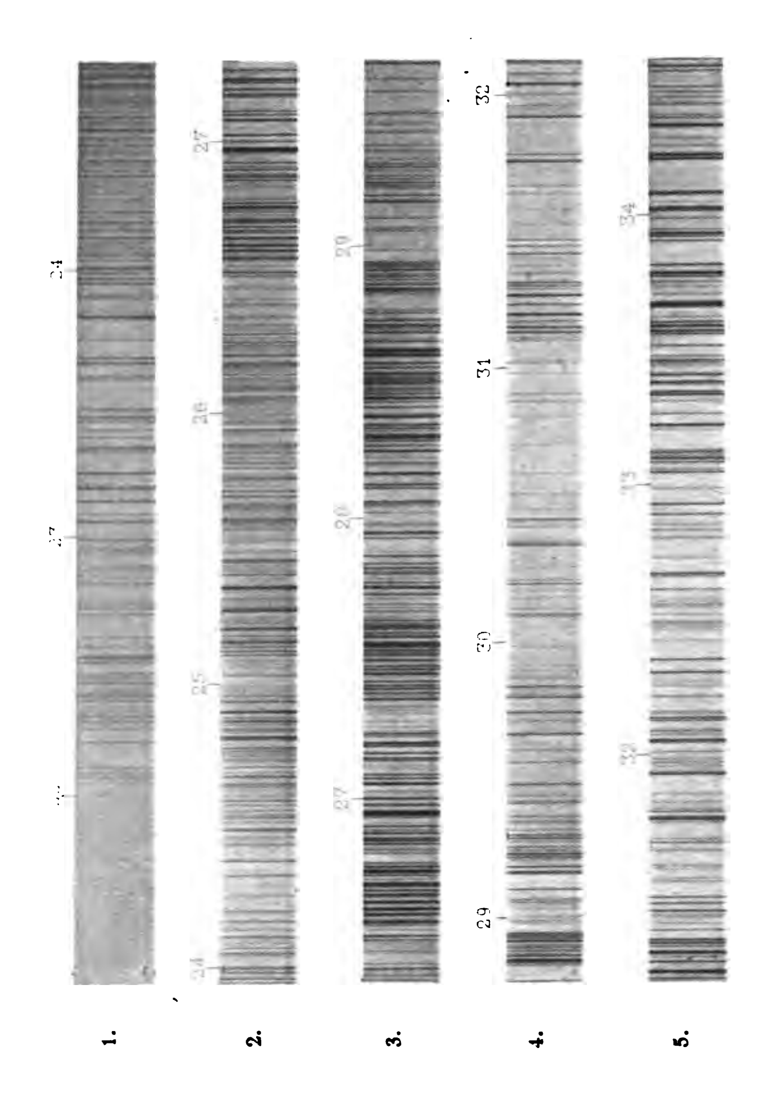
λ	i	λ	i	λ	i
4571·86	3	4613·54	6	4646·35	8
75·30	1	16·29	7	47·00	1+
78·48	1	16·82	3+	48·30	1+
80·24	5	19·03	5	49·07	1+
84·26	1	19·15	5	49·61	2+
85·2	1+ br.	19·70	3	51·48	6
86·32	1	22·11	3	52·34	7
88·42	10	22·65	1	54·94	1
90·2	1+ br.	22·76	1	56·33	1+
91·59	5	22·95	1+	63·52	2+
92·25	4+	24·74	1	64·01	2
92·71	1+	26·10	1	64·99	2
95·77	3	26·35	6	66·07	1
98·62	1	32·34	1+	66·34	1+
4600·28	2	33·46	1+	66·69	2
00·92	6	34·32	6	67·33	1
01·20	1+	37·35	1	69·50	1
06·55	1	37·94	1	80·66	1
10·10	1+	39·77	1+ br.	81·02	1
12·15	6	42·20	1+	89·54	2

Schliesslich erlauben wir uns drei Druckfehler in unseren Tabellen der Eisenlinien zu berichtigen:

Statt 2529·69 ist zu lesen 2529·59,
» 2807·60 » » » 2807·10,
» 4248·27 » » » 4248·37.

Ferner wurde in der Tabelle des Eisens die Linie 2530·18, $i = 4$ anzuführen vergessen.

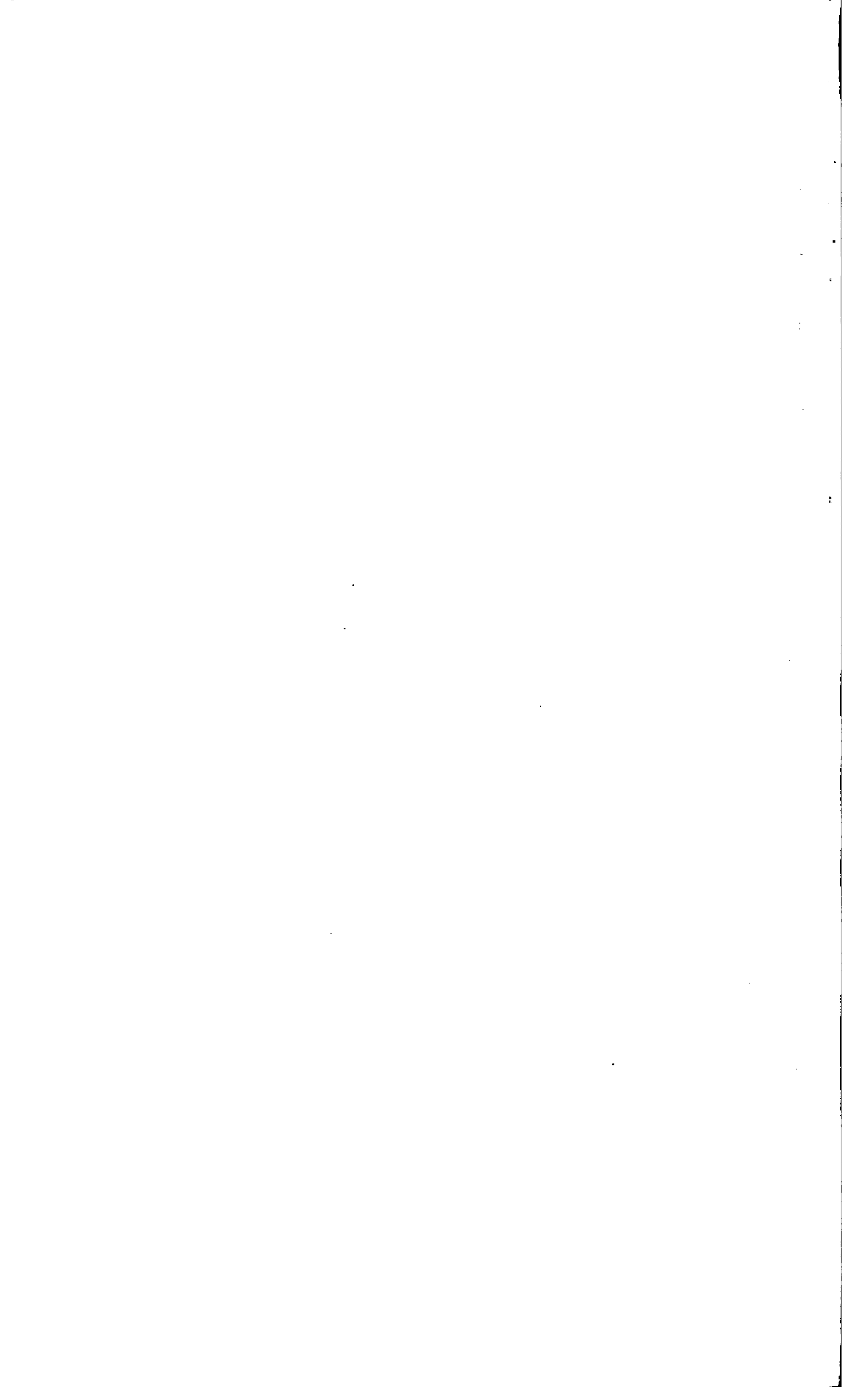
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



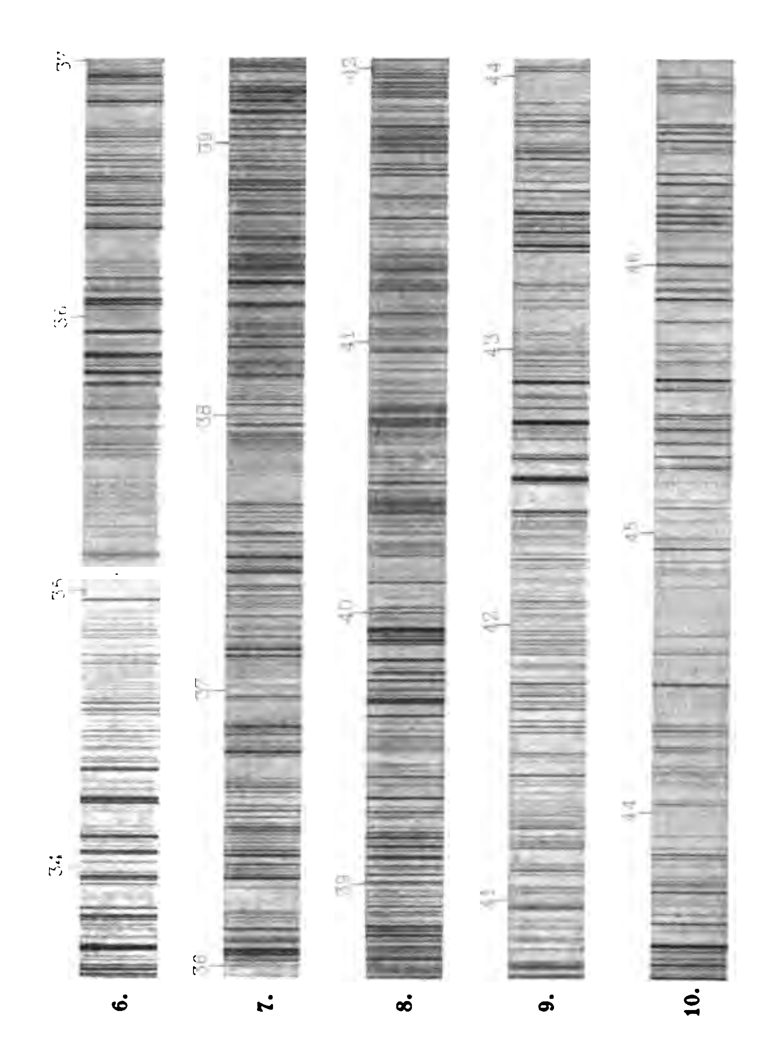
1. 2. 3. 4. 5.

Chrom.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

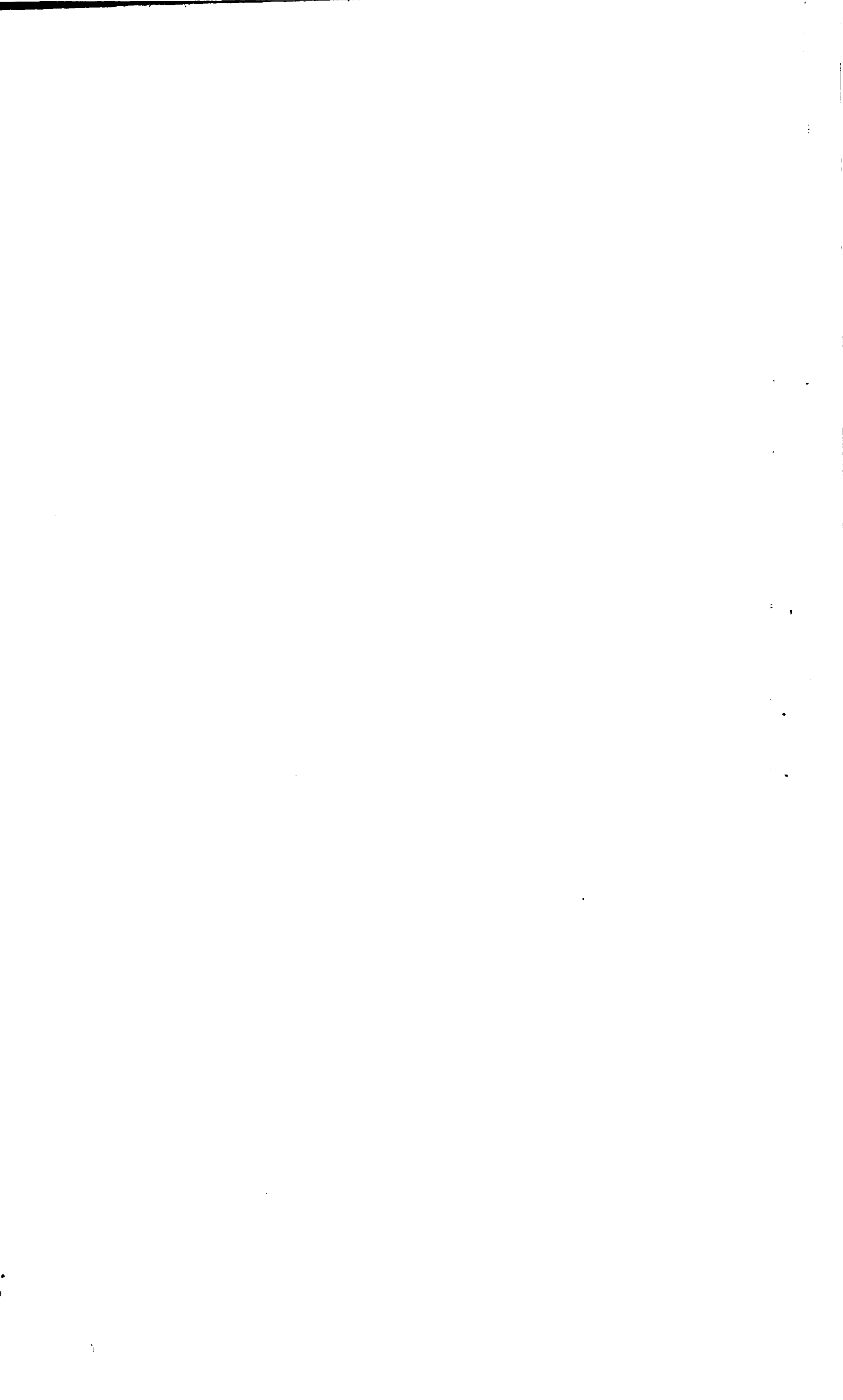


F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Chrom.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

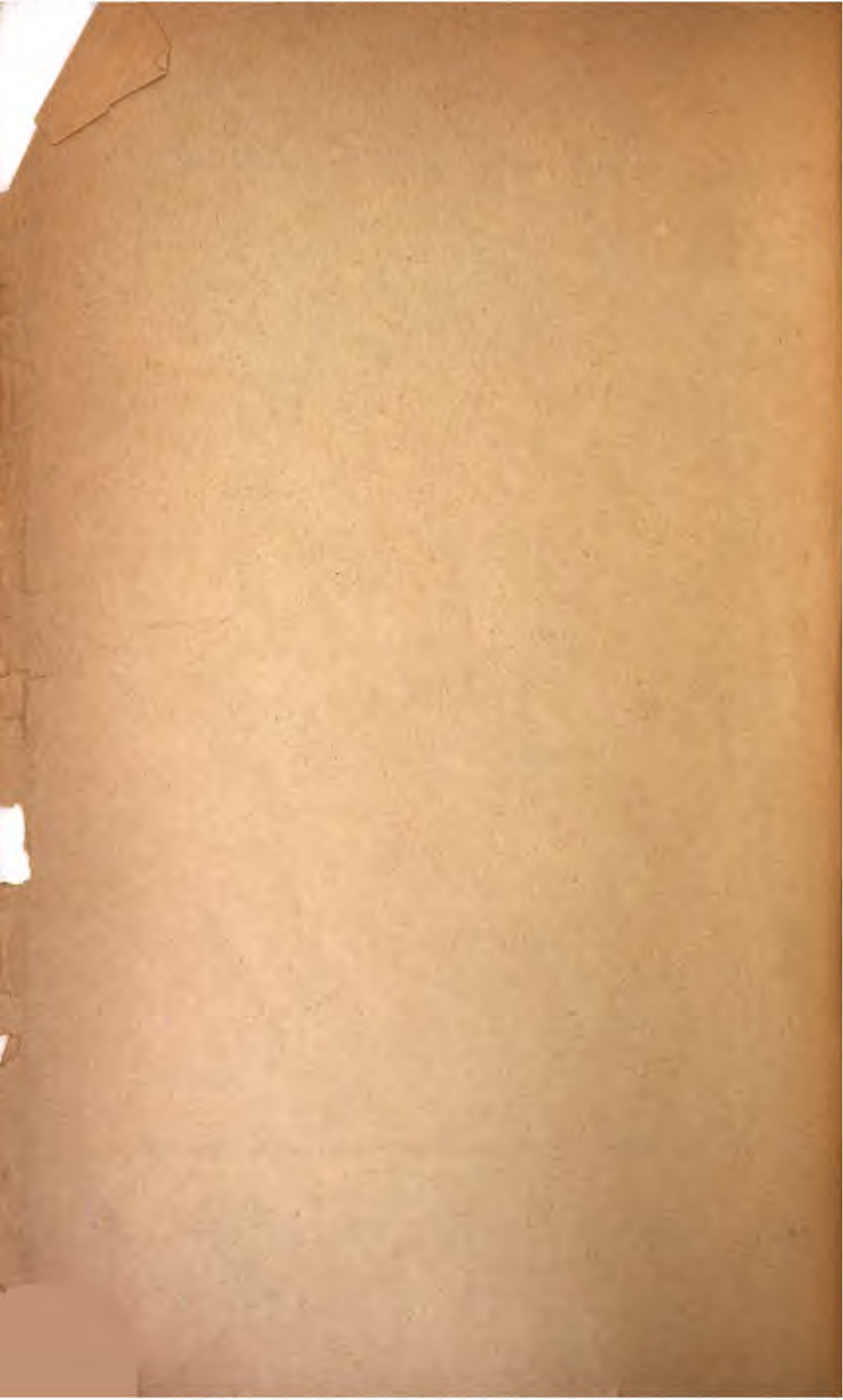
Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

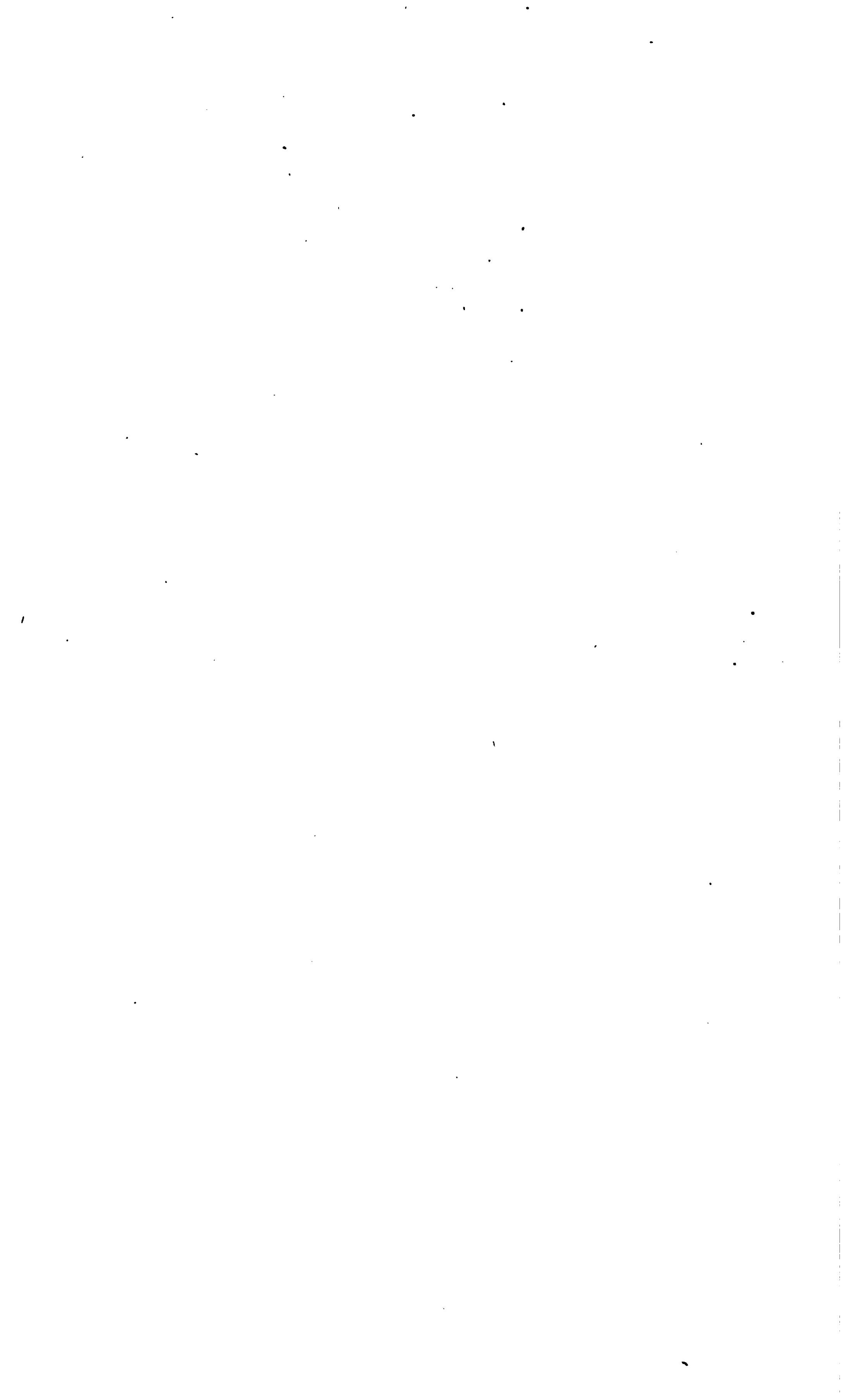
Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.












3 2044 093 294 718

